## 一、（共 4 题，共 15 分）

请明确回答下列问题，并简要证明你的结论：

1. 输入 n 个两两可比较的元素，最多存在多少个逆序对？平均情况下存在多少个逆序对（假设输入元素各不相同，所有可能的输入等概率出现）？（4 分）
2. 一个有向图的收缩图（condensation graph）是否可能存在环？（3 分）
3. 在对无向图进行 DFS 遍历时，是否可能出现 Cross Edge？（3 分）
4. 假设 A[1..n]为整数数组。考虑递归关系 W(i,j)如下图所示。我们用二维数组 W[0..n, 0..n]来记录子问题 W(i,j)的结果。我们是否可以实现一个动态规划算法，用 i 和 j 的两重循环来填满数组，进而计算所有子问题的结果？（5 分）

$$W(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i < 0 \text{ or } i > n \\ 0 & \text{if } j < 0 \text{ or } j > n \\ \max \begin{Bmatrix} W(i,j-1) \\ W(i-1,j) \\ A[i] \cdot A[j] + W(i+1,j+1) \end{Bmatrix} & \text{otherwise} \end{cases}$$

## 二、（共 15 分）

定义哈密尔顿回路问题（HC）和彩虹哈密顿回路问题（RH）如下：

HC：给定有向图 G，图中是否存在一条哈密尔顿回路？哈密尔顿回路的定义是，图中的一条路径，它从某个起点出发，访问图中每个顶点正好 1 次，并回到起点。

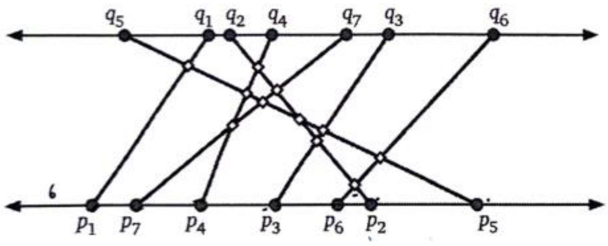
RH：给定一个有向图 G，图中的边可以被染色。图 G 中是否存在一条哈密尔顿回路，并且回路中的任意两条相邻的边颜色均不同？

你需要首先选择 HC 和 RH 中的一个问题，并假设它是 NP-Complete 的（无需证明）。以此为基础，请证明另一个问题是 NP-Complete 的。

**三、（共 20 分）**

给定两根平行直线，下面的直线上有点$\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$，上面的直线上有点$\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$，我们将所有的$p_i$和$q_i$相连$(1 \le i \le n)$，得到 n 条线段，如下图所示。请设计一个 O(nlogn)的算法，计算给定的 n 条线段中，有多少对（两条线段为 1 对）线段是相交的。

注：问题的输入为每个点的坐标，并且你可以在 O(1)的时间内对两个点的坐标进行大小比较。




**四、（共 10 分）**

给定一个带权的有向图 G。对于图中的一个顶点 u，其离心率$\epsilon(u)$定义为点 u 到其它顶点的最短路径的最大值，即$\epsilon(u) = \max\{\delta(u, v) | v \in V\}$，其中$\delta(u, v)$表示 u 到 v 的最短路径权值。

图 G 的加权半径$R(G)$定义为其中顶点的离心率的最小值，即$R(G) = \min\{\epsilon(u) | u \in V\}$。

对于输入的带权有向图 G，其中有 n 个顶点，其边权可以为正也可以为负，但图中没有负权环。请设计一个$O(n^3)$的算法计算图 G 的加权半径值$R(G)$。

## 五、（共 20 分）

给定一个有向图 G，该图的每个顶点都是红、蓝、绿三色之一。图 G 中的边是无权的，且 G 不一定是 DAG 图。

定义一个顶点 v 的 remoteness 值 r(v)为以下三个最小值中的最大值：

1) 所有红色顶点到 v 的最短路径的最小值。
2) 所有蓝色顶点到 v 的最短路径的最小值。
3) 所有绿色顶点到 v 的最短路径的最小值。

给定图 G，请设计一个线性时间的算法，找出图中 r(v)值最小的点 v。
注 1：为了避免边界情况，你可以假设对于任意节点 v，均存在多个红色、蓝色、绿色节点通向 v。
注 2：对于一个红色节点 w 而言，所有红色节点到 w 的最短路径的最小值，即为其自己到自己的路径，长度为 0。其它两种颜色情况类似。

## 六、（共 20 分）

多米诺骨牌放置问题：给定一个$2\times n$的矩阵，矩阵的每个格子都有相应的分值（分值为整数，可正可负）。一个示例如下图所示。现在我们有充分多张大小为 $1\times 2$的多米诺骨牌，每张骨牌可以水平放置，也可以垂直放置。如下图所示，所有黑色格子放置的是垂直骨牌，所有其他格子放置的是水平骨牌。

