ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

Слайди до лекцій з дисципліни
«Математичні та алгоритмічні основи комп'ютерної графіки»

Лектор: к.т.н., доцент Сулема Є.С.

Каф. ПЗКС, ФПМ, КПІ ім. Ігоря Сікорського

2019/2020 навч. рік

Основні види геометричних перетворень

- Зсув
- Масштабування
- Поворот

- Проеціювання

Геометричні перетворення у декартових координатах

1. ЗСУВ відносно початку координат:

$$\begin{cases} \mathrm{x}_n = \mathrm{x} + T_x \\ y_n = y + T_y \end{cases} \qquad \text{або} \qquad \vec{P}_n = \vec{P} + \vec{T},$$

де $\vec{P} = (x, y)$– вектор-рядок початкових координат,

$\vec{P}_n = (x_n, y_n)$ – вектор-рядок перетворених координат,

$\vec{T} = (T_x, T_y)$ – вектор-рядок зсуву,

x, y – початкові координати,

x_n, y_n – перетворені координати,

T_x, T_y – величина зсуву по осям.

2. МАСШТАБУВАННЯ відносно початку координат:

$$\begin{cases} \mathrm{x}_n = \mathrm{x} \cdot S_x \\ y_n = y \cdot S_y \end{cases} \qquad \vec{P}_n = \vec{P} \cdot \boldsymbol{S},$$

де $\boldsymbol{S}$ - матриця масштабування $\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{pmatrix}$

3. ПОВОРОТ відносно початку координат:

$$\begin{cases} \mathrm{x}_n = \mathrm{x} \cdot cos\,\phi - y \cdot sin\,\phi \\ y_n = x \cdot sin\,\phi + y \cdot cos\,\phi \end{cases}$$

ϕ –кут повороту

Матрична форма: $\vec{P}_n = \vec{P} \cdot \boldsymbol{R}$, де $\boldsymbol{R}$ – матриця повороту. $\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} cos\,\phi & sin\,\phi \\ -sin\,\phi & cos\,\phi \end{pmatrix}$

Якою має бути система координат?

<u>Перетворення на площині</u>:

- Декартові координати → (x,y)
- Однорідні координати → (X,Y, W)

<u>Перетворення у просторі</u>:

- Декартові координати → (x,y, z)
- Однорідні координати → (X,Y,Z,W)

$$\boxed{x = \frac{X}{W} \quad y = \frac{Y}{W}}$$

$$\forall\, W \neq 0$$

$$\boxed{x = \frac{X}{W} \quad y = \frac{Y}{W} \quad z = \frac{Z}{W}}$$

Питання 1:
Що дає перехід до однорідних координат?

Питання 2:
Яке значення W нам підходить найліпше?

Геометричні перетворення в однорідних координатах

<u>Перетворення на площині</u>:

$$(\mathrm{X_n} \quad \mathrm{Y_n} \quad \mathrm{W_n}) = (\mathrm{X} \quad \mathrm{Y} \quad \mathrm{W}) \cdot \mathbf{M}$$

Нові координати точки

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a & b \\ d & e \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} p \\ q \\ s \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} l & m \end{matrix}} & \end{pmatrix}$$

Матриця перетворення

Геометричні перетворення в однорідних координатах

Перетворення у просторі:

$$(X_n \quad Y_n \quad Z_n \quad W_n) = (X \quad Y \quad Z \quad W) \cdot \mathbf{M}$$

Нові координати точки

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ i & j & k & r \\ l & m & n & s \end{pmatrix}$$

Матриця перетворення

Геометричні перетворення: ЗСУВ

- Перетворення на площині:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{pmatrix}$$

- Перетворення у просторі:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{pmatrix}$$

Питання:
Що потрібно змінити, щоб отримати матрицю зворотного зсуву?

Геометричні перетворення: МАСШТАБУВАННЯ

- Перетворення на площині:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Питання:
Як отримати матрицю зворотного масштабування?

- Перетворення у просторі:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Геометричні перетворення: ПОВОРОТ

- Перетворення на площині:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Перетворення у просторі:

$$\mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_x & \sin\varphi_x & 0 \\ 0 & -\sin\varphi_x & \cos\varphi_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{R}_y = \begin{pmatrix} \cos\varphi_y & 0 & \sin\varphi_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi_y & 0 & \cos\varphi_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_z = \begin{pmatrix} \cos\varphi_z & \sin\varphi_z & 0 & 0 \\ -\sin\varphi_z & \cos\varphi_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Завдання на СРС: Отримати матриці зворотніх поворотів.

Композиція двовимірних перетворень

- Послідовне виконання кількох перетворень можна подати у вигляді єдиної матриці комплексного перетворення.
- Виконаємо зсув точки P_0 на відстань (T_{x1}, T_{y1}) у точку P_1, а далі зробимо зсув точки P_1 на відстань (T_{x2}, T_{y2}) у точку P_2.
- Позначимо матриці зсуву як T_1 та T_2 відповідно. Тоді:

$$P_1 = P_0 \cdot T_1,$$

$$P_2 = P_1 \cdot T_2 = (P_0 \cdot T_1) \cdot T_2 = P_0 \cdot (T_1 \cdot T_2) = P_0 \cdot T.$$

- Отже, комплексний зсув є адитивним перетворенням: $(T_{x1}+T_{x2}, T_{y1}+T_{y2})$.

Завдання на СРС:

1. Довести, що комплексне масштабування є мультиплікативним.
2. Дослідити властивості комплексного повороту.

Розглянемо приклад виконання комплексного перетворення.

Нехай задано трикутник ABC з координатами $A(1; 1)$, $B(2; 3)$, $C(3; 1)$.

Виконати такі перетворення:

1) поворот на кут $3\pi/2$ навколо точки $P(5; 2)$,
2) масштабування з коефіцієнтами $\alpha = \beta = 2$ відносно точки $P(5; 2)$.

Розв'язок:

Виконаємо перше перетворення.

- Сполучаємо точку (5; 2) з початком координат, тобто виконуємо перенесення на вектор (-5; -2):

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Виконуємо поворот на кут 3π/2:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\frac{3\pi}{2} & \sin\frac{3\pi}{2} & 0 \\ -\sin\frac{3\pi}{2} & \cos\frac{3\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Зробимо зворотне перенесення на вектор (5,2):

$$T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Отримуємо матрицю комплексного перетворення:

$$M = T \cdot R \cdot T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

- Обчислимо нові координати:

$$A'(x', y', 1) = (1, 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} = (4, 6, 1)$$

$$B'(x', y', 1) = (2, 3, 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} = (6, 5, 1)$$

$$C'(x', y', 1) = (3, 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} = (4, 4, 1)$$

Виконаємо друге перетворення.

