РАСТРОВА ГРАФІКА

Слайди до лекцій з дисципліни
«Математичні та алгоритмічні основи комп'ютерної графіки»

Лектор: к.т.н., доцент Сулема Є.С.

Каф. ПЗКС, ФПМ, КПІ ім. Ігоря Сікорського

2019/2020 навч. рік

ПЕРЕВАГИ РАСТРОВОЇ ГРАФІКИ

- Фотореалістичність;
- Простота отримання;
- Можливість застосування різноманітних ефектів.

НЕДОЛІКИ РАСТРОВОЇ ГРАФІКИ

- Розмір файлу є пропорційним до площі зображення, роздільності і типу зображення і, переважно, є великим.
- Роздільність та глибину представлення кольорів можна змінювати лише у певних межах і, як правило, із втратою якості.
- Складність «доступу» до окремого фрагменту зображення.
  - (Наприклад, спробуйте виділити окрему квіточку у букеті ☺)

ЯКІСТЬ РАСТРОВОГО ЗОБРАЖЕННЯ

- Роздільність екранного зображення:
  - PPI – pixels per inch;
- Роздільність сканованого зображення:
  - DPI – dots per inch;
- Роздільність друкованого зображення:
  - LPI – lines per inch.

НА ЩО ВПЛИВАЄ РОЗДІЛЬНІСТЬ?

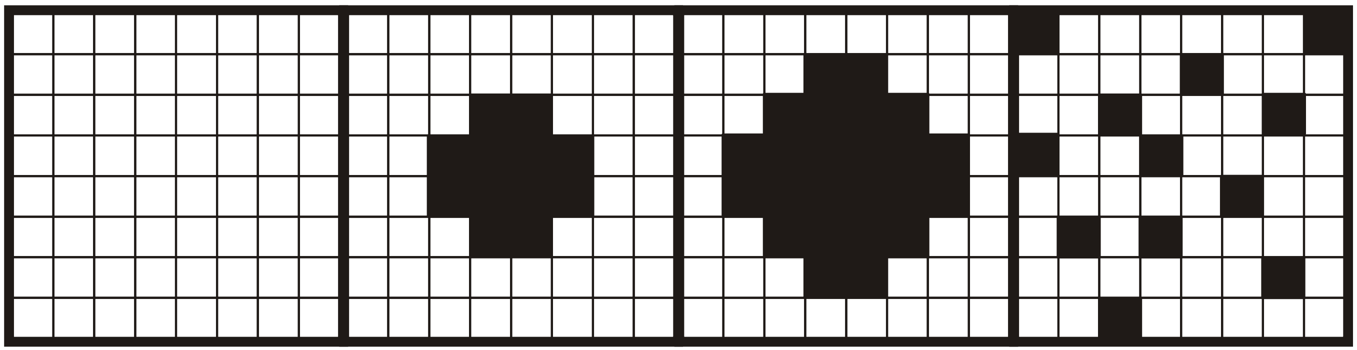
Зображення
800×600 (pixels)

$$72\ ppi \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{800}{72} = 11{,}11'' = 28{,}22 \text{ см} \\ \dfrac{600}{72} = 8{,}33'' = 21{,}17 \text{ см} \end{cases}$$

$$36\ ppi \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{800}{36} = 22{,}22'' = 56{,}44 \text{ см} \\ \dfrac{600}{36} = 16{,}66'' = 42{,}34 \text{ см} \end{cases}$$

$$144\ ppi \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{800}{144} = 5{,}55'' = 14{,}11 \text{ см} \\ \dfrac{600}{144} = 4{,}16'' = 10{,}58 \text{ см} \end{cases}$$

ТРОХИ ПРО ПОЛІГРАФІЮ…



ячейка растра | АМ растр 18,75% | АМ растр 50% | ЧМ растр 18,75%

Амплітудна модуляція: ілюзія темнішого кольору створюється за рахунок збільшення розмірів точок і скорочення проміжкового поля між ними при однаковій відстані між центрами елементів растра.

Частотна модуляція: інтенсивність тону регулюється зміною відстані між сусідніми точками однакового розміру.

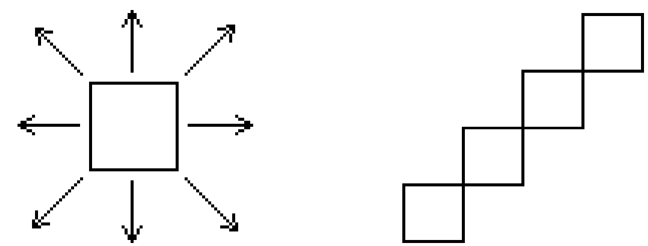
ЩО ТАКЕ РАСТР?

- У поліграфії растр – це спосіб представлення графічної інформації за допомогою точок певного розміру та густини розташування:
  - регулярний растр (амплітудна модуляція),
  - стохастичний растр (частотна модуляція).
- У комп’ютерній графіці растр – це порядок розташування точок, які називаються растровими елементами. Розрізняють:
  - квадратний (прямокутний) растр,
  - гексагональний растр,
  - трикутний растр.

