写给弟子们

高阶全驱系统方法

段 广 仁

FIEEE, FIET, FCAA

中国科学院院士

哈爾濱工業大學

航天学院 控制理论与制导技术研究中心

个人主页 http://homepage.hit.edu.cn/duanguangren

汇报提纲

一、状态空间方法

二、状态空间方法的缺陷

三、高阶全驱模型

四、全驱系统方法

五、结束语

18世纪

欧拉，Leonhard Euler，（1707-1783）

- 瑞士数学家、物理学家、天文学家

- 1727年
  - 通过引进著名的指数代换，也将一类二阶常微分方程化为一阶方程
- 1750年
  - 提出了求解 n 阶非齐次常系数线性微分方程的降阶法，将高阶方程化为一阶方程求解
- 先入为主
  - 对控制系统的模型以及状态求解和估计产生了直接影响

起源

- **前身**
  - Euler求解n阶微分方程的降阶法（1750）
  - Lyapunov方法（1892）
- **标志**

  Kalman R E. On the general theory of control systems,
  IRE Transaction on Automatic Control, 1959, 4(3): 110-110
  Proceedings of the 1st IFAC Moscow Congress, 1960, 1(1): 491-502

  - 首次提出了状态空间方法，在时间域内采用状态和状态空间描述了一阶连续/离散线性时变/定常系统，并在状态空间中研究了连续/离散线性定常系统的能控、能观性，为现代控制理论的发展奠定了基础。

优点

注重状态的整体性，对下述问题提供了方便

- **系统的求解（responses）**
  - Euler关于求解高阶非齐次常系数线性微分方程降阶法的推广
- **状态估计**
  - 状态观测器
  - 状态滤波、预报

但对于解决系统控制问题没有提供足够的方便

汇报提纲

一、状态空间方法

二、状态空间方法的缺陷

三、高阶全驱模型

四、全驱系统方法

五、结束语

总体情况

- 1982年的综述论文这样评价：
  - *"All current indications point toward the conclusion that seeking a completely general theory of nonlinear systems is somewhat akin to the search for the Holy Grail: a relatively harmless activity full of many pleasant surprises and mild disappointments, but ultimately unrewarding."*
  - "是相对无害的活动。充满了许多愉快的意外和轻微的失望，而最终则是白费力气"。
- 虽然30多年过去了，目前仍然没有出现重大突破的结果

Gao W B, Cheng M, Xia X H. The Development of Nonlinear Control System. *Acta Automatica Sinica*, **17**(5): 513--524 (高为炳, 程勉, 夏小华. 非线性控制系统的发展. 自动化学报, **17**(5): 513--524)

Casti J L. Recent Development and Future Perspectives in Nonlinear System Theory, *SIAM Review*, 1982, **24**(3): 301--331

总体情况

- 时值1995年，非线性系统理论还被称为
  – “Nonliniear systems theory, almost everything [is open]”

    - Davison

  – “We need a much better understanding of nonlinear

    systems” - Aström

Blongdel V, Gevers M, Lindquist A. Survey on the state of systems and control. *European Journal of Control*, 1995, **1**(1):1--5

- 一阶系统方法的结果目前还远不完善

镇定问题

	状态空间方法	
闭环线性系统	极其少	
全局指数稳定	很少	
全局渐近稳定	较少	
局部渐近稳定	很多	
局部稳定	较多	
不会解	有	

能控性与可稳性

1、能控性的总体现状

2、可稳性的总体现状

1 从数学到数学，结果不便于应用

- 系统分析中最重要的问题
- 一阶系统卡尔曼意义下的能控性定义本质上依赖于系统的响应（解），
  - 只有在线性的情形才能给出有效实用的判据，也只有线性的情形才是状态空间方法能控性的成功之处，
  - 非线性系统的求解很复杂，自然导致非线性系统的能控性分析问题非常棘手。
- 如果说控制理论中存在脱离实际应用、陷入抽象数学研究的内容，那首先要数控制系统的能控性分析了：
  - 许多工作从问题的描述到中间的推演，以至于到最后结果的表述，都没有跳出李代数、微分流形和场论等一些抽象数学分支的范畴，距离实际应用较远。

2 定义繁多

- global controllability
- local controllability
- relative controllability
- closed controllability
- strong controllability
- weak controllability
- vibrational controllability
- norm-controllability
- N-step controllability
- asymptotical controllability
- ……

只因做不出好结果，
才不得不引出如此
诸多定义

3 不支持系统设计

- Brocket1983 “provides a counter example to the oft repeated conjecture asserting that a reasonable form of local controllability implies the existence of a stabilizing control law”:
  - "Our main results are formulated in Theorems 1 and 2 below. Whereas it might have been suspected that controllability would insure the existence of a stabilizing control law, Theorem 1 uses a degree-theoretic argument to show this is far from being the case." Additionally,
  - “非线性系统的能控性（结果）和镇定之间的关系是不明显的”。

Brocket R W. *Asymptotic Stability and Feedback Stabilization*. Boston: Differential Geometric Method in Nonlinear Control Theory Birkhauser, 1983, 112--121

Gao W B, Cheng M, Xia X H. The Development of Nonlinear Control System. *Acta Automatica Sinica*, **17**(5): 513--524 (高为炳，程勉，夏小华．非线性控制系统的发展．自动化学报, **17**(5): 513--524)

4 体系上存在问题

- 能控性只是针对一阶状态空间模型提出的。关于其它形式的系统，也应该有能控性问题，但如何定义呢?
- 对于输入输出形式描述的线性系统，一个自然的想法便是考虑其状态空间实现的能控性。但一个输入输出系统(1)可能既有能控的状态空间实现，也同时有不能控的状态空间实现。
- 可否用输入输出系统的最小实现的能控性来定义其能控性呢？这样岂不是解决了能控性不确定的问题吗？这样，但所有的输入输出系统系统全都是能控的了，也就没有再定义其能控性的必要了。

