南京大学数学课程试卷

2023/2024 学年第 二 学期 考试形式 闭卷 课程名称 概率论与数理统计

考试时间 2024.4.27 系别 ____________ 学号 ____________ 姓名 ____________

题 号	一 36	二 12	三 10	四 10	五 10	六 10	七 12	总 分
得 分								

$\Phi(1)=0.8413$, $\Phi(1.01)=0.8439$, $\Phi(1.99)=0.9767$, $\Phi(2)=0.9772$, $\Phi(2.05)=0.9798$, $\Phi(2.06)=0.9803$

一. (6 分 $\times 6 = 36$ 分)

1. 从 $1,2,3,4$ 中有放回地取四个数，求它们的乘积能被 6 整除的概率。

2. 已知某医院每天的新生婴儿数 X 服从泊松分布，并且每天出生两个婴儿的概率和每天出生三个婴儿的概率相同。求此概率与该医院每天出生一个婴儿概率之比。

3. 某人在区间 $[-2,1]$ 随机投点，如得到正数则算作成功。求此人投点四次至多成功两次的概率。

4. 已知随机变量 X 的密度函数为 $p_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ $(-\infty<x<\infty)$。求 $Y=X^2$ 的概率密度函数 $p_Y(y)$。

5. 设 100 只产品中含有一、二、三等品分别为 50、30、20 只。从中有放回地抽取 6 只，求恰有一、二、三等品各 2 只的概率。

6. 利用切比雪夫不等式估计一枚骰子抛 150 次抛得 6 点次数超过 20 次但少于 30 次的概率。

二.(12 分) 某地区公交车门高度计划按成年男性与车门碰头机会小于 2% 来设计。已知该地区成年男性身高 X 服从正态分布。工作人员对 2000 成年男性做抽样调查，其中身高高于 176 厘米的有 317 人，而身高不足 158 厘米的有 46 人。问车门高度 h 最低为多少?

三.(10 分) 某种元件每盒 10 只，每盒含 0、1、2 只次品的概率为 0.6、0.3、0.1。抽样检验，规定抽检 2 只，若无次品则可出厂。
(1) 任取一盒，求可以出厂的概率。
(2) 已知一盒元件可以出厂，求该盒元件无次品的概率。

四.(10 分) 某系统 L 由两个独立运行的元件 L_1 和 L_2 构成，且系统采用备用模式：L_1 损坏时 L_2 启动。已知两个元件的寿命均服从参数为 0.2 的指数分布。求系统 L 寿命 Z 的密度函数 $p_Z(z)$。

五.(10 分) 设随机变量 X_1，X_2，X_3 相互独立，且 $X_1 \sim U[0,3]$，$X_2 \sim N(1,1)$，$X_3 \sim E(2)$。令 $Y = 4X_1 - 3X_2 + 2X_3 - 1$。求 $E(Y)$ 及 $D(Y)$。

六.(10 分) 设随机变量 $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$, $Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}$。已知 $X+Y$ 为偶数的概率为 1，求 X 和 Y 的协方差 $\mathrm{cov}(X,Y)$。

七.(12 分) 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y) = \begin{cases} A\mathbf{sin}(x)\mathbf{cos}(y), & 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求常数 A；(2) 求 (X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y)$；(3) 问 X，Y 是否独立？