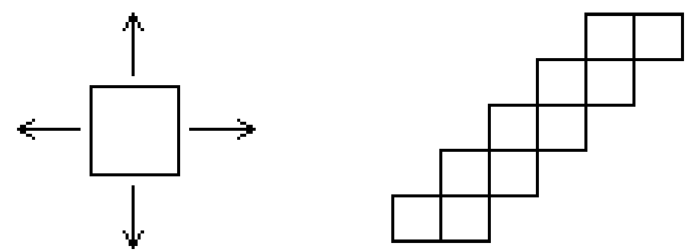
ЗВ'ЯЗНІСТЬ РАСТРОВИХ ЛІНІЙ

Квадратний (прямокутний) растр:

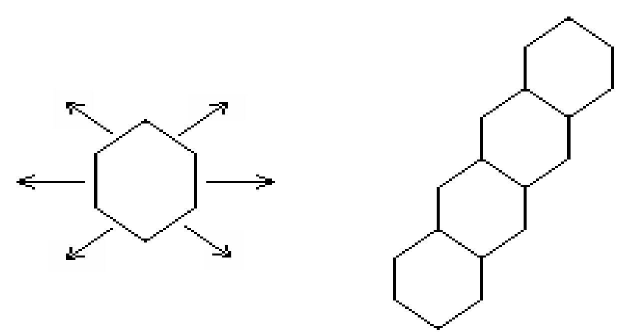
- 8-зв'язна лінія,



- 4-зв'язна лінія.



У гексагональному растрі лінії 6-зв'язні.



РАСТЕРИЗАЦІЯ ГРАФІЧНИХ ПРИМІТИВІВ

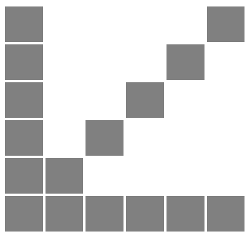
Графічні примітиви:

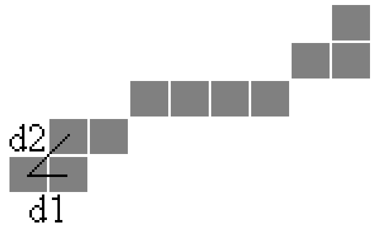
- Відрізок прямої лінії;
- Коло;
- Крива Без'є.

Загальні вимоги до зображення відрізків:

1) кінці відрізка повинні знаходитись у заданих точках.
2) відрізки повинні мати вигляд прямих.
3) яскравість уздовж відрізка повинна бути постійною та не залежати від довжини та нахилу.

Так у чому тут проблема?





ВИСНОВОК

Жодна з цих умов не може бути точно виконана на растровому дисплеї, оскільки зображення будується з пікселів скінченних розмірів, а саме:

1) кінці відрізка у загальному випадку розташовуються на пікселях, лише **найбільш близьких** до потрібних позицій, і лише **в окремих випадках** координати кінців відрізків **точно співпадають** з координатами пікселів.

2) відрізок апроксимується набором пікселів і **лише в окремих випадках** горизонтальних, вертикальних та відрізків під кутом 45° вони будуть виглядати прямими, причому вони будуть гладкими (не будуть мати східчастості) **лише** у разі горизонтальних та вертикальних відрізків.

3) **яскравість** для різних відрізків та навіть уздовж відрізка у загальному випадку **різна**, тому що відстань між центрами пікселів, наприклад, для вертикального відрізка і відрізка, розташованого під кутом 45°, різна.

РАСТРОВА РОЗГОРТКА НА ОСНОВІ РІВНЯННЯ *y=kx+b*

Базовий алгоритм

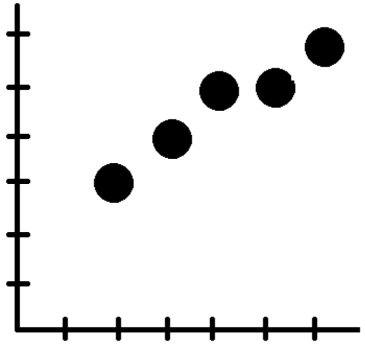
1. Задати початкову точку $P_1(x_1, y_1)$
2. Обчислити кутовий коефіцієнт $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
3. Обчислити коефіцієнт $b = y_1 - k \cdot x_1$
4. У циклі обчислювати цілочисельні координати:

$$x_i = x_{i-1} + 1$$
$$y_i = k \cdot x_i + b$$

Умова виходу з циклу: досягнення точки $P_2(x_2, y_2)$.

Приклад: $P_1(2,3), P_2(6,6)$

x	2	3	4	5	6
y	3	3.75	4.5	5.25	6
$y_{окр}$	3	4	5	5	6



РАСТРОВА РОЗГОРТКА НА ОСНОВІ РІВНЯННЯ *y=kx+b*

$$y = y_1 + k(x - x_1) = kx + b$$

$$x = x_1 \Rightarrow y = y_1$$

$$x_i = x_{i-1} + 1 \ \Rightarrow y = k(x + 1) + b =$$

$$= kx + b + k = y + k \ \Rightarrow y_i = y_{i-1} + k$$

Оптимізований алгоритм

1. Задати початкову точку $P_1(x_1, y_1)$
2. Обчислити кутовий коефіцієнт $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
3. У циклі обчислювати цілочисельні координати:

$$x_i = x_{i-1} + 1$$

$$y_i = y_{i-1} + k$$

Умова виходу з циклу: досягнення точки $P_2(x_2, y_2)$.

