得分	

1、　　（本题满分 **15** 分）

简答题：

1) 请分析快速排序的最坏情况时间复杂度。
2) 请从红黑树定义的角度简要分析，它是如何保证 O(logn)的查找代价的。
3) 有向图的 condensation graph 是否可能有环？
4) 对无向图进行 DFS 时，DE (Descendent Edge)是否会出现，它有什么样的性质？
5) 假设我们为一个 NP 完全问题 A 找到了多项式时间算法，则可以证明 P=NP。请简述证明思路。

得分	

2、（本题满分 10 分）

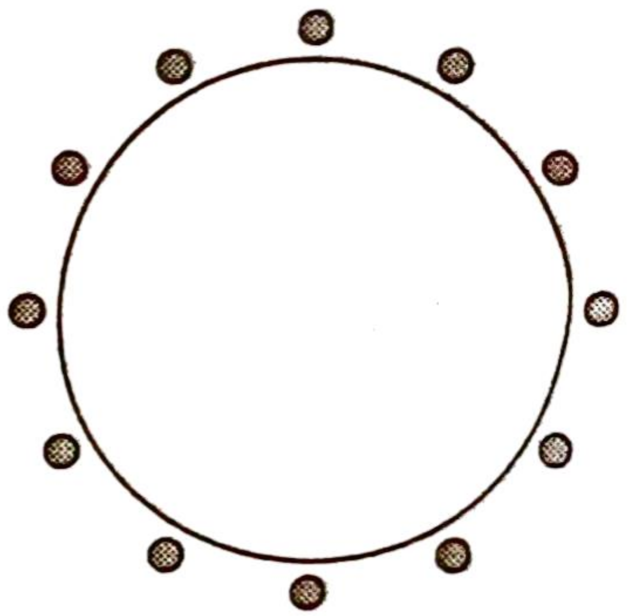
对于有向图 G，图中有 n 个顶点，图中的每条边(v_i,v_j)，有权重 $0<p(i,j)<1$，表示该边的可用概率。一条路径的可用概率定义为该路径上所有边的可用概率的乘积。请对图中的所有点对(v_i,v_j)，计算 v_i 到 v_j 的最大可用概率的路径的可用概率值（或者返回两点之间不存在路径）。

1) 请设计一个 $O(n^3)$算法，解决上述问题，并论证算法的时间复杂度。

2) 请用归纳法，详细证明你所提算法的正确性。

得分	

3、（本题满分 15 分）



现要安排一队武士在圆桌边入座，如图所示。若两个武士之间互相憎恨，则不能坐在相邻的位置。武士问题(KNI)定义为：

输入：n 名武士 $v_1, v_2, \ldots, v_n$。m 条边 $e_1, e_2, \ldots, e_m$，边 $e_i=(u,v)$表示武士 u 和 v 之间互相憎恨。

