TOEPLITZ

JUZHENLEI DE KUAISU SUANFA

TOEPLITZ 矩阵类的快速算法

徐仲 张凯院 陆全 著

西北工业大学出版社

TOEPLITZ 矩阵类的快速算法

徐仲　张凯院　陆全　著

西北工业大学出版基金资助出版

西 北 工 业 大 学 出 版 社

（陕）新登字 009 号

【内容简介】 本书是专门研究在科技领域广泛应用的 Toeplitz 矩阵及其有关特殊矩阵类的学术论著。全书分为六章，详细阐述了该类矩阵的性质，介绍了求逆矩阵及广义逆矩阵、求解相应的线性方程组、进行矩阵的三角分解、QR 分解及求特征值与特征向量等的快速算法及其若干应用。

本书系统性强、内容丰富、论证详尽，可作为高等学校有关专业高年级学生和研究生的教材，也可作为从事教学、科研的教师和技术人员的参考书。

TOEPLITZ 矩阵类的快速算法
徐仲　张凯院　陆全　著
责任编辑　冷国伟
责任校对　钱伟峰
*

（邮编 710072　西安市友谊西路 127 号　电话 8491147）
全国各地新华书店经销
长安第二印刷厂印装
ISBN 7-5612-1102-3/O·148
*
开本：850 毫米×1 168 毫米 1/32　印张：9.25　字数：224 千字
1999 年10月第 1 版　1999 年10月第 1 次印刷
印数：1—2 000 册　定价：25.00 元

前　言

Toeplitz 矩阵及与之密切相关的 Hankel 矩阵、中心与反中心对称矩阵、Hilbert 矩阵、Cauchy 矩阵和 Loewner 矩阵等，是应用最广泛的特殊矩阵类之一。从 50 年代末至今，该类矩阵的研究一直受到人们的重视，有关的研究论文达数百篇之多，是甚为活跃的研究领域之一。本书包括了作者近几年来在该领域的部分研究成果，并将散见于诸多资料中有关结果的基本思想和主要方法进行分类、归纳和整理，汇集成书。评阅专家指出："该书将自动控制技术及其它科学技术领域有重要应用价值的 Toeplitz 矩阵和其它特殊矩阵的研究成果，从数学上给出了系统论述，是一本有特色的著作。国外早期有专著发表，但国内尚未见类似的论著出版。该书对于学科发展并推动有关技术发展和高技术人才培养，都有参考价值。"

全书共分六章，按章分别对 Toeplitz 矩阵、Hankel 矩阵、中心对称矩阵、Loewner 矩阵及其相应推广矩阵的性质，矩阵求逆及广义逆、线性方程组求解、三角分解、QR 分解等的快速算法进行了讨论。最后一章介绍了 Toeplitz 矩阵及其有关特殊矩阵类在数值分析、自动控制及数字信号处理等领域的应用。为了便于读者阅读，在撰写过程中，我们注重内容的系统性和条理性，给出了较详细的定理证明，以较简单的方法重新推证了许多结果，分析了算法的计算工作量，明确给出了其计算步骤；尽量用比较浅显的方法叙述应用例子。限于篇幅，著者仅对有限阶矩阵进行了讨论，舍去了算法的误差分析和数值算例。

本书的第一作者曾于 1994 年 9 月至 1995 年 7 月在西安交通大学作访问学者，师从陕西省工业与应用数学学会理事长、西安交通大学应用数学研究中心主任游兆永教授，主要进行特殊矩阵

方面的研究。游兆永教授对于作者撰写特殊矩阵方面的有关论著给予了很大的鼓励、关心和指导，已有一本专著《范德蒙矩阵类的快速算法》于 1997 年出版。游兆永教授不幸于 1997 年底去世，作者谨以此书作为对游兆永教授的纪念。

本书承蒙西北工业大学出版基金资助出版，并得到西北工业大学有关领导、应用数学系领导和同事们的支持与帮助。航空工业总公司 631 所周天孝教授，西北工业大学罗学波教授、叶正麟教授、史忠科教授审阅了书稿，并对其内容和结构提出了有益的建议。在此，作者表示衷心的感谢。

本书第一、二、三、五章由徐仲撰写，第六章由张凯院撰写，第四章由徐仲和陆全撰写。

由于水平所限，难免有疏漏或不妥之处，恳望读者指正。

著　者

1998 年 3 月于西北工业大学

目　　录

第一章　预备知识

本章将对书中采用的符号、编号，以及要用到的基本定理作一概要叙述.

§1.1　几个约定

为了避免重复，对本书中采用的符号作以下约定：

大写黑体字母表示矩阵，如 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{\Gamma}$ 等，$\boldsymbol{O}$ 表示零矩阵；小写黑体字母表示列向量，如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{f}$ 等，$\boldsymbol{0}$ 表示零向量；小写字母表示数，如 a，b，λ 等. 当用小写字母表示矩阵的元素或向量的分量时，借助下标示明该元素或分量在对应矩阵或向量中的位置，如用 a_{ij} 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素，用 x_i 表示向量 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量等. 以 a_{ij} 为元素的一般 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 常写成 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$，特别地，$n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 常写成 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式和秩分别记为 $\det\boldsymbol{A}$ 和 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，其第 i 行第 j 列元素为 a_{ji}；矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置矩阵记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$，其第 i 行第 j 列元素为 $\overline{a_{ji}}$. 若 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ 是 $m \times n$ 分块矩阵，其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 均是矩阵，以 $\boldsymbol{A}'$ 表示第 i 行第 j 列分块元素为 $\boldsymbol{A}_{ji}$ 的分块矩阵. 注意，对于分块矩阵来说，$\boldsymbol{A}'$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 一般是不相等的. 以 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为对角元素的对角矩阵记为 $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$. n 阶单位矩阵用 $\boldsymbol{I}_n$ 表示，简记为 $\boldsymbol{I}$. $\boldsymbol{I}$ 的第 i 列记为 $\boldsymbol{e}_i^{(n)}$，在不会误解的情况下简记为 $\boldsymbol{e}_i$. n 阶方阵

$$\boldsymbol{Z}_n = [\boldsymbol{e}_2 \quad \boldsymbol{e}_3 \quad \cdots \quad \boldsymbol{e}_n \quad \boldsymbol{0}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 0 \\ \boldsymbol{I}_{n-1} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{1.1.1}$$

称为**移位矩阵**，简记为 $\boldsymbol{Z}$. 可以验证

$$\left.\begin{aligned} &Z^r=\begin{bmatrix} O & O \\ I_{n-r} & O \end{bmatrix}, \quad 1<r<n \\ &Z^r=O, \quad r\geqslant n \end{aligned}\right\} \tag{1.1.2}$$

n 阶方阵

$$J_n=[e_n \quad e_{n-1} \quad \cdots \quad e_1]=\begin{bmatrix} & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & \end{bmatrix} \tag{1.1.3}$$

称为**次单位矩阵**，简记为 J . 可以验证

$$J^{-1}=J, \quad J^2=I \tag{1.1.4}$$

本书采用如下的编号方案：

每一章分成若干节，用§2.3表示第二章第三节. 各章的定义、定理、引理、例题等按章节顺序编号，如定理2.2.1表示第二章第二节的第一个定理等. 在每一章中，公式按顺序编号，如(1.4.1)表示第一章中第四节第一个公式等.

§1.2 次对称矩阵

如果 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n$ 满足 $a_{ij}=a_{ji}$ ，则称之为对称矩阵. 可逆对称矩阵的逆矩阵仍是对称的.

定义 1.2.1 如果 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n$ 的元素关于其次对角线对称，即

$$a_{ij}=a_{n+1-j,n+1-i}, \quad i,j=1,2,\cdots,n$$

则称之为**次对称矩阵**.

例如，当 $n=4$ 时，次对称矩阵 A 为

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{22} & a_{12} \\ a_{41} & a_{31} & a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

又例如，式(1.1.1)的移位矩阵 $\boldsymbol{Z}$ 是次对称矩阵，式(1.1.3)的次单位矩阵 $\boldsymbol{J}$ 既是对称的，又是次对称的.

关于次对称矩阵有如下一些性质.

定理 1.2.1　设 $\boldsymbol{J}$ 是 n 阶次单位矩阵，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，则

1)　$\boldsymbol{A}$ 是次对称矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{J}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}=\boldsymbol{A}$；

2)　若 $\boldsymbol{A}$ 是次对称矩阵，则 $\boldsymbol{JA}$ 与 $\boldsymbol{AJ}$ 均是对称矩阵；

3)　若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是次对称矩阵，k 是数，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，$k\boldsymbol{A}$ 也是次对称矩阵；

4)　若 $\boldsymbol{A}$ 是可逆次对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是次对称矩阵.

证明　1)～3)可直接验证. 下证 4). 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则

$$\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{J}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J})^{-1}=\boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{J}^{-1}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}$$

证毕

§1.3　逆　矩　阵

一、　加边矩阵的逆矩阵

给定 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$，设

$$\boldsymbol{A}_k=(a_{ij})_{i,j=1}^{k},\quad k=1,2,\cdots,n$$

是 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶顺序主子阵.

定理 1.3.1　设矩阵 $\boldsymbol{A}_k$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}_{k+1}$ 可逆的充要条件是

$$\omega_k=a_{k+1,k+1}-\boldsymbol{r}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_k^{-1}\boldsymbol{c}_k\neq 0$$

且

$$\boldsymbol{A}_{k+1}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_k^{-1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}+\omega_k^{-1}\begin{bmatrix}-\boldsymbol{A}_k^{-1}\boldsymbol{c}_k\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\boldsymbol{r}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_k^{-1} & 1\end{bmatrix}\tag{1.3.1}$$

其中 $\boldsymbol{c}_k=(a_{1,k+1},\cdots,a_{k,k+1})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{r}_k^{\mathrm{T}}=(a_{k+1,1},\cdots,a_{k+1,k})$.

证明　因为

$$A_{k+1}=\begin{bmatrix}A_k & c_k\\ r_k^{\mathrm T} & a_{k+1,k+1}\end{bmatrix}$$

利用等式

$$\begin{bmatrix}I_k & 0\\ -r_k^{\mathrm T}A_k^{-1} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_k & c_k\\ r_k^{\mathrm T} & a_{k+1,k+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_k & -A_k^{-1}c_k\\ 0^{\mathrm T} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_k & 0\\ 0^{\mathrm T} & \omega_k\end{bmatrix}$$

可知，A_{k+1} 可逆的充要条件是 $\omega_k\neq 0$，且

$$A_{k+1}^{-1}=\begin{bmatrix}I_k & -A_k^{-1}c_k\\ 0^{\mathrm T} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_k^{-1} & 0\\ 0^{\mathrm T} & \omega_k^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_k & 0\\ -r_k^{\mathrm T}A_k^{-1} & 1\end{bmatrix}$$

整理之即得式(1.3.1). 证毕

相应的结果可以推广到分块矩阵. 设 $A=(A_{ij})_{i,j=1}^{n}$，其中 A_{ij} 均为 p 阶方阵. 又设 $A_k=(A_{ij})_{i,j=1}^{k}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 是 A 的 k 阶分块顺序主子阵.

定理 1.3.2 设矩阵 A_k 可逆，则 A_{k+1} 可逆的充要条件是矩阵

$$\Omega_k=A_{k+1,k+1}-R_k'A_k^{-1}C_k$$

可逆，且

$$A_{k+1}^{-1}=\begin{bmatrix}A_k^{-1} & O\\ O & O\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-A_k^{-1}C_k\\ I_p\end{bmatrix}\Omega_k^{-1}\begin{bmatrix}-R_k'A_k^{-1} & I_p\end{bmatrix}$$

其中 $C_k=[A_{1,k+1}\ \cdots\ A_{k,k+1}]'$，$R_k'=[A_{k+1,1}\ \cdots\ A_{k+1,k}]$.

二、 加边线性方程组的求解

考虑线性方程组

$$Ax=f,\quad A^{\mathrm T}y=g$$

的求解，其中 A 是 n 阶方阵，x,y 是 n 维未知列向量，$f=(f(1),\cdots,f(n))^{\mathrm T}$ 和 $g=(g(1),\cdots,g(n))^{\mathrm T}$ 是已知的右端向量. 设

$$x_k=(x_k(1),\cdots,x_k(k))^{\mathrm T},\quad y_k=(y_k(1),\cdots,y_k(k))^{\mathrm T}$$

$$u_k=(u_k(1),\cdots,u_k(k))^{\mathrm T},\quad v_k=(v_k(1),\cdots,v_k(k))^{\mathrm T}$$

分别是下列线性方程组的解向量

$$A_k x_k = f_k, \quad A_k u_k = e_k^{(k)}$$

$$A_k^{\mathrm{T}} y_k = g_k, \quad A_k^{\mathrm{T}} v_k = e_k^{(k)}$$

其中 A_k 是 A 的 k 阶顺序主子阵，$f_k = (f(1),\cdots,f(k))^{\mathrm{T}}$，$g_k = (g(1),\cdots,g(k))^{\mathrm{T}}$ 都是 k 维向量.

定理 1.3.3　设 A_k 与 A_{k+1} 均可逆，则线性方程组

$$A_k x_k = f_k, \qquad A_k^{\mathrm{T}} y_k = g_k$$

$$A_{k+1} x_{k+1} = f_{k+1}, \quad A_{k+1}^{\mathrm{T}} y_{k+1} = g_{k+1}$$

的解向量满足

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} x_k \\ 0 \end{bmatrix} + \sigma_k u_{k+1}, \quad y_{k+1} = \begin{bmatrix} y_k \\ 0 \end{bmatrix} + \tau_k v_{k+1} \quad (1.3.2)$$

其中 u_{k+1} 和 v_{k+1} 分别是 $A_{k+1} u_{k+1} = e_{k+1}^{(k+1)}$ 和 $A_{k+1}^{\mathrm{T}} v_{k+1} = e_{k+1}^{(k+1)}$ 的解向量，而

$$\sigma_k = f(k+1) - \sum_{j=1}^{k} a_{k+1,j} x_k(j)$$

$$\tau_k = g(k+1) - \sum_{j=1}^{k} a_{j,k+1} y_k(j)$$

证明　将式(1.3.1)两边右乘 f_{k+1} 得

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} x_k \\ 0 \end{bmatrix} + \omega_k^{-1} \begin{bmatrix} -A_k^{-1} c_k \\ 1 \end{bmatrix} (-r_k^{\mathrm{T}} A_k^{-1} f_k + f(k+1)) =$$

$$\begin{bmatrix} x_k \\ 0 \end{bmatrix} + \sigma_k \omega_k^{-1} \begin{bmatrix} -A_k^{-1} c_k \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.3.3)$$

式(1.3.1)两边再右乘 $e_{k+1}^{(k+1)}$ 得

$$u_{k+1} = \omega_k^{-1} \begin{bmatrix} -A_k^{-1} c_k \\ 1 \end{bmatrix}$$

代入式(1.3.3)即得(1.3.2)中第一式. 式(1.3.1)取转置，再仿上述过程即得(1.3.2)中第二式.　证毕

三、Sherman-Morrison-Woodbury 公式

Sherman-Morrison-Woodbury 公式是一个由秩-m 矩阵修改

过的矩阵的求逆公式.