АЛГОРИТМ ЦДА

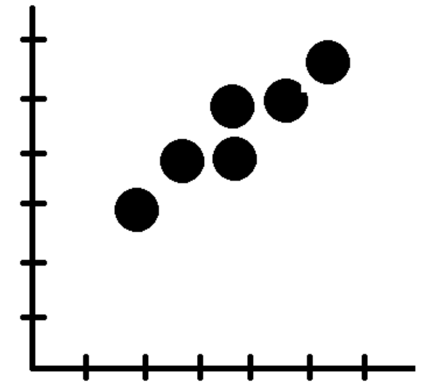
Звичайний алгоритм:

1. Задати початкову точку $P_1(x_1, y_1)$
2. Обчислити $P_x = |x_2 - x_1|$ та $P_y = |y_2 - y_1|$
3. Задати кількість кроків N
4. Обчислити $d_x = \frac{P_x}{N}$ та $d_y = \frac{P_y}{N}$
5. У циклі обчислювати цілочисельні координати:

$$x_i = x_{i-1} + d_x$$
$$y_i = y_{i-1} + d_y$$

Умова виходу з циклу: виконання циклу N разів.

x	2	2.8	3.6	4.4	5.2	6
$x_{окр}$	2	3	4	4	5	6
y	3	3.6	4.2	4.8	5.4	6
$y_{окр}$	3	4	4	5	5	6



АЛГОРИТМ ЦДА

Несиметричний алгоритм:

1. Задати початкову точку $P_1(x_1, y_1)$
2. Обчислити $P_x = |x_2 - x_1|$ та $P_y = |y_2 - y_1|$
3. Обчислити $L = \max(P_x, P_y)$
4. Обчислити $d_x = \frac{P_x}{L}$ та $d_y = \frac{P_y}{L}$
5. У циклі обчислювати цілочисельні координати:
   a) якщо $P_x > P_y$
   $$x_i = x_{i-1} + 1$$
   $$y_i = y_{i-1} + d_y$$
   b) якщо $P_x < P_y$
   $$x_i = x_{i-1} + d_x$$
   $$y_i = y_{i-1} + 1$$

Умова виходу з циклу: виконання циклу L разів.

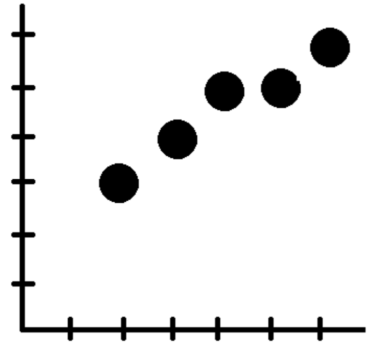
РАСТРОВА РОЗГОРТКА НА ОСНОВІ ПАРАМЕТРИЧНОГО РІВНЯННЯ

1. Задати початкову точку $P_1(x_1, y_1)$ та $t_1 = 0$
2. Обчислити $P_x = x_2 - x_1$ та $P_y = y_2 - y_1$
3. Обчислити $\Delta t = \frac{1}{\max(|P_x|, |P_y|)}$
4. У циклі обчислювати цілочисельні координати:

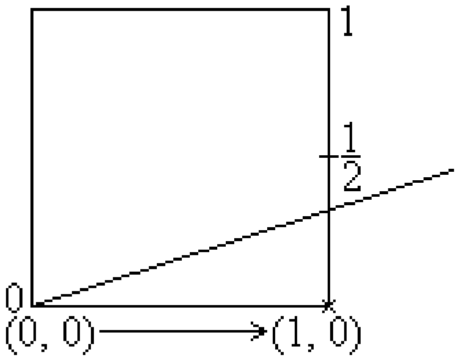
$$x_i = x_1 + t_i \cdot P_x$$
$$y_i = y_1 + t_i \cdot P_y$$
$$t_i = t_{i-1} + \Delta t$$

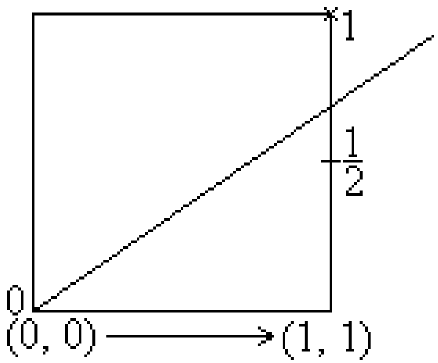
Умова виходу з циклу: досягнення точки $P_2(x_2, y_2)$.

t	0	0.25	0.5	0.75	1
x	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
$x_{окр}$	2	3	4	5	6
y	3	3.75	4.5	5.25	6
$y_{окр}$	3	4	5	5	6