- Сполучаємо точку (5; 2) з початком координат, тобто виконуємо перенесення на вектор (-5; -2):

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Масштабуємо:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Виконуємо зворотне перенесення на вектор (5; 2):

$$T\,' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Отримуємо матрицю комплексного перетворення:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

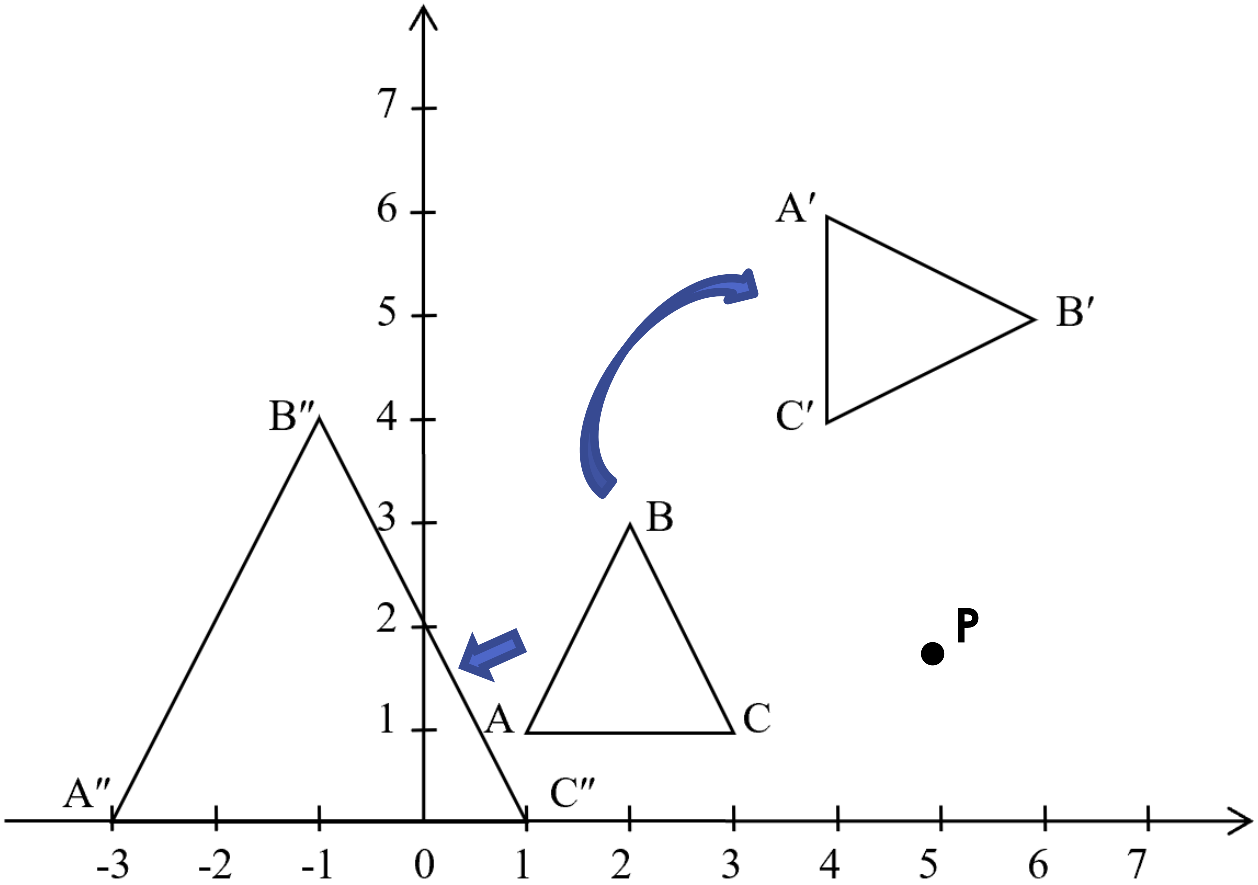
$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Обчислюємо нові координати:

$$A''(x'', y'', 1) = (1, 1, 1)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (-3, 0, 1)$$

$$B''(x'', y'', 1) = (2, 3, 1)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (-1, 4, 1)$$

$$C''(x'', y'', 1) = (3, 1, 1)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (1, 0, 1)$$

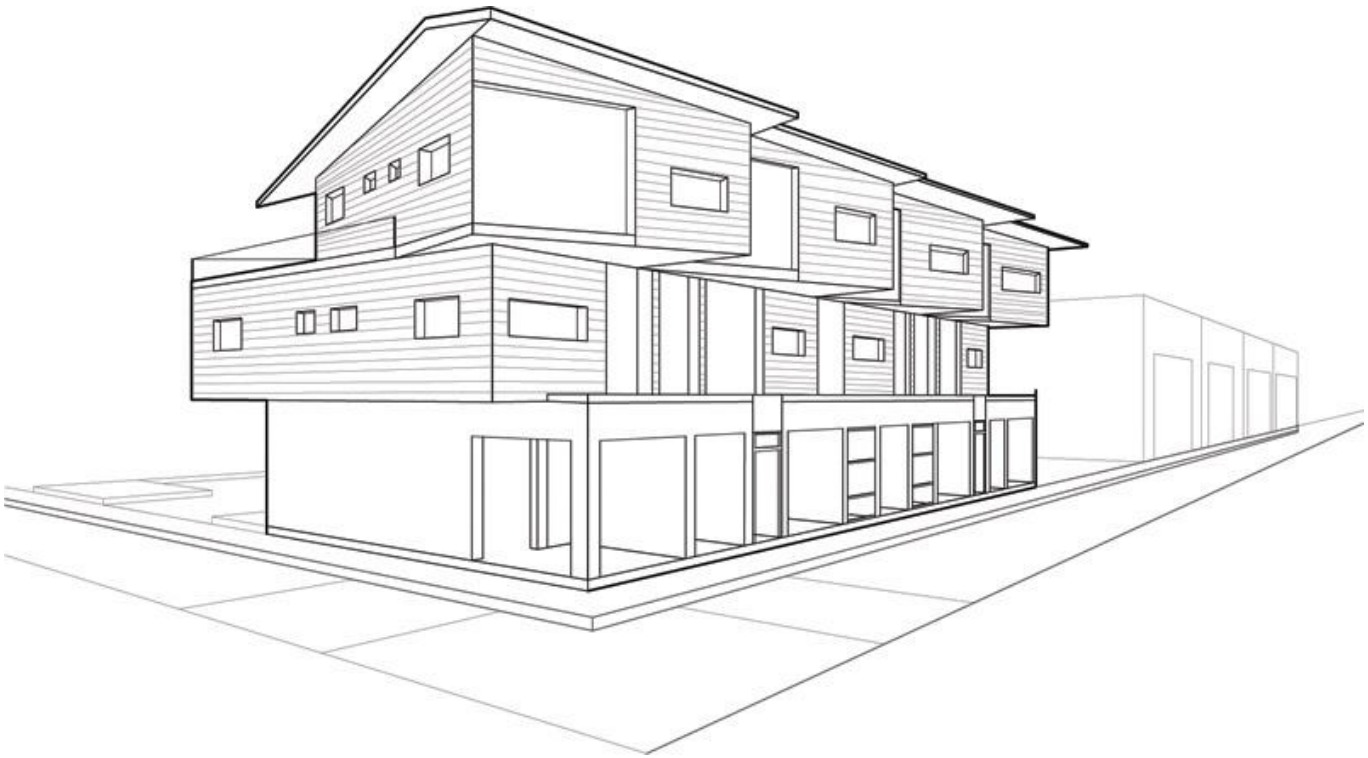


7
6
5
4
3
2
1
A′
B′
C′
B″
B
A
C
P
A″
C″
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