能控性与可稳性

1、能控性的总体现状

2、可稳性的总体现状

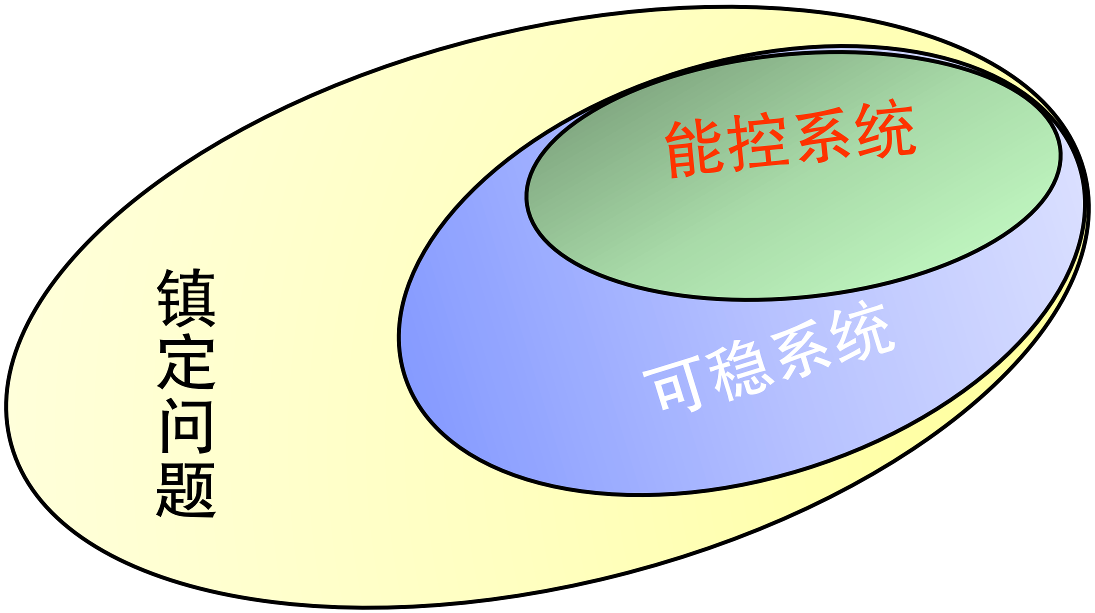
线性系统的情形—成功之处

- 可稳性本身的普遍性
  - 状态反馈
  - 输出反馈
  - 动态控制器
  - 镇定问题的解的存在条件

- 可稳性定义的狭义性

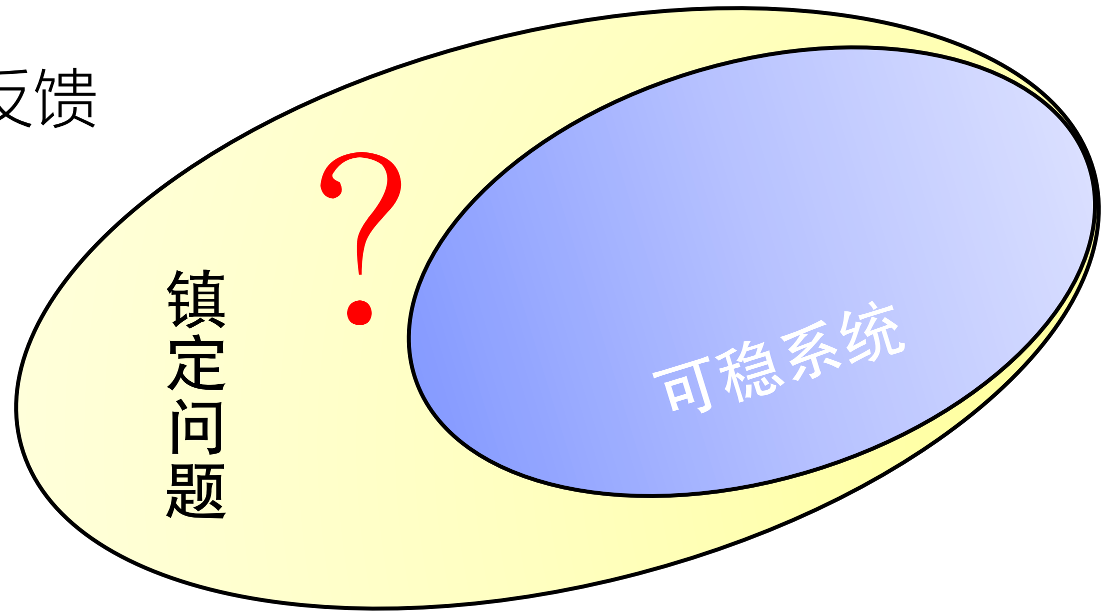
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = Kx \end{cases}$$