АЛГОРИТМ БРЕЗЕНХЕМА ДЛЯ РАСТРОВОЇ РОЗГОРТКИ ВІДРІЗКІВ

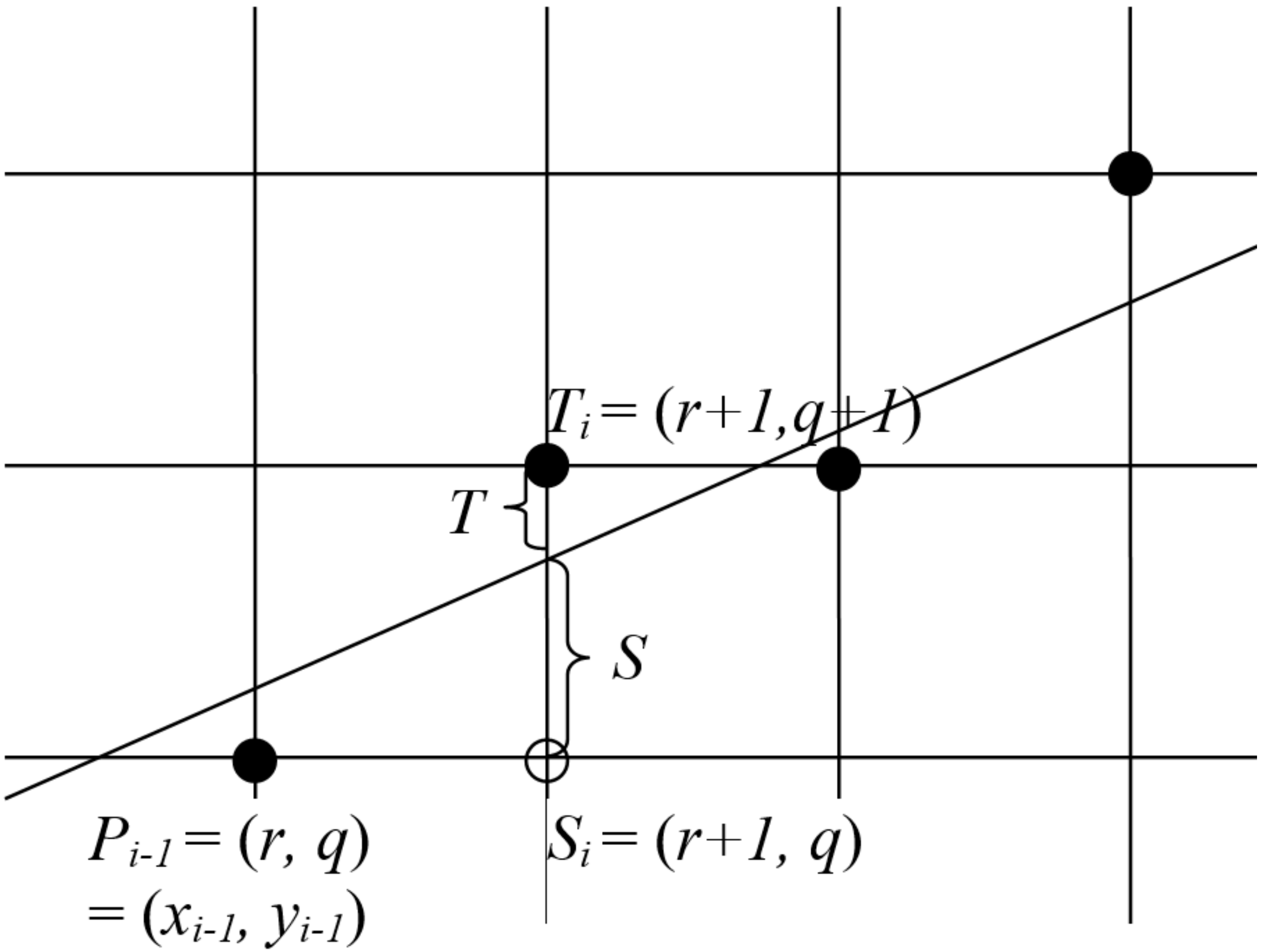




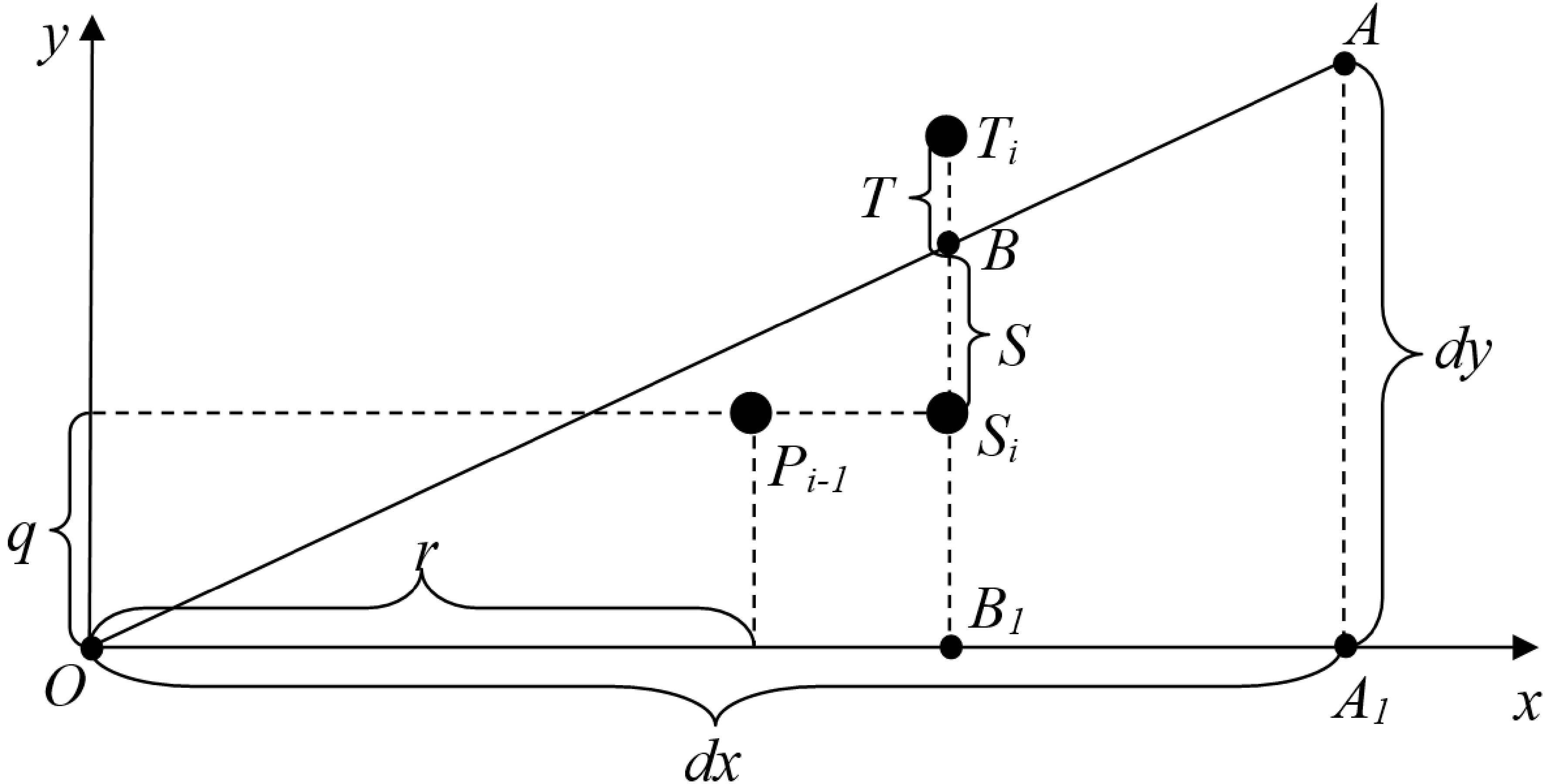
<u>Основна ідея</u> алгоритму:
якщо **кутовий коефіцієнт <** $\mathbf{\frac{1}{2}}$, то за наступну точку берemo точку (1,0), інакше – точку (1, 1).