Проекції

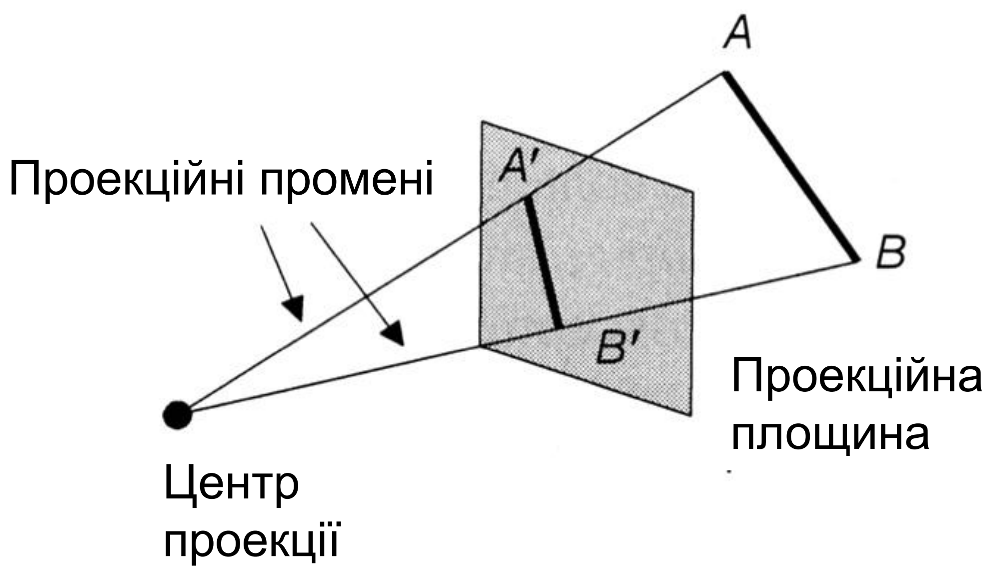
Проеціювання є різновидом комплексного геометричного перетворення

Для чого нам проекції?



Ключові визначення…

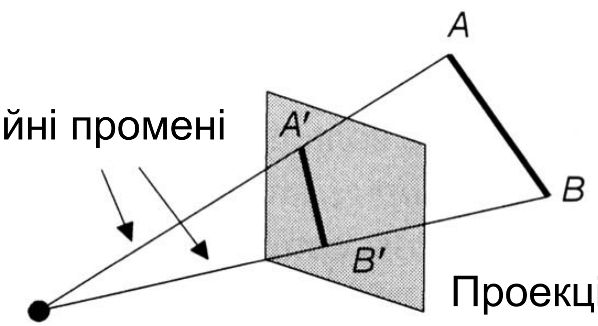
- *Проекція* з 3D у 2D визначається прямими *проекційними променями* (***проекторами***), які виходять з ***центру проекції***, проходячи через кожну точку об'єкту, та перетинають ***проекційну площину***, формуючи проекцію.



Типи проекцій

- Основні типи проекції
  - *«перспектива»* та *«паралель»*.

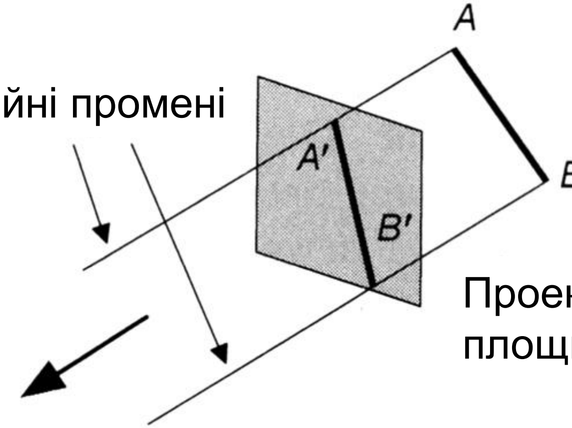
- Ключовий фактор – це *центр проекції*
  - якщо відстань до центру проекції скінчена: «перспектива»,
  - якщо нескінчена: «паралель».



Проекційні промені

Проекційна площина

Центр проекції



Проекційні промені

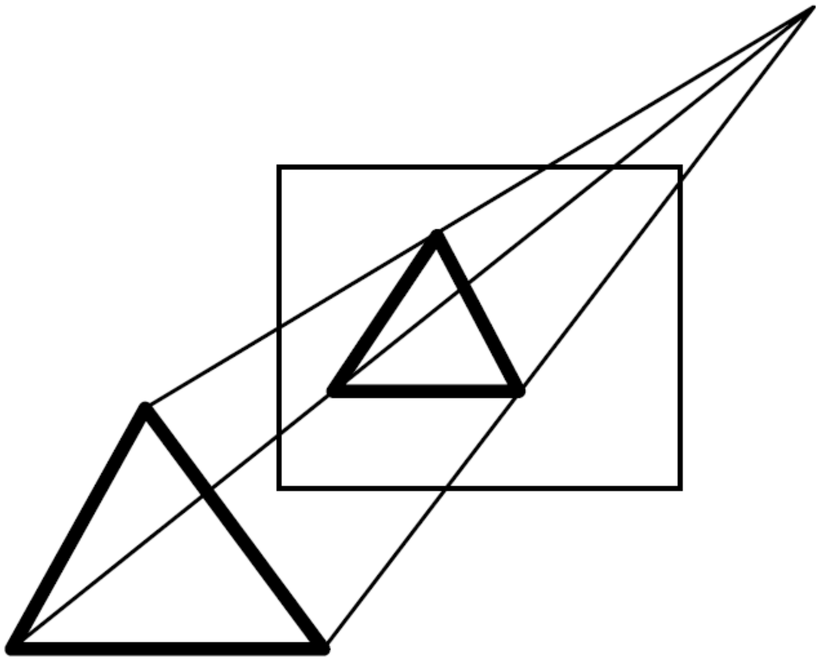
Проекційна площина

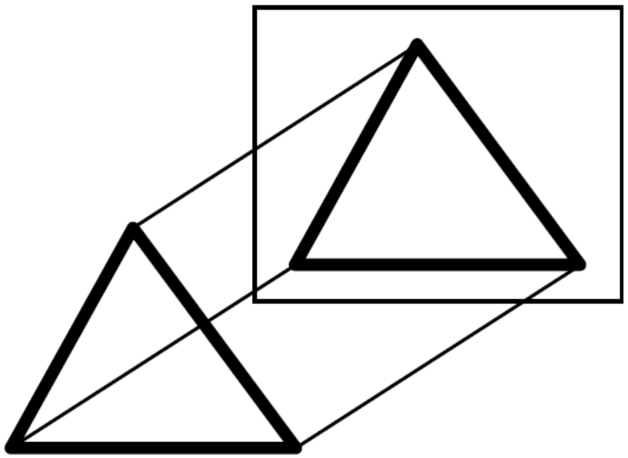
Центр проекції у нескінчен-ності

«Перспектива» vs «Паралель»