- 与能控性的边界



非线性系统的可稳性

- 镇定问题
  - 各种系统 + 各种反馈
  - 状态反馈
  - 输出反馈
  - 动态控制器



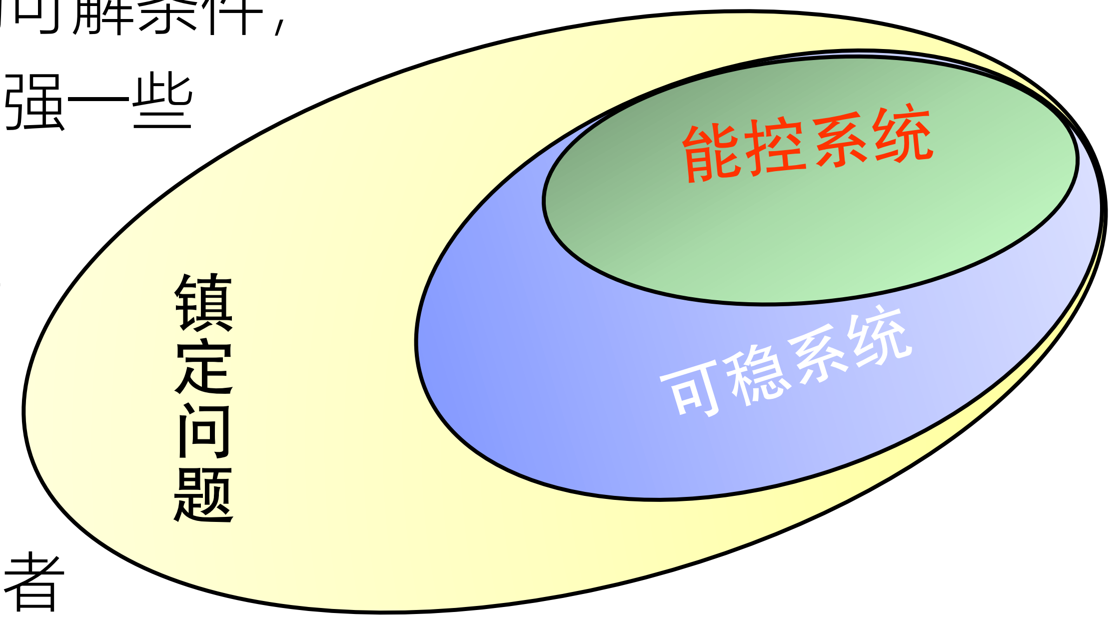
- 可稳性
  - 镇定问题的解的存在条件

不存在一个公认的狭义的可稳性定义！

—因为人们不知道用什么样的系统和控制器来说事

可稳性与能控性

- 二者均是镇定问题的可解条件，只不过能控性条件更强一些
- 对于线性系统，二者有明确的边界
- 对于非线性系统，二者之间没有边界
  - 某些能控性不能保证系统的渐近镇定控制律的存在性
  - 某些能控性问题实际上是在解决系统的可稳性问题



汇报提纲

一、状态空间方法

二、状态空间方法的缺陷

三、高阶全驱模型

四、全驱系统方法

五、结束语

一阶系统

系统

$$E\dot{x} = f(x,t) + B(x,t)u$$

控制律

$$u = B^{-1}(x,t)\left[A_0 x - f(x,t) + v\right]$$

闭环系统

$$E\dot{x} = A_0 x + v$$

- 闭环特征多项式可以任意配置！
- 但遗憾的是，这样的系统几乎不存在！

全驱系统（physical）

物理系统（机械、航天等）

$$M(x,\dot{x},t)\ddot{x}+D(x,\dot{x},t)\dot{x}+K(x,\dot{x},t)x=u$$

可逆

广泛存在！

一般地，有

$$E\ddot{x}=f(x,\dot{x},t)+B(x,\dot{x},t)u$$

$$\det B(x,\dot{x},t)\neq 0,\ \forall x,\ \dot{x}\in\mathbb{R}^n,\ t\geq 0$$

控制律

$$u=-B^{-1}(\cdot)[A_1\dot{x}+A_0x+f(x,\dot{x},t)-v]$$

闭环系统

$$E\ddot{x}+A_1\dot{x}+A_0x=v$$

——闭环特征多项式可以任意配置！

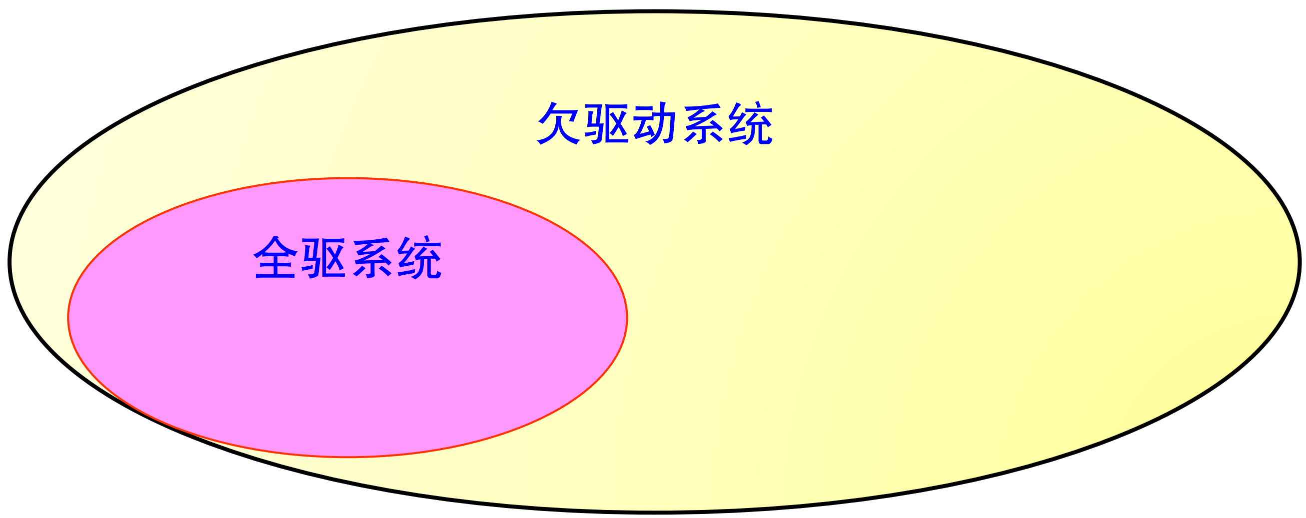
一声叹息

全驱系统这么好!

真希望世界上所有的系统都是全驱系统!

只可惜这个世界上还有更多的欠驱动系统!

有没有办法多造出一些全驱系统来呢!



一种现象

$$\dot{X}=A(X,t)X+B(X,t)u$$

变量增广

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}0 & I\\ -A_0(X,t) & -A_1(X,t)\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}0\\ B_0(X,t)\end{bmatrix}u$$

消元升阶

$$\ddot{x}+A_1(x,\dot{x},t)\dot{x}+A_0(x,\dot{x},t)x=B_0(x,\dot{x},t)u$$

一阶非全驱系统可以转化为一个二阶的全驱系统！

一种尴尬

变量增广

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_0(X,t) & -A_1(X,t) \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ B_0(X,t) \end{bmatrix} u$$

消元升阶

$$\ddot{x} + A_1(x,\dot{x},t)\dot{x} + A_0(x,\dot{x},t)x = B_0(x,\dot{x},t)u$$

我们曾把太多的二阶全驱系统化成状态空间模型求解！

破坏了系统的全驱性，的品质降低了问题解

如空间交会问题

机器人领域的认识与实践

一种引申

$$\dot{X}=A(X,t)X+B(X,t)u$$

变量增广

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}0 & I\\ -A_0(X,t) & -A_1(X,t)\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}0\\ B_0(X,t)\end{bmatrix}u$$

