

## 第五章 维纳滤波

### (Wiener Filtering)

随机信号或随机过程(random process)是普遍存在的。一方面,任何确定性信号经过测量后往往就会引入随机性误差而使该信号随机化;另一方面,任何信号本身都存在随机干扰,通常把对信号或系统功能起干扰作用的随机信号称之为噪声。噪声按功率谱密度划分可以分为白噪声(white noise)和色噪声(color noise),我们把均值为0的白噪声叫纯随机信号(pure random signal)。因此,任何其它随机信号都可看成是纯随机信号与确定性信号并存的混合随机信号或简称为随机信号。要区别干扰(interference)和噪声(noise)两种事实和两个概念。非目标信号(nonobjective signal)都可叫干扰。干扰可以是确定信号,如国内的50Hz工频干扰。干扰也可以是噪声,纯随机信号(白噪声)加上一个直流成分(确定性信号),就成了最简单的混合随机信号。医学数字信号处理的目的是要提取包含在随机信号中的确定成分,并探求它与生理、病理过程的关系,为医学决策提供一定的依据。例如从自发脑电中提取诱发脑电信号,就是把自发脑电看成是干扰信号,从中提取出需要的信息成分。因此我们需要寻找一种最佳线性滤波器,当信号和干扰以及随机噪声同时输入该滤波器时,在输出端能将信号尽可能精确地表现出来。

维纳滤波和卡尔曼滤波就是用来解决这样一类问题的方法:从噪声中提取出有用的信号。实际上,这种线性滤波方法也被看成是一种估计问题或者线性预测问题。

设有一个线性系统,它的单位脉冲响应是 $h(n)$ ,当输入一个观测到的随机信号 $x(n)$ ,简称观测值,且该信号包含噪声 $w(n)$ 和有用信号 $s(n)$ ,简称信号,也即

$$x(n) = s(n) + w(n) \quad (5-1)$$

则输出 $y(n)$ 为

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)x(n-m) \quad (5-2)$$

我们希望输出得到的 $y(n)$ 与有用信号 $s(n)$ 尽量接近,因此称 $y(n)$ 为 $s(n)$ 的估计值,用 $\hat{s}(n)$ 来表示 $y(n)$ ,我们就有了维纳滤波器的系统框图,如图5.1。这个系统的单位脉冲响

应也称为对于  $s(n)$  的一种估计器。

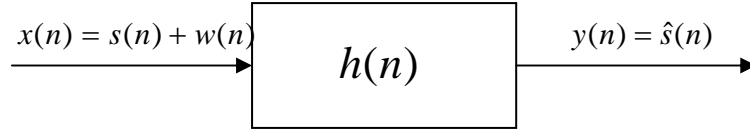


图 5.1 维纳滤波器的输入输出关系

如果该系统是因果系统，式 (5-2) 的  $m=0, 1, 2, \dots$ ，则输出的  $\hat{s}(n)$  可以看成是由当前时刻的观测值  $x(n)$  和过去时刻的观测值  $x(n-1)$ 、 $x(n-2)$ 、 $x(n-3) \dots$  的估计值。用当前的和过去的观测值来估计当前的信号  $y(n) = \hat{s}(n)$  称为滤波；用过去的观测值来估计当前的或将来的信号  $y(n) = \hat{s}(n+N)$ ， $N \geq 0$ ，称为预测；用过去的观测值来估计过去的信号  $y(n) = \hat{s}(n-N)$ ， $N \geq 1$ ，称为平滑或者内插。本章将讨论滤波和预测问题。

从图 5.1 的系统框图中估计到的  $\hat{s}(n)$  信号和我们期望得到的有用信号  $s(n)$  不可能完全相同，这里用  $e(n)$  来表示真值和估计值之间的误差

$$e(n) = s(n) - \hat{s}(n) \quad (5-3)$$

显然  $e(n)$  是随机变量，维纳滤波和卡尔曼滤波的误差准则就是最小均方误差准则

$$E[e^2(n)] = E[(s(n) - \hat{s}(n))^2] \quad (5-4)$$

维纳滤波和卡尔曼滤波都是解决线性滤波和预测问题的方法，并且都是以均方误差最小为准则的，在平稳条件下两者的稳态结果是一致的。但是它们解决问题的方法有很大区别。维纳滤波是根据全部过去观测值和当前观测值来估计信号的当前值，因此它的解形式是系统的传递函数  $H(z)$  或单位脉冲响应  $h(n)$ ；卡尔曼滤波是用当前一个估计值和最近一个观测值来估计信号的当前值，它的解形式是状态变量值。

维纳滤波只适用于平稳随机过程，卡尔曼滤波就没有这个限制。设计维纳滤波器要求已知信号与噪声的相关函数，设计卡尔曼滤波要求已知状态方程和量测方程，当然两者之间也有联系。

## 第一节 维纳滤波器的时域解 (Time domain solution of the Wiener filter)

设计维纳滤波器的过程就是寻求在最小均方误差下滤波器的单位脉冲响应  $h(n)$  或传递函数  $H(z)$  的表达式，其实质就是解维纳—霍夫 (Wiener—Hopf) 方程。我们从时域入手求最小均方误差下的  $h(n)$ ，用  $h_{opt}(n)$  表示最佳线性滤波器。这里只讨论因果可实现滤波器的设计。

### 5.1.1 因果的维纳滤波器

设  $h(n)$  是物理可实现的，也即是因果序列：

$$h(n) = 0, \text{ 当 } n < 0$$

因此，从式(5-1)、(5-2)、(5-3)、(5-4)推导：

$$y(n) = \hat{s}(n) = \sum_{m=0}^{+\infty} h(m)x(n-m) \quad (5-5)$$

$$E[e^2(n)] = E\left[(s(n) - \sum_{m=0}^{+\infty} h(m)x(n-m))^2\right] \quad (5-6)$$

要使得均方误差最小，则将上式对各  $h(m)$ ， $m=0, 1, \dots$ ，求偏导，并且等于零，得：

$$2E\left[(s(n) - \sum_{m=0}^{+\infty} h_{opt}(m)x(n-m))x(n-j)\right] = 0 \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (5-7)$$

即

$$E[s(n)x(n-j)] = \sum_{m=0}^{+\infty} h_{opt}(m)E[x(n-m)x(n-j)] \quad j \geq 0 \quad (5-8)$$

用相关函数  $R$  来表达上式，则得到维纳—霍夫方程的离散形式：

$$R_{xs}(j) = \sum_{m=0}^{+\infty} h_{opt}(m)R_{xx}(j-m) \quad j \geq 0 \quad (5-9)$$