定理 1.3.4 设 A 是 n 阶可逆方阵，X，Y 均是 $n\times m$ 矩阵，且 $m\leqslant n$ ，则当且仅当 $I_m+Y^{\mathrm{T}}A^{-1}X$ 可逆时，$A+XY^{\mathrm{T}}$ 是可逆的，且

$$(A+XY^{\mathrm{T}})^{-1}=A^{-1}-A^{-1}X(I_m+Y^{\mathrm{T}}A^{-1}X)^{-1}Y^{\mathrm{T}}A^{-1} \tag{1.3.4}$$

证明 直接验证即得. 证毕

在重要的特殊情形 $m=1$，X 和 Y 可分别取为 n 维列向量 x 和 y,则式(1.3.4)化为 Sherman-Morrison 公式

$$(A+xy^{\mathrm{T}})^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}xy^{\mathrm{T}}A^{-1}}{1+y^{\mathrm{T}}A^{-1}x} \tag{1.3.5}$$

若在式(1.3.5)中取 A 为单位矩阵,则得 Sherman 公式

$$(I_n+xy^{\mathrm{T}})^{-1}=I_n-\frac{xy^{\mathrm{T}}}{1+y^{\mathrm{T}}x} \tag{1.3.6}$$

§1.4 三角分解基本定理

由线性代数的结果知,非奇异矩阵 A 可进行三角分解的充要条件是 A 的所有顺序主子阵 A_k $(k=1,2,\cdots,n)$均非奇异. 在讨论矩阵 A 的三角分解算法中,常用到如下两个结论.

定理 1.4.1 设 n 阶方阵 A 的所有顺序主子阵 A_k 均非奇异. 引入 n 阶方阵

$$A^{(0)}=B_0=A,\quad A^{(i)}=\begin{bmatrix}O & O\\ O & B_i\end{bmatrix},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{1.4.1}$$

其中 B_i 是 $n-i$ 阶方阵. 又记

$$\left.\begin{aligned}l_i&=(0,\cdots,0,l_i(i),\cdots,l_i(n))^{\mathrm{T}}\\ u_i&=(0,\cdots,0,u_i(i),\cdots,u_i(n))^{\mathrm{T}},\quad i=1,2,\cdots,n\end{aligned}\right\} \tag{1.4.2}$$

若取

$$l_i = A^{(i-1)}e_i,\quad u_i = A^{(i-1)\mathrm{T}}e_i$$

$$d_i = \frac{1}{l_i(i)} = \frac{1}{u_i(i)},\quad i = 1,2,\cdots,n \tag{1.4.3}$$

则有

$$A^{(i-1)} = l_i d_i u_i^{\mathrm{T}} + A^{(i)},\quad i = 1,2,\cdots,n \tag{1.4.4}$$

且矩阵 A 的一种三角分解为

$$A = [l_1 \quad \cdots \quad l_n]\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)[u_1 \quad \cdots \quad u_n]^{\mathrm{T}}$$

证明　给式(1.4.4)右乘 e_i，并注意 $A^{(i)}e_i = 0$，得

$$A^{(i-1)}e_i = d_i u_i(i) l_i$$

同样，将式(1.4.4)取转置再右乘 e_i，得

$$A^{(i-1)\mathrm{T}}e_i = d_i l_i(i) u_i$$

令 $d_i = \dfrac{1}{l_i(i)} = \dfrac{1}{u_i(i)}$，就有 $l_i = A^{(i-1)}e_i$，$u_i = A^{(i-1)\mathrm{T}}e_i$.

将式(1.4.4)的步骤进行 n 步，并注意 $A^{(n)} = O$，得

$$A = A^{(0)} = l_1 d_1 u_1^{\mathrm{T}} + A^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} l_i d_i u_i^{\mathrm{T}} + A^{(n)} =$$

$$[l_1 \quad \cdots \quad l_n]\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)[u_1 \quad \cdots \quad u_n]^{\mathrm{T}}$$

由于　$0 \neq \det A = l_1(1)\cdots l_n(n) d_1\cdots d_n u_1(1)\cdots u_n(n)$

于是 $l_i(i) \neq 0$, $u_i(i) \neq 0$, $d_i \neq 0$，即式(1.4.3)有意义.

证毕

定理 1.4.2　条件同定理1.4.1，又设

$$\Delta A^{(i)} = LA^{(i)} - A^{(i)}U$$

其中 L 是下三角矩阵，U 是上三角矩阵. 则矩阵 B_i $(i = 0,1,\cdots,n-1)$ 非奇异，且

$$\mathrm{rank}(\Delta A^{(i)}) \leqslant \mathrm{rank}(\Delta A^{(i-1)}),\quad i = 1,2,\cdots,n$$

证明　由式(1.4.1)～(1.4.4)知

$$B_{i-1} = (l_i(i),\cdots,l_i(n))^{\mathrm{T}} d_i (u_i(i),\cdots,u_i(n)) + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0} & B_i \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1/d_i & s_i^{\mathrm{T}} \\ t_i & B_i + d_i t_i s_i^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

其中 $s_i^{\mathrm{T}} = (u_i(i+1), \cdots, u_i(n))$，$t_i = (l_i(i+1), \cdots, l_i(n))^{\mathrm{T}}$．利用

$$\begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ -d_i t_i & I_{n-i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/d_i & s_i^{\mathrm{T}} \\ t_i & B_i + d_i t_i s_i^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -d_i s_i^{\mathrm{T}} \\ 0 & I_{n-i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/d_i & 0^{\mathrm{T}} \\ 0 & B_i \end{bmatrix} \tag{1.4.5}$$

得 $$\det B_{i-1} = \frac{\det B_i}{d_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1$$

由 $B_0 = A$ 非奇异及 $d_i \neq 0$ 知 $\det B_i \neq 0$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$．利用式(1.4.5)可求得

$$B_{i-1}^{-1} = \begin{bmatrix} d_i(1 + d_i s_i^{\mathrm{T}} B_i^{-1} t_i) & -d_i s_i^{\mathrm{T}} B_i^{-1} \\ -d_i B_i^{-1} t_i & B_i^{-1} \end{bmatrix} \tag{1.4.6}$$

设 $$L = \begin{bmatrix} L_1^{(i)} & O \\ L_2^{(i)} & L_3^{(i)} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} U_1^{(i)} & U_2^{(i)} \\ O & U_3^{(i)} \end{bmatrix}$$

其中 $L_3^{(i)}$ 是 $n-i$ 阶下三角矩阵，$U_3^{(i)}$ 是 $n-i$ 阶上三角矩阵．又设

$$\Delta_i B_i = L_3^{(i)} B_i - B_i U_3^{(i)}, \quad \overline{\Delta}_i B_i^{-1} = B_i^{-1} L_3^{(i)} - U_3^{(i)} B_i^{-1}$$

则由式(1.4.6)，有

$$\overline{\Delta}_{i-1} B_{i-1}^{-1} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & \overline{\Delta}_i B_i^{-1} \end{bmatrix}$$

根据子矩阵的秩不大于原矩阵的秩，得

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(\Delta A^{(i)}) &= \operatorname{rank}(\Delta_i B_i) = \operatorname{rank}[(\Delta_i B_i) B_i^{-1}] = \\ &\operatorname{rank}[B_i(\overline{\Delta}_i B_i^{-1})] = \operatorname{rank}(\overline{\Delta}_i B_i^{-1}) \leqslant \\ &\operatorname{rank}(\overline{\Delta}_{i-1} B_{i-1}^{-1}) = \operatorname{rank}(\Delta_{i-1} B_{i-1}) = \\ &\operatorname{rank}(\Delta y / A^{(i-1)}) \end{aligned}$$

证毕

§1.5 矩阵的 Moore-Penrose 逆

矩阵的逆的概念，原来是对非奇异方阵才有意义的. 逆矩阵的存在，使得矩阵方程中可以使用消去律. 如当方阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异时，线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有惟一解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$. 但是如果方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是奇异矩阵或长方阵，或者 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 是矛盾方程组，这时应该如何将该方程组在某种意义下的解通过矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的某种逆加以表示呢?这就有必要将逆矩阵的概念推广到奇异方阵或一般长方阵的情形. 当然，这种推广后所得到的矩阵——广义逆矩阵，应该具备普通逆矩阵的若干性质，而且当 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异方阵时，推广后的矩阵应该与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 相吻合. 在诸多广义逆矩阵中，以 E. H. Moore 于1920年首先提出的、R. Penrose 于1955年以更明确的形式给出的广义逆矩阵最为常用.

定义 1.5.1 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，若 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足条件：

1) $\boldsymbol{AXA}=\boldsymbol{A}$;

2) $\boldsymbol{XAX}=\boldsymbol{X}$;

3) $(\boldsymbol{AX})^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{AX}$;

4) $(\boldsymbol{XA})^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{XA}$,

则称 $\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 **Moore-Penrose 逆**，记为 $\boldsymbol{A}^{+}$.

$\boldsymbol{A}^{+}$ 的存在及惟一性见如下结论.

定理 1.5.1 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore-Penrose 逆存在且惟一.

证明 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 零矩阵，则 $n\times m$ 零矩阵是 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore-Penrose 逆. 当 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=m$ 时，可直接验证，$\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}})^{-1}$ ；而当 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=n$ 时，$\boldsymbol{A}^{+}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ ；一般的非零矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一定可以表为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{FG} \tag{1.5.1}$$

其中 F 和 G 分别是 $m\times r$ 矩阵和 $r\times n$ 矩阵，且 $\operatorname{rank}F=\operatorname{rank}G=\operatorname{rank}A=r$，称式(1.5.1)为矩阵 A 的**满秩分解**. 令

$$X=G^{+}F^{+}=G^{\mathrm{H}}(GG^{\mathrm{H}})^{-1}(F^{\mathrm{H}}F)^{-1}F^{\mathrm{H}} \tag{1.5.2}$$

可知 X 满足 1)～4)，即 $X=A^{+}$.

再证惟一性. 设 X,Y 均满足方程 1)～4)，则

$$\begin{aligned}X=XAX=X(AX)^{\mathrm{H}}=XX^{\mathrm{H}}(AYA)^{\mathrm{H}}=XX^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}(AY)^{\mathrm{H}}=\\ XAXAY=(XA)^{\mathrm{H}}Y=(AYA)^{\mathrm{H}}X^{\mathrm{H}}Y=(YA)^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}X^{\mathrm{H}}Y=\\ YAXAY=YAY=Y\end{aligned}$$

证毕

例 1.5.1 设 $A=\operatorname{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，则可直接验证

$$A^{+}=\operatorname{diag}(a_1^{+},a_2^{+},\cdots,a_n^{+})$$

这里，对于一个数 a，记

$$a^{+}=\begin{cases}0, & a=0\\ a^{-1}, & a\neq 0\end{cases}$$

例 1.5.2 设 $m\times n$ 矩阵 $A=\begin{bmatrix}A_1 & O\\ O & O\end{bmatrix}$，其中 A_1 是 p 阶可逆方阵，则

$$A=FG=\begin{bmatrix}A_1\\ O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_p & O\end{bmatrix}$$

由式(1.5.2)，有

$$A^{+}=\begin{bmatrix}I_p\\ O\end{bmatrix}I_p^{-1}(A_1^{\mathrm{H}}A_1)^{-1}\begin{bmatrix}A_1^{\mathrm{H}} & O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1^{-1} & O\\ O & O\end{bmatrix}$$

例 1.5.3 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，U 和 V 分别是 m 阶与 n 阶酉矩阵(或正交矩阵)，则可直接验证

$$(UAV)^{+}=V^{\mathrm{H}}A^{+}U^{\mathrm{H}}$$

例 1.5.4 直接验证可得

$$\begin{bmatrix}A & O\\ O & B\end{bmatrix}^{+}=\begin{bmatrix}A^{+} & O\\ O & B^{+}\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}O & A\\ B & O\end{bmatrix}^{+}=\begin{bmatrix}O & B^{+}\\ A^{+} & O\end{bmatrix}$$

值得指出的是，A^{-1}的许多性质，A^{+}已不再具有. 如：一般地

说，$(AB)^+ \neq B^+ A^+$，$AA^+ \neq A^+ A \neq I$，$(PAQ)^+ \neq Q^{-1}A^+ P^{-1}$（$P$,$Q$ 为可逆方阵）等.

自然期望 Moore-Penrose 逆与求解线性方程组会有密切的关系，事实上也的确有下述整齐的结论.

已知线性方程组 $Ax = b$，其中 A 是 $m \times n$ 矩阵，b 是 n 维列向量，则

1）$Ax = b$ 相容的充要条件是 $AA^+ b = b$；

2）$x_0 = A^+ b$ 是相容方程组的范数最小的解，或矛盾方程组的范数最小的最小二乘解（其中取向量的2-范数）；

3）相容方程组的通解，或矛盾方程组的最小二乘解的一般表达式为

$$x = A^+ b + (I_n - A^+ A)y \quad (y \text{ 是任意 } n \text{ 维列向量})$$

有关证明可参看广义逆矩阵的专著[27].

另一类重要的广义逆矩阵是仅对方阵定义的.

定义 1.5.2　设 A 是 n 阶方阵，若存在 n 阶方阵 X，使得

$$AXA = A, \quad XAX = X, \quad AX = XA \tag{1.5.3}$$

则称 X 为 A 的群逆，记为 $A^\#$.