消元升阶

$$\ddot{x}+A_1(x,\dot{x},t)\dot{x}+A_0(x,\dot{x},t)x=B_0(x,\dot{x},t)u$$

既然一阶系统可以转化为一个二阶的全驱系统，那么，

二阶的欠驱系统可否化为高阶的全驱系统呢？

全驱系统（mathematical）

一般地，考虑如下的高阶系统

$$Ex^{(m)} = f(x,\dot{x},\cdots,x^{(m-1)},t) + B(x,\dot{x},\cdots,x^{(m-1)},t)u \tag{8}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 称为基础状态向量。

令 $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$，$i = 0,1,\cdots,m-1$，为一组集，且记

$$\Omega = \Omega_0 \times \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{m-1}$$

并引入下述全驱条件

条件 C1： $\det B(x,\dot{x},\cdots,x^{(m-1)},t) \neq 0,$

$$\forall x^{(i)} \in \Omega_i,\ \ i = 0,1,\cdots,m-1,\ t \geq 0$$

全驱系统（mathematical）

命题 1. 当上述全驱条件 C1 满足时，对于任何给定的定常矩阵 $A_i,\ i=0,1,\cdots,m-1$，都可以选取系统(8)的下述控制律

$$u=-B^{-1}(\cdot)\left[\sum_{i=0}^{m-1}A_i x^{(i)}+f(x,\dot{x},\cdots,x^{(m-1)},t)-v\right] \tag{9}$$

获得如下的线性定常闭环系统

$$Ex^{(m)}+A_{m-1}x^{(m-1)}+\cdots+A_1\dot{x}+A_0x=v \tag{10}$$

鉴于矩阵 $A_i,\ i=0,1,\cdots,m-1$，的任意性，我们可以通过合理地选择这些矩阵获得希望的闭环系统特性。

全驱系统—不等阶情形

$$\begin{bmatrix} x_1^{(\mu_1)} \\ x_2^{(\mu_2)} \\ \vdots \\ x_\eta^{(\mu_\eta)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1\left(x_k^{(0\sim\mu_k-1)}|_{k=1\sim\eta}, \zeta, t\right) \\ f_2\left(x_k^{(0\sim\mu_k-1)}|_{k=1\sim\eta}, \zeta, t\right) \\ \vdots \\ f_\eta\left(x_k^{(0\sim\mu_k-1)}|_{k=1\sim\eta}, \zeta, t\right) \end{bmatrix} = B\left(x_k^{(0\sim\mu_k-1)}|_{k=1\sim\eta}, \zeta, t\right) u;$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(\mu_1)} \\ x_2^{(\mu_2)} \\ \vdots \\ x_\eta^{(\mu_\eta)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1\left(x_k^{(0\sim\mu_k-1)}|_{k=1\sim\eta}, \zeta, t\right) \\ f_2\left(x_k^{(0\sim\mu_k-1)}|_{k=1\sim\eta}, \zeta, t\right) \\ \vdots \\ f_\eta\left(x_k^{(0\sim\mu_k-1)}|_{k=1\sim\eta}, \zeta, t\right) \end{bmatrix} = g\left(x_k^{(0\sim\mu_k-1)}|_{k=1\sim\eta}, \zeta, t, u\right)$$

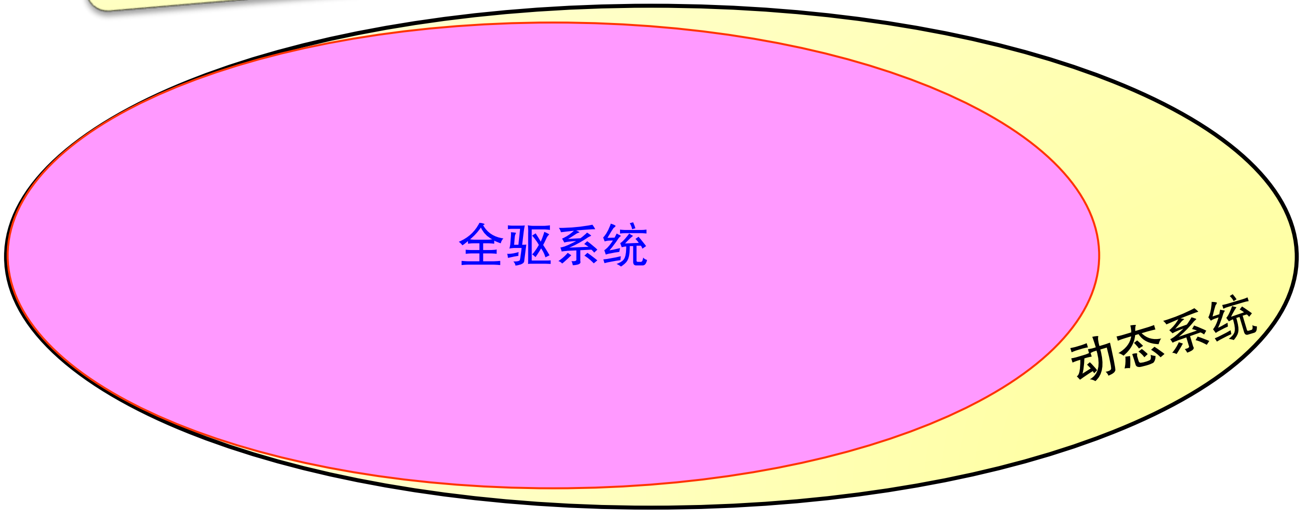
全驱系统知多少?

经过数学上的推广，全驱系统的集合确实扩大了很多。

这些系统都可以通过控制获得定常的线性系统，而且这些系统的闭环特征多项式均可以任意配置。

今再问，全驱系统知多少?