我们可以采取多种方案来用骨牌将给定的矩阵填满（骨牌不能重叠，矩阵的每个格子必须被覆盖）。对于每种方案，我们定义其分值为：所有垂直骨牌盖住的分值之和，减去所有水平骨牌盖住的分值之和。例如下图所示的放置方案，其分值之和为(1+5) + (3+2) – (2-5) – (4+7) – (5+8) – (-7+4)。（注意：分值是隶属于矩阵中的每个格子的，骨牌本身并没有分值。）

请设计一个算法，对于二维矩阵 A[1 .. 2, 1 .. n]，计算其分值最大的多米诺骨牌放置方案。

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | -5 | 3 | 5 | 8 |
| 5 | 4 | 7 | 2 | -7 | 4 |

答卷（试做）

一

（1） 最多存在$\frac{n(n-1)}{2}$个逆序对，平均存在$\frac{n(n-1)}{4}$个逆序对

（2） O(n)

（3） 不存在

（4） 不存在

（5） 不能，循环依赖

二、

HC 归约到 RH：将 HC 问题的输入的每一条边都染上不同的颜色。

反过来：暂时没有更好的做法，可以考虑先把 RH 归约到 3-SAT 上，在从 3-SAT 出发归约到 HC 上。如果有更好的做法欢迎贡献。

三、

直线 P 上面的点有{p1,p2,p3,...pn}，直线 Q 上面有点{q1,q2,q3,...q4}

思路：

将 P 上的点按坐标从小到大排序得到一个有序数列 A {a1, a2, a3, ... , an}

这里 ai 对应着一个顶点 pj，其在直线 Q 上有对应顶点 qj

以 A 的大小为序，求在直线 Q 上对应的顶点之间有多少个逆序对（即 pi < pj, qi > qj），就有多少个相交顶点。

算法：

首先将 Q 数列从小到大排序。

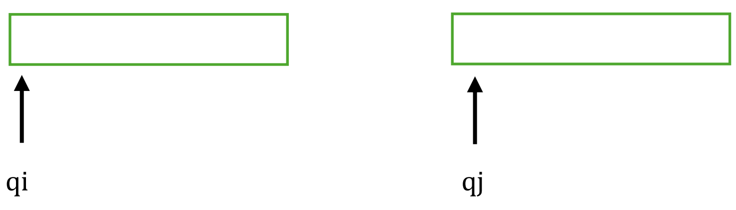
用基于归并排序的分治递归的逆序对算法即可得到结论，只需要对关键操作做如下改动：

归并排序时，根据对应点的 pi 的大小关系，对 Q 中的点进行排序；

每次比较两个元素 qi 和 qj 是否时，查找对应的 pi 和 pj 的大小关系；

若 pi < pj，按归并排序将 qi 移动到下一个位置；

若 pi > pj，则产生逆序对，在子问题中 qi 之后到所有元素都和 qj 产生逆序关系。




四、

使用 Floyd 算法计算出图中所有的顶点两两之间的最短路径；

对每个顶点，查看他到其他顶点的最短路径的最大值，即离心率；从所有离心率中查找最小

的那个。

五、

将图的所有边的方向转置。

基于 BFS 遍历来计算每个节点的 rR, rB, rG 三个值（即 RGB 三种颜色顶点到该点的最短路径的最小值，初始化为一个足够大的值），只需要在 BFS 遍历时做如下操作：

从双亲节点 u 遍历新节点 v 时：

若 v 为红色，则 v.rR = 0， v.rB = min{u.rB+1, v.rB}， v.rG = min{u.rG+1, v.rG};

若 v 为另外两种颜色，做类似的处理；

计算每个节点的 r(v) = max{v.rR, v.rB, v.rG}；

找到所有 r(v)中最小的那个。

线性时间完成。

六、

使用动态规划：

1. 定义子问题 ：
   MaxVal(i): 矩阵 Points [1 .. 2, i .. n] 使用多米诺骨牌进行覆盖可以得到的最大分值。
2. Base case ：
   MaxVal(n) = Points[1,n] + Points[2,n]; MaxVal(i) = 0, i > n;
3. 计算目标： MaxVal(1)
4. 递推公式：
   MaxVal(i) = Max { Points[1,i] + Points[2,i] + MaxVal(i+1) ;

   -(Points[1,i] + Points[2,i] + Points[1,i+1] + Points[2,i+1]) + MaxVal(i+2) }

时间复杂度 O(n)