从维纳—霍夫方程中解出的  $h$  就是最小均方误差下的最佳  $h$ ， $h_{opt}(n)$ 。求到  $h_{opt}(n)$ ，这时的均方误差为最小：

$$\begin{aligned}
E[e^2(n)]_{\min} &= E\left[(s(n) - \sum_{m=0}^{+\infty} h_{opt}(m)x(n-m))^2\right] \\
&= E[s^2(n) - 2s(n)\sum_{m=0}^{+\infty} h(m)x(n-m) + \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} h_{opt}(m)x(n-m)h_{opt}(r)x(n-r)] \\
&= R_{ss}(0) - 2\sum_{m=0}^{+\infty} h_{opt}(m)R_{xs}(m) + \sum_{m=0}^{+\infty} h_{opt}(m)\left[\sum_{r=0}^{+\infty} h_{opt}(r)R_{xx}(m-r)\right]
\end{aligned}$$

由式 (5-9) 进一步化简得:

$$E[e^2(n)]_{\min} = R_{ss}(0) - \sum_{m=0}^{+\infty} h_{opt}(m)R_{xs}(m) \quad (5-10)$$

### 5.1.2 有限脉冲响应法求解维纳-霍夫方程

如何去求解维纳-霍夫方程, 即式 (5-9) 中解  $h_{opt}(n)$  的问题, 设  $h(n)$  是一个因果序列且可以用有限长 ( $N$  点长) 的序列去逼近它, 则式 (5-5) — (5-10) 分别发生变化:

$$y(n) = \hat{s}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m) \quad (5-11)$$

$$E[e^2(n)] = E\left[(s(n) - \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m))^2\right] \quad (5-12)$$

$$2E\left[(s(n) - \sum_{m=0}^{N-1} h_{opt}(m)x(n-m))x(n-j)\right] = 0 \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5-13)$$

$$E[s(n)x(n-j)] = \sum_{m=0}^{N-1} h_{opt}(m)E[x(n-m)x(n-j)] \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5-14)$$

$$R_{xs}(j) = \sum_{m=0}^{N-1} h_{opt}(m)R_{xx}(j-m) \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5-15)$$

于是得到  $N$  个线性方程:

$$\begin{cases} j=0 & R_{xs}(0) = h(0)R_{xx}(0) + h(1)R_{xx}(1) + \dots + h(N-1)R_{xx}(N-1) \\ j=1 & R_{xs}(1) = h(0)R_{xx}(1) + h(1)R_{xx}(0) + \dots + h(N-1)R_{xx}(N-2) \\ \vdots & \vdots \\ j=N-1 & R_{xs}(N-1) = h(0)R_{xx}(N-1) + h(1)R_{xx}(N-2) + \dots + h(N-1)R_{xx}(0) \end{cases}$$

写成矩阵形式有:

$$\begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & \cdots & R_{xx}(N-1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \cdots & R_{xx}(N-2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ R_{xx}(N-1) & R_{xx}(N-2) & \cdots & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{xs}(0) \\ R_{xs}(1) \\ \vdots \\ R_{xs}(N-1) \end{bmatrix} \quad (5-16)$$

简化形式:

$$\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H}=\mathbf{R}_{xs} \quad (5-17)$$

式中,  $\mathbf{H}=[h(0) \ h(1) \ \cdots h(N-1)]'$ , 是待求的单位脉冲响应;

$\mathbf{R}_{xs}=[R_{xs}(0), R_{xs}(1), \cdots R_{xs}(N-1)]'$ , 是互相关序列;

$$\mathbf{R}_{xx} = \begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & \cdots & R_{xx}(N-1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \cdots & R_{xx}(N-2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ R_{xx}(N-1) & R_{xx}(N-2) & \cdots & R_{xx}(0) \end{bmatrix}, \text{ 是自相关矩阵。}$$

只要 $\mathbf{R}_{xx}$ 是非奇异的, 就可以求到 $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{H}=\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{xs} \quad (5-18)$$

求得 $h_{opt}(n)$ 后, 这时的均方误差为最小:

$$\begin{aligned} E[e^2(n)]_{\min} &= E\left[(s(n) - \sum_{m=0}^{N-1} h_{opt}(m)x(n-m))^2\right] \\ &= E[s^2(n) - 2s(n)\sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m) + \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{N-1} h_{opt}(m)x(n-m)h_{opt}(r)x(n-r)] \\ &= R_{ss}(0) - 2\sum_{m=0}^{N-1} h_{opt}(m)R_{xs}(m) + \sum_{m=0}^{N-1} h_{opt}(m) \left[ \sum_{r=0}^{N-1} h_{opt}(r)R_{xx}(m-r) \right] \end{aligned}$$

由式(5-15)进一步化简得:

$$E[e^2(n)]_{\min} = R_{ss}(0) - \sum_{m=0}^{N-1} h_{opt}(m)R_{xs}(m) \quad (5-19)$$

用有限长的 $h(n)$ 来实现维纳滤波时, 当已知观测值的自相关和观测值与信号的互相关时就可以按照式(5-15)在时域里求解 $h_{opt}(n)$ 。但是当 $N$ 比较大时, 计算量很大, 并且涉及到求自相关矩阵的逆矩阵问题。注意到式(5-15)的表现形式和第三章的AR模型参数估计的矩阵形式类似, 因而也可以用前面介绍的L-D快速算法实现求解。

若信号 $s(n)$ 与噪声 $w(n)$ 互不相关, 即,

$$R_{sw}(m) = R_{ws}(m) = 0$$

则有

$$R_{xs}(m) = E[x(n)s(n+m)] = E[s(n)s(n+m) + w(n)s(n+m)] = R_{ss}(m)$$

$$R_{xx}(m) = E[(s(n) + w(n))(s(n+m) + w(n+m))] = R_{ss}(m) + R_{ww}(m)$$

则式（5-15）和式（5-19）化为：

$$R_{ss}(j) = \sum_{m=0}^{N-1} h_{opt}(m)[R_{ss}(j-m) + R_{ww}(j-m)] \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5-20)$$

$$E[e^2(n)]_{\min} = R_{ss}(0) - \sum_{m=0}^{N-1} h_{opt}(m)R_{ss}(m) \quad (5-21)$$

【例 5-1】已知图 5.1 中  $x(n) = s(n) + w(n)$ ，且  $s(n)$  与  $w(n)$  统计独立，其中  $s(n)$  的自相关序列为  $R_{ss}(m) = 0.6^{|m|}$ ， $w(n)$  是方差为 1 的单位白噪声，试设计一个  $N=2$  的维纳滤波器来估计  $s(n)$ ，并求最小均方误差。

解：依题意，已知信号的自相关和噪声的自相关为： $R_{ss}(m) = 0.6^{|m|}$ ， $R_{ww}(m) = \delta(m)$ ，代入式（5-20）得

$$\begin{cases} j=0 & 1 = 2h(0) + 0.6h(1) \\ j=1 & 0.6 = 0.6h(0) + 2h(1) \end{cases}$$

解得： $h(0) = 0.451$ ， $h(1) = 0.165$ 。

将上述结果代入式（5-21），求得最小均方误差：

$$E[e^2(n)]_{\min} = R_{ss}(0) - \sum_{m=0}^1 h(m)R_{ss}(m) = 1 - h(0) - 0.6h(1) = 0.45$$