很多！我们从两个角度说明



可转化的系统

本人最近证明了下述系统均可以化成

高阶全驱(HOFA)系统

- 所有的能控线性系统
- 一类非线性系统能控标准型（高为炳，程勉, 夏小华，1991)
- 所有可反馈线性化的非线性系统
- 非线性严反馈系统
- 更广泛的一类非线性系统

牛顿定律

众所周知，关于质点平动（牛顿定律）和刚体绕定轴转动的规律可以描述如下：

$$m\ddot{x}=u \tag{11}$$

其中m为质点的质量或刚体的转动惯量，u为作用在该质点或刚体上的力（矩）。显然这是一个二阶全驱系统。

动量（矩）定理

考虑由 n 个质点构成的质点系，第 i ($i = 1, 2, \ldots, n$) 个质点 P_i 的质量为 m_i，其矢径为 r_i。则该质点系的动量定理和动量矩定理分别为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i\right) = u \tag{12}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i \times m_i \dot{x}_i\right) = u \tag{13}$$

其中 u 为作用于该质点系上外力系对同一点的主矢（矩）。容易看出，由上述两个方程决定的系统均为二阶全驱系统。

拉格朗日方程

如果质点 P_i 在主动力 u_i 作用下运动。系统的自由度为 s，位形由广义坐标 q_j (j=1,2,…,s)确定，即

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \cdots, q_s, t), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

则有拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = u_k, \quad k = 1, 2, \cdots, s \tag{14}$$

其中的系统动能

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{r}_i^2 \tag{15}$$

不难理解，由(14)和(15)决定的系统也为二阶全驱系统。

基于拉格朗日方程的建模

多工业系统都可以基于拉格朗日方程建立下述形式的模型：

$$M(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+G(q)+F(\dot{q})+T_d=\tau \quad (16)$$

其中，

$$q=[q_1 \quad q_2 \cdots q_s]^{\mathrm{T}}$$

为广义坐标，$M(q)$ 表示惯量矩阵，$C(q,\dot{q})$ 表示离心和科式矩阵，$G(q)$ 表示重力力矩向量，$F(\dot{q})$ 表示摩擦力矩向量，T_d 表示未建模动态和外部扰动，u 表示外部力矩。

基尔霍夫定律

另外，关于基本的电压源驱动的RLC串联电路，有下述的基尔霍夫电压定律

$$LC\ddot{x}+RC\dot{x}+x=u \tag{17}$$

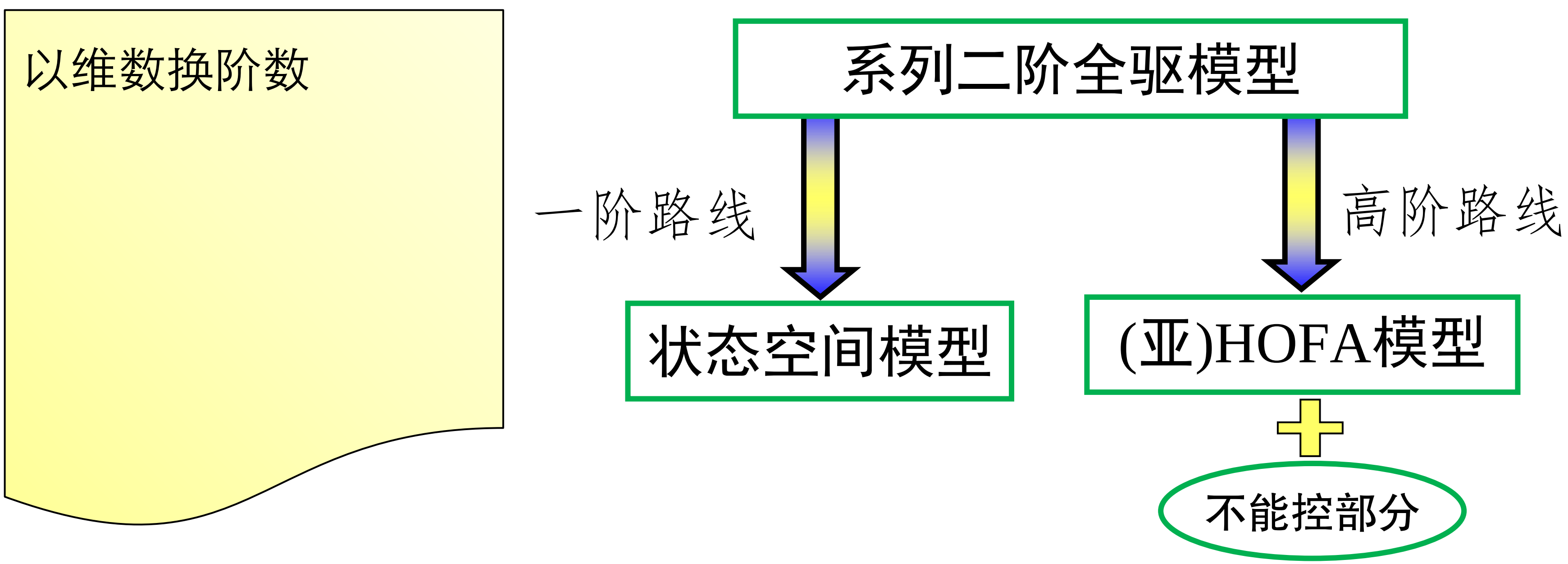
关于基本的电流源驱动的RLC并联电路，有下述基尔霍夫电流定律

$$LC\ddot{x}+\frac{L}{R}\dot{x}+x=u \tag{18}$$

在上述两个方程中，x分别代表电容两端的电压和通过电感的电流，u分别代表控制电压和控制电流，L, R, C分别为电路中的电感、电阻和电容。

基于物理定律的建模

- 基于这些物理定律进行建模时，首先所获得的是一个或者一系列二阶全驱模型
- 一阶路线（变量增广法、降阶法）- 下行路线
- 高阶路线（消元法、升阶法）- 上行路线