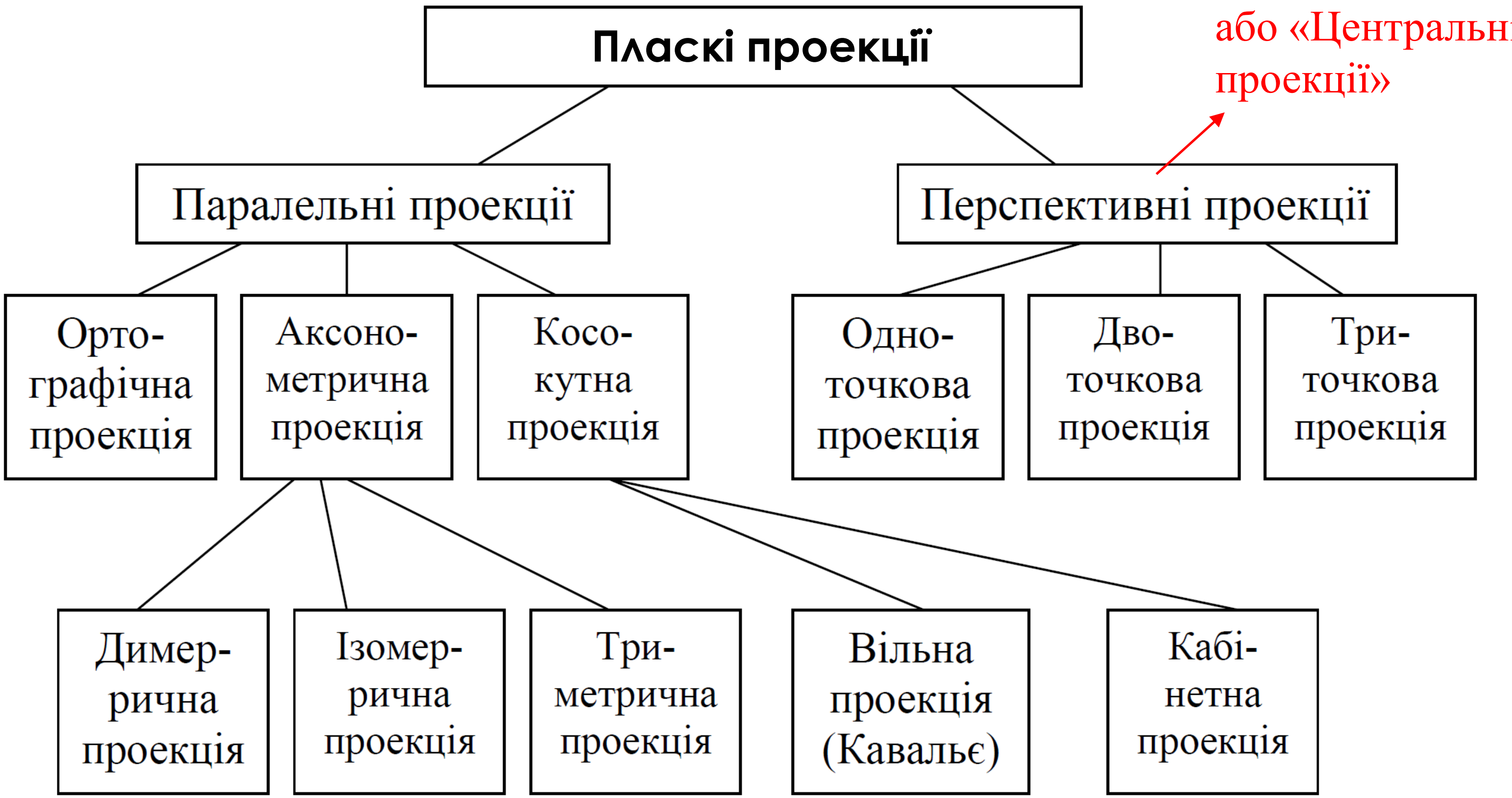
- **Перспективні проекції**
  - Надають «ракурс перспективи»
    - Розмір об'єкту змінюється обернено до відстані від центру проекції.
  - Кути залишаються незмінними для граней, які паралельні проекційній площині.
- **Паралельні проекції**
  - Менш реалістичний вигляд через відсутність ракурсу
  - Проте, паралельні лінії залишаються паралельними.
  - Кути залишаються незмінними для граней, які паралельні проекційній площині.

«Перспектива» vs «Паралель»





