# Оптимизация параметров модели системы массового обслуживания (СВО) на примере очереди супермаркета

**Очереди возникают практически во всех системах массового обслуживания (далее СМО), а вот теория массового обслуживания занимается оценкой функционирования системы при заданных параметрах и поиском параметров, оптимальных по некоторым критериям. Таким образом, актуальность данной темы обусловлена тем, что при грамотном подходе и глубоких знаниях теории очередей можно задать такие параметры функционирования системы, которые сведут затраты на содержание СМО к минимуму.**

Каждая СМО состоит из определенного числа обслуживающих единиц, называемых каналами обслуживания. Например, различные линии связи, продавцы или машины. Как правило, заявки поступают в СМО не регулярно, а случайно, образуя тем самым случайный поток заявок или требований. Случайный характер потока заявок и времени обслуживания приводит к тому, что система массового обслуживания оказывается загруженной неравномерно. Предметом теории массового обслуживания является построение математических моделей, связывающих заданные условия работы СМО (число каналов, их производительность, характер потока заявок и т.п.) с показателями эффективности СМО, описывающими ее способность справляться с потоком заявок.

Применение аппарата случайных процессов упрощает исследование СМО. **В основе СМО предполагается марковский случайный процесс − для любого момента времени вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.**

**Заявки, поступающие в СМО, распределены по закону Пуассона:, где λ − интенсивность потока случайного числа событий , наступающих за промежуток времениτ. Таким образом, пуассоновским называют поток событий, обладающий свойствами отсутствия последствий и ординарности.**

**СМО делят на три основных типа: СМО с отказами, СМО с ожиданием (очередью) и СМО смешанного типа.**

В СМО с отказами выделяют одноканальную и многоканальную систему. Одноканальная система включает в себя только один канал обслуживания и на ее вход подается пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ: .

Так как процесс является марковским, то вероятностии событий, состоящих в том, что в момент времени *t* СМО находится в состояниях(канал свободен) и (канал занят)соответственно, удовлетворяют системе уравнений Колмогорова:



Здесь λ и μ являются плотностями вероятностей перехода из состоянияви обратно. Очевидно, что:.Соответственно многоканальная СМО предполагает более одного канала.

**Следующим видом является многоканальная и одноканальная СМО с ожиданием. Для многоканальной СМО можно вычислить формулы для вероятностей состояний:**



Здесь ψ ‒ показатель нагрузки на один канал, который можно определить, как .Второй подвид СМО можно рассматривать как частный случай первой при.

За основу работы возьмем многоканальную СМО с ожиданием и рассмотрим более подробно основные показатели и характеристики.

Доказано, что при любом характере потока заявок, при любом распределении времени обслуживания, при любой дисциплине обслуживания среднее время пребывания заявок в системе (в очереди) равно среднему числу заявок в системе ‒ , деленному на интенсивность потока заявок ‒ λ:

 (1)

Среднее время ожидания в системе представляют в виде отношения среднего числа заявок в системе ‒ к интенсивности потока:

 (2)

Вероятность того, что заявка окажется в очереди, вычисляется по формуле:

 (3)

где  ‒ интенсивность нагрузки канала, определяемое как отношение интенсивности потока к средней интенсивности обслуживания, а *Р*0 ‒ предельная вероятность состояний *n* ‒ канальной СМО, определяемой по формуле:

 (4)

Тогда

 (5)  (6)

А среднее число заявок в очереди и в системе определим как:

(7)  (8)

Коэффициент занятости канала обслуживания:

 (9)

Относительная величина затрат Сотн, связанная с издержками на содержание каналов обслуживания и с пребыванием в очереди покупателей:

 (10)

Одной из важных задач коммерческой деятельности является рациональная организация торгово-технологического процесса массового обслуживания. Так с помощью элементов теории массового обслуживания можно добиться наиболее оптимальных показателей по всем характеристикам.

Требуется определить:

1. Минимальное количество кассиров, при котором очередь не будет превышать определенное число и соответствующие характеристики обслуживания
2. Относительную величину затрат при минимальном количестве кассиров.

# Параметры оптимизации

Для начала возьмем статистическую выборку данных по работе супермаркета за определенный период N = 1 месяц. Разобьём эти сгенерированные данные по времени работы магазина на 3 периода:

1. утро, с 9:00 до 13:00
2. день, с 13:00 до 17:00
3. и вечер, с 17:00 до 21:00.

Таким образом, средняя интенсивность в час в первом периоде равна 23 человека, во втором − 45, а в третьем − 81. Средняя продолжительность обслуживания кассиром одного покупателя 2 минуты.

Для начала определим интенсивность потока покупателей в минутах:– для I периода; и . Так как среднее время обслуживания равно двум минутам, то . Интенсивность нагрузки для каждого канала соответственно: ;  и . Таким образом, минимальное количество кассиров для каждого периода необходимое для того, чтобы очередь не выросла до бесконечности: ; ; .

Теперь найдем основные характеристики обслуживания СМО для первого периода, при котором работает одна касса, используя формулы (1) − (10).

Вероятность Р0 того, что в узле расчета отсутствуют покупатели: , т.е. в среднем 20,4% времени касса будет простаивать.

Вероятность того, что покупатель окажется в очереди:

Среднее число покупателей в очереди:

Среднее время ожидания в очереди: 

Среднее число покупателей в узле: 

Среднее время нахождения покупателей в узле расчета: 

Относительная величина затрат при  равна.

Итак, последнее, что необходимо найти – вероятность того, что в очереди будет не более 3 покупателей. Нам уже известна.

Далее определяем вероятность того, что в очереди находится более трех покупателей: Тогда вероятность, что в очереди окажется не более трех покупателей: 

Аналогично найдем все показатели для II и III периодов. Полученные данные представим в виде таблицы.

Таблица

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Период | λ | ρ | P0 | Pоч | Lоч | Точ | Lсист | Тсист | Сотн |  |
| I | 0,38 | 0,76 | 0,24 | 0,578 | 2,41 | 6,34 | 3,17 | 8,34 | 21,65 | 0,334 |
| II | 0,75 | 1,5 | 0,143 | 0,483 | 1,93 | 2,57 | 3,43 | 4,57 | 10,38 | 0,23 |
| III | 1,35 | 2,7 | 0,025 | 0,738 | 7,38 | 5,47 | 10,08 | 7,47 | 18,63 | 0,054 |

Полученные данные позволяют сделать вывод, что наибольшую вероятность оказаться в очереди, а также наибольшее среднее время ожидания в очереди покупатель имеет в III периоде с 17:00 до 21:00, из-за достаточного увеличения интенсивности потока. В этом же промежутке времени возрастает и среднее число покупателей в узле, что в три раза превышает показатели первого и второго периода. Наибольшая вероятность того, что в очереди окажется не более трех покупателей находится в I периоде. Среднее время нахождения покупателей в узле расчета зависит как от количества касс, так и от интенсивности потока. По анализируемым периодам, можно отметить, что наименьшую относительную величину затрат и наименьшее среднее время ожидания в очереди наблюдается во II периоде. Это связано с наиболее оптимальным количеством касс и средней интенсивностью потока.

Таким образом, самые минимальные показатели достигнуты именно во втором периоде. Количество касс, определяемых в задаче является минимальным, что не означает оптимальность. Увеличение касс приведет к увеличению затрат, но в то же время позволит сократить очередь и уменьшить время ожидания в ней. Целесообразней сделать разное количество касс в зависимости от времени и интенсивности потока. Тогда кассы не будут простаивать, но в тоже время очередь не будет расти до бесконечности.