与 A^+ 不同的是，$A^\#$ 并非对每一方阵都存在. 显然，n 阶零矩阵的群逆仍是 n 阶零矩阵.

定理 1.5.2　设 n 阶非零方阵 A 的满秩分解为 $A = FG$，其中 F 和 G 分别是 $n \times r$ 矩阵和 $r \times n$ 矩阵，且 $\text{rank}F = \text{rank}G = \text{rank}A = r$. 则 $A^\#$ 存在的充要条件是 GF 非奇异. 若群逆存在，则它是惟一的，且

$$A^\# = F(GF)^{-2}G \tag{1.5.4}$$

证明　先证惟一性. 设 X,Y 都是 A 的群逆，则

$$X = XAX = XAYAX = AXAYX = AYX =$$

$$YAX = YXAYA = YAXAY = YAY = Y$$

若 GF 非奇异，令 $X = F(GF)^{-2}G$，则易验证式(1.5.3)成立，

故由惟一性知 $A^{\#}=X$. 反之,若群逆存在,则

$$\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}(AA^{\#}A)=\operatorname{rank}(A^2A^{\#})\leqslant\operatorname{rank}A^2\leqslant\operatorname{rank}A$$

即 $\operatorname{rank}A^2=\operatorname{rank}A=r$. 由 $A^2=F(GF)G$ 得, $\operatorname{rank}A^2\leqslant\operatorname{rank}(GF)$; 又由定理1.5.1的证明过程知, $F^+=(F^HF)^{-1}F^H$, $G^+=G^H(GG^H)^{-1}$, 于是由 $GF=F^+A^2G^+$ 得, $\operatorname{rank}(GF)\leqslant\operatorname{rank}A^2$. 故 $\operatorname{rank}(GF)=\operatorname{rank}A^2=r$. 又因 GF 是 r 阶方阵,从而它是可逆的.

证毕

A^+ 不具有的性质对于 $A^{\#}$ (如果存在的话)来说有些是成立的. 如: $AA^{\#}=A^{\#}A$ (但仍不一定有 $AA^{\#}=I$), $(PAQ)^{\#}=Q^{-1}A^{\#}P^{-1}$ (P,Q 为可逆方阵)等.

§1.6 常系数齐次线性差分方程的求解

考虑下面的**常系数齐次线性差分方程**

$$a_kx_{n+k}+a_{k-1}x_{n+k-1}+\cdots+a_1x_{n+1}+a_0x_n=0 \tag{1.6.1}$$

如何求解. 假设其形式解为

$$x_n=\lambda^n \tag{1.6.2}$$

代入式(1.6.1),得

$$a_k\lambda^{n+k}+a_{k-1}\lambda^{n+k-1}+\cdots+a_1\lambda^{n+1}+a_0\lambda^n=$$
$$\lambda^n(a_k\lambda^k+a_{k-1}\lambda^{k-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0)=0$$

因此,有

$$a_k\lambda^k+a_{k-1}\lambda^{k-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0 \tag{1.6.3}$$

式(1.6.3)称为常系数齐次线性差分方程(1.6.1)的**特征方程**. 若设式(1.6.3)的 k 个根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 互不相同,则它们对应 k 个解

$$\lambda_1^n,\ \lambda_2^n,\ \cdots,\ \lambda_k^n$$

从而常系数齐次线性差分方程(1.6.1)的通解为这 k 个解的线性组合

$$x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \cdots + c_k\lambda_k^n \tag{1.6.4}$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 是待定系数，它们由 x_n 的 k 个初值确定.

例 1.6.1 求解 $x_{n+2} - 7x_{n+1} + 12x_n = 0$，$x_0 = 2$，$x_1 = 7$.

解 特征方程为

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = (\lambda - 3)(\lambda - 4) = 0$$

于是通解为 $x_n = c_1 3^n + c_2 4^n$. 由 $x_0 = c_1 + c_2 = 2$ 和 $x_1 = 3c_1 + 4c_2 = 7$ 解得 $c_1 = c_2 = 1$ ，故

$$x_n = 3^n + 4^n$$

如果特征方程(1.6.3)有重根，不妨设 λ_1 是 r 重根，则式(1.6.1)的解就不再是 $c_1\lambda_1^n$ ，取代 c_1 的应是一个含 r 个待定系数的多项式，即解为

$$(c_0^{(1)} + c_1^{(1)}n + \cdots + c_{r-1}^{(1)}n^{r-1})\lambda_1^n$$

例 1.6.2 求解 $x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = 0$ ，$x_0 = 0$ ，$x_1 = 1$ ，$x_2 = 3$.

解 特征方程为

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 = 0$$

于是通解为 $x_n = c_0 + c_1 n + c_2 n^2$. 由初始条件解得 $c_0 = 0$ ，$c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ ，故

$$x_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

如果特征方程(1.6.3)有复根(方程的系数为实数)，则复根必成对共轭出现，通过结合可以作成实函数. 例如 $\lambda_1 = a + \mathrm{i}b$ ，$\lambda_2 = a - \mathrm{i}b$ 是一对共轭复根，则取

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan\theta = \frac{b}{a}$$

从而 $\lambda_1 = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ ，$\lambda_2 = \rho(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta)$. 因而通解(1.6.4)中的项 $c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ 可写成

$$c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n = \rho^n[(c_1 + c_2)\cos(n\theta) + \mathrm{i}(c_1 - c_2)\sin(n\theta)]$$

由于 c_1, c_2 是任意常数，所以 $c_1 + c_2$ 与 $\mathrm{i}(c_1 - c_2)$ 仍是任意常数，以 $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ 表示，从而

$$c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n = \tilde{c}_1\rho^n\cos(n\theta) + \tilde{c}_2\rho^n\sin(n\theta)$$

这样就得到含两个实函数的解. 最后，若特征方程(1.6.3)的根中有 r 重复根，则显然通解可表为

$$\begin{aligned} x_n = &(\tilde{c}_0^{(1)} + \tilde{c}_1^{(1)}n + \cdots + \tilde{c}_{r-1}^{(1)}n^{r-1})\rho^n\cos(n\theta) + \\ &(\tilde{c}_0^{(2)} + \tilde{c}_1^{(2)}n + \cdots + \tilde{c}_{r-1}^{(2)}n^{r-1})\rho^n\sin(n\theta) + \cdots \end{aligned}$$

例 1.6.3 求解 $x_{n+3} + x_n = 0$.

解 由于特征方程 $\lambda^3 + 1 = 0$ 的根为

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{3}\mathrm{i}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{1 - \sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$$

取 $a = \frac{1}{2}$，$b = \frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\rho = 1$，$\tan\theta = \sqrt{3}$，即 $\theta = \frac{\pi}{3}$，故通解为

$$x_n = c_1(-1)^n + c_2\cos\frac{n\pi}{3} + c_3\sin\frac{n\pi}{3}$$

例 1.6.4 求解 $x_{n+6} - 2x_{n+3} + x_n = 0$.

解 由于特征方程 $\lambda^6 - 2\lambda^3 + 1 = 0$ 的根为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{-1 + \sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$$

$$\lambda_5 = \lambda_6 = \frac{-1 - \sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$$

故通解为

$$\begin{aligned} x_n = &(c_1 + c_2 n) + (c_3 + c_4 n)\cos\frac{2n\pi}{3} + \\ &(c_5 + c_6 n)\sin\frac{2n\pi}{3} \end{aligned}$$

§1.7 矩阵的 Kronecker 积

Kronecker 积是一种重要的矩阵乘积.

定义 1.7.1 设 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$,B 是 $p\times q$ 矩阵. A 与 B 的 Kronecker 积是一个 $mp\times nq$ 矩阵,记作 $A\otimes B$,定义为

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

由定义可见,任何两个矩阵作 Kronecker 积都是有意义的,但一般说来,$A\otimes B\neq B\otimes A$. 通常矩阵乘法的某些性质对 Kronecker 积同样成立,但某些性质也有变动.

定理 1.7.1 Kronecker 积具有下列性质:

1) $(\lambda A)\otimes(\mu B)=\lambda\mu(A\otimes B)$, λ,μ 是数;

2) $(A+B)\otimes C=(A\otimes C)+(B\otimes C)$,
   $A\otimes(B+C)=(A\otimes B)+(A\otimes C)$;

3) $A\otimes(B\otimes C)=(A\otimes B)\otimes C$;

4) $(A\otimes B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}\otimes B^{\mathrm{T}}$, $(A\otimes B)^{\mathrm{H}}=A^{\mathrm{H}}\otimes B^{\mathrm{H}}$;

5) $(A\otimes B)(C\otimes D)=(AC)\otimes(BD)$;

6) 若 A,B 均为非奇异矩阵,则 $A\otimes B$ 也为非奇异矩阵,且

$$(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}$$

证明 1)~3)留给读者自己证明.

4) $(A\otimes B)^{\mathrm{T}}$ 的第 (i,j) 位置上的矩阵子块是 $a_{ji}B^{\mathrm{T}}$,它和 $A^{\mathrm{T}}\otimes B^{\mathrm{T}}$ 的第 (i,j) 位置上的矩阵子块相等.

5) $(A\otimes B)(C\otimes D)$的第 (i,j) 位置上的矩阵子块是 $A\otimes B$ 的第 i 行子块和 $C\otimes D$ 的第 j 列子块对应相乘之和,即

$\sum_k (a_{ik}B)(c_{kj}D)$，它恰等于$(AC)\otimes(BD)$的第 (i,j) 位置上的矩阵子块.

6) 利用 5)得 $(A\otimes B)(A^{-1}\otimes B^{-1})=(AA^{-1})\otimes(BB^{-1})=I$，从而 $(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}$. 证毕

§1.8 矩阵 Padé 形式

设 $f(z)$ 是由下述形式幂级数所定义的函数

$$f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j z^j$$

若有次数不超过 m 和 n 的多项式 $p_m(z)$ 和 $q_n(z)$，使得

$$f(z)-\frac{p_m(z)}{q_n(z)}=O(z^{m+n+1})$$

即有理分式函数 $\frac{p_m(z)}{q_n(z)}$ 的展开式与形式幂级数 $f(z)$ 的前 $m+n$ 项重合，则称 $\frac{p_m(z)}{q_n(z)}$ 为 $f(z)$ 的 Padé 形式(或 Padé 逼近). 显然当在分式 $\frac{p_m(z)}{q_n(z)}$ 的分子分母上同乘以任一非零常数时，分式的值将不改变，因而可假定标准化条件 $q_n(0)=1$，并且还假定 $p_m(z)$ 和 $q_n(z)$ 无公共因子存在.

相应的概念可以推广到矩阵(这里仅给出较特殊的情形).

定义 1.8.1 给定矩阵幂级数

$$T(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\Gamma_j z^j \tag{1.8.1}$$

其中 Γ_j 均为 p 阶方阵，若存在矩阵多项式

$$\left.\begin{aligned}U_m(z)&=\sum_{j=0}^{m}U_j z^j,\ V_n(z)=\sum_{j=0}^{n}V_j z^j\\ \widetilde{U}_m(z)&=\sum_{j=0}^{m}\widetilde{U}_j z^j,\ \widetilde{V}_n(z)=\sum_{j=0}^{n}\widetilde{V}_j z^j\end{aligned}\right\} \tag{1.8.2}$$

和矩阵幂级数 $\boldsymbol{W}(z),\widetilde{\boldsymbol{W}}(z)$，其中 $\boldsymbol{U}_j$, $\boldsymbol{V}_j$, $\widetilde{\boldsymbol{U}}_j$, $\widetilde{\boldsymbol{V}}_j$ 均为 p 阶方阵且

$$\det(\boldsymbol{V}_n(z)) \neq 0, \quad \det(\widetilde{\boldsymbol{V}}_n(z)) \neq 0 \tag{1.8.3}$$

使得

$$\boldsymbol{T}(z)\boldsymbol{V}_n(z) - \boldsymbol{U}_m(z) = z^{m+n+1}\boldsymbol{W}(z) \tag{1.8.4}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{V}}_n(z)\boldsymbol{T}(z) - \widetilde{\boldsymbol{U}}_m(z) = z^{m+n+1}\widetilde{\boldsymbol{W}}(z) \tag{1.8.5}$$

则称 $(\boldsymbol{U}_m(z),\boldsymbol{V}_n(z),\boldsymbol{W}(z))$ 为 $\boldsymbol{T}(z)$ 的**右(m,n)型矩阵 Padé 形式**，而称 $(\widetilde{\boldsymbol{U}}_m(z),\widetilde{\boldsymbol{V}}_n(z),\widetilde{\boldsymbol{W}}(z))$ 为 $\boldsymbol{T}(z)$ 的**左(m,n)型矩阵 Padé 形式**.

如果将式(1.8.4)取转置，得

$$\boldsymbol{V}_n^{\mathrm{T}}(z)\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}(z) - \boldsymbol{U}_m^{\mathrm{T}}(z) = z^{m+n+1}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(z)$$

即 $(\boldsymbol{U}_m^{\mathrm{T}}(z),\boldsymbol{V}_n^{\mathrm{T}}(z),\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(z))$ 为 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}(z)$ 的左 (m,n) 型矩阵 Padé 形式. 因此，对右矩阵 Padé 形式的结果易推广到左矩阵 Padé 形式.

以下定理给出矩阵 Padé 形式存在的一个充分条件.

定理 1.8.1 给定矩阵幂级数 $\boldsymbol{T}(z)$ 如式(1.8.1). 若 n 阶分块矩阵

$$\boldsymbol{H}_{m,n} = \begin{bmatrix} \Gamma_{m-n+1} & \cdots & \Gamma_m \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma_m & \cdots & \Gamma_{m+n-1} \end{bmatrix} \tag{1.8.6}$$

非奇异，则 $\boldsymbol{T}(z)$ 的右 (m,n) 型矩阵 Padé 形式存在.