Класифікація проекцій



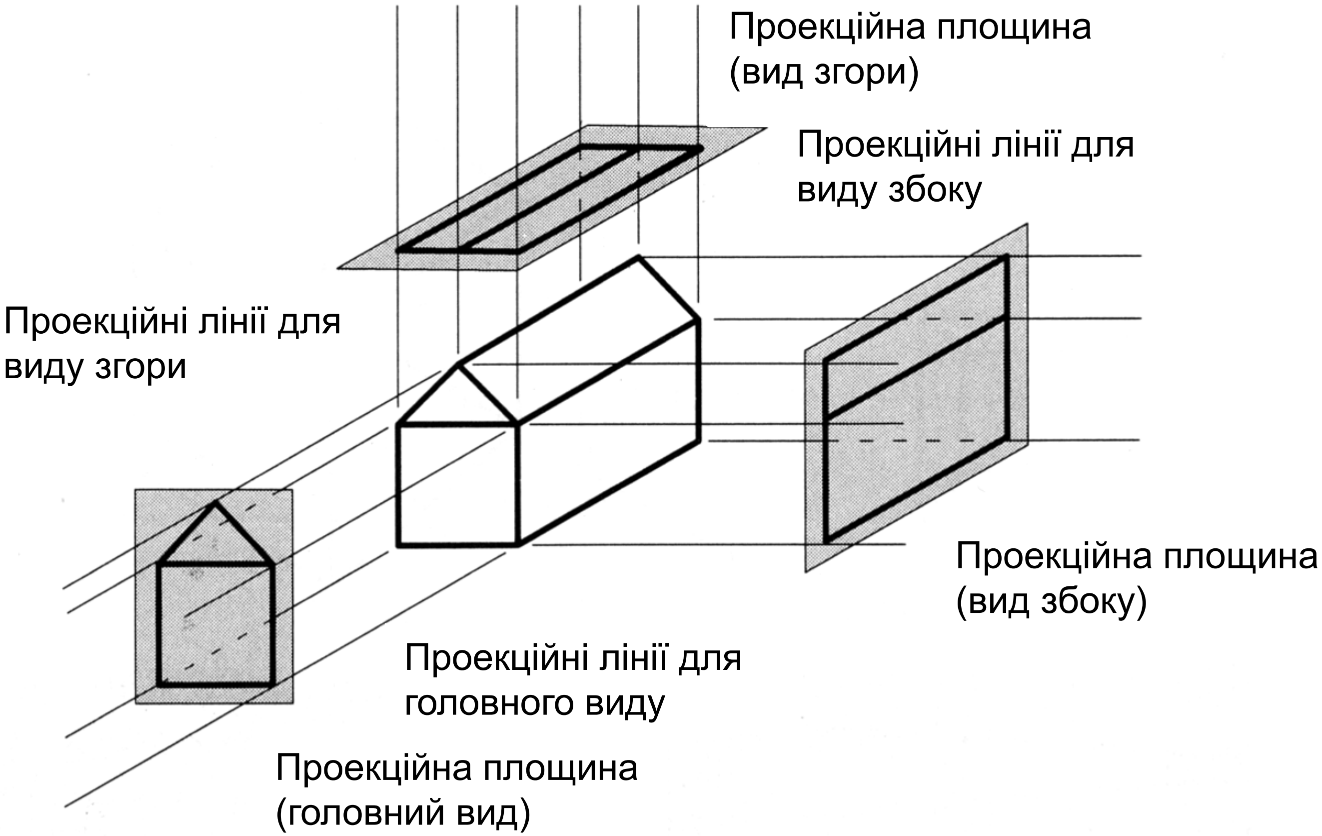
- По взаємному розташуванню проекторів площини проекції та осей координат розрізняють проекції:
  - ортогональні,
  - прямокутні аксонометричні,
  - косокутні аксонометричні.
- При ортогональній проекції проектори перпендикулярні до площини проекції, а площина проекції перпендикулярна головній осі.
- При аксонометричній проекції має місце один з двох видів перпендикулярності:
  - При прямокутній аксонометричній проекції проектори перпендикулярні площині проекції, яка розташована під кутом до головної осі.
  - При косокутній аксонометричній проекції проектори не перпендикулярні площині проекції, але площина проекції перпендикулярна головній осі.
- При центральному проеціюванні відстань від центру проекції до площини проеціювання скінчена, тому проектори являють собою пучок променів, що виходять з центру проекції.

Паралельні проекції

- При ортогональному проеціюванні не відбувається зміни ані кутів, ані масштабів.
- При аксонометричному проеціюванні зберігається паралельність прямих, а кути змінюються.
- При ізометричному проеціюванні укорочування вздовж усіх координатних осей однакове, тому можна робити виміри уздовж напрямів всіх осей з однаковим масштабом (звідси і назва „ізометрія”).

Паралельні проекції

- Ортогональні проекції:



Ортогональні проекції

- Ортогональне проеціювання виконується на площину, що є перпендикулярною будь-якій осі.

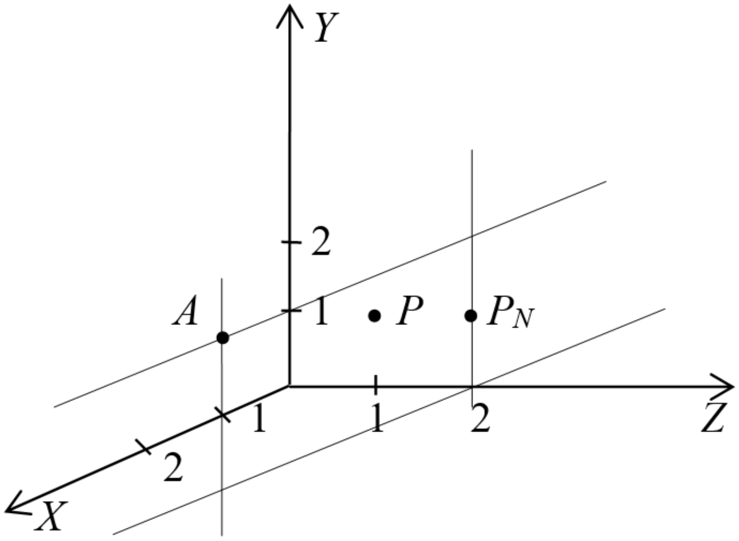
$$(X_n \quad Y_n \quad Z_n \quad W_n) = (X \quad Y \quad Z \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_0 & 1 \end{pmatrix}$$

Нехай дано точку з декартовими координатами (1, 1, 1). Виконаємо проеціювання на площину:

1) $Z = 0$

2) $Z = 2$

Питання:
Якою має бути матриця перетворення?



1) $Z_0 = 0$

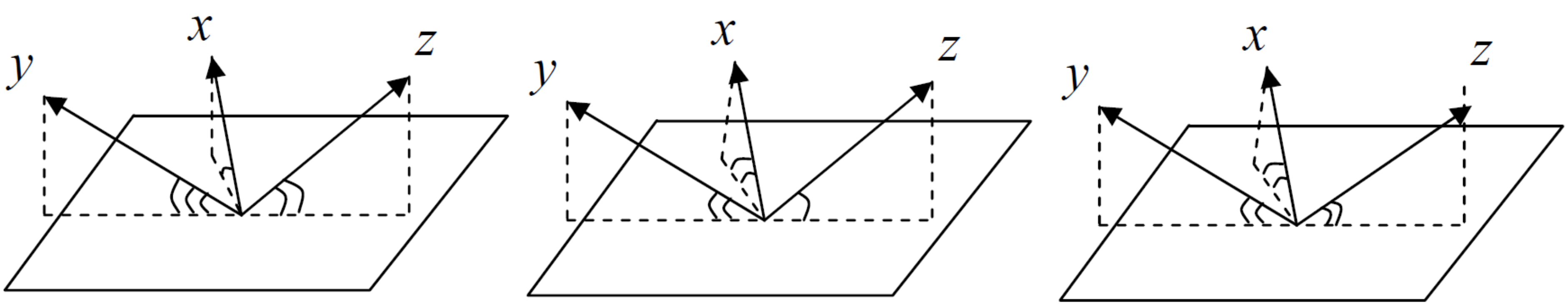
P_N (1, 1, 0)

2) $Z_0 = 2$

P_N (1, 1, 2)