<u>Основна перевага</u> алгоритму: відсутність ділення.

i-й крок алгоритму Брезенхема



i-й крок алгоритму Брезенхема



Нехай відрізок починається у початку координат (наприклад, завдяки геометричним перетворенням).

Виведемо ітеративну формулу для обчислення керівної змінної алгоритму Брезенхема.

Позначимо координати точки P_{i-1} як (r, q). Тоді $S_i = (r+1, q)$ та $T_i = (r+1, q+1)$.

Оскільки трикутники OAA_1 та OBB_1 подібні, то $\frac{dy}{dx} = \frac{S+q}{r+1}$. Тоді $S = \frac{dy}{dx}(r+1) - q$.

T можна представити як $T = 1 - S$. Отже, $T = 1 - \frac{dy}{dx}(r+1) + q$.

Знайдемо різницю S та T: $S - T = 2\frac{dy}{dx}(r+1) - 2q - 1$.

Помножимо ліву та праву частини на dx:

$$dx \cdot (S - T) = 2dy \cdot (r+1) - 2dx \cdot q - dx.$$

Оскільки величина dx додатна, нерівність $dx\,(S - T) < 0$ можна використати як ознаку при виборі наступного пікселя. Позначимо $d_i = dx\,(S - T)$, тоді:

$$d_i = 2dy \cdot r - 2dx \cdot q + 2dy - dx.$$

Оскільки $r = x_{i-1}$ та $q = y_{i-1}$, то:

$$d_i = 2dy \cdot x_{i-1} - 2dx \cdot y_{i-1} + 2dy - dx.$$

Змінимо індекси та знайдемо d_{i+1}:

$$d_{i+1} = 2dy \cdot x_i - 2dx \cdot y_i + 2dy - dx.$$

Знайдемо різницю між d_i та d_{i+1}:

$$d_{i+1} - d_i = 2dy \cdot (x_i - x_{i-1}) - 2dx \cdot (y_i - y_{i-1}).$$

Відомо, що $x_i - x_{i-1} = 1$, тоді:

$$d_{i+1} = d_i + 2dy - 2dx \cdot (y_i - y_{i-1}).$$

Оскільки $(x_0, y_0) = (0, 0)$, то $d_1 = 2dy - dx$.

АЛГОРИТМ БРЕЗЕНХЕМА ДЛЯ РАСТРОВОЇ РОЗГОРТКИ ВІДРІЗКІВ

Дані координати точок початку (x_1, y_1) та кінця (x_n, y_n) відрізку.

1. Обчислити $dx = |x_n - x_1|$ та $dy = |y_n - y_1|$.
2. За перший піксель взяти піксель з координатами (x_1, y_1).
3. Обчислити $d_i = 2dy - dx$ при $i = 1$.
4. Якщо $d_i \geq 0$, то за наступний піксель взяти T_{i+1} та обчислити:
   - $x_{i+1} = x_i + 1$
   - $y_{i+1} = y_i + 1$
   - $d_{i+1} = d_i + 2(dy - dx)$.
5. Якщо $d_i < 0$, то за наступний піксель взяти S_{i+1} та обчислити:
   - $x_{i+1} = x_i + 1$
   - $y_{i+1} = y_i$
   - $d_{i+1} = d_i + 2dy$.
6. Перейти до п.4 для вибору наступного пікселя *(i=i+1)*.

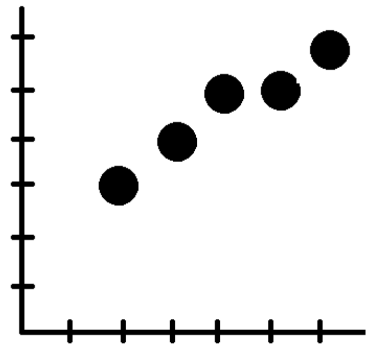
Умова виходу з циклу: отримання пікселя з координатами (x_n, y_n).

Завдання на СРС: вивести формули для *d*.