证明 设 $\boldsymbol{U}_m(z)$ 和 $\boldsymbol{V}_n(z)$ 如式(1.8.2)，将其代入式(1.8.4)，并比较 $z^0,z^1,\cdots,z^m$ 的系数可得

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{-n} & \cdots & \Gamma_0 \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{m-n} & \cdots & \Gamma_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_n \\ \vdots \\ \boldsymbol{V}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_0 \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}_m \end{bmatrix} \tag{1.8.7}$$

而比较 $z^{m+1},z^{m+2},\cdots,z^{m+n}$ 的系数可得

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{m-n+1} & \cdots & \Gamma_m & \Gamma_{m+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Gamma_m & \cdots & \Gamma_{m+n-1} & \Gamma_{m+n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_n \\ \vdots \\ \boldsymbol{V}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} \\ \vdots \\ \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$$

其中规定 $\boldsymbol{\Gamma}_j=\boldsymbol{O}$ $(j<0)$. 由上式得

$$\boldsymbol{H}_{m,n}[\boldsymbol{V}_n \quad \cdots \quad \boldsymbol{V}_1]'=-[\boldsymbol{\Gamma}_{m+1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Gamma}_{m+n}]'\boldsymbol{V}_0 \tag{1.8.8}$$

任意取定 p 阶方阵 $\boldsymbol{V}_0$，由于 $\boldsymbol{H}_{m,n}$ 可逆，由上式解出 $\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2,\cdots\boldsymbol{V}_n$，再由式(1.8.7)可确定出 $\boldsymbol{U}_0,\boldsymbol{U}_1,\cdots\boldsymbol{U}_m$，故 $\boldsymbol{T}(z)$ 的右 (m,n) 型矩阵 Padé 形式存在. 证毕

定理 1.8.2 设 $(\boldsymbol{U}_m(z),\boldsymbol{V}_n(z),\boldsymbol{W}(z))$ 为 $\boldsymbol{T}(z)$ 的右 (m,n) 型矩阵 Padé 形式，其中 $\boldsymbol{U}_m(z)$ 和 $\boldsymbol{V}_n(z)$ 如式(1.8.2). 又设 $(\boldsymbol{P}_{m-1}(z),\boldsymbol{Q}_{n-1}(z),\boldsymbol{R}(z))$ 为 $\boldsymbol{T}(z)$ 的右 $(m-1,n-1)$ 型矩阵 Padé 形式，即

$$\boldsymbol{T}(z)\boldsymbol{Q}_{n-1}(z)-\boldsymbol{P}_{m-1}(z)=z^{m+n-1}\boldsymbol{R}(z) \tag{1.8.9}$$

其中

$$\boldsymbol{P}_{m-1}(z)=\sum_{j=0}^{m-1}\boldsymbol{P}_jz^j,\quad \boldsymbol{Q}_{n-1}(z)=\sum_{j=0}^{n-1}\boldsymbol{Q}_jz^j,\quad \boldsymbol{R}(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{R}_jz^j$$

且 $\det(\boldsymbol{Q}_{n-1}(z))\neq 0$. 则式(1.8.6)的 n 阶分块矩阵 $\boldsymbol{H}_{m,n}$ 非奇异的充要条件是矩阵 $\boldsymbol{V}_0$ 和 $\boldsymbol{R}_0$ 非奇异.

证明 充分性. 设

$$[\boldsymbol{X}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{X}_{n-1} \quad \boldsymbol{X}_n]\boldsymbol{H}_{m,n}=[\boldsymbol{O} \quad \cdots \quad \boldsymbol{O} \quad \boldsymbol{O}] \tag{1.8.10}$$

其中 $\boldsymbol{X}_j$ 均为 p 阶方阵. 比较式(1.8.9)的 $z^m,z^{m+1},\cdots,z^{m+n-1}$ 的系数可得

$$\boldsymbol{H}_{m,n}[\boldsymbol{Q}_{n-1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{Q}_1 \quad \boldsymbol{Q}_0]'=[\boldsymbol{O} \quad \cdots \quad \boldsymbol{O} \quad \boldsymbol{R}_0]' \tag{1.8.11}$$

于是由式(1.8.10)和(1.8.11)，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}_n\boldsymbol{R}_0=&[\boldsymbol{X}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{X}_{n-1} \quad \boldsymbol{X}_n][\boldsymbol{O} \quad \cdots \quad \boldsymbol{O} \quad \boldsymbol{R}_0]'=\\&[\boldsymbol{X}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{X}_{n-1} \quad \boldsymbol{X}_n]\boldsymbol{H}_{m,n}[\boldsymbol{Q}_{n-1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{Q}_0]'=\boldsymbol{O}\end{aligned} \tag{1.8.12}$$

由 $\boldsymbol{R}_0$ 非奇异知 $\boldsymbol{X}_n=\boldsymbol{O}$. 从而由式(1.8.10)，得

$$[X_1 \quad \cdots \quad X_{n-1}]\begin{bmatrix}\Gamma_{m-n+2} & \cdots & \Gamma_m \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma_m & \cdots & \Gamma_{m+n-2}\end{bmatrix} = [O \quad \cdots \quad O] \tag{1.8.13}$$

又由式(1.8.8)和(1.8.10),有

$$[X_1 \quad \cdots \quad X_{n-1} \quad O][\Gamma_{m+1} \quad \cdots \quad \Gamma_{m+n}]'V_0 =$$
$$-[X_1 \quad \cdots \quad X_{n-1} \quad O]H_{m,n}[V_n \quad \cdots \quad V_1]' = O$$

于是由 V_0 非奇异,得

$$[X_1 \quad \cdots \quad X_{n-1}][\Gamma_{m+1} \quad \cdots \quad \Gamma_{m+n-1}]' = O \tag{1.8.14}$$

结合式(1.8.13)和(1.8.14)得

$$[O \quad X_1 \quad \cdots \quad X_{n-1}]H_{m,n} = [O \quad O \quad \cdots \quad O] \tag{1.8.15}$$

重复式(1.8.10)~(1.8.15)的步骤可逐步推出 $X_{n-1} = \cdots = X_1 = O$,故 $H_{m,n}$ 非奇异.

必要性.若矩阵 V_0 奇异,则存在 p 维非零列向量 x,使得 $V_0x = 0$,于是,由式(1.8.8)

$$H_{m,n}[V_n \quad \cdots \quad V_1]'x = -[\Gamma_{m+1} \quad \cdots \quad \Gamma_{m+n}]'V_0x = 0$$

由矩阵 $H_{m,n}$ 非奇异得 $[V_n \quad \cdots \quad V_1]'x = 0$,从而有 $V_n(z)x = 0$,这与式(1.8.3)矛盾.同理,若矩阵 R_0 奇异,则存在 p 维非零列向量 y,使得 $R_0y = 0$,由式(1.8.11)可得,$[Q_{n-1} \quad \cdots \quad Q_0]'y = 0$,从而有 $Q_{n-1}(z)x = 0$,这与 $\det(Q_{n-1}(z)) \neq 0$ 矛盾.故矩阵 V_0 和 R_0 均非奇异. 证毕

定理 1.8.2 表明,矩阵 $H_{m,n}$ 的非奇异性可通过 R_0 与 V_0 的非奇异性判定.

在§3.2 推导分块 Hankel 矩阵之逆矩阵的表达式时,要用到如下一些定理.

定理 1.8.3 设式(1.8.6)的矩阵 $H_{m,n}$ 非奇异.给出矩阵幂级数 $T(z)$ 的右 (m,n) 型和右 $(m-1,n-1)$ 型矩阵 Padé 形式(1.8.4)和(1.8.9),以及左 (m,n) 型矩阵 Padé 形式(1.8.5)和左

$(m-1,n-1)$ 型矩阵 Padé 形式

$$\widetilde{Q}_{n-1}(z)T(z)-\widetilde{P}_{m-1}(z)=z^{m+n-1}\widetilde{R}(z) \tag{1.8.16}$$

其中

$$\widetilde{P}_{m-1}(z)=\sum_{j=0}^{m-1}\widetilde{P}_jz^j,\quad \widetilde{Q}_{n-1}(z)=\sum_{j=0}^{n-1}\widetilde{Q}_jz^j,\quad \widetilde{R}(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\widetilde{R}_jz^j$$

又设

$$R_0=V_0=\widetilde{R}_0=\widetilde{V}_0=I \tag{1.8.17}$$

则

$$\begin{bmatrix}\widetilde{Q}_{n-1}(z) & -\widetilde{P}_{m-1}(z)\\ -\widetilde{V}_n(z) & \widetilde{U}_m(z)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_m(z) & P_{m-1}(z)\\ V_n(z) & Q_{n-1}(z)\end{bmatrix}=z^{m+n-1}\begin{bmatrix}I & O\\ O & I\end{bmatrix} \tag{1.8.18}$$

$$\begin{bmatrix}U_m(z) & P_{m-1}(z)\\ V_n(z) & Q_{n-1}(z)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{Q}_{n-1}(z) & -\widetilde{P}_{m-1}(z)\\ -\widetilde{V}_n(z) & \widetilde{U}_m(z)\end{bmatrix}=z^{m+n-1}\begin{bmatrix}I & O\\ O & I\end{bmatrix} \tag{1.8.19}$$

$$\begin{bmatrix}\widetilde{R}(z) & -\widetilde{Q}_{n-1}(z)\\ -z^2\widetilde{W}(z) & \widetilde{V}_n(z)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_n(z) & Q_{n-1}(z)\\ z^2W(z) & R(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I & O\\ O & I\end{bmatrix} \tag{1.8.20}$$

$$\begin{bmatrix}V_n(z) & Q_{n-1}(z)\\ z^2W(z) & R(z)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{R}(z) & -\widetilde{Q}_{n-1}(z)\\ -z^2\widetilde{W}(z) & \widetilde{V}_n(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I & O\\ O & I\end{bmatrix} \tag{1.8.21}$$

证明 式(1.8.16)右乘 $V_n(z)$，而式(1.8.4)左乘 $\widetilde{Q}_{n-1}(z)$，再两式相减且利用条件(1.8.17)，得

$$\begin{aligned}&\widetilde{Q}_{n-1}(z)U_m(z)-\widetilde{P}_{m-1}(z)V_n(z)=\\ &\quad z^{m+n-1}(\widetilde{R}(z)V_n(z)-z^2\widetilde{Q}_{n-1}(z)W(z))=\\ &\quad z^{m+n-1}\widetilde{R}_0V_0=z^{m+n-1}I\end{aligned} \tag{1.8.22}$$

上式第二步成立是由于左端项次数为 $m+n-1$．式(1.8.4)左乘 $\widetilde{V}_n(z)$，而式(1.8.5)右乘 $V_n(z)$，且相减得

$$-\widetilde{V}_n(z)U_m(z)+\widetilde{U}_m(z)V_n(z)=$$

$$z^{m+n+1}(\widetilde{V}_n(z)W(z)-\widetilde{W}(z)V_n(z))=O \tag{1.8.23}$$

上式右端为零矩阵是因为左端项次数最多为 $m+n$. 类似地,式(1.8.16)右乘 $Q_{n-1}(z)$,而式(1.8.9)左乘 $\widetilde{Q}_{n-1}(z)$,且相减得

$$\begin{aligned}&\widetilde{Q}_{n-1}(z)P_{m-1}(z)-\widetilde{P}_{m-1}(z)Q_{n-1}(z)=\\&\quad z^{m+n-1}(\widetilde{R}(z)Q_{n-1}(z)-\widetilde{Q}_{n-1}(z)R(z))=O\end{aligned} \tag{1.8.24}$$

又式(1.8.9)左乘 $\widetilde{V}_n(z)$,而式(1.8.5)右乘 $Q_{n-1}(z)$,且相减得

$$\begin{aligned}&-\widetilde{V}_n(z)P_{m-1}(z)+\widetilde{U}_m(z)Q_{n-1}(z)=\\&\quad z^{m+n-1}(\widetilde{V}_{n-1}(z)R(z)-z^2\widetilde{W}(z)Q_{n-1}(z))=\\&\quad z^{m+n-1}\widetilde{V}_0R_0=z^{m+n-1}I\end{aligned} \tag{1.8.25}$$

结合式(1.8.22)～(1.8.25)即得(1.8.18). 由于逆矩阵可交换次序,利用(1.8.18)直接得到(1.8.19). 又由式(1.8.22)～(1.8.25)得

$$\widetilde{R}(z)V_n(z)-z^2\widetilde{Q}_{n-1}(z)W(z)=I$$
$$\widetilde{V}_n(z)W(z)-\widetilde{W}(z)V_n(z)=O$$
$$\widetilde{R}(z)Q_{n-1}(z)-\widetilde{Q}_{n-1}(z)R(z)=O$$
$$\widetilde{V}_{n-1}(z)R(z)-z^2\widetilde{W}(z)Q_{n-1}(z)=I$$

从而式(1.8.20)成立. 利用逆矩阵的可交换性得式(1.8.21). 证毕

定理 1.8.4 设 $(P_{m-1}(z),Q_{n-1}(z),R(z))$ 为 $T(z)$ 的右 $(m-1,n-1)$ 型矩阵 Padé 形式(1.8.9). 又设 $(F_m(z),G_{n-1}(z),K(z))$ 为 $T(z)$ 的右 $(m,n-1)$ 型矩阵 Padé 形式,即

$$T(z)G_{n-1}(z)-F_m(z)=z^{m+n}K(z) \tag{1.8.26}$$

其中

$$F_m(z)=\sum_{j=0}^{m}F_jz^j,\quad G_{n-1}(z)=\sum_{j=0}^{n-1}G_jz^j,\quad K(z)=\sum_{j=0}^{\infty}K_jz^j$$

则式(1.8.6)的矩阵 $H_{m,n}$ 和 $H_{m,n-1}$ 非奇异的充要条件是矩阵 R_0, G_0 和 F_m 非奇异.

证明 充分性. 构造矩阵多项式

$$\left.\begin{aligned}\hat{U}_m(z) &= F_m(z) - zP_{m-1}(z)R_0^{-1}K_0 \\ \hat{V}_n(z) &= G_{n-1}(z) - zQ_{n-1}(z)R_0^{-1}K_0\end{aligned}\right\} \tag{1.8.27}$$

则

$$T(z)\hat{V}_{n-1}(z) - \hat{U}_m(z) = z^{m+n}[K(z) - R(z)R_0^{-1}K_0] = z^{m+n+1}\hat{W}(z)$$

其中 $\hat{W}(z)$ 是矩阵幂级数，可见 $(\hat{U}_m(z),\hat{V}_n(z),\hat{W}(z))$ 是 $T(z)$ 的右 (m,n) 型矩阵 Padé 形式. 又由式(1.8.27)知，$\hat{V}_0 = G_0$ 非奇异，从而由定理 1.8.2 知，$H_{m,n}$ 非奇异. 比较式(1.8.26)中 $z^m,\cdots,z^{m+n-1}$ 的系数，得

$$H_{m,n}[G_{n-1} \quad \cdots \quad G_0]' = [F_m \quad O \quad \cdots \quad O] \tag{1.8.28}$$

于是

$$H_{m,n}\begin{bmatrix} I & & & G_{n-1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & I & G_1 \\ & & & G_0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} \Gamma_{m-n+1} & \cdots & \Gamma_{m-1} & F_m \\ \hline & & & O \\ & H_{m,n-1} & & \vdots \\ & & & O \end{array}\right] \tag{1.8.29}$$

因而，由 $H_{m,n}$,G_0 和 F_m 非奇异知 $H_{m,n-1}$ 非奇异.