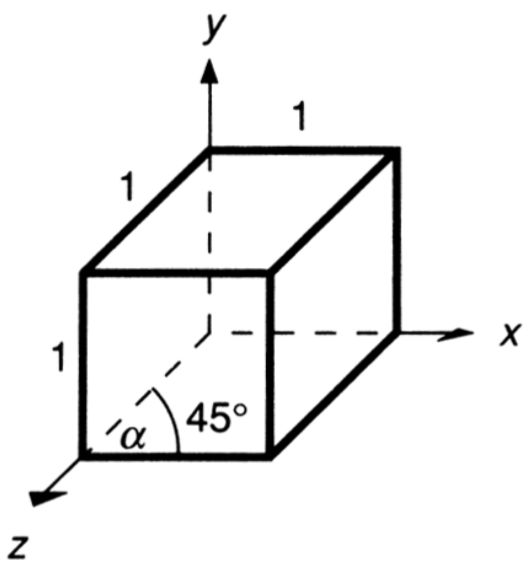
Паралельні проекції

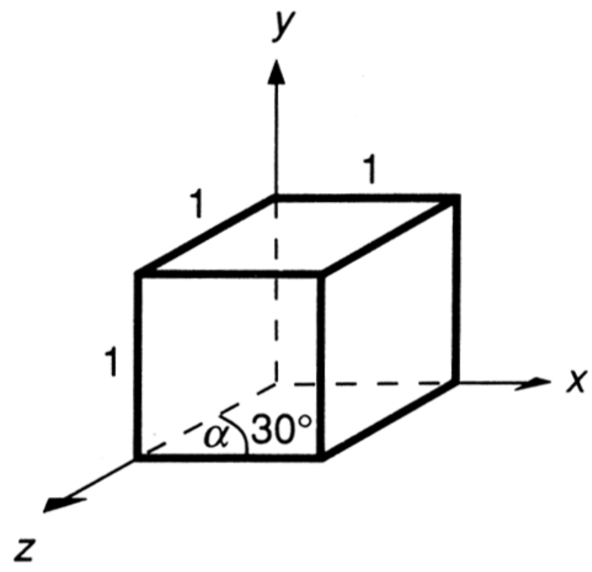
- Аксонометричні проекції:
  - Триметрія (нормаль утворює з осями координат попарно різні кути)
  - Диметрія (два кути між нормаллю і осями координат однакові)
  - Ізометрія (всі три кути між нормаллю і координатними осями однакові)



Паралельні проекції

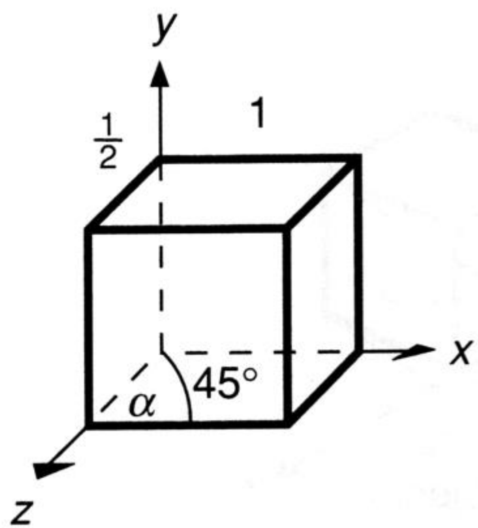
- Косокутна проекція Cavalier

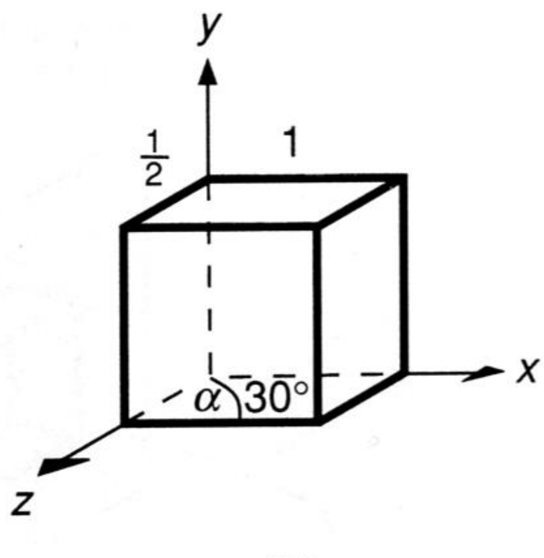




Паралельні проекції

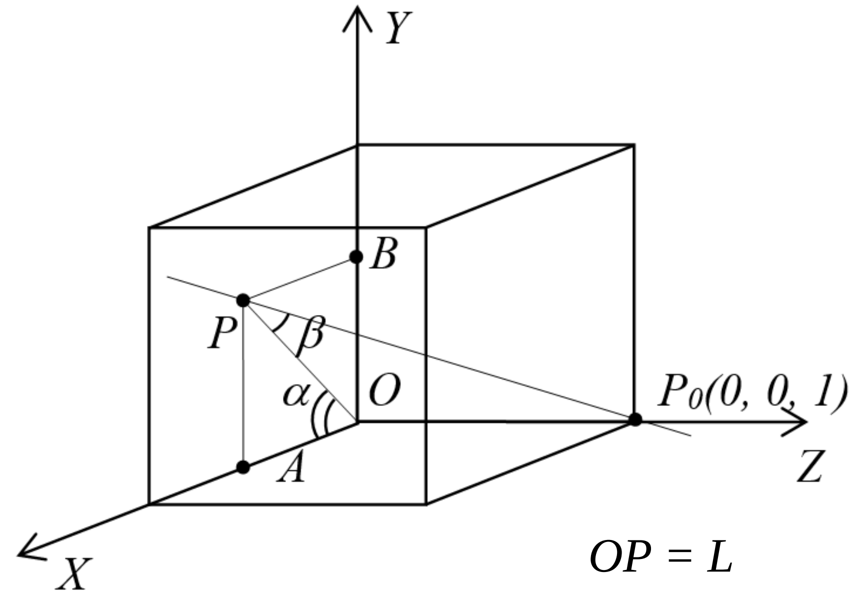
- Косокутна проекція Cabinet





Косокутне проеціювання

- Площина проеціювання перпендикулярна головній осі, а проектори складають з площиною проектування кут, не рівний 90°.
- Матриця перетворення може бути знайдена виходячи зі значень кута проеціювання та координат перетвореної точки.