АЛГОРИТМ БРЕЗЕНХЕМА ДЛЯ РАСТРОВОЇ РОЗГОРТКИ ВІДРІЗКІВ

Приклад: $P_1(2,3), P_2(6,6)$

x	2	3	4	5	6
y	3	4	5	5	6
d_i	2	0	-2	4	
Наступний піксель	T_i	T_i	S_i	T_i	



РАСТРОВА РОЗГОРТКА КОЛА

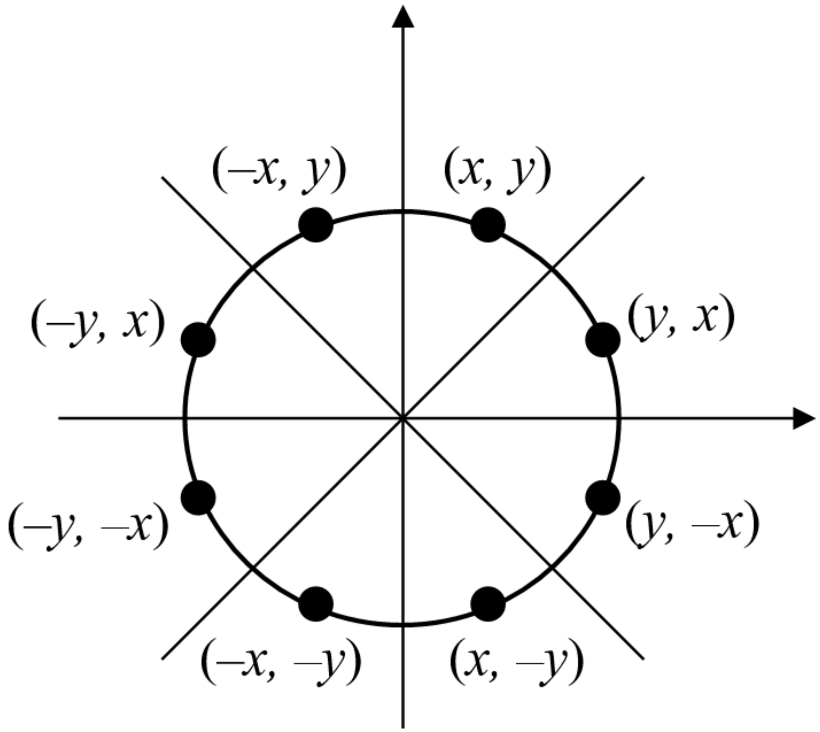
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

$$y = y_0 \mp \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + R \cdot \cos\alpha \\ y = y_0 + R \cdot \sin\alpha \end{cases}$$

$$0° \leq \alpha < 360°$$

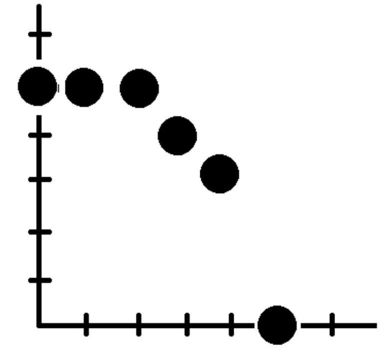
Яка властивість кола може допомогти оптимізувати обчислення?



Задача: побудувати коло з центром у точці (0,0) и радіусом R=5.

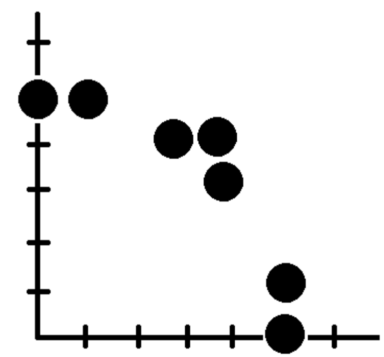
$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

x	0	1	2	3	4	5
y	5.0	4.9	4.6	4.0	3.0	0
$y_{окр}$	5	5	5	4	3	0



$$\begin{cases} x = R \cdot \cos \alpha \\ y = R \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

α	90	75	60	45	30	15	0
x	0	1.3	2.5	3.5	4.3	4.8	5.0
$x_{окр}$	0	1	3	4	4	5	5
y	5.0	4.8	4.3	3.5	2.5	1.3	0
$y_{окр}$	5	5	4	4	3	1	0



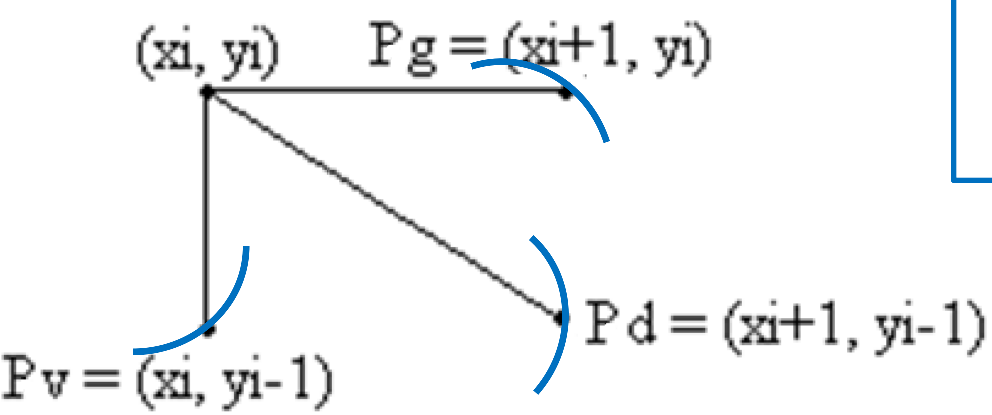
АЛГОРИТМ БРЕЗЕНХЕМА ДЛЯ РАСТРОВОЇ РОЗГОРТКИ КІЛ

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$\varepsilon(P_i) = (x_i^2 + y_i^2) - R^2$$

Похибка $\varepsilon(P_i)$ має бути мінімальною

Варіанти для обрання наступної точки



$$\varepsilon_g = (x + 1)^2 + y^2 - R^2$$

$$\varepsilon_d = (x + 1)^2 + (y - 1)^2 - R^2$$

$$\varepsilon_v = x^2 + (y - 1)^2 - R^2$$

АЛГОРИТМ БРЕЗЕНХЕМА ДЛЯ РАСТРОВОЇ РОЗГОРТКИ КІЛ

1) Якщо $\varepsilon_d < 0$, то за наступний піксель може бути обраний P_g або P_d. Для остаточного обрання обчислюємо:

$$d_i = |\varepsilon_g| - |\varepsilon_d| = |(x+1)^2 + y^2 - R^2| - |(x+1)^2 + (y-1)^2 - R^2|$$

Якщо $d_i \leq 0$, то обираємо P_g, інакше – P_d.