若要进一步减小误差可以适当增加维纳滤波的阶数，但相应的计算量也会增加。

### 5.1.3 预白化法求解维纳—霍夫方程

从上面分析知求解维纳—霍夫方程比较复杂，本节用波德（Bode）和香农（Shannon）提出的白化的方法求解维纳—霍夫方程，得到系统函数  $H(z)$ 。

由第三章的知识，我们知道随机信号都可以看成是由一白色噪声  $w_1(n)$  激励一个物理可实现的系统或模型的响应，如图 5.2 所示，其中  $A(z)$  表示系统的传递函数。由于  $x(n) = s(n) + w(n)$ ，在图 5.2 的基础上给出  $x(n)$  的信号模型，图 5.3 所示。把这两个模型合并最后得到维纳滤波器的信号模型，图 5.4 所示，其中传递函数用  $B(z)$  表示。

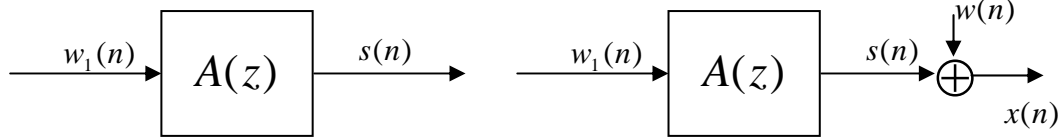


图 5.2  $s(n)$  的信号模型

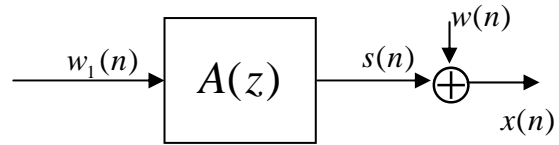


图 5.3  $x(n)$  的信号模型

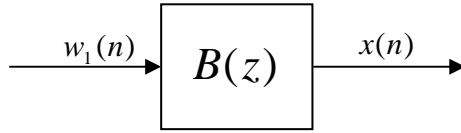


图 5.4 维纳滤波器的输入信号模型

白噪声的自相关函数为  $R_{w_1 w_1}(m) = \sigma_{w_1}^2 \delta(m)$ ，它的  $z$  变换就等于  $\sigma_{w_1}^2$ 。图 5.2 中输出信号的自相关函数为  $R_{ss}(m)$ ，根据卷积性质有

$$\begin{aligned} R_{ss}(m) &= E[s(n)s(n+m)] = E\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a(k)w_1(n-k) \cdot \sum_{r=-\infty}^{+\infty} a(r)w_1(n+m-r)\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a(k) \sum_{r=-\infty}^{+\infty} a(r)R_{w_1 w_1}(m+k-r) \end{aligned}$$

令  $l = r - k$ ，

$$\text{上式} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a(k) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a(k+l)R_{w_1 w_1}(m-l) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} R_{w_1 w_1}(m-l) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a(k)a(k+l)$$

令  $f(l) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a(k)a(k+l) = a(l) * a(-l)$ ，代入上式得

$$R_{ss}(m) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} R_{w_1 w_1}(m-l)f(l) = R_{w_1 w_1}(m) * f(m) = R_{w_1 w_1}(m) * a(m) * a(-m) \quad (5-22)$$

对式 (5-22) 进行  $z$  变换得到系统函数和相关函数的  $z$  变换之间的关系：

$$R_{ss}(z) = \sigma_{w_1}^2 A(z)A(z^{-1}) \quad (5-23)$$

同样，对图 5.4 进行  $z$  变换得

$$R_{xx}(z) = \sigma_{w_1}^2 B(z)B(z^{-1}) \quad (5-24)$$

图 5.4 中利用卷积性质还可以找到互相关函数之间的关系：

$$\begin{aligned} R_{xs}(m) &= E[x(n)s(n+m)] = E\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b(k)w_1(n-k) \cdot s(n+m)\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b(k)R_{w_1 s}(m+k) = R_{w_1 s}(m) * b(-m) \end{aligned}$$

两边  $z$  变换得到

$$R_{xs}(z) = R_{w_1 s}(z)B(z^{-1}) \quad (5-25)$$

如果已知观测信号的自相关函数，求它的  $z$  变换，然后找到该函数的成对零点、极点，取其中在单位圆内的那一半零点、极点构成  $B(z)$ ，另外在单位圆外的零、极点构成  $B(z^{-1})$ ，这样就保证了  $B(z)$  是因果的，并且是最小相位系统。

从图 5.4 可得

$$W_1(z) = \frac{1}{B(z)} X(z) \quad (5-26)$$

由于系统函数  $B(z)$  的零点和极点都在单位圆内，即是一个物理可实现的最小相位系统，则

$\frac{1}{B(z)}$  也是一个物理可实现的最小相移网络函数。我们就可以利用式 (5-25) 对  $x(n)$  进行

白化，即把  $x(n)$  当作输入， $w_1(n)$  当作输出， $\frac{1}{B(z)}$  是系统传递函数。

将图 5.1 重新给出，待求的问题就是最小均方误差下的最佳  $H(z)$ ，如图 5.5 (a) 所示，

为了便于求这个  $H_{opt}(z)$ ，将图 5.5 (a) 的滤波器分解成两个级联的滤波器： $\frac{1}{B(z)}$  和  $G(z)$ ，

如图 5.5 (b) 所示，则

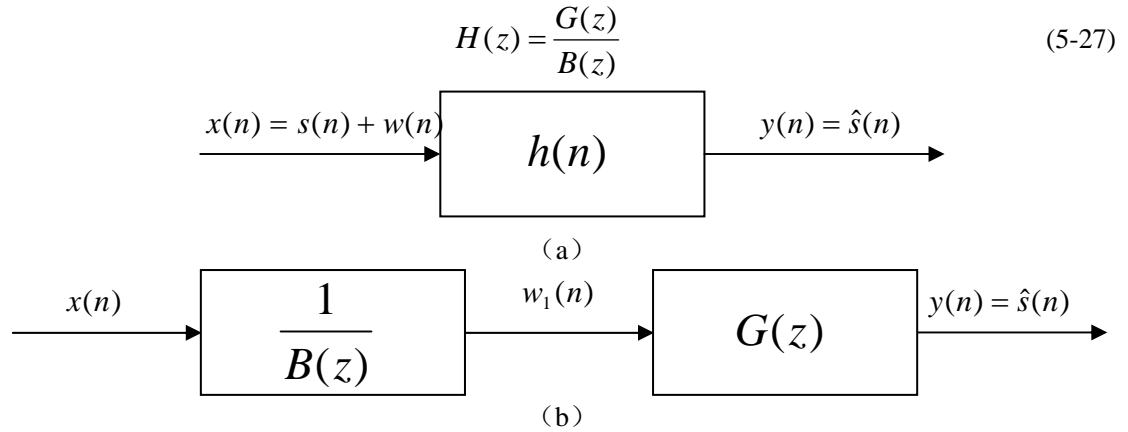


图 5.5 利用白化方法求解模型

有了上述的模型后，白化法求解维纳-霍夫方程步骤如下：

- 1) 对观测信号  $x(n)$  的自相关函数  $R_{xx}(m)$  求  $z$  变换得到  $R_{xx}(z)$
- 2) 利用等式  $R_{xx}(z) = \sigma_{w_1}^2 B(z)B(z^{-1})$ ，找到最小相位系统  $B(z)$
- 3) 利用均方误差最小原则求解因果的  $G(z)$



