

# 2023春组合数学

## 1

1.  $k$ 人分 $n$ 个等价的硬币，有几种分法
2. 若每人至多一硬币，有几种分法
3. 若每人至少一硬币，有几种分法
4. 硬币改成两两互不等价，再做一遍

## 2

1. 利用二项式定理，证明 $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$
2. 组合证明 $\binom{p+q}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{p}{i} \binom{q}{k-i}$
3. 利用第2问证明第1问

## 3

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}), n > 1 \\ 1, n = 1 \\ 0, n = 0 \end{cases}$$

1. 求生成函数
2. 利用生成函数求通项

## 4

全班 $n$ 个同学，分 $m$ 个微信群，每个群 $k$ 个人，利用概率法证明

1. 总存在 $l$ 个人，使得至少有 $\frac{m \binom{n-k}{l-k}}{\binom{n}{l}}$ 个群的成员都在这 $l$ 人中
2. 若 $\frac{m \binom{n-k}{l}}{\binom{n}{l}} < 1$ ，总存在 $l$ 个人，每个群里都有这些人里的人
3. 选班委，每个群对本群群友有推荐或不推荐的意见，不同群的意见可以任意矛盾，若每个人最多加 $\frac{1}{ek} 2^k$ 个群，总有一种班委选择方式，使得每个群对本群群友的意见（推荐或不推荐）至少有一个符合

## 5

二分图 $G(U, V, E)$ ， $|U| = |V| = n$ ，最小度至少为 $n - d$ ，按下面的方法构造一个完全二分子图：对于 $U$ 中的点，以概率 $p$ 等概率随机独立选择作为 $S$ ，再从 $V$ 中选出和 $S$ 中的点均相邻的点作为 $T$ ，则 $S \times T$ 为 $G$ 的一个完全二分子图

1. 选择参数 $p$ ，使得对于 $G$ 中任意一条边 $uv$ ， $\Pr[u \in S \wedge v \in T] = \Omega\left(\frac{1}{d}\right)$
2. 利用概率法证明，对于 $r = O(d \log n)$ ，总存在一系列完全二分图 $S_1 \times T_1, S_2 \times T_2, \dots, S_r \times T_r$ ，其并集为 $G$

## 6

原神哈希（真正叫啥名字我忘了）是利用两个哈希函数 $f, h: S \rightarrow [m]$ 将集合 $S$ 中的元素散列到数组 $[a_1, a_2, \dots, a_m]$ 。对于 $S$ 中的元素 $s$ ，会哈希到 $f(s)$ 或 $h(s)$ 中不和别的元素冲突的位置。证明这种哈希方法不存在冲突当且仅当对于 $S$ 的任意子集 $T$ ，都有 $|f(T) \cup h(T)| \geq |T|$