问题：是否存在满足要求的座位安排？

1) 请证明 KNI 问题是 NP 问题。

2) 请证明 KNI 问题是 NP 完全问题。

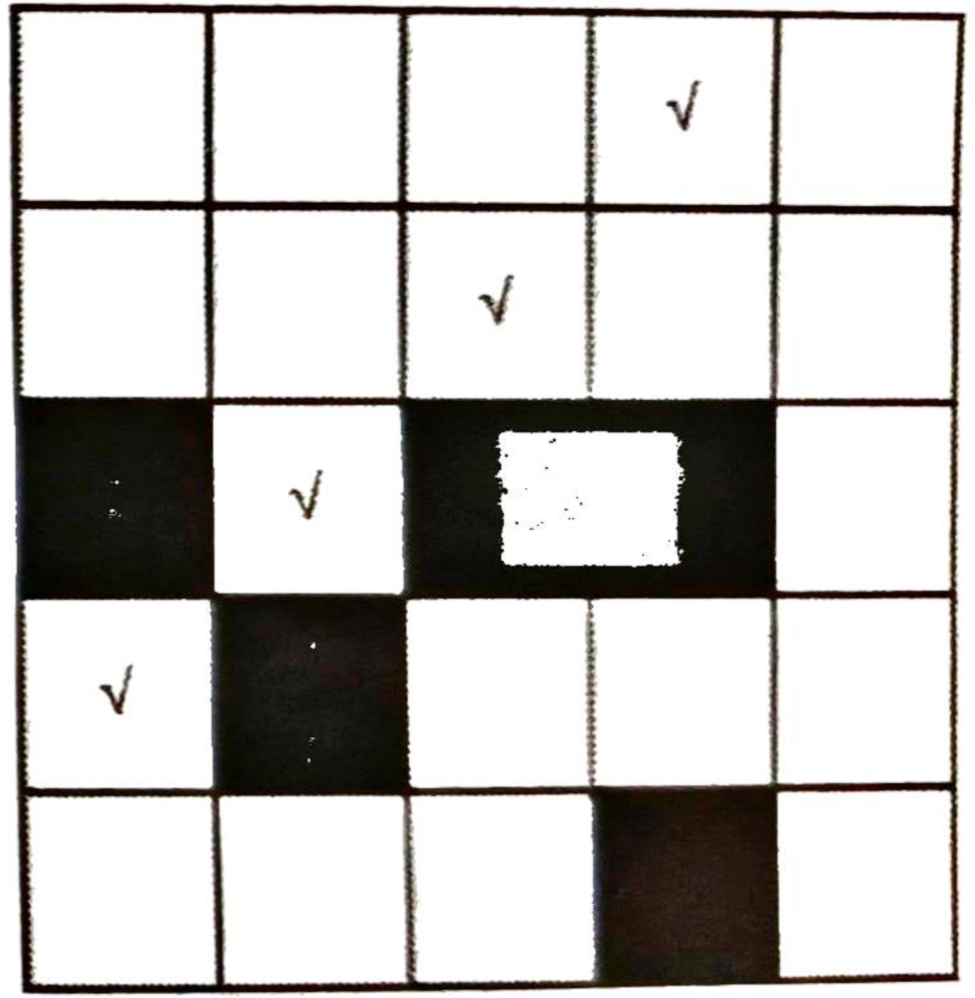
注：证明过程中你可以使用如下结论： UHC（无向图的哈密尔顿回路）问题是 NP 完全问题。UHC 问题的定义是：给定无向图 G，判断 G 中是否存在哈密尔顿回路。

得分	

4、（本题满分 20 分）

给定一个$n \times n$的正方形网格，其中每个格子有“空”和“非空”两种情况。如图所示，白色表示该格子为空，黑色表示该格子为非空。利用空的格子可以构建多条“对角线”，即由左上到右下，或者由右上到左下，对角相邻的格子构成的斜线。

对于输入的$n \times n$的网格及其每个格子是否为空的信息，请设计一个 $O(n^2)$的算法计算网格中长度最长的对角线所包含的格子数。例如图中的例子，最长的对角线如含‘√’的空格子所示。



得分	

5、（本题满分 20 分）

我们使用$G=(V,E,w)$表示带权无向图，其中$w(\cdot)$为边的权重函数。给定任意带权无向图$G=(V,E,w)$和整数k，我们定义G_k为将G中权重大于等于k的边全部删除后得到的图。

现给定一个带权无向图$G=(V,E,w)$，已知 G 是连通的，图中每条边的权重互异且均为整数。

请设计一个最坏情况时间复杂度为$O(|E|\log|E|)$的算法来找到使得G_k不连通的最大整数k。

得分	

6、（本题满分 20 分）

给定一个有向图$G = (V, E)$，如果对于任意两个互异的顶点 u 和 v，存在一条从 u 到 v 的路径或一条从 v 到 u 的路径，那么我们称该有向图为半连通的（semi-connected）。下面我们将逐步得出一个线性时间的算法，判断一个有向图是否是半连通的。

1) 对于有向无环图 G，对它进行拓扑排序，每个点的拓扑序号为 1,2,…,n，每条边都是从拓扑序号小的点指向拓扑序号大的点。请证明 G 是半连通的，当且仅当对于任意拓扑序号对 i<j，总是存在从点 i 到点 j 的路径。
2) 对于任意有向图 G，请设计一个线性时间($O(|V| + |E|)$)的算法，判断 G 是否是半连通的。