4)  $H(z) = \frac{G(z)}{B(z)}$ ，即得到维纳—霍夫方程的系统函数解

在上述步骤中， $B(z)$  可以通过已知的观测信号的自相关函数来求得，因而求解  $H_{opt}(z)$  的问题就归结为求解  $G(z)$  的问题了。由于  $G(z)$  的激励源是白噪声，求解变得容易多了，下面我们分析步骤 3 的求解过程。

按图 5.5 (b) 有

$$y(n) = \hat{s}(n) = \sum_{m=0}^{+\infty} g(m)w_1(n-m) \quad (5-28)$$

均方误差为

$$\begin{aligned} E[e^2(n)] &= E\left[\left(s(n) - \sum_{m=0}^{+\infty} g(m)w_1(n-m)\right)^2\right] \\ &= E[s^2(n) - 2s(n)\sum_{m=0}^{+\infty} g(m)w_1(n-m) + \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{r=0}^{+\infty} g(m)w_1(n-m)g(r)w_1(n-r)] \\ &= R_{ss}(0) - 2\sum_{m=0}^{+\infty} g(m)R_{w_1s}(m) + \sum_{m=0}^{+\infty} g(m)\left[\sum_{r=0}^{+\infty} g(r)R_{w_1w_1}(m-r)\right] \end{aligned}$$

由于  $R_{w_1w_1}(m) = \sigma_{w_1}^2 \delta(m)$ ，代入上式，并且进行配方得

$$\begin{aligned} E[e^2(n)] &= R_{ss}(0) - 2\sum_{m=0}^{+\infty} g(m)R_{w_1s}(m) + \sigma_{w_1}^2 \sum_{m=0}^{+\infty} g^2(m) \\ &= R_{ss}(0) + \sum_{m=0}^{+\infty} \left[\sigma_{w_1} g(m) - \frac{R_{w_1s}(m)}{\sigma_{w_1}}\right]^2 - \frac{1}{\sigma_{w_1}^2} \sum_{m=0}^{+\infty} R_{w_1s}^2(m) \end{aligned} \quad (5-29)$$

均方误差最小也就是上式的中间一项最小，所以

$$g_{opt}(m) = \frac{R_{w_1s}(m)}{\sigma_{w_1}^2}, m \geq 0 \quad (5-30)$$

注意，这里的  $g(m)$  是因果的。对该式求  $z$  变换，得到

$$G_{opt}(z) = \frac{[R_{w_1s}(z)]_+}{\sigma_{w_1}^2} \quad (5-31)$$

$[R_{w_1s}(z)]_+$  表示对  $R_{w_1s}(m)$  求单边  $z$  变换。

所以维纳—霍夫方程的系统函数解表示为

$$H_{opt}(z) = \frac{G_{opt}(z)}{B(z)} = \frac{[R_{w_1s}(z)]_+}{\sigma_{w_1}^2 B(z)}$$

由式 (5-25) 上式可以表示为

$$H_{opt}(z) = \frac{G_{opt}(z)}{B(z)} = \frac{[R_{w_1s}(z)]_+}{\sigma_{w_1}^2 B(z)} = \frac{[R_{xs}(z)/B(z^{-1})]_+}{\sigma_{w_1}^2 B(z)} \quad (5-32)$$

因果的维纳滤波器的最小均方误差为:

$$E[e^2(n)]_{\min} = R_{ss}(0) - \frac{1}{\sigma_{w_1}^2} \sum_{m=0}^{+\infty} R_{w_1s}^2(m) = R_{ss}(0) - \frac{1}{\sigma_{w_1}^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_{w_1s}^2(m) u(m) \quad (5-33)$$

利用帕塞伐尔定理, 上式可用  $z$  域来表示

$$E[e^2(n)]_{\min} = \frac{1}{2\pi j} \oint_c [R_{ss}(z) - H_{opt}(z)R_{xs}(z^{-1})] \frac{dz}{z} \quad (5-34)$$

围线积分可以取单位圆。

【例 5-2】已知图 5.1 中  $x(n) = s(n) + w(n)$ , 且  $s(n)$  与  $w(n)$  统计独立, 其中  $s(n)$  的自相关序列为  $R_{ss}(m) = 0.8^{|m|}$ ,  $w(n)$  是方差为 1 的单位白噪声, 试设计一个物理可实现的维纳滤波器来估计  $s(n)$ , 并求最小均方误差。

解: 依题意, 已知  $R_{ss}(m) = 0.8^{|m|}$ ,  $R_{ww}(m) = \delta(m)$ ,  $R_{sw}(m) = 0$ ,  $R_{xs}(m) = R_{ss}(m)$

步骤 1

$$R_{xx}(m) = R_{ss}(m) + R_{ww}(m),$$

求  $z$  变换

$$R_{xx}(z) = \frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)} + 1 = 1.6 \frac{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}, 0.8 < |z| < 1.25$$

步骤 2

由于  $R_{xx}(z) = \sigma_{w_1}^2 B(z)B(z^{-1})$ , 容易找到最小相位系统和白噪声方差

$$B(z) = \frac{1-0.5z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}, 0.8 < |z|, B(z^{-1}) = \frac{1-0.5z}{1-0.8z}, |z| < 1.25, \sigma_{w_1}^2 = 1.6$$

步骤 3

$$\text{利用式 (5-32)} H_{opt}(z) = \frac{[R_{xs}(z)/B(z^{-1})]_+}{\sigma_{w_1}^2 B(z)} = \frac{1-0.8z^{-1}}{1.6(1-0.5z^{-1})} \left[ \frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.5z)} \right]_+$$

对括号里面求反变换, 注意括号内的收敛域为  $0.8 < |z| < 2$ ,

$$Z^{-1} \left[ \frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.5z)} \right] = 0.6(0.8)^n u(n) + 0.6(2)^n u(-n-1)$$

取因果部分, 也就是第一项, 所以

$$\left[ \frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.5z)} \right]_+ = 0.6 \frac{1}{1-0.8z^{-1}}$$

$$H_{opt}(z) = \frac{1-0.8z^{-1}}{1.6(1-0.5z^{-1})} \left[ \frac{0.6}{(1-0.8z^{-1})} \right] = \frac{3/8}{1-0.5z^{-1}}, \quad h(n) = 0.375(0.5)^n, n \geq 0$$