必要性. 若矩阵 $H_{m,n}$ 和 $H_{m,n-1}$ 均非奇异，由定理1.8.2即知 R_0 和 G_0 均非奇异. 再由式(1.8.29)知 F_m 也非奇异. 证毕

定理 1.8.5 给出矩阵幂级数 $T(z)$ 的右和左 $(m-1,n-1)$ 型矩阵 Padé 形式(1.8.9)和(1.8.16). 又设 $(F_m(z),G_{n-1}(z),K(z))$ 和 $(\widetilde{F}_m(z),\widetilde{G}_{n-1}(z),\widetilde{K}(z))$ 分别是 $T(z)$ 的右和左 $(m,n-1)$ 型矩阵 Padé 形式(1.8.26)及

$$\widetilde{G}_{n-1}(z)T(z) - \widetilde{F}_m(z) = z^{m+n}\widetilde{K}(z) \tag{1.8.30}$$

其中

$$\widetilde{F}_m(z) = \sum_{j=0}^{m}\widetilde{F}_j z^j, \quad \widetilde{G}_{n-1}(z) = \sum_{j=0}^{n-1}\widetilde{G}_j z^j, \quad \widetilde{K}(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\widetilde{K}_j z^j$$

若式(1.8.6)的矩阵 $H_{m,n}$ 与 $H_{m,n-1}$ 均非奇异，则

$$\begin{bmatrix} \tilde{R}_0^{-1}\tilde{Q}_{n-1}(z) & -\tilde{R}_0^{-1}\tilde{P}_{m-1}(z) \\ -\tilde{G}_0^{-1}\tilde{G}_{n-1}(z) & \tilde{G}_0^{-1}\tilde{F}_m(z) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_m(z)G_0^{-1} & P_{m-1}(z)R_0^{-1} \\ G_{n-1}(z)G_0^{-1} & Q_{n-1}(z)R_0^{-1} \end{bmatrix}= z^{m+n-1}\begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_m(z)G_0^{-1} & P_{m-1}(z)R_0^{-1} \\ G_{n-1}(z)G_0^{-1} & Q_{n-1}(z)R_0^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{R}_0^{-1}\tilde{Q}_{n-1}(z) & -\tilde{R}_0^{-1}\tilde{P}_{m-1}(z) \\ -\tilde{G}_0^{-1}\tilde{G}_{n-1}(z) & \tilde{G}_0^{-1}\tilde{F}_m(z) \end{bmatrix}= z^{m+n-1}\begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix} \tag{1.8.31}$$

证明　与定理 1.8.3 的证明类似.　证毕

§1.9　矩阵的生成多项式

定义 1.9.1　设矩阵 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$，称二变量多项式

$$A(\lambda,\mu)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\lambda^{i-1}\mu^{j-1}$$

为矩阵 A 的**生成多项式**.

例 1.9.1　已知矩阵

$$W_T=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad W_H=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad W_{T+H}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

则

$$W_T(\lambda,\mu)=1-\lambda\mu$$
$$W_H(\lambda,\mu)=\lambda-\mu$$
$$W_{T+H}(\lambda,\mu)=(\lambda-\mu)(1-\lambda\mu)$$

根据定义可直接得到生成多项式如下一些性质.

定理 1.9.1　1)　设 A,B 都是 $m\times n$ 矩阵，则

$$(A+B)(\lambda,\mu)=A(\lambda,\mu)+B(\lambda,\mu)$$

2)　设 A 是 $m\times n$ 矩阵，k 是数，则

$$(k\boldsymbol{A})(\lambda,\mu) = k\boldsymbol{A}(\lambda,\mu)$$

3) 设 $\boldsymbol{A}=(a_1,\cdots,a_m)^{\mathrm{T}}(b_1,\cdots,b_n)$，则

$$\boldsymbol{A}(\lambda,\mu) = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i\lambda^{i-1}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\mu^{j-1}\right)$$

定义 1.9.2 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$，$l$ 阶方阵 $\boldsymbol{W}=(w_{ij})_{i,j=1}^{l}$，称 $n+l-1$ 阶方阵

$$\nabla_{\mathbf{W}}\boldsymbol{A} = \left(\sum_{s=1}^{l}\sum_{t=1}^{l} a_{i+1-s,j+1-t}w_{st}\right)_{i,j=1}^{n+l-1}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的 **W-结构矩阵**，这里规定

$$a_{ik} = a_{kj} = 0,\quad k<1 \text{ 或 } k>n$$

W-结构矩阵的生成多项式具有如下重要的性质.

定理 1.9.2 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{W}$ 是 l 阶方阵，则

$$(\nabla_{\mathbf{W}}\boldsymbol{A})(\lambda,\mu) = \boldsymbol{W}(\lambda,\mu)\boldsymbol{A}(\lambda,\mu)$$

证明

$$(\nabla_{W}\boldsymbol{A})(\lambda,\mu) = \sum_{i=1}^{n+l-1}\sum_{j=1}^{n+l-1}\left(\sum_{s=1}^{l}\sum_{t=1}^{l} a_{i+1-s,j+1-t}w_{st}\right)\lambda^{i-1}\mu^{j-1} =$$

$$\sum_{s=1}^{l}\sum_{t=1}^{l} w_{st}\left(\sum_{i=s}^{n+s-1}\sum_{j=t}^{n+t-1} a_{i+1-s,j+1-t}\lambda^{i-1}\mu^{j-1}\right) =$$

$$\sum_{s=1}^{l}\sum_{t=1}^{l} w_{st}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda^{i+s-2}\mu^{j+t-2}\right) =$$

$$\boldsymbol{W}(\lambda,\mu)\boldsymbol{A}(\lambda,\mu)$$

证毕

对于例 1.9.1 的矩阵 $\boldsymbol{W}$，容易知道矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ 的 W-结构矩阵分别为

$$\nabla_{W_T}\boldsymbol{A} = (a_{ij}-a_{i-1,j-1})_{i,j=1}^{n+1} =$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{AZ}-\boldsymbol{ZA} \\ 0 & -\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} & 0 \\ \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{AZ}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n \end{bmatrix} \tag{1.9.1}$$

$$\nabla_{W_H}\boldsymbol{A} = (a_{i-1,j}-a_{i,j-1})_{i,j=1}^{n+1} =$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{ZA}-\boldsymbol{AZ}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n \\ \boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{AZ}-\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \end{bmatrix} \tag{1.9.2}$$

$$\nabla_{W_{T+H}}A=(a_{i-1,j-2}+a_{i-1,j}-a_{i-2,j-1}-a_{i,j-1})_{i,j=1}^{n+2}=$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} & 0 \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}})-(\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n \\ 0 & -\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} & 0 \end{bmatrix} \tag{1.9.3}$$

§1.10　特征值与特征向量

一、　分隔定理

Hermite 矩阵(即满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}$ 的矩阵)的特征值均为实数，且有如下的分隔定理.

定理 1.10.1　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶 Hermite 矩阵，其特征值为 λ_i $(i=1,2,\cdots,n)$，又设 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 阶顺序主子阵，其特征值为 μ_j $(j=1,2,\cdots,n-1)$，并假设它们均按递增顺序排列，即 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$ 和 $\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\cdots\leqslant\mu_{n-1}$，则 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 的特征值分隔 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，即

$$\lambda_1\leqslant\mu_1\leqslant\lambda_2\leqslant\mu_2\leqslant\cdots\leqslant\mu_{n-1}\leqslant\lambda_n$$

该定理的证明参阅参考文献[76].

如果 Hermite 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的某一特征值是 r 重的，则由定理 1.10.1 知，它应是 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 的 $r-1$ 重特征值.

二、　盖尔定理

定理 1.10.2 (Gerschgorin)　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值至少位于某一个以 a_{kk} 为中心，半径为 $\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}|a_{kj}|$ 的圆盘中.

证明　设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 是对应的特征向量. 假定 $\boldsymbol{x}$ 的第 k 个分量的模为最大，由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ 两端的第 k

个分量相等，得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = \lambda x_k$$

因此

$$|\lambda - a_{kk}| = \left|\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} a_{kj}\frac{x_j}{x_k}\right| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} |a_{kj}|\left|\frac{x_j}{x_k}\right| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} |a_{kj}|$$

证毕

关于特征值在圆盘中分布更详细的信息，可参见矩阵论的教材.

三、 对角秩-1 修正矩阵的特征问题

定理 1.10.3 设 C 是实的对角秩 1 修正矩阵，即

$$C = D + \rho zz^{\mathrm{T}} \tag{1.10.1}$$

其中

$$D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n), \quad z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)^{\mathrm{T}}, \quad \rho \neq 0$$

且

$$d_1 < d_2 < \cdots < d_n, \quad z_j \neq 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{1.10.2}$$

则 C 的特征值是有理多项式

$$g(\lambda) = 1 + \rho\sum_{j=1}^{n}\frac{z_j^2}{d_j - \lambda} \tag{1.10.3}$$

的零点. 若 λ_k 是 C 的特征值，则对应的特征向量为 $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \cdots, x_{kn})^{\mathrm{T}}$，其中

$$x_{kj} = \frac{z_j}{d_j - \lambda_k}, \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{1.10.4}$$

证明 由求行列式的升阶法可得

$$\det(C - \lambda I) = \left(1 + \rho\sum_{j=1}^{n}\frac{z_j^2}{d_j - \lambda}\right)(d_1 - \lambda)\cdots(d_n - \lambda)$$

因为 d_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ 不是 C 的特征值，所以 C 的特征值应是

有理多项式(1.10.3)的零点. 若 λ_k 是 $\boldsymbol{C}$ 的特征值,则 $(\boldsymbol{D}+\rho\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}-\lambda_k\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}_k$ 的第 i 个分量为

$$(d_i+\rho z_i^2-\lambda_k)x_{ki}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\rho z_i z_j x_{kj}=z_i\left(1+\rho\sum_{j=1}^{n}\frac{z_j^2}{d_j-\lambda_k}\right)=0$$

故 $\boldsymbol{x}_k$ 是 λ_k 对应的特征向量. 证毕

由式(1.10.3)可得:

当 $\rho>0$ 时,

$$\lim_{\lambda\to d_j+}g(\lambda)=-\infty,\quad \lim_{\lambda\to d_{j+1}-}g(\lambda)=+\infty,\quad \lim_{\lambda\to+\infty}g(\lambda)=1$$

而当 $\rho<0$ 时,

$$\lim_{\lambda\to d_j+}g(\lambda)=+\infty,\quad \lim_{\lambda\to d_{j+1}-}g(\lambda)=-\infty,\quad \lim_{\lambda\to-\infty}g(\lambda)=1$$

所以 $\boldsymbol{C}$ 的 n 个特征值 λ_j $(j=1,2,\cdots,n)$ 满足

$$d_1<\lambda_1<d_2<\lambda_2<\cdots<d_n<\lambda_n,\quad \rho>0$$

或 $$\lambda_1<d_1<\lambda_2<d_2<\cdots<\lambda_n<d_n,\quad \rho<0$$

即 $\boldsymbol{C}$ 的特征值互异,且被矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的对角元素分隔. 可采用 Newton 法等求出 $g(\lambda)$ 的零点,从而得到 $\boldsymbol{C}$ 的特征值[38].

当条件(1.10.2)不满足时,可采用压缩处理方法求较低阶对角秩1修正矩阵的特征值与特征向量. 说明如下:

1) 当某个 $z_k=0$ 时,有

$$(\boldsymbol{D}+\rho\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{e}_k=\boldsymbol{D}\boldsymbol{e}_k+\rho z_k\boldsymbol{z}=d_k\boldsymbol{e}_k$$

即 d_k 是 $\boldsymbol{C}$ 的特征值,对应的特征向量是 $\boldsymbol{e}_k$. 取置换矩阵 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{e}_k\ \boldsymbol{e}_1\ \cdots\ \boldsymbol{e}_{k-1}\ \boldsymbol{e}_{k+1}\ \cdots\ \boldsymbol{e}_n]$, 则

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}+\rho\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}d_k & 0^{\mathrm{T}}\\ 0 & \boldsymbol{D}_1\end{bmatrix}+\rho\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{y}\end{bmatrix}[0\quad \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}]$$

其中

$$\boldsymbol{D}_1=\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_{k-1},d_{k+1},\cdots,d_n)$$

$$\boldsymbol{y}=(z_1,\cdots,z_{k-1},z_{k+1},\cdots,z_n)^{\mathrm{T}}$$

可见问题转化为求 $\boldsymbol{D}_1+\rho\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$ 的特征问题了.

2)　d_i 不互异. 不妨设

$$d_1 = \cdots = d_r < d_{r+1} < \cdots < d_n$$

令 $\boldsymbol{z} = [\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{y}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{y}_1 = (z_1, \cdots, z_r)^{\mathrm{T}}$ ，$\boldsymbol{y}_2 = (z_{r+1}, \cdots, z_n)^{\mathrm{T}}$. 取 r 阶 Householder 变换阵

$$\boldsymbol{H}_r = \boldsymbol{I}_r - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{y}_1 - \|\boldsymbol{y}_1\|_2 \boldsymbol{e}_r^{(r)}}{\|\boldsymbol{y}_1 - \|\boldsymbol{y}_1\|_2 \boldsymbol{e}_r^{(r)}\|_2}$$

(这里 $\|\boldsymbol{y}_1\|_2 = \sqrt{\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1}$)，则有 $\boldsymbol{H}_r\boldsymbol{y}_1 = \|\boldsymbol{y}_1\|_2 \boldsymbol{e}_r^{(r)}$. 又令 $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_{n-r} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{D}_2 = \mathrm{diag}(d_{r+1}, \cdots, d_n)$，则 $\boldsymbol{Q}$ 是 n 阶正交矩阵，且

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D} + \rho \boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} d_r \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}_2 \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{y}_1\|_2 \boldsymbol{e}_r^{(r)} \\ \boldsymbol{y}_2 \end{bmatrix} [\|\boldsymbol{y}_1\|_2 \boldsymbol{e}_r^{(r)\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{y}_2^{\mathrm{T}}]$$

可见，问题转化为求 $n - r + 1$ 阶对角秩1修正矩阵

$$\begin{bmatrix} d_r & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_2 \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{y}_1\|_2 \\ \boldsymbol{y}_2 \end{bmatrix} [\|\boldsymbol{y}_1\|_2 \quad \boldsymbol{y}_2^{\mathrm{T}}]$$

的特征问题.