$$OP = L$$

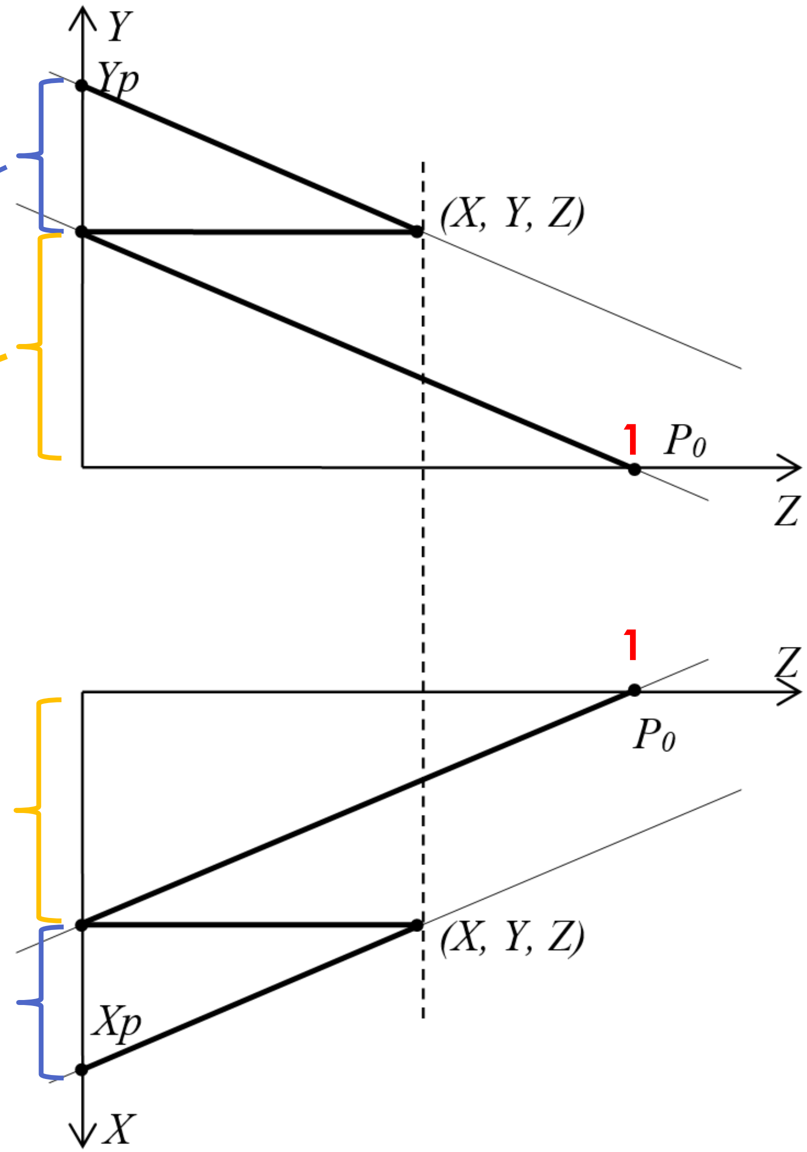
$$OA = L \cdot cos\alpha$$

$$OB = L \cdot sin\alpha$$

Проектором, який йде з точки P_0 в точку P, точка P_0 (0, 0, 1) проектується в точку P ($L \cdot \cos\alpha$, $L \cdot \sin\alpha$).
Тепер проектором, що є паралельним розглянутому, спроектуємо деяку точку (X, Y, Z) в точку (X_P, Y_P, Z_P).

З подібності трикутників отримуємо:

$$\begin{cases} \dfrac{\boxed{Xp - X}}{Z} = \boxed{L \cdot \cos\alpha} \\ \dfrac{\boxed{Yp - Y}}{Z} = \boxed{L \cdot \sin\alpha} \end{cases} \qquad \begin{cases} Xp = X + Z \cdot L \cdot \cos\alpha \\ Yp = Y + Z \cdot L \cdot \sin\alpha \end{cases}$$



Або у матричному вигляді:

$$(X_p \quad Y_p \quad Z_p \quad 1) = (X \quad Y \quad Z \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ L \cdot \cos\alpha & L \cdot \sin\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

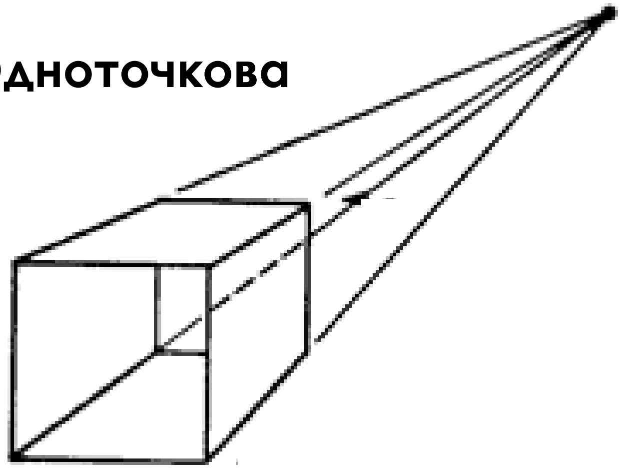
Таким чином, матриця аксонометричної косокутної проекції для випадку проеціювання на площину $Z = 0$ задає таке комплексне перетворення:

1. Площина $Z = 0$ переноситься вздовж осі X на $Z_0 \cdot \cos\alpha$ та вздовж осі Y на $Z_0 \cdot \sin\alpha$.
2. Виконується проеціювання на площину $Z = 0$.

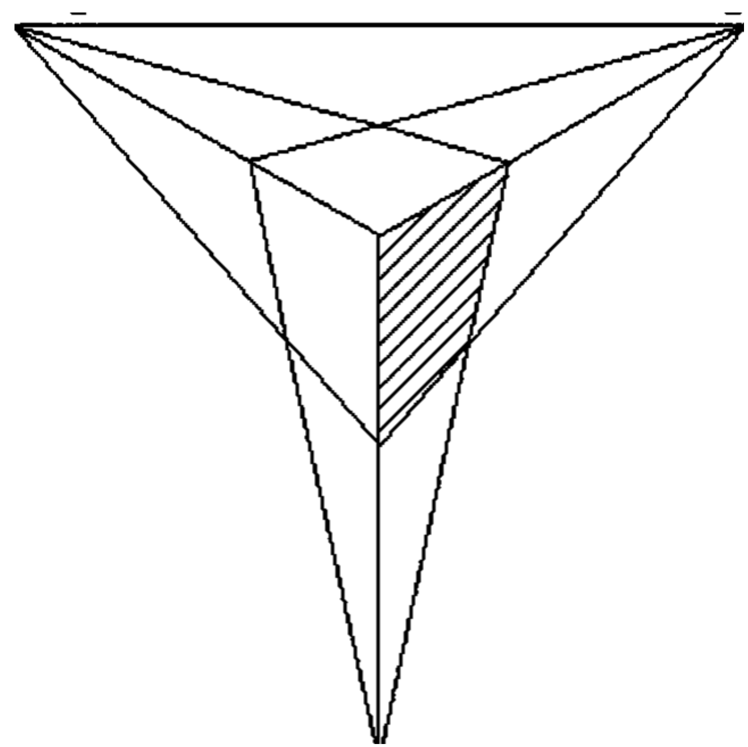
Різні варіанти паралельних проекцій формуються шляхом завдання відповідних значень L, α, β. Зокрема для фронтальної косокутної диметрії $L = \frac{1}{2}$, отже кут β між проекторами та площиною проеціювання дорівнює $\beta = arctg\frac{Z}{L} = arctg2 = 63{,}4°$.