步骤 4

最小均方误差为：

$$E[e^2(n)]_{\min} = \frac{1}{2\pi j} \oint_c [R_{ss}(z) - H_{opt}(z)R_{xs}(z^{-1})] \frac{dz}{z}$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \left[ \frac{-0.45(0.625z - 0.5)}{(z-0.8)(z-1.25)(z-0.5)} \right] dz$$

取单位圆为积分围线，有两个单位圆内的极点，0.8 和 0.5，求它们的留数和，所以

$$E[e^2(n)]_{\min} = \frac{-0.45(0.625*0.8-0.5)}{(0.8-1.25)(0.8-0.5)} + \frac{-0.45(0.625*0.5-0.5)}{(0.5-0.8)(0.5-1.25)} = 0.375$$

## 第二节 维纳预测器 (Wiener' s predictions )

上节讨论的维纳滤波器是一种估计器，是用观测到的当前  $x(n)$  和全部过去的的数据  $x(n-1)$ 、 $x(n-2)$ 、 $x(n-3) \cdots$  来估计当前的信号值  $y(n) = \hat{s}(n)$ 。本节将讨论维纳预测器，它同样也是一种估计器，是用过去的观测值来估计当前的或将来的信号  $y(n) = \hat{s}(n+N)$ ， $N \geq 0$ ，也是用真值和估计值的均方误差最小为估计准则。

### 5.2.1 因果的维纳预测器

图 5.6 就是维纳预测器的模型， $N > 0$ ， $y_d(n)$  是希望得到的输出，而  $y(n)$  表示实际的估计值。

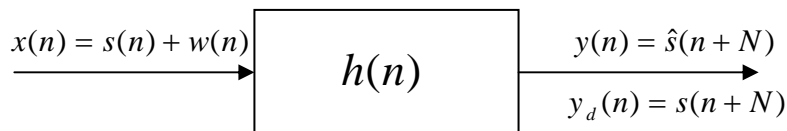


图 5.6 维纳预测器

本节和上节一样着重讨论预测器的系统函数以及预测的均方误差，维纳预测器和维纳滤波器比较类似，因而分析方法也都可以借鉴前面的内容。对于图 5.6 模型，设  $h(n)$  是物理

可实现的，也即是因果序列：  $h(n) = 0$ , 当  $n < 0$ ，则有

$$y(n) = \hat{s}(n + N) = \sum_{m=0}^{+\infty} h(m)x(n - m) \quad (5-35)$$

$$E[e^2(n)] = E\left[(s(n + N) - \sum_{m=0}^{+\infty} h(m)x(n - m))^2\right] \quad (5-36)$$

要使得均方误差最小，则将上式对各  $h(m)$ ， $m=0, 1, \dots$ ，求偏导，并且等于零，得：

$$2E\left[(s(n + N) - \sum_{m=0}^{+\infty} h_{opt}(m)x(n - m))x(n - j)\right] = 0 \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (5-37)$$

即

$$E[s(n + N)x(n - j)] = \sum_{m=0}^{+\infty} h_{opt}(m)E[x(n - m)x(n - j)] \quad j \geq 0 \quad (5-38)$$

用相关函数  $R$  来表达上式：

$$R_{xs}(N + j) = \sum_{m=0}^{+\infty} h_{opt}(m)R_{xx}(j - m) \quad j \geq 0 \quad (5-39)$$

由于  $y_d(n) = s(n + N)$ ，则  $R_{xy_d}(m) = E[x(n)s(n + m + N)] = R_{xs}(m + N)$ ， $z$  变换得

$$R_{xy_d}(z) = z^N R_{xs}(z), \quad R_{xy_d}(z^{-1}) = z^{-N} R_{xs}(z^{-1}) \quad (5-40)$$

借鉴维纳滤波器的结果类似给出维纳预测器的最佳传递函数，对应维纳预测器

$y_d(n) = s(n + N)$ ，对应维纳滤波器  $y_d(n) = s(n)$ ，故因果的预测器的传递函数为：

$$H_{opt}(z) = \frac{[R_{xy_d}(z)/B(z^{-1})]_+}{\sigma_{w_1}^2 B(z)} = \frac{[z^N R_{xs}(z)/B(z^{-1})]_+}{\sigma_{w_1}^2 B(z)} \quad (5-41)$$

最小均方误差为

$$E[e^2(n + N)]_{\min} = R_{ss}(0) - \frac{1}{\sigma_{w_1}^2} \sum_{m=0}^{+\infty} R_{w_1 y_d}^2(m) \quad (5-42)$$

利用帕塞伐尔定理，上式可用  $z$  域来表示

$$\begin{aligned} E[e^2(n + N)]_{\min} &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c [R_{ss}(z) - H_{opt}(z)R_{xy_d}(z^{-1})] \frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c [R_{ss}(z) - H_{opt}(z)z^{-N}R_{xs}(z^{-1})] \frac{dz}{z} \end{aligned} \quad (5-43)$$

【例 5-3】已知图 5.6 中  $x(n) = s(n) + w(n)$ ，且  $s(n)$  与  $w(n)$  统计独立，其中  $s(n)$  的

自相关序列为  $R_{ss}(m) = 0.8^{|m|}$ ， $w(n)$  是方差为 1 的单位白噪声，试设计一个物理可实现的维纳预测器估计  $s(n+1)$ ，并求最小均方误差。

解：依题意已知  $R_{ss}(m) = 0.8^{|m|}$ ， $R_{ww}(m) = \delta(m)$ ， $R_{sw}(m) = 0$ ， $R_{xs}(m) = R_{ss}(m)$

$$R_{xx}(m) = R_{ss}(m) + R_{ww}(m),$$

求  $z$  变换

$$R_{xx}(z) = \frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)} + 1 = 1.6 \frac{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}, 0.8 < |z| < 1.25$$

由于  $R_{xx}(z) = \sigma_{w_1}^2 B(z)B(z^{-1})$ ，容易找到最小相位系统和白噪声方差

$$B(z) = \frac{1-0.5z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}, 0.8 < |z|, B(z^{-1}) = \frac{1-0.5z}{1-0.8z}, |z| < 1.25, \sigma_{w_1}^2 = 1.6$$

由式 (5-41)， $N=1$ ，

$$\begin{aligned} H_{opt}(z) &= \frac{[zR_{xs}(z)/B(z^{-1})]_+}{\sigma_{w_1}^2 B(z)} = \frac{[zR_{ss}(z)/B(z^{-1})]_+}{\sigma_{w_1}^2 B(z)} \\ &= \frac{1-0.8z^{-1}}{1.6(1-0.5z^{-1})} \left[ \frac{0.36z}{(1-0.8z^{-1})(1-0.5z)} \right]_+ \end{aligned}$$

对括号里面求  $z$  反变换，注意括号内的收敛域为  $0.8 < |z| < 2$ ，

$$Z^{-1} \left[ \frac{0.36z}{(1-0.8z^{-1})(1-0.5z)} \right] = 0.48(0.8)^n u(n) + 1.2(2)^n u(-n-1)$$