第二章 Toeplitz 矩阵

Toeplitz 矩阵出现在数字信号处理领域的许多应用中，如谱分析、线性预测、最小二乘估计及自回归滤波器设计等，是应用最广泛的特殊矩阵之一. 本章系统地介绍 Toeplitz 矩阵乘积、求逆、求解线性方程组、三角分解和 QR 分解等的快速算法.

§2.1 Toeplitz 矩阵的定义及性质

定义 2.1.1 形如

$$\boldsymbol{T} = (\xi_{j-i})_{i,j=1}^{n} = \begin{bmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_{n-1} \\ \xi_{-1} & \xi_0 & \cdots & \xi_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{-n+1} & \xi_{-n+2} & \cdots & \xi_0 \end{bmatrix} \qquad (2.1.1)$$

的 n 阶方阵称为 **Toeplitz 矩阵**. 如果其元素满足对称关系，即 $\xi_{-j} = \xi_j$ $(j = 1,2,\cdots,n-1)$，则称之为**对称 Toeplitz 矩阵**；如果其元素满足 $\xi_{-j} = \bar{\xi}_j$ $(j = 1,2,\cdots,n-1)$，则称之为 **Hermite 型 Toeplitz 矩阵**.

Toeplitz 矩阵的特点是主对角线上的各元素彼此相等，平行于主对角线的各对角线上的元素也彼此相等.

显然，两个 n 阶 Toeplitz 矩阵相加或数乘 Toeplitz 矩阵，其结果仍是 Toeplitz 矩阵. 由定义可看出，Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{T}$ 是特殊的次对称矩阵. 若 $\boldsymbol{T}$ 是可逆的，由定理 1.2.1 知 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 仍是次对称的，但它一般不再是 Toeplitz 矩阵. 如

$$T=\begin{bmatrix}1&2&4\\2&1&2\\4&2&1\end{bmatrix},\quad T^{-1}=\begin{bmatrix}-1/3&2/3&0\\2/3&-3/5&2/3\\0&2/3&-1/3\end{bmatrix}$$

可见 T 是对称 Toeplitz 矩阵，但 T^{-1} 不是 Toeplitz 矩阵.

容易验证，n 阶 Toeplitz 矩阵 T 满足

$$T-ZTZ^{\mathrm{T}}=(\xi_0,\xi_{-1},\cdots,\xi_{-n+1})^{\mathrm{T}}e_1^{\mathrm{T}}+e_1(0,\xi_1,\cdots,\xi_{n-1}) \tag{2.1.2}$$

其中 Z 是 n 阶移位矩阵.

定义 2.1.2　若 n 阶方阵 T 满足

$$T-ZTZ^{\mathrm{T}}=\sum_{i=1}^{l}p^{(i)}q^{(i)\mathrm{T}} \tag{2.1.3}$$

其中 l 是正整数，$p^{(i)},q^{(i)}$ $(i=1,2,\cdots,l)$ 均为 n 维列向量，则称 T 为 **Toeplitz 型矩阵**.

显然，若取 $l=2$，$p^{(1)}=(\xi_0,\xi_{-1},\cdots,\xi_{-n+1})^{\mathrm{T}}$，$p^{(2)}=q^{(1)}=e_1$，$q^{(2)}=(0,\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})^{\mathrm{T}}$，则由式(2.1.3)确定的矩阵 T 即为 Toeplitz 矩阵(2.1.1).

此外，对 n 阶 Toeplitz 矩阵(2.1.1)，容易验证以下两个等式成立.

$$ZT-TZ=(0,\xi_{n-1},\cdots,\xi_1)^{\mathrm{T}}e_n^{\mathrm{T}}-e_1(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1},0) \tag{2.1.4}$$

$$Z^{\mathrm{T}}T-TZ^{\mathrm{T}}=(\xi_{-1},\cdots,\xi_{-n+1},0)^{\mathrm{T}}e_1^{\mathrm{T}}-e_n(0,\xi_{-n+1},\cdots,\xi_{-1}) \tag{2.1.5}$$

在多变量系统研究中，经常遇到**分块 Toeplitz 矩阵**

$$T=(\Gamma_{j-i})_{i,j=1}^{n},\quad \Gamma_j \text{ 均为 } p \text{ 阶方阵} \tag{2.1.6}$$

当 $p=1$时，T 即是通常的 Toeplitz 矩阵. 分块 Toeplitz 矩阵 T 具有块次对称性，即

$$T=\tilde{J}_nT'\tilde{J}_n \tag{2.1.7}$$

且满足

$$T\tilde{Z}_n - \tilde{Z}_n T = E_1^{(n)}[\Gamma_1 \cdots \Gamma_{n-1}\ O] - [O\ \Gamma_{n-1} \cdots \Gamma_1]' E_n^{(n)\prime} \tag{2.1.8}$$

其中 $\tilde{J}_n$ 是 n 阶分块次单位矩阵，$\tilde{Z}_n$ 是 n 阶分块移位矩阵，即

$$\tilde{J}_n = \begin{bmatrix} & & I_p \\ & \iddots & \\ I_p & & \end{bmatrix}, \quad \tilde{Z}_n = \begin{bmatrix} O & & & \\ I_p & O & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & I_p & O \end{bmatrix} \tag{2.1.9}$$

而 $E_i^{(n)}$ 是第 i 个子块为 I_p，其余子块为 p 阶零矩阵的 $n\times 1$ 分块矩阵，即

$$E_i^{(n)} = [\underbrace{O\ \cdots\ O}_{i-1}\ I_p\ O\ \cdots\ O]' \tag{2.1.10}$$

§2.2　循环矩阵及三角 Toeplitz 矩阵

一、　循环矩阵

在数理统计、石油、地震物探及其它应用学科中，尤其是图像、数字信号处理中，常会遇到循环矩阵这类特殊矩阵.

定义 2.2.1　具有如下形式的 n 阶方阵 C 称为**循环矩阵**

$$C = \begin{bmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_{n-1} \\ \xi_{n-1} & \xi_0 & \cdots & \xi_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_0 \end{bmatrix} \tag{2.2.1}$$

显然，C 由其首行元素惟一确定，简记为 $C=\mathrm{circ}(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})$. 特别地，$n$ 阶循环矩阵

$$K = \mathrm{circ}(0,1,0,\cdots,0) = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & 0^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{2.2.2}$$

称为**单位循环矩阵**.

直接验证可得单位循环矩阵的如下性质.

引理 2.2.1 设 $\boldsymbol{K}$ 是 n 阶单位循环矩阵(2.2.2),$\boldsymbol{C}$ 是 n 阶循环矩阵(2.2.1),则有如下结论:

1) $\boldsymbol{K}$ 是正交矩阵,即 $\boldsymbol{K}^{-1}=\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}$;

2) $\boldsymbol{K}^j=\mathrm{circ}(\underbrace{0,\cdots,0}_{j},1,0,\cdots,0),\quad j=1,2,\cdots,n-1$

$\boldsymbol{K}^n=\boldsymbol{I}_n$ (规定 $\boldsymbol{K}^0=\boldsymbol{I}_n$);

3) 取 n 阶 Fourier 变换矩阵

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1}\\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)}\end{bmatrix}\tag{2.2.3}$$

其中 $\omega=\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{n}}$ $(\mathrm{i}=\sqrt{-1})$是 n 次单位根. 易知 $\boldsymbol{F}$ 是酉矩阵,即 $\boldsymbol{F}^{-1}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}$,且有

$$\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{F}=\mathrm{diag}(1,\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1})\tag{2.2.4}$$

可见 ω^j $(j=0,1,\cdots,n-1)$ 是 $\boldsymbol{K}$ 的 n 个特征值,而 $\boldsymbol{F}$ 的各列是对应的单位正交特征向量;

4) $\boldsymbol{C}=\sum\limits_{j=0}^{n-1}\xi_j\boldsymbol{K}^j$; (2.2.5)

5) $\boldsymbol{CK}=\boldsymbol{KC}$.

定理 2.2.1 C 为 n 阶循环矩阵的充要条件是存在数 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}$ 使

$$\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{F}=\mathrm{diag}(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1})\tag{2.2.6}$$

证明 必要性. 若 $\boldsymbol{C}$ 为 n 阶循环矩阵,则由引理 2.2.1

$$\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{F}=\sum_{j=0}^{n-1}\xi_j\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{K}^j\boldsymbol{F}=\sum_{j=0}^{n-1}\xi_j\mathrm{diag}(1,\omega^j,\omega^{2j},\cdots,\omega^{(n-1)j})=$$

$$\mathrm{diag}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\xi_j,\sum_{j=0}^{n-1}\xi_j\omega^j,\sum_{j=0}^{n-1}\xi_j\omega^{2j},\cdots,\sum_{j=0}^{n-1}\xi_j\omega^{(n-1)j}\right)$$

令 $\lambda_k=\sum_{j=0}^{n-1}\xi_j\omega^{kj}\ (k=0,1,\cdots,n-1)$，即得所需结论.

充分性. 若矩阵 C 满足式(2.2.6)，利用 $\omega^n=1$ 经直接计算知 $C=F\mathrm{diag}(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1})F^{-1}$ 是循环矩阵.　证毕

由定理 2.2.1 的证明得到循环矩阵式(2.2.1)的 n 个特征值为

$$\lambda_k=\sum_{j=0}^{n-1}\xi_j\omega^{kj},\quad k=0,1,\cdots,n-1$$

且 n 阶 Fourier 矩阵 F 的各列构成了相应的单位正交特征向量系.

定理 2.2.2　设 C 与 C_1 都是 n 阶循环矩阵，则

1)　$C+C_1$ 是循环矩阵；

2)　CC_1 是循环矩阵，且 $CC_1=C_1C$；

3)　若 C 可逆，则 C^{-1} 是循环矩阵；

4)　C^+ 是循环矩阵.

证明　由式(2.2.6)可直接得到 1)～3). 又由式(2.2.6)及例 1.5.1 和例 1.5.3 得

$$C^+=F\mathrm{diag}(\lambda_0^+,\lambda_1^+,\cdots,\lambda_{n-1}^+)F^{-1}\tag{2.2.7}$$

从而由定理 2.2.1 知，C^+ 仍是循环矩阵.　证毕

由上述两个定理可得计算循环矩阵之逆阵或 Moore-Penrose 逆的快速算法，其步骤如下：

第一步：计算循环矩阵 C 的特征值

$$\lambda_k=\sum_{j=0}^{n-1}\xi_j\omega^{kj},\quad k=0,1,\cdots,n-1$$

第二步：计算 $\mu_k=\lambda_k^+\ (k=0,1,\cdots,n-1)$；

第三步：求出 C 的逆矩阵或 Moore-Penrose 逆 $C^+=\mathrm{circ}(\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_n)$，其中

$$\eta_k = \sum_{j=0}^{n-1} \mu_j \omega^{-kj}, \quad k = 0,1,\cdots,n-1$$

如果第一步与第三步借助于离散富氏变换，则整个算法的计算量为 $O(n\log_2 n)$.

二、 r-循环矩阵

定义 2.2.2 形如

$$C(r) = \begin{bmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_{n-1} \\ r\xi_{n-1} & \xi_0 & \cdots & \xi_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r\xi_1 & r\xi_2 & \cdots & \xi_0 \end{bmatrix} \tag{2.2.8}$$

的 n 阶方阵称为 **r-循环矩阵**. 特别地，当 $r=1$ 时，即得循环矩阵；当 $r=-1$ 时，称之为**斜循环矩阵**(或**反循环矩阵**)；当 $r=0$ 时，即得(上)三角 Toeplitz 矩阵.

引理 2.2.2 设 $C(r)$ 是 n 阶 r-循环矩阵，且 $r\neq 0$，取

$$D = \mathrm{diag}(1,\delta,\delta^2,\cdots,\delta^{n-1}) \quad (\text{其中 } \delta = \sqrt[n]{r}) \tag{2.2.9}$$

则 $D^{-1}C(r)D$ 是 n 阶循环矩阵.

证明 因

$$D^{-1}C(r)D = \begin{bmatrix} \xi_0 & \xi_1\delta & \cdots & \xi_{n-1}\delta^{n-1} \\ r\xi_{n-1}\delta^{-1} & \xi_0 & \cdots & \xi_{n-2}\delta^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r\xi_1\delta^{-n+1} & r\xi_2\delta^{-n+2} & \cdots & \xi_0 \end{bmatrix}$$

注意到 $\delta^n = r$，即知 $D^{-1}C(r)D$ 是 n 阶循环矩阵. 且

$$D^{-1}C(r)D = \mathrm{circ}(\xi_0,\xi_1\delta,\cdots,\xi_{n-1}\delta^{n-1}) \tag{2.2.10}$$

证毕

定理 2.2.3 设 $r\neq 0$，则 n 阶方阵 C 为 r-循环矩阵的充要条件是，存在数 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}$ 使

$$F^{-1}D^{-1}CDF = \mathrm{diag}(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}) \tag{2.2.11}$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 如式(2.2.3)，$\boldsymbol{D}$ 如式(2.2.9).

证明　必要性. 若 $\boldsymbol{C}$ 为 r-循环矩阵. 由式(2.2.10)及定理 2.2.1知式(2.2.11)成立，其中

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j \delta^j \omega^{kj}, \quad k = 0,1,\cdots,n-1$$

它也是 r-循环矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的特征值.