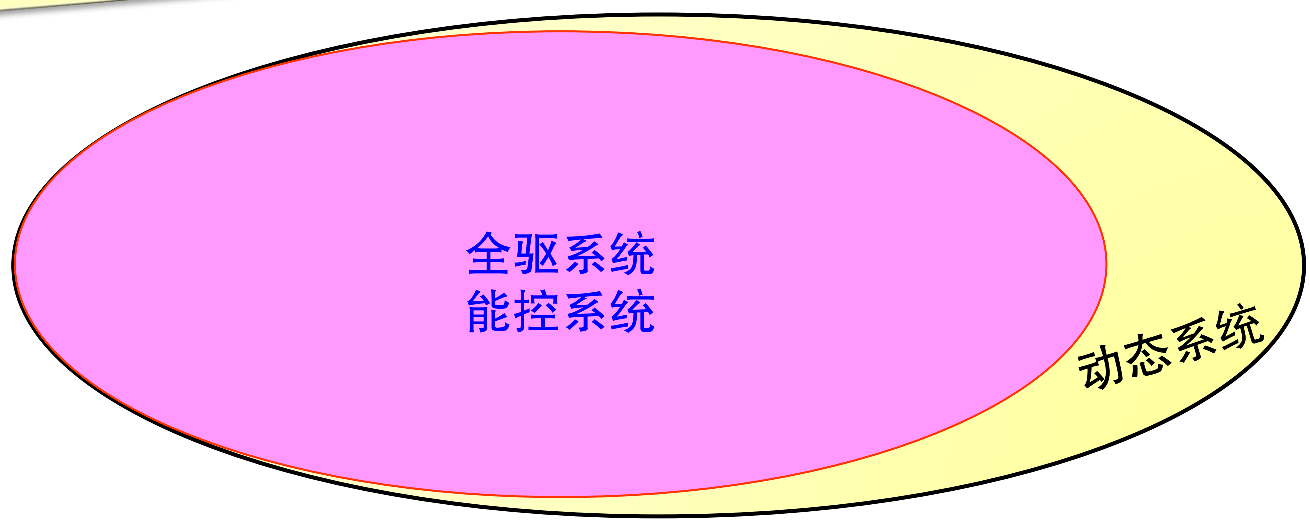


结论

新概念下的全驱系统广泛存在！

Model for Control

再见到HOFA模型时，请别再误以为它很特殊！



汇报提纲

一、状态空间方法

二、状态空间方法的缺陷

三、高阶全驱模型

四、全驱系统方法

五、结束语

方法概述

- 获得系统的HOFA模型（替代状态空间模型）；
- 利用全驱特性设计控制器。
- 除了前述基本情况外，还可能同时处理
  - 干扰、不确定非线性、未知参数等因素的影响；
  - 对参考信号的跟踪、系统变量受限等各种问题。

近期工作 - 自动化学报

1. 段广仁. 高阶系统方法—I. 全驱特性与参数化设计. 自动化学报, 2020, 41(7): 1333–1345
2. 段广仁. 高阶系统方法—II. 能控性与全驱性. 自动化学报, 2020, 46(8): 1571–1581
3. 段广仁. 高阶系统方法—III. 能观性与观测器设计. 自动化学报, 2020, 46(8): 1885–1895

近期工作 - Int J System Sciences

High-order fully actuated system approaches

Part I. Models and basic procedure.
- DOI:10.1080/00207721.2020.1829167

Part II. Generalized strict-feedback systems.
- DOI:10.1080/00207721.2020.1829168

Part III. Robust control and high-order backstepping.
- DOI:10.1080/00207721.2020.1849863

Part IV. Adaptive control and high-order backstepping.
- DOI:10.1080/00207721.2020.1849864

Part V. Robust adaptive control.
- DOI:10.1080/00207721.2021.1879964

Part VI. Disturbance attenuation and decoupling.
- DOI:10.1080/00207721.2021.1879966

Part VII. Controllability, stabilizability and parametric design.

Part VIII. Optimal control with application in spacecraft attitude stabilization.

Part IX. Generalized PID control.

Part X. Discrete-time systems.