取因果部分，也就是第一项，所以

$$\begin{aligned} \left[ \frac{0.36z}{(1-0.8z^{-1})(1-0.5z)} \right]_+ &= 0.48 \frac{1}{1-0.8z^{-1}} \\ H_{opt}(z) &= \frac{1-0.8z^{-1}}{1.6(1-0.5z^{-1})} \left[ \frac{0.48}{(1-0.8z^{-1})} \right] = \frac{0.3}{1-0.5z^{-1}}, h(n) = 0.3(0.5)^n, n \geq 0 \end{aligned}$$

把上式写成差分方程形式有： $\hat{s}(n+1) = 0.3x(n) + 0.5\hat{s}(n)$

最小均方误差为：

$$E[e^2(n)]_{\min} = \frac{1}{2\pi j} \oint_c [R_{ss}(z) - H_{opt}(z)z^{-1}R_{ss}(z^{-1})] \frac{dz}{z}$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \left[ \frac{0.36}{(z-0.5)(1-0.8z)} \right] dz = 0.6$$

### 5.2.2 纯预测器（N 步）

纯预测器指的是  $w(n)=0$  的情况下，对  $s(n+N)$  的预测。如图 5.7 所示。

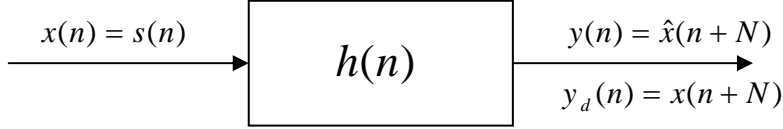


图 5.7 N 步纯预测器

这时  $x(n) = s(n)$ ，用白化法来求解预测器的系统函数。因为  $R_{xx}(z) = \sigma_{w_1}^2 B(z)B(z^{-1})$ ，

从而有

$$R_{xx}(z) = R_{ss}(z) = R_{xs}(z) = \sigma_{w_1}^2 B(z)B(z^{-1}) \quad (5-44)$$

将上式代入式（5-41）、（5-43）得

$$H_{opt}(z) = \frac{[z^N R_{xs}(z) / B(z^{-1})]_+}{\sigma_{w_1}^2 B(z)} = \frac{[z^N \sigma_{w_1}^2 B(z)B(z^{-1}) / B(z^{-1})]_+}{\sigma_{w_1}^2 B(z)} = \frac{[z^N B(z)]_+}{B(z)} \quad (5-45)$$

$$E[e^2(n+N)]_{\min} = \frac{1}{2\pi j} \oint_c [R_{ss}(z) - H_{opt}(z)z^{-N}R_{xs}(z^{-1})] \frac{dz}{z}$$

$$= \frac{\sigma_{w_1}^2}{2\pi j} \oint_c [B(z)B(z^{-1}) - [z^N B(z)]_+ z^{-N} B(z^{-1})] \frac{dz}{z}$$

假设  $B(z)$  是  $b(n)$  的  $z$  变换，且  $b(n)$  是实序列，则上式可以利用帕塞伐尔定理进一步化简：

$$E[e^2(n+N)]_{\min} = \sigma_{w_1}^2 \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b^2(n) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b(n+N)u(n)b(n+N) \right] \quad (5-46)$$

又因为  $B(z)$  是最小相位系统，一定是因果的，上式可以简化

$$E[e^2(n+N)]_{\min} = \sigma_{w_1}^2 \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} b^2(n) - \sum_{n=0}^{+\infty} b^2(n+N) \right] = \sigma_{w_1}^2 \sum_{n=0}^{N-1} b^2(n) \quad (5-47)$$

上式说明最小均方误差随着  $N$  的增加而增加，也即预测距离越远误差越大。

【例 5-4】已知图 5.7 中  $x(n) = s(n)$ ，其中  $s(n)$  的自相关序列为  $R_{ss}(m) = 0.8^{|m|}$ ，试

设计一个物理可实现的维纳预测器来估计  $\hat{s}(n+N)$ ，并求最小均方误差。

解：依题意，已知  $R_{ss}(m) = 0.8^{|m|}$ ，则  $R_{ss}(z) = \frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}$ ,  $0.8 < |z| < 1.25$

因为  $R_{xx}(z) = R_{ss}(z) = R_{xs}(z) = \sigma_{w_1}^2 B(z)B(z^{-1})$

容易找到最小相位系统和白噪声方差

$$B(z) = \frac{1}{1-0.8z^{-1}}, 0.8 < |z|, b(n) = 0.8^n u(n), B(z^{-1}) = \frac{1}{1-0.8z}, |z| < 1.25, \sigma_{w_1}^2 = 0.36$$

利用式 (5-45)

$$H_{opt}(z) = \frac{[z^N B(z)]_+}{B(z)} = (1-0.8z^{-1})[z^N \frac{1}{1-0.8z^{-1}}]_+$$

因为  $Z^{-1}[z^N \frac{1}{1-0.8z^{-1}}] = 0.8^{n+N} u(n+N)$ ，只取  $n \geq 0$  的部分，有

$$Z^{-1}[z^N \frac{1}{1-0.8z^{-1}}]_+ = 0.8^{n+N} u(n)$$

回到  $z$  域有：  $[z^N \frac{1}{1-0.8z^{-1}}]_+ = 0.8^N \frac{1}{1-0.8z^{-1}}$ ，代入  $H_{opt}(z)$  得

$$H_{opt}(z) = 0.8^N$$

最小均方误差为：

$$E[e^2(n+N)]_{\min} = \sigma_{w_1}^2 \sum_{n=0}^{N-1} b^2(n) = 0.36 \sum_{n=0}^{N-1} 0.8^{2n} u(n) = 1 - 0.8^{2N}$$

它说明当  $N$  越大，误差越大，当  $N=0$  时，没有误差。

把上述结果用模型表示如图 5.8 所示。

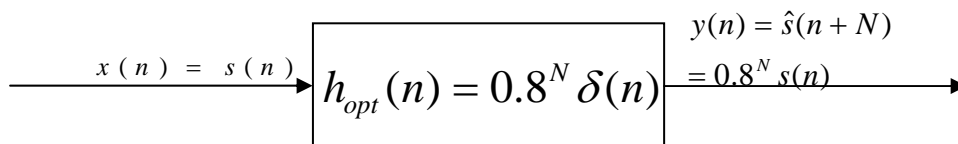


图 5.8 例题 5-3 的纯预测模型

### 5.2.3 一步线性预测器

对于纯预测问题，有  $y(n) = \hat{x}(n+N) = \sum_{m=0}^{+\infty} h(m)x(n-m)$ ，然而预测的问题常常是要

求在过去的  $p$  个观测值的基础上来预测当前值，也就是

$$y(n) = \hat{x}(n) = \sum_{m=1}^p h(m)x(n-m)$$

这就是一步线性预测公式，常常用下列符合表示

$$\hat{x}(n) = -\sum_{m=1}^p a_m^p x(n-m) \quad (5-48)$$

式中  $p$  为阶数,  $a_m^p = -h(m)$ 。预测的均方误差为

$$\begin{aligned} E[e^2(n)] &= E[(x(n) + \sum_{m=1}^p a_m^p x(n-m))^2] \\ &= R_{xx}(0) + 2[\sum_{m=1}^p a_m^p R_{xx}(m)] + \sum_{m=1}^p \sum_{l=1}^p a_m^p a_l^p R_{xx}(l-m) \end{aligned} \quad (5-49)$$