充分性. 若矩阵 $\boldsymbol{C}$ 满足式(2.2.11)，则 $\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{D} = \boldsymbol{F}\mathrm{diag}(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1})\boldsymbol{F}^{-1}$ 是循环矩阵. 记为 $\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{D} = \mathrm{circ}(\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_{n-1})$. 直接计算得

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}\mathrm{circ}(\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_{n-1})\boldsymbol{D}^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} \eta_0 & \eta_1\delta^{-1} & \cdots & \eta_{n-1}\delta^{-n+1} \\ \delta\eta_{n-1} & \eta_0 & \cdots & \eta_{n-2}\delta^{-n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{n-1}\eta_1 & \delta^{n-2}\eta_2 & \cdots & \eta_0 \end{bmatrix}$$

再注意到 $\delta^n = r$，即知 $\boldsymbol{C}$ 为 r-循环矩阵.　证毕

对于 r-循环矩阵，有如同定理 2.2.2 的类似结论.

定理 2.2.4　设 $r \neq 0$，且 $\boldsymbol{C}(r)$ 与 $\boldsymbol{C}_1(r)$ 都是 n 阶 r-循环矩阵，则

1)　$\boldsymbol{C}(r) + \boldsymbol{C}_1(r)$ 是 r-循环矩阵；

2)　$\boldsymbol{C}(r)\boldsymbol{C}_1(r)$ 是 r-循环矩阵，且 $\boldsymbol{C}(r)\boldsymbol{C}_1(r) = \boldsymbol{C}_1(r)\boldsymbol{C}(r)$；

3)　若 $\boldsymbol{C}(r)$ 可逆，则 $\boldsymbol{C}^{-1}(r)$ 是 r-循环矩阵；

4)　若 $|r| = 1$，则 $\boldsymbol{C}^{+}(r)$ 是 r-循环矩阵.

证明　只证 4). 当 $|r| = 1$时，矩阵 $\boldsymbol{D}\boldsymbol{F}$ 仍是酉矩阵，于是由式(2.2.11)

$$\boldsymbol{C}^{+} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{F}\mathrm{diag}(\lambda_0^{+},\lambda_1^{+},\cdots,\lambda_{n-1}^{+})\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{D}^{-1} \qquad (2.2.12)$$

即 $\boldsymbol{C}^{+}$仍是 r-循环矩阵.　证毕

注　当 $|r| \neq 1$时，式(2.2.12)右端的矩阵不再是 $\boldsymbol{C}(r)$ 的 Moore-Penrose逆，但仍满足定义 1.5.1 的前2个方程.

由式(2.2.12)可得计算 r-循环矩阵之逆阵或 Moore-Penrose 逆($|r|=1$)的快速算法,其步骤如下:

第一步:计算 $\delta=\sqrt[n]{r}$ 及 r-循环矩阵 $C(r)$ 的特征值

$$\lambda_k=\sum_{j=0}^{n-1}\xi_j\delta^j\omega^{kj},\quad k=0,1,\cdots,n-1$$

第二步:计算 $\mu_k=\lambda_k^+(k=0,1,\cdots,n-1)$;

第三步:计算 $\eta_k=\sum_{j=0}^{n-1}\mu_j\omega^{-kj}\ (k=0,1,\cdots,n-1)$;

第四步:计算 $\eta_j\delta^{n-j}\ (j=n-1,\cdots,1)$ 和 $\frac{1}{r}(\eta_j\delta^{n-j})\ (j=1,2,\cdots,n-1)$. 它们和元素 η_0 一起即构成 $C^{-1}(r)$ 或 $C^+(r)$ 的首列、首行元素. 由于 $C^{-1}(r)$ 和 $C^+(r)$ 仍为 r-循环矩阵,故此即为它们的全部元素.

同样,如果第一步与第三步借助于离散富氏变换,则整个算法的计算量为 $O(n\log_2 n)$.

r-循环矩阵的概念可以推广到分块矩阵的情形.

定义 2.2.3 设 $\Gamma_j\ (j=0,1,\cdots,n-1)$ 都是 p 阶方阵,r 是数,称如下形式的 np 阶矩阵

$$\tilde{C}(r)=\begin{bmatrix}\Gamma_0 & \Gamma_1 & \cdots & \Gamma_{n-1}\\ r\Gamma_{n-1} & \Gamma_0 & \cdots & \Gamma_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r\Gamma_1 & r\Gamma_2 & \cdots & \Gamma_0\end{bmatrix}$$

为 **r-块循环矩阵**. 特别地,当 $r=1$时,称之为**块循环矩阵**,简记为

$$\tilde{C}=\mathrm{bcirc}(\Gamma_0,\Gamma_1,\cdots,\Gamma_{n-1})$$

块循环矩阵与 r-块循环矩阵和通常的循环矩阵及 r-循环矩阵有许多类似的性质.

定理 2.2.5 设 $\tilde{C}$ 是块循环矩阵,$\tilde{C}(r)$ 是 r-块循环矩阵,则

1) $\tilde{C}=\sum_{j=0}^{n-1}K^j\otimes\Gamma_j$;

2) $\widetilde{\boldsymbol{F}}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{C}}\widetilde{\boldsymbol{F}} = \mathrm{diag}(\Lambda_0,\Lambda_1,\cdots,\Lambda_{n-1})$,其中 $\widetilde{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F}\otimes \boldsymbol{I}_p$,而

$$\Lambda_k = \sum_{j=0}^{n-1}\omega^{kj}\Gamma_j,\quad k = 0,1,\cdots,n-1$$

3) 若 $\widetilde{\boldsymbol{C}}$ 可逆,则 $\widetilde{\boldsymbol{C}}^{-1}$ 仍是块循环矩阵,且

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}^{-1} = \widetilde{\boldsymbol{F}}\mathrm{diag}(\Lambda_0^{-1},\Lambda_1^{-1},\cdots,\Lambda_{n-1}^{-1})\widetilde{\boldsymbol{F}}^{-1}$$

4) 若 $r\neq 0$,则 $\widetilde{\boldsymbol{D}}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{C}}(r)\widetilde{\boldsymbol{D}}$ 是块循环矩阵,且

$$\widetilde{\boldsymbol{D}}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{C}}(r)\widetilde{\boldsymbol{D}} = \mathrm{bcirc}(\Gamma_0,\delta\Gamma_1,\cdots,\delta^{n-1}\Gamma_{n-1})$$

其中 $\widetilde{\boldsymbol{D}} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{I}_p,\delta\boldsymbol{I}_p,\delta^2\boldsymbol{I}_p,\cdots,\delta^{n-1}\boldsymbol{I}_p)$,$\delta = \sqrt[n]{r}$;

5) 若 $r\neq 0$,且 $\widetilde{\boldsymbol{C}}(r)$ 可逆,则 $\widetilde{\boldsymbol{C}}^{-1}(r)$ 仍是 r-块循环矩阵,且

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}^{-1}(r) = \widetilde{\boldsymbol{D}}\widetilde{\boldsymbol{F}}\mathrm{diag}(\bar{\Lambda}_0^{-1},\bar{\Lambda}_1^{-1},\cdots,\bar{\Lambda}_{n-1}^{-1})\widetilde{\boldsymbol{F}}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{D}}^{-1}$$

其中 $\bar{\Lambda}_k = \sum\limits_{j=0}^{n-1}\delta^j\omega^{kj}\Gamma_j\ (k = 0,1,\cdots,n-1)$;

6) 若 $|r| = 1$,则 $\widetilde{\boldsymbol{C}}^{+}(r)$ 仍是 r-块循环矩阵,且

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}^{+}(r) = \widetilde{\boldsymbol{D}}\widetilde{\boldsymbol{F}}\mathrm{diag}(\bar{\Lambda}_0^{+},\bar{\Lambda}_1^{+},\cdots,\bar{\Lambda}_{n-1}^{+})\widetilde{\boldsymbol{F}}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{D}}^{-1}$$

证明 这里只证 2),其余留给读者. 由 Kronecker 积(§1.7)的性质及引理 2.2.1,有

$$\widetilde{\boldsymbol{F}}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{C}}\widetilde{\boldsymbol{F}} = (\boldsymbol{F}^{-1}\otimes \boldsymbol{I}_p)(\sum_{j=0}^{n-1}\boldsymbol{K}^j\otimes\Gamma_j)(\boldsymbol{F}\otimes \boldsymbol{I}_p) =$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}(\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{K}^j\boldsymbol{F})\otimes\Gamma_j = \sum_{j=0}^{n-1}[\mathrm{diag}(1,\omega,\cdots,\omega^{n-1})]^j\otimes\Gamma_j =$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\mathrm{diag}(\Gamma_j,\omega^j\Gamma_j,\cdots,\omega^{(n-1)j}\Gamma_j) = \mathrm{diag}(\Lambda_0,\Lambda_1,\cdots,\Lambda_{n-1})$$

证毕

三、 三角 Toeplitz 矩阵

定义 2.2.4 矩阵

$$
\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\Gamma_0 & & & \\ \Gamma_{-1} & \Gamma_0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \Gamma_{-n+1} & \cdots & \Gamma_{-1} & \Gamma_0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}\Gamma_0 & \Gamma_1 & \cdots & \Gamma_{n-1}\\ & \Gamma_0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \Gamma_1 \\ & & & \Gamma_0\end{bmatrix}
\tag{2.2.13}
$$

分别称为**块下三角 Toeplitz 矩阵**与**块上三角 Toeplitz 矩阵**，其中 Γ_j $(j=0,1,\cdots,n-1)$ 均为 p 阶方阵. 特别地，当 $p=1$ 时，即得到下三角 Toeplitz 矩阵与上三角 Toeplitz 矩阵.

定理 2.2.6 设 $\boldsymbol{L},\boldsymbol{L}_1$ 是块下三角 Toeplitz 矩阵，$\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{U}_1$ 是块上三角 Toeplitz 矩阵，其中 $\boldsymbol{L},\boldsymbol{U}$ 如式(2.2.13)，而 $\boldsymbol{L}_1$ 的第1列块元素为 $\tilde{\Gamma}_{-k}$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$，又 $\boldsymbol{U}_1$ 的第 1 行块元素为 $\tilde{\Gamma}_k$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$，则

1） $\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}_1$ 和 $\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}$ 均为块下三角 Toeplitz 矩阵，且 $\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}_1$ 的第 1 列块元素为

$$
\boldsymbol{\Phi}_{-k}=\sum_{j=0}^{k}\Gamma_{-j}\tilde{\Gamma}_{-k+j},\quad k=0,1,\cdots,n-1
$$

而 $\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}$ 的第1列块元素为

$$
\boldsymbol{\Psi}_{-k}=\sum_{j=0}^{k}\tilde{\Gamma}_{-j}\Gamma_{-k+j},\quad k=0,1,\cdots,n-1
$$

2） $\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}_1$ 和 $\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}$ 均为块上三角 Toeplitz 矩阵，且 $\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}_1$ 的第 1 行块元素为

$$
\boldsymbol{\Phi}_{k}=\sum_{j=0}^{k}\Gamma_{j}\tilde{\Gamma}_{k-j},\quad k=0,1,\cdots,n-1
$$

而 $\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}$ 的第1行块元素为

$$
\boldsymbol{\Psi}_{k}=\sum_{j=0}^{k}\tilde{\Gamma}_{j}\Gamma_{k-j},\quad k=0,1,\cdots,n-1
$$

证明 直接作分块矩阵乘法即得. 证毕

定理 2.2.7 设 $\boldsymbol{L},\boldsymbol{U}$ 分别是块下三角 Toeplitz 矩阵与块上三角 Toeplitz 矩阵，且 Γ_0 可逆. 又设

$$X=[X_1\ X_2\ \cdots\ X_n]',\quad \hat{Y}=[Y_n\ Y_{n-1}\ \cdots\ Y_1]'$$

分别是分块线性方程组

$$LX=[I_p\ O\ \cdots\ O]',\quad U\hat{Y}=[O\ \cdots\ O\ I_p]' \tag{2.2.14}$$

的解.则

$$L^{-1}=\begin{bmatrix} X_1 & & & \\ X_2 & X_1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ X_n & \cdots & X_2 & X_1 \end{bmatrix},\quad U^{-1}=\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_n \\ & Y_1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & Y_2 \\ & & & Y_1 \end{bmatrix} \tag{2.2.15}$$

即 L^{-1} 和 U^{-1} 仍为块下三角 Toeplitz 矩阵与块上三角 Toeplitz 矩阵.

证明 由式(2.2.14),得

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma_0X_1=I_p\\ &\Gamma_{-1}X_1+\Gamma_0X_2=O\\ &\qquad\vdots\\ &\Gamma_{-n+1}X_1+\cdots+\Gamma_{-1}X_{n-1}+\Gamma_0X_n=O \end{aligned}\right\} \tag{2.2.16}$$

于是

$$L\begin{bmatrix} X_1 & & & \\ X_2 & X_1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ X_n & \cdots & X_2 & X_1 \end{bmatrix}=I_{np}$$

即得(2.2.15)中第一式.同理可证另一式. 证毕

由式(2.2.14)及类似的公式知 X_j 与 Y_j $(j=1,2,\cdots,n)$ 可递推求得

$$\begin{cases} X_1=\Gamma_0^{-1}\\ X_k=-\Gamma_0^{-1}\sum\limits_{j=1}^{k-1}\Gamma_{-k+j}X_j, \quad k=2,3,\cdots,n \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = \Gamma_0^{-1} \\ Y_k = -\Gamma_0^{-1}\sum_{j=1}^{k-1}\Gamma_{k-j}Y_j, \quad k = 2,3,\cdots,n \end{cases}$$

该算法需 $\frac{(n+1)(n-2)}{2}$ 次 p 阶方阵乘法运算，$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ 次 p 阶方阵加减运算，1 次 p 阶方阵求逆运算.

由上述结果可得如下定理.