Центральні проекції

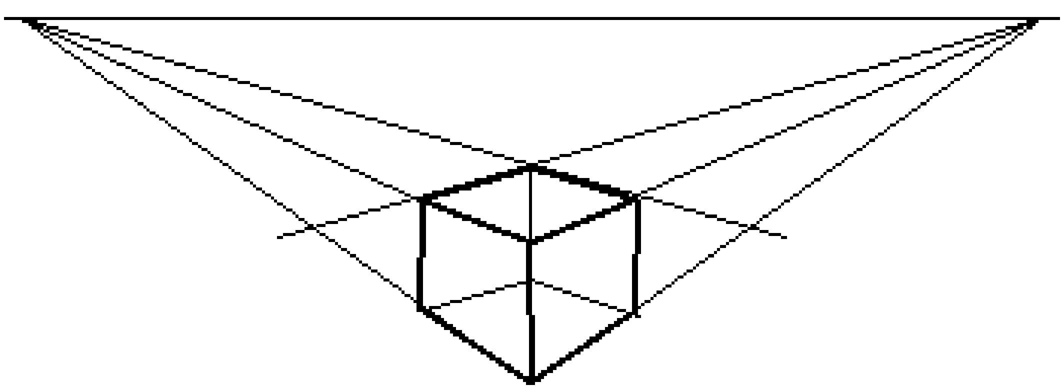
Одноточкова



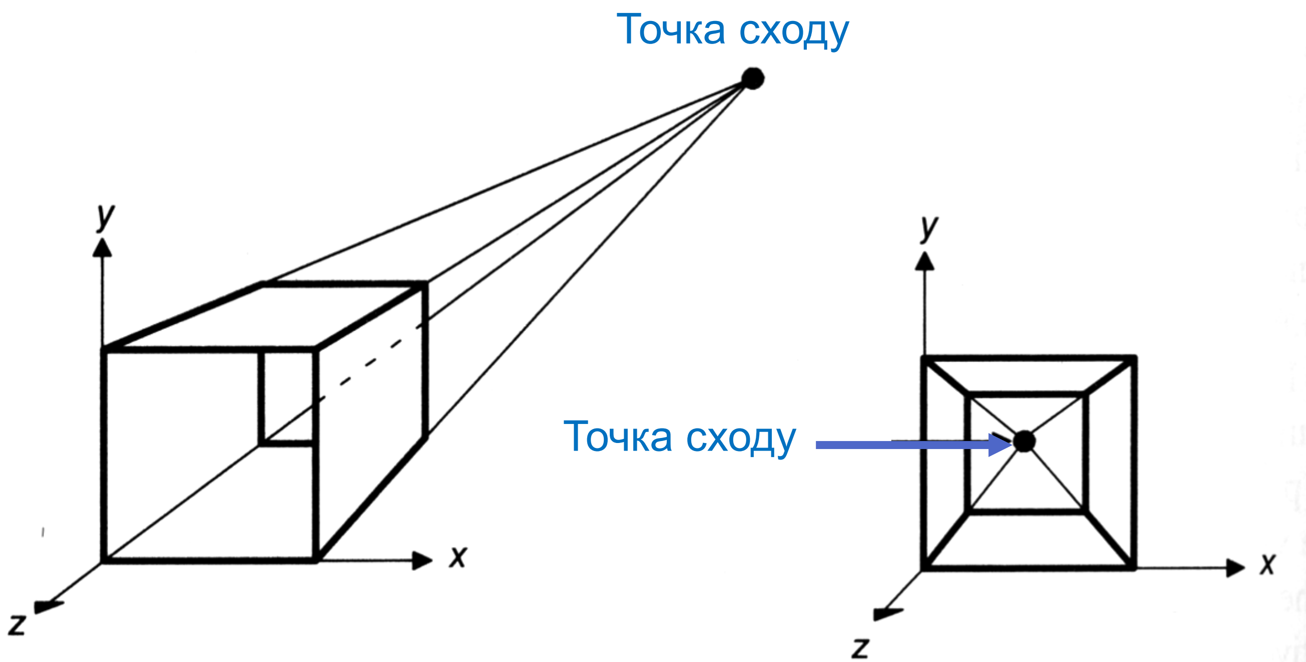
Триточкова



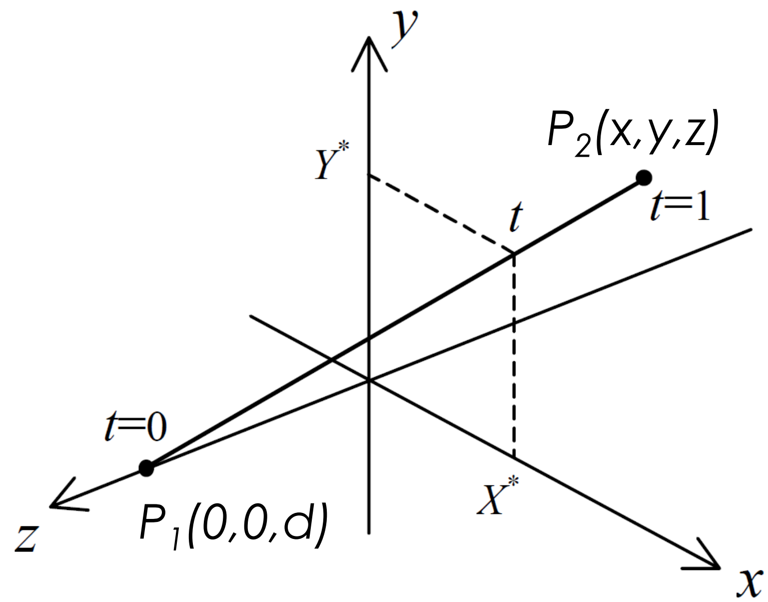
Двоточкова



Одноточкова центральна проекція



Отримаємо матрицю, яка визначає центральне одноточкове проеціювання, коли площина проектування перпендикулярна осі *Z* та розміщена на відстані *d* від початку координат.



Параметричне рівняння відрізка P_1P_2:

$$\begin{cases} x(t) = xt \\ y(t) = yt \\ z(t) = d + (z - d)t \end{cases}$$

Умова перетину з площиною проеціювання:

$$d + (z - d)t = 0$$

$$t = \frac{1}{1 - \frac{z}{d}}$$

Тоді матриця, що визначає центральне одноточкове проеціювання:

$$(X_n \quad Y_n \quad Z_n \quad W_n) = (X \quad Y \quad Z \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Питання:
Якими будуть матриці перетворення для двоточкового та триточкового проеціювання?

Питання?


ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ
Слайди до лекцій з дисципліни
«Математичні та алгоритмічні основи комп'ютерної графіки»
Лектор: к.т.н., доцент Сулема Є.С.
Каф. ПЗКС, ФПМ, КПІ ім. Ігоря Сікорського
2018/2019 навч. рік