两种方法论

系 统 建 模

一阶路线

高阶路线

状态空间模型

(亚)HOFA模型 + 不能控部分

$$\dot{x} = f(x,t) + B(x,t)u$$

$$x^{(m)} = f(x,\dot{x},\cdots,x^{(m-1)},t) + B(x,\dot{x},\cdots,x^{(m-1)},t)u$$

降秩

满秩

两种方法论

$$\dot{x} = f(x,t) + B(x,t)u$$

降秩

以状态为主（可以解出来），更适用于状态求解和估计；

控制系统设计严重依赖于$f(\cdot)$和$B(\cdot)$的复杂性，可能导致

- 求不出问题的解
- 只能获得局部稳定解
- 闭环系统为仍非线性

$$x^{(m)} = f(x,\dot{x},\cdots,x^{(m-1)},t) + B(x,\dot{x},\cdots,x^{(m-1)},t)u$$

满秩

以控制量为主（可以解出来），更适用于控制问题的求解；

控制系统设计变得极其简单；

闭环系统不再依赖于$f(\cdot)$和$B(\cdot)$的复杂性；

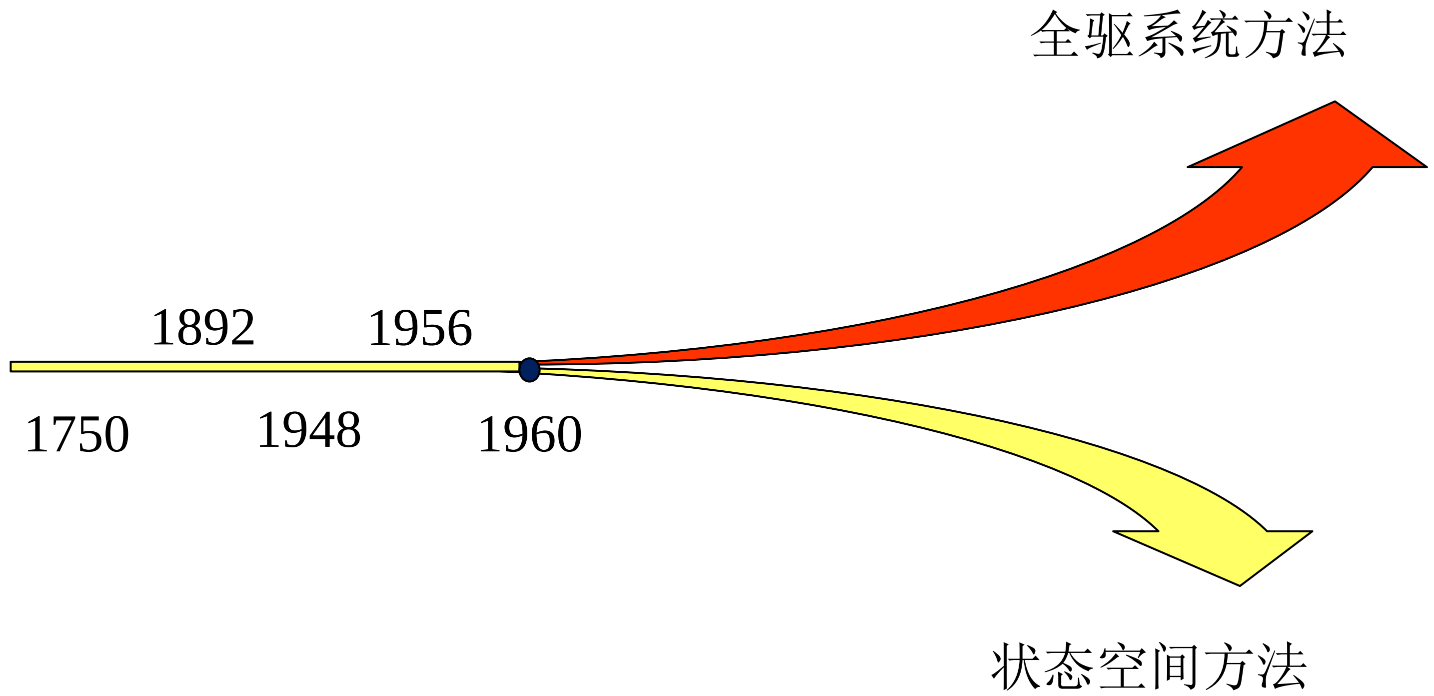
可以获得闭环系统的定常线性主部。

两种不同结果

	状态空间方法	全驱系统方法
闭环线性系统	极其少	很多
全局指数稳定	很少	很多
全局渐近稳定	较少	较多
局部渐近稳定	很多	很少
局部稳定	较多	极其少
不会解	有	极其少

方法论的突破

根本性的突破!

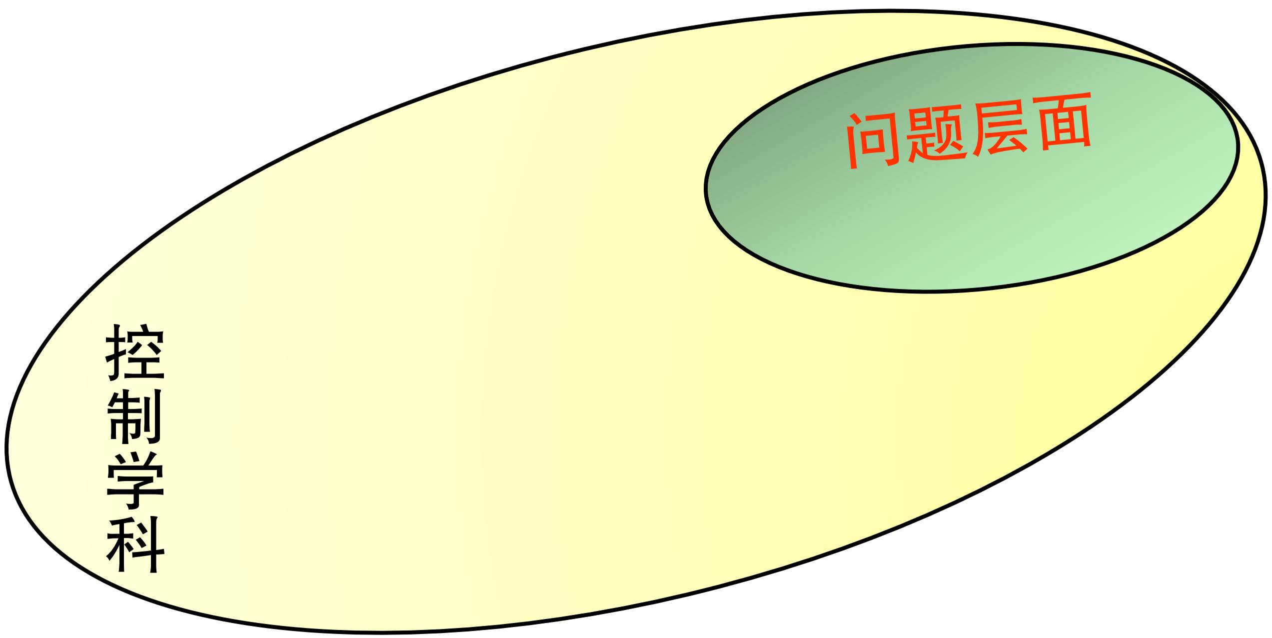


- 古典频域方法：1948（维纳）；1956（工程控制论）
- 状态空间方法：1750 (Euler); 1892(Lyapunov); 1960(Kalman)
- 全驱系统方法：1960（理论上）；2020（实际上）

方法论的突破

根本性的突破！

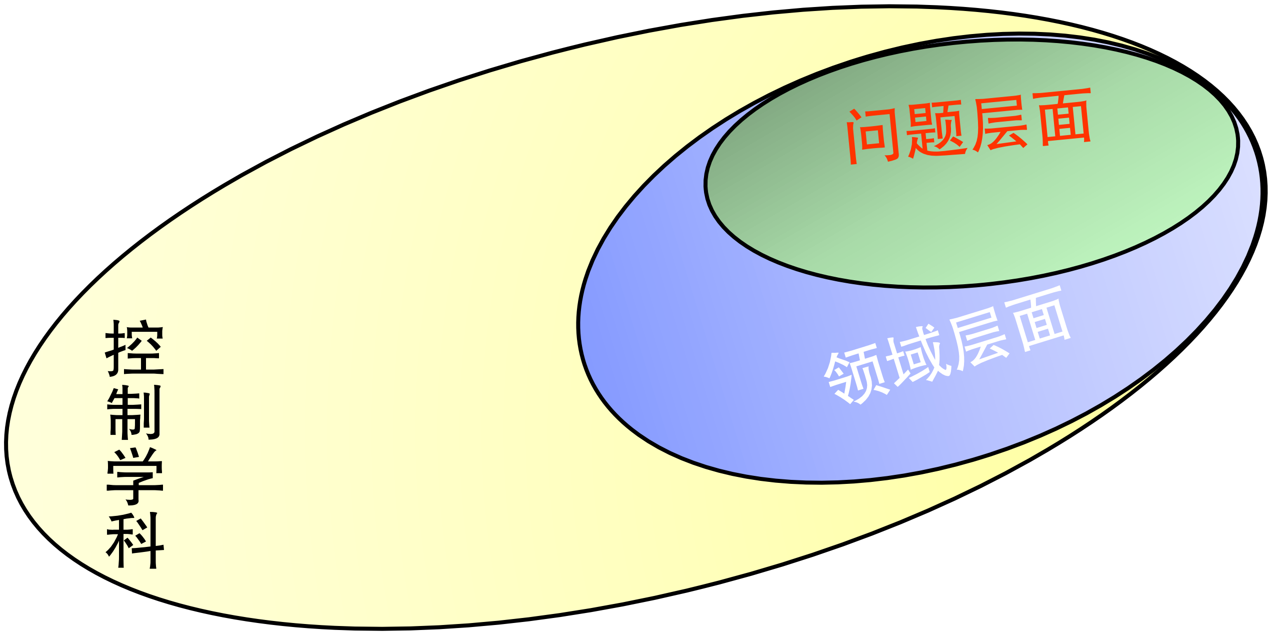
- 问题层面
  - 大多数控制问题都可以从高阶全驱系统方法的角度重新考虑，并且大多可以获得更好的结果