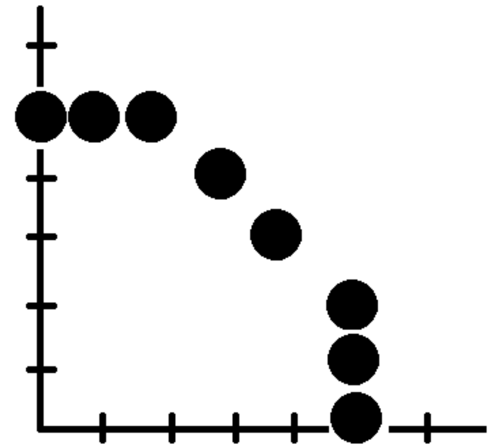
2) Якщо $\varepsilon_d > 0$, то за наступний піксель може бути обраний P_d або P_v. Для остаточного обрання обчислюємо:

$$d_i = |\varepsilon_d| - |\varepsilon_v| = |(x+1)^2 + (y-1)^2 - R^2| - |x^2 + (y-1)^2 - R^2|$$

Якщо $d_i \leq 0$, то обираємо P_d, інакше – P_v.

3) Якщо $\varepsilon_d = 0$, то за наступний піксель обираємо P_d.

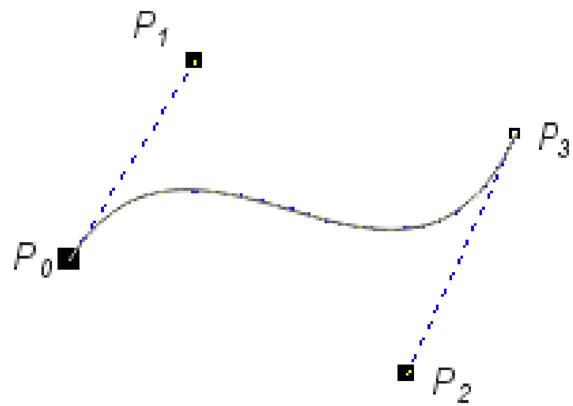
Задача: побудувати коло з центром у точці (0,0) и радіусом R=5.

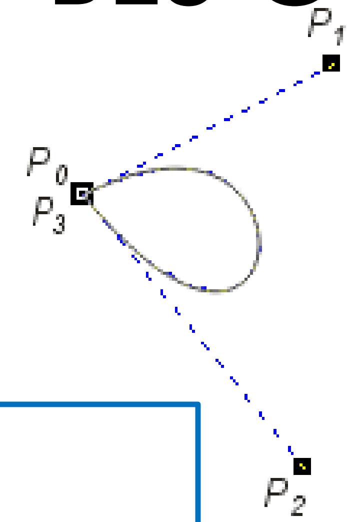


x	0	1	2	3	4	5	5	5
y	5	5	5	4	3	2	1	0
ε_g	1	4						
ε_d	-8	-5	0	0	4	12	11	
ε_v					-5	1	0	
d_i	-7	-1			-1	11	11	
Наступний піксель	P_g	P_g	P_d	P_d	P_d	P_v	P_v	

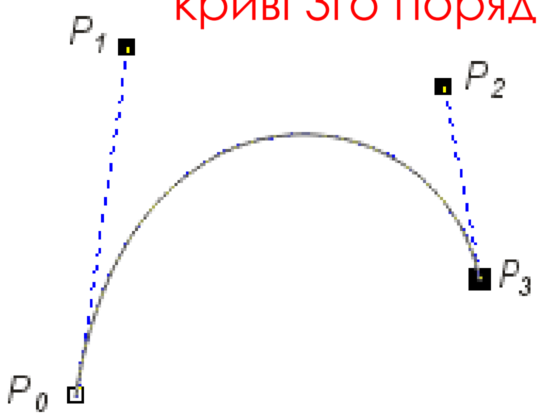
РАСТЕРИЗАЦІЯ КРИВИХ БЕЗ'Є

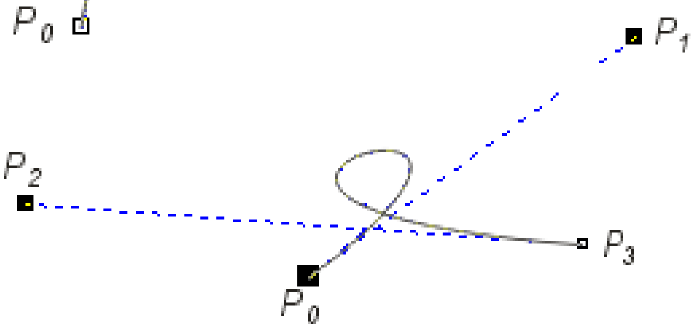
Криві Бєз'є – поліноміальні криві, форму яких визначають контрольні точки.





Найчастіше використовують криві 3го порядку





Характерні риси кривих Без'є:

1) порядок контрольних точок є важливим,
2) крива завжди проходить через першу і останню точку,
3) лінія, що з'єднує дві перші точки, дотична до кривої в першій точці,
4) лінія, що з'єднує дві останні точки, дотична до кривої в останній точці,
5) зміна розміщення будь-якої контрольної точки змінює форму кривої.