要使得均方误差最小, 将上式右边对  $a_m^p$  求偏导并且等于零, 得到  $p$  个等式:

$$R_{xx}(l) + \sum_{m=1}^p a_m^p R_{xx}(l-m) = 0 \quad l = 1, 2, \dots, p \quad (5-50)$$

最小均方误差:

$$E[e^2(n)]_{\min} = R_{xx}(0) + \sum_{m=1}^p a_m^p R_{xx}(m) \quad (5-51)$$

式 (5-50) 就是 Yule-Walker (Y-W) 方程, 和第三章 AR 模型参数估计的方程一致, 如何去求解该方程在第三章有详细介绍。把 Yule-Walker (Y-W) 方程和维纳-霍夫方程进行比较, 维纳-霍夫方程要估计的量是  $s(n)$ , Y-W 方程要估计的量是  $x(n)$  本身, 因而解维纳-霍夫方程要已知  $x(n)$  和  $s(n)$  的互相关函数, 实际中这个互相关函数往往是未知的, 而解 Y-W 方程只需要知道观测信号的自相关函数。因此 Y-W 方程比 W-H 方程更具有实用价值。

**【例 5-5】** 已知图 5.7 中  $x(n) = s(n)$ , 其中  $s(n)$  的自相关序列为  $R_{ss}(m) = 0.8^{|m|}$ , 试设计一个  $p=2$  的可实现的一步线性预测器, 并求最小均方误差。

解:  $\because R_{xx}(m) = R_{ss}(m) = 0.8^{|m|}$ ,  $\therefore R_{xx}(0) = 1, R_{xx}(\pm 1) = 0.8, R_{xx}(\pm 2) = 0.64$

利用 Y-W 方程  $R_{xx}(l) + \sum_{m=1}^2 a_m^p R_{xx}(l-m) = 0 \quad l = 1, 2$ , 可以列出 2 个方程式

$$\begin{cases} 0.8 + a_1^p + 0.8a_2^p = 0 \\ 0.64 + 0.8a_1^p + a_2^p = 0 \end{cases}$$

解得:  $a_1^p = -0.8, a_2^p = 0$ , 也即  $\hat{x}(n) = 0.8x(n-1)$

$$E[e^2(n)]_{\min} = R_{xx}(0) + \sum_{m=1}^p a_m^p R_{xx}(m) = 1 - 0.64 = 0.36$$



结果和例（5-4）N=1 时一致。

### 第三节 维纳滤波器的应用（Application of Wiener filter）

要设计维纳滤波器必须知道观测信号和估计信号之间的相关函数，即先验知识。如果我们不知道它们之间的相关函数，就必须先对它们的统计特性做估计，然后才能设计出维纳滤波器，这样设计出的滤波器被称为“后验维纳滤波器”。

在生物医学信号处理中比较典型的应用就是关于诱发脑电信号的提取。大脑诱发电位（Evoked Potential, EP）指在外界刺激下，从头皮上记录到的特异电位，它反映了外周感觉神经、感觉通路及中枢神经系统中相关结构在特定刺激情况下的状态反应。在神经学研究以及临床诊断、手术监护中有重要意义。EP 信号十分微弱，一般都淹没在自发脑电（EEG）之中，从 EEG 背景中提取诱发电位一直是个难题：EP 的幅度比自发脑电低一个数量级，无法从一次观察中直接得到；EP 的频谱与自发脑电频谱完全重叠，使得频率滤波失效；在统计上 EP 是非平稳的、时变的脑诱发电位。通过多次刺激得到的脑电信号进行叠加来提取 EP，这是现今最为广泛使用的 EP 提取方法。

为了解决诱发电位提取问题，研究者利用维纳滤波来提高信噪比，先后有 Walter、Doyle、Weerd 等对维纳滤波方法进行了改进。在频域应用后验维纳滤波的核心就是由各次观察信号中分解出信号的谱估计和噪声的谱估计，通过设计出的滤波器来提高信噪比。

本节将介绍时-频平面的维纳滤波（time-frequency plane wiener filtering，简称 TFPW）在高分辨心电图（HRECG）中的应用。方法如下：

1. 设一共有 N 次观测样本： $x_i(t) = s(t) + w_i(t), i = 1, 2, \dots, N$ 。其中  $s(t)$  是周期确定的心电信号； $w_i(t)$  是第 i 次记录时的噪声，包括肌电、测量仪器噪声等，假设每次记录的噪声之间互不相关； $x_i(t)$  是观测信号；信号和噪声相互独立。

对每次观测用短时傅立叶变换求时频表示（TFR）： $X_i(t, f) = S(t, f) + W_i(t, f)$ ，

对 N 次观测的时频表示（TFR）求平均： $\bar{X}_i(t, f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i(t, f) = S(t, f) + W(t, f)$  (1)

样本平均为： $\bar{x}(t) = s(t) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i(t), i = 1, 2, \dots, N$ ，

样本平均的时频表示 (TFR) 为:  $\bar{X}(t, f) = S(t, f) + \frac{1}{N}W(t, f)$  (2)

从式 (2) 可以得到一个基于样本平均的简单时-频平面后验维纳滤波器:

$$h(t, f) = \frac{S(t, f)}{S(t, f) + \frac{1}{N}W(t, f)} \quad (3)$$

2. 在时-频域上对式 (1) (2) 进行修正, 给出更实际的表示:

$$\bar{X}_i(t, f) = S(t, f) + \bar{W}_i(t, f) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N COV[S(t, f), W_i(t, f)] + \frac{1}{N} IF[\sum_{i=1}^N X_i(t, f)] \quad (4)$$

$$\bar{X}(t, f) = S(t, f) + \bar{W}(t, f) + COV[S(t, f), \bar{W}(t, f)] + IF[\bar{X}(t, f)] \quad (5)$$

式中  $COV$  表示信号和噪声之间的方差, 也就是考虑了信号和噪声并非相互独立;  $IF$  是干扰项;  $\bar{W}(t, f)$  表示样本平均的噪声功率;  $\bar{W}_i(t, f)$  表示样本噪声功率的平均。

3. TFPW 的计算过程如图 5.9 所示。

4. TFPW 的模拟实验结果如图 5.10 所示。

在图 5.10 中每一个图中从上至下分别表示: 测量的单个样本, 样本平均, TFPW 滤波器估计的信号, 原始信号。图 5.10 的初始信噪比设为  $-12\text{dB}$ , TFPW 与叠加平均法相比, 信噪比有 5 个 dB 左右的改善。