方法论的突破

根本性的突破！

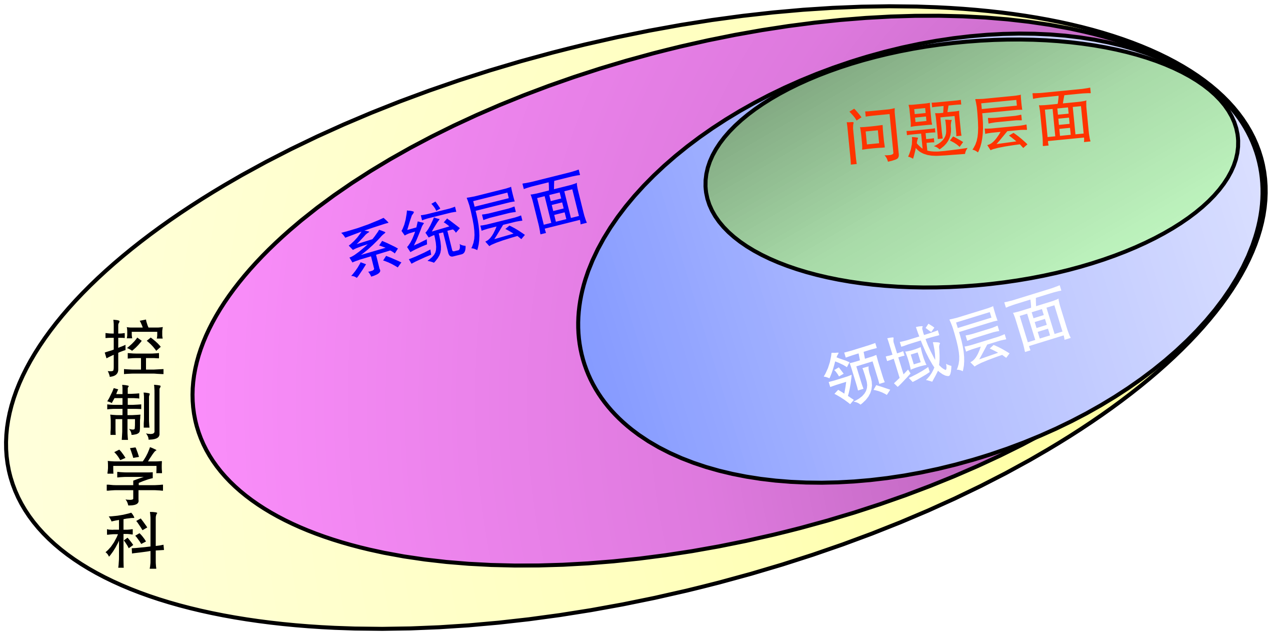
- 问题层面
- 领域层面
  - 鲁棒控制
  - 自适应控制
  - 最优控制
  - ……



方法论的突破

根本性的突破！

- 问题层面
- 领域层面
- 系统层面
  - 连续系统
  - 离散系统
  - 随机系统
  - 时滞系统



汇报提纲

一、状态空间方法

二、状态空间方法的缺陷

三、高阶全驱模型

四、全驱系统方法

五、结束语

回首过去

两种方法论所导致的差别是巨大的!

那么为什么状态空间方法在控制问题中一直沿用至今呢?

- 先入为主
- Following天性
- 可行性原则
- 习惯成自然
- 线性系统体系的影响
- 受制于物理概念
- 只缘身在此山中

展望未来

- 高阶全驱系统方法在控制系统设计方面的突出的优越性会得到人们的广泛认可和接受
- 预计在不远的将来，全驱系统方法在控制系统设计与应用方面会和状态空间方法平分秋色，甚至略胜一筹
- 通过二者的有机结合，会将控制系统的设计水平推向一个新的高度
- 这是块巨大的处女地！这不仅仅是提出几个问题，它是方法论的转变所带来的整个控制领域的改变
- 希望我国更多的年轻学者加盟到这一领域的研究中来，尽快做出一批具有原创性和颠覆性的成果。

敬告弟子(I)

- 我希望全国的年轻学者加盟到这一领域的研究中来，当然更希望自己的弟子们都向这个方向靠拢；
- 如果你现在没有什么好的理论研究方向，请你好好专研一下我的13篇高阶系统论文，从中找出你有意义的问题或方向；
- 如果你正在做着某些非线性控制问题，一般说来很难得到全局指数稳定的结论，请你换换思路，试试全驱系统方法；
- 对于在读的学生而言，如果你还抱着我以前的方向不放，意义不大。因为问题陈旧，另外我已攻关几十年，你很难再做出超越性的结果来。

敬告弟子（II）

- 不要觉得我已经把新方向的工作都做完了，这只是九牛一毛。新方向比前期工作的范围大得多，问题多得多。我的工作只是给个开篇而已，让人们看到这一方法的优势和潜力。
- 有些人总想串改别人的东西来突出自己，本来是已有的东西，却总要换个角度，换个说法来标新立异。这样做不好。希望你们延续这一方向时能够老实地引用我文中的各种定义、结果和思想，继续发展和完善这一体系。
- 大家可以从自动化学报上的三篇论文入手，然后过渡到IJSS上的十篇论文。我会把这十篇论文都传上来。

谢谢各位!

敬请批评指正!