Визначення кривої Без'є 3-го порядку:

$$B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3$$

$$x(t) = (1-t)^3 x_0 + 3t(1-t)^2 x_1 + 3t^2(1-t)x_2 + t^3 x_3$$
$$y(t) = (1-t)^3 y_0 + 3t(1-t)^2 y_1 + 3t^2(1-t)y_2 + t^3 y_3$$

Визначення кривої Без'є *n*-го порядку:

базис Бернштейна

$$K_n(t) = \sum_{i=0}^{n} B_n^i(t) P_i$$

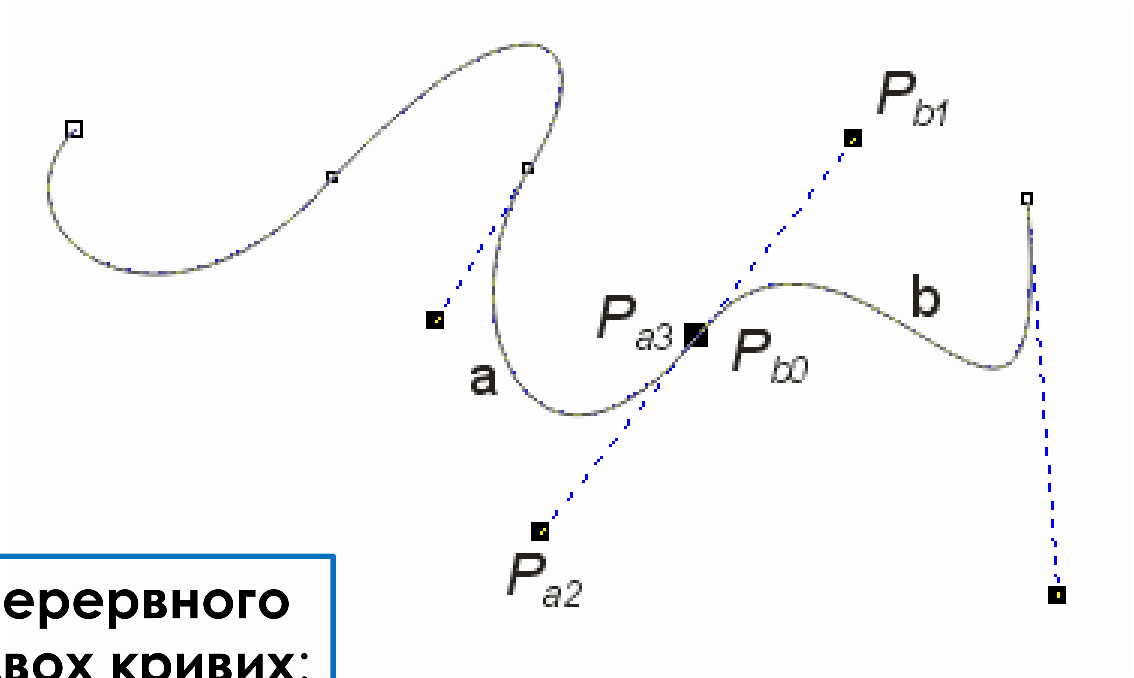
$$B_n^i(t) = C_n^i \cdot (1-t)^{n-i} \cdot t^i$$

$t = [0...1]$

біноміальний коефіцієнт

$$C_n^i = \frac{n!}{(n-i)! \cdot i!}$$

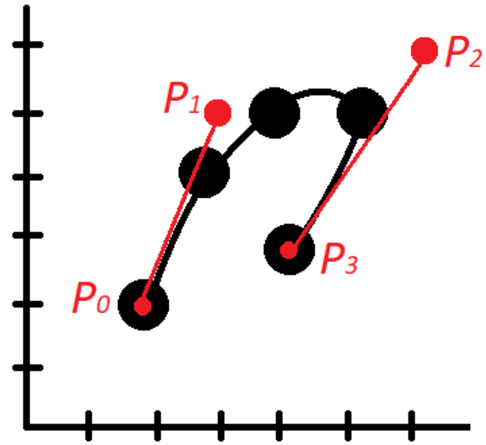
Приклад 4-х сегментної кривої Бєз'є:



Необхідна умова безперервного (гладкого) з'єднання двох кривих: дотична до 1-ї кривої в останній контрольній точці та дотична до 2-ї кривої у першій контрольній точці мають лежати на одній прямій.

Задача:
Растеризувати та намалювати ескіз кривої Без'є, яка визначена контрольними точками: $P_0(2,2)$, $P_1(3,5)$, $P_2(6,6)$, $P_3(4,3)$.

t	0	0.25	0.5	0.75	1
x	2.00	3.01	4.12	4.67	4.00
$x_{окр}$	2	3	4	5	4
y	2.00	3.84	4.75	4.53	3.00
$y_{окр}$	2	4	5	5	3



$$x(t) = (1-t)^3 x_0 + 3t(1-t)^2 x_1 + 3t^2(1-t)x_2 + t^3 x_3$$
$$y(t) = (1-t)^3 y_0 + 3t(1-t)^2 y_1 + 3t^2(1-t)y_2 + t^3 y_3$$

Питання?


РАСТРОВА ГРАФІКА
Слайди до лекцій з дисципліни
«Математичні та алгоритмічні основи комп'ютерної графіки»
Лектор: к.т.н., доцент Сулема Є.С.
Каф. ПЗКС, ФПМ, КПІ ім. Ігоря Сікорського
2018/2019 навч. рік