5. TFPW 滤波中由于有二次 TFR 中的相关噪声以及  $IF$  项, 滤波器可能包含虚部, 也就是包含信号的相位信息, 直接在时-频平面上考虑相位问题还需要进一步研究。

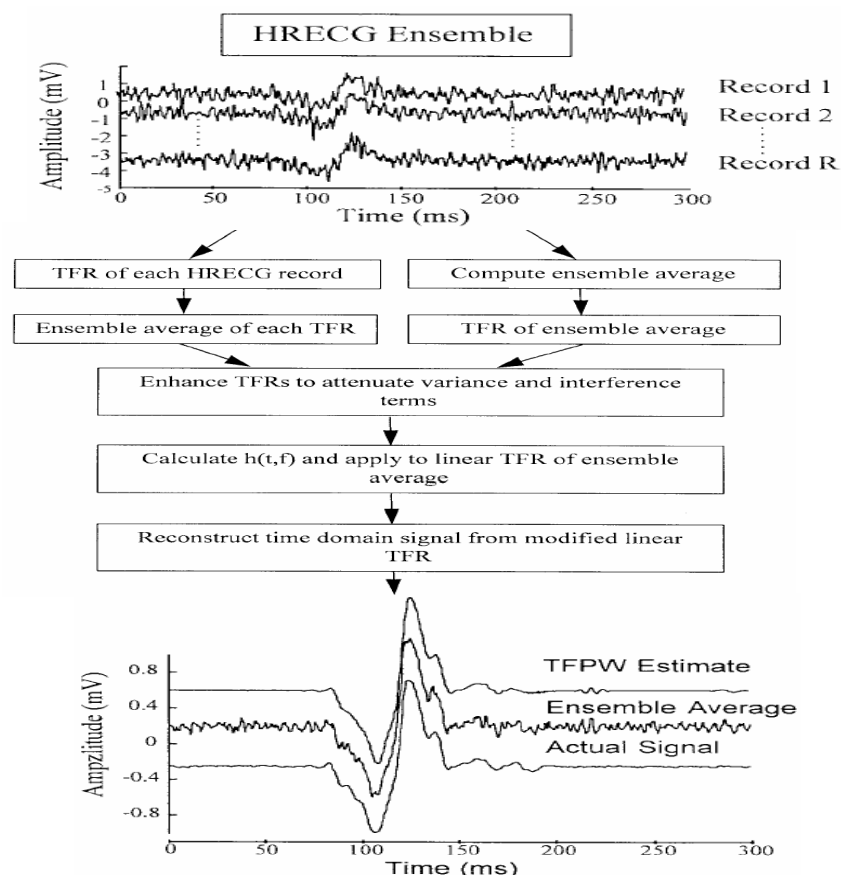


图 5.9 TFPW 计算流程

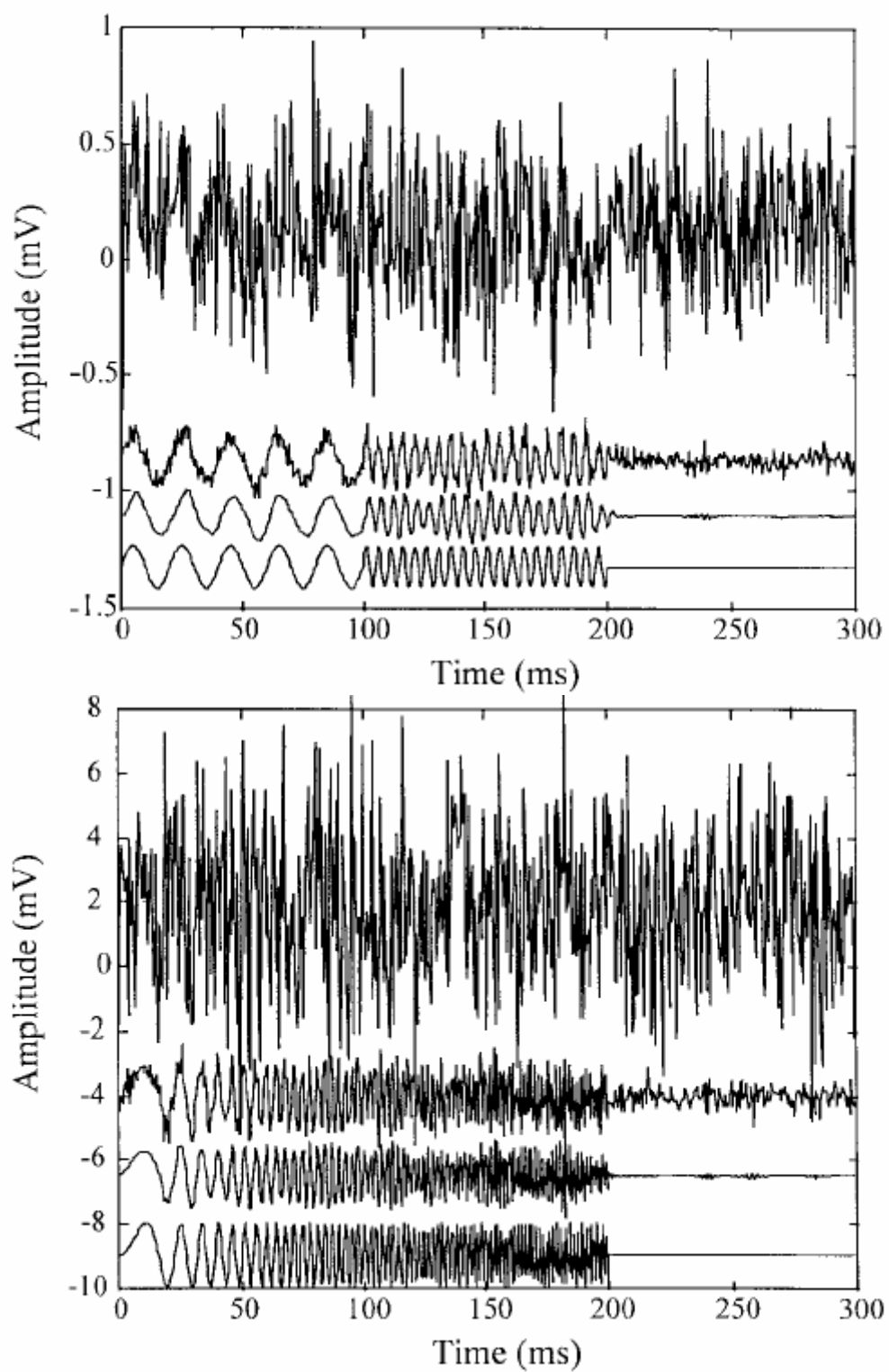


图 5.10 （上图）原信号是两个正弦波，观测信号混有白噪声  
（下图）原信号是线性调频信号，观测信号混有白噪声