定理 2.2.8 设

$$L = \begin{bmatrix} \xi_0 & & \\ \vdots & \ddots & \\ \xi_{-n+1} & \cdots & \xi_0 \end{bmatrix}, \quad L_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_0 & & \\ \vdots & \ddots & \\ \tilde{\xi}_{-n+1} & \cdots & \tilde{\xi}_0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} \xi_0 & \cdots & \xi_{n-1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \xi_0 \end{bmatrix}, \quad U_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_0 & \cdots & \tilde{\xi}_{n-1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \tilde{\xi}_0 \end{bmatrix}$$

则

1) LL_1 为下三角 Toeplitz 矩阵，且 $LL_1 = L_1L$，其第 1 列元素为

$$\eta_{-k} = \sum_{j=0}^{k}\xi_{-j}\tilde{\xi}_{-k+j}, \quad k = 0,1,\cdots,n-1$$

2) UU_1 为上三角 Toeplitz 矩阵，且 $UU_1 = U_1U$，其第 1 行元素为

$$\eta_k = \sum_{j=0}^{k}\xi_j\tilde{\xi}_{k-j}, \quad k = 0,1,\cdots,n-1$$

3) 当 $\xi_0 \neq 0$ 时，L^{-1} 仍为下三角 Toeplitz 矩阵，U^{-1} 仍为上三角 Toeplitz 矩阵. 若记 L^{-1} 的第 1 列元素为 x_k $(k = 0,1,\cdots,n-1)$，又记 U^{-1} 的第 1 行元素为 y_k $(k = 0,1,\cdots,n-1)$，则它们可递推求得

$$\begin{cases} x_1 = \xi_0^{-1} \\ x_k = -\xi_0^{-1}\sum\limits_{j=1}^{k-1}\xi_{-k+j}x_j, \quad k = 2,3,\cdots,n \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \xi_0^{-1} \\ y_k = -\xi_0^{-1}\sum\limits_{j=1}^{k-1}\xi_{k-j}y_j, \quad k = 2,3,\cdots,n \end{cases}$$

对于非奇异三角 Toeplitz 矩阵(不妨设对角元素均为 1),可将其分解为 $n-1$ 个二对角矩阵的乘积.

定理 2.2.9　设 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 是多项式方程

$$x^{n-1} + \xi_1 x^{n-2} + \cdots + \xi_{n-2}x + \xi_{n-1} = 0 \tag{2.2.17}$$

的 $n-1$ 个根,则

$$\begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \cdots & \xi_{n-1} \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \xi_1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -x_1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -x_1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \times \cdots \times \begin{bmatrix} 1 & -x_{n-1} & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -x_{n-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

证明　右端 $n-1$ 个二对角矩阵相乘,并与左端矩阵比较得

$$\begin{cases} \xi_1 = -(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}) \\ \xi_2 = (-1)^2(x_1x_2 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}) \\ \qquad\vdots \\ \xi_{n-1} = (-1)^{n-1}(x_1x_2\cdots x_{n-1}) \end{cases}$$

由韦达定理知,$x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 是多项式方程(2.2.17)的 $n-1$ 个根.　　证毕

由该定理,三角 Toeplitz 矩阵的逆矩阵可表为 $n-1$ 个二对角矩阵之逆的乘积,而二对角矩阵的逆矩阵是易于求得的

$$\begin{bmatrix} 1 & -y & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -y \\ & & & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & y & \cdots & y^{n-1} \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & y \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

§2.3 求 Toeplitz 矩阵的逆矩阵

一、 Trench-Zohar 算法

设 n 阶 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的各阶顺序主子阵 $\boldsymbol{T}_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 均非奇异，且记 $\boldsymbol{T}_k^{-1}=\boldsymbol{V}_k=(v_{ij}^{(k)})_{i,j=1}^{k}$. 注意到

$$\boldsymbol{T}_{k+1}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_k & \boldsymbol{c}_k \\ \boldsymbol{r}_k^{\mathrm{T}} & \xi_0 \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{c}_k=(\xi_k,\cdots,\xi_1)^{\mathrm{T}}$ ，$\boldsymbol{r}_k^{\mathrm{T}}=(\xi_{-k},\cdots,\xi_{-1})$ ，且令

$$(\eta_{-k}^{(k)},\cdots,\eta_{-1}^{(k)})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{V}_k\boldsymbol{c}_k,\quad (\eta_k^{(k)},\cdots,\eta_1^{(k)})=\boldsymbol{r}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_k \tag{2.3.1}$$

由定理 1.3.1 得

$$\boldsymbol{V}_{k+1}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_k & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}+ \omega_k^{-1}(-\eta_{-k}^{(k)},\cdots,-\eta_{-1}^{(k)},1)^{\mathrm{T}}(-\eta_k^{(k)},\cdots,-\eta_1^{(k)},1) \tag{2.3.2}$$

其中

$$\omega_k=\xi_0-\boldsymbol{r}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_k\boldsymbol{c}_k=\xi_0-\sum_{j=1}^{k}\xi_{-j}\eta_{-j}^{(k)}=\xi_0-\sum_{j=1}^{k}\xi_j\eta_j^{(k)} \tag{2.3.3}$$

由于 $\boldsymbol{T}_k$ 均为 Toeplitz 矩阵，从而是次对称的，由定理 1.2.1 知 $\boldsymbol{V}_k$ 均为次对称的，故有

$$\boldsymbol{V}_{k+1}=\boldsymbol{J}_{k+1}\boldsymbol{V}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{k+1}=\begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{V}_k \end{bmatrix}+$$

$$\omega_k^{-1}(1,-\eta_1^{(k)},\cdots,-\eta_k^{(k)})^{\mathrm{T}}(1,-\eta_{-1}^{(k)},\cdots,-\eta_{-k}^{(k)}) \quad (2.3.4)$$

由式(2.3.2)得

$$v_{ij}^{(k+1)} = v_{ij}^{(k)} + \omega_k^{-1}\eta_{-k-1+i}^{(k)}\eta_{k+1-j}^{(k)}, \quad i,j = 1,2,\cdots,k \quad (2.3.5)$$

而由式(2.3.4)得

$$v_{11}^{(k+1)} = \omega_k^{-1}$$

$$v_{i+1,1}^{(k+1)} = -\omega_k^{-1}\eta_i^{(k)}, \quad v_{1,j+1}^{(k+1)} = -\omega_k^{-1}\eta_{-j}^{(k)} \quad (2.3.6)$$

$$v_{i+1,j+1}^{(k+1)} = v_{ij}^{(k)} + \omega_k^{-1}\eta_i^{(k)}\eta_{-j}^{(k)}, \quad i,j = 1,2,\cdots,k \quad (2.3.7)$$

结合式(2.3.5)与式(2.3.7)有

$$v_{i+1,j+1}^{(k+1)} = v_{ij}^{(k+1)} + \omega_k^{-1}(\eta_i^{(k)}\eta_{-j}^{(k)} - \eta_{-k-1+i}^{(k)}\eta_{k+1-j}^{(k)})$$

$$i,j = 1,2,\cdots,k \quad (2.3.8)$$

可见，若求得 $\{\eta_i^{(k)}\}$ 和 $\{\eta_{-j}^{(k)}\}$，则可由式(2.3.6)，式(2.3.8)求得 $\boldsymbol{V}_{k+1}$。

由式(2.3.1)和式(2.3.4)

$$(\eta_{-k}^{(k)},\cdots,\eta_{-1}^{(k)})^{\mathrm{T}} = (0,\eta_{-k+1}^{(k-1)},\cdots,\eta_{-1}^{(k-1)})^{\mathrm{T}} + \omega_{k-1}^{-1}(\xi_k - \sum_{j=1}^{k-1}\xi_{k-j}\eta_{-j}^{(k-1)})(1,-\eta_1^{(k-1)},\cdots,-\eta_{k-1}^{(k-1)})^{\mathrm{T}}$$

$$(\eta_k^{(k)},\cdots,\eta_1^{(k)}) = (0,\eta_{k-1}^{(k-1)},\cdots,\eta_1^{(k-1)}) + \omega_{k-1}^{-1}(\xi_{-k} - \sum_{j=1}^{k-1}\xi_{-k+j}\eta_j^{(k-1)})(1,-\eta_{-1}^{(k-1)},\cdots,-\eta_{-k+1}^{(k-1)})$$

比较两边元素得

$$\left.\begin{aligned}
\eta_{-k}^{(k)} &= \omega_{k-1}^{-1}(\xi_k - \sum_{j=1}^{k-1}\xi_{k-j}\eta_{-j}^{(k-1)}) \\
\eta_{-j}^{(k)} &= \eta_{-j}^{(k-1)} - \eta_{-k}^{(k)}\eta_{k-j}^{(k-1)}, \quad j = 1,2,\cdots k-1 \\
\eta_k^{(k)} &= \omega_{k-1}^{-1}(\xi_{-k} - \sum_{j=1}^{k-1}\xi_{-k+j}\eta_j^{(k-1)}) \\
\eta_j^{(k)} &= \eta_j^{(k-1)} - \eta_k^{(k)}\eta_{-k+j}^{(k-1)}, \quad j = 1,2,\cdots k-1
\end{aligned}\right\} \quad (2.3.9)$$

利用式(2.3.3)和式(2.3.9)，有

$$\omega_k = \xi_0 - \sum_{j=1}^{k-1}\xi_j(\eta_j^{(k-1)} - \eta_k^{(k)}\eta_{-k+j}^{(k-1)}) - \xi_k\eta_k^{(k)} =$$

$$\omega_{k-1} - \eta_k^{(k)}(\xi_k - \sum_{j=1}^{k-1}\xi_{k-j}\eta_{-j}^{(k-1)}) = \omega_{k-1}(1 - \eta_k^{(k)}\eta_{-k}^{(k)}) \tag{2.3.10}$$

结合式(2.3.3),(2.3.6),(2.3.8),(2.3.9)和(2.3.10),可得求 n 阶 Toeplitz 矩阵之逆矩阵的 **Trench-Zohar 算法**:

$\omega_0 = \xi_0$

对 $k = 1,2,\cdots,n-1$

$$\eta_k^{(k)} = \omega_{k-1}^{-1}(\xi_{-k} - \sum_{j=1}^{k-1}\xi_{-k+j}\eta_j^{(k-1)})$$

$$\eta_{-k}^{(k)} = \omega_{k-1}^{-1}(\xi_k - \sum_{j=1}^{k-1}\xi_{k-j}\eta_{-j}^{(k-1)})$$

$$\eta_j^{(k)} = \eta_j^{(k-1)} - \eta_k^{(k)}\eta_{-k+j}^{(k-1)}, \quad \eta_{-j}^{(k)} = \eta_{-j}^{(k-1)} - \eta_{-k}^{(k)}\eta_{k-j}^{(k-1)}$$

$$j = 1,2,\cdots k-1$$

$$\omega_k = \omega_{k-1}(1 - \eta_k^{(k)}\eta_{-k}^{(k)})$$

$$v_{11}^{(n)} = \omega_{n-1}^{-1}$$

$$v_{i+1,1}^{(n)} = -\omega_{n-1}^{-1}\eta_i^{(n-1)}, \quad v_{1,j+1}^{(n)} = -\omega_{n-1}^{-1}\eta_{-j}^{(n-1)}$$

$$i,j = 1,2,\cdots,n-1$$

$$v_{i+1,j+1}^{(n)} = v_{ij}^{(n)} + \omega_{n-1}^{-1}(\eta_i^{(n-1)}\eta_{-j}^{(n-1)} - \eta_{-n+i}^{(n-1)}\eta_{n-j}^{(n-1)})$$

$$i = 1,\cdots,n-2 \ ; \ j = 1,\cdots,n-i-1$$

$$v_{n+1-j,n+1-i}^{(n)} = v_{ij}^{(n)}$$

$$i = 1,\cdots,n-1 \ ; \ j = 1,\cdots,n-i \quad \text{(次对称性)}$$

该算法需 $\frac{7}{2}n^2 - \frac{9}{2}n + 3$ 次乘除运算, $3n^2 - 8n + 7$ 次加减运算. 若 $\boldsymbol{T}$ 是对称 Toeplitz 矩阵时, $\eta_j^{(k)} = \eta_{-j}^{(k)}$; 若 $\boldsymbol{T}$ 是 Hermite 型 Toeplitz 矩阵时, $\eta_j^{(k)} = \overline{\eta_{-j}^{(k)}}$.

1964年, Trench[6]对于 Hermite 型 Toeplitz 矩阵首先推导出此方法; 1969年, Zohar[11]将其推广到强非奇(即各阶顺序主子阵

均非奇异)Toeplitz 矩阵.

对于式(2.1.6)的分块 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{T}$,设 $\boldsymbol{T}$ 的各阶块顺序主子阵 $\boldsymbol{T}_k$ 均非奇异. 记 $\boldsymbol{V}_k=\boldsymbol{T}_k^{-1}=(\boldsymbol{V}_{ij}^{(k)})_{i,j=1}^{k}$,则由 $\boldsymbol{T}_k$ 的块次对称性知,$\boldsymbol{V}_k$ 是块次对称的,即

$$\boldsymbol{V}_k=\tilde{\boldsymbol{J}}_k\boldsymbol{V}_k'\tilde{\boldsymbol{J}}_k$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{J}}_k$ 是形如式(2.1.9)的 k 阶分块次单位矩阵. 注意到

$$\boldsymbol{T}_{k+1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_k & \boldsymbol{C}_k\\ \boldsymbol{R}_k' & \Gamma_0\end{bmatrix}\tag{2.3.11}$$

其中 $\boldsymbol{C}_k=[\Gamma_k\quad\cdots\quad\Gamma_1]'$,$\boldsymbol{R}_k'=[\Gamma_{-k}\quad\cdots\quad\Gamma_{-1}]$,且令

$$[\Phi_{-k}^{(k)}\quad\cdots\quad\Phi_{-1}^{(k)}]'=\boldsymbol{V}_k\boldsymbol{C}_k,\quad[\Phi_k^{(k)}\quad\cdots\quad\Phi_1^{(k)}]=\boldsymbol{R}_k'\boldsymbol{V}_k$$

$$\Omega_k=\Gamma_0-\boldsymbol{R}_k'\boldsymbol{V}_k\boldsymbol{C}_k=\Gamma_0-\sum_{j=1}^{k}\Gamma_{-j}\Phi_{-j}^{(j)}=\Gamma_0-\sum_{j=1}^{k}\Phi_j^{(j)}\Gamma_j$$

利用定理 1.3.2、仿 Trench-Zohar 算法的推导得如下算法:

$\Omega_0=\Gamma_0$

对 $k=1,2,\cdots,n-1$

$$\Phi_k^{(k)}=\Gamma_{-k}\Omega_{k-1}^{-1}-\sum_{j=1}^{k-1}\Gamma_{-k+j}\Omega_{k-1}^{-1}\Phi_j^{(k-1)}$$

$$\Phi_{-k}^{(k)}=\Omega_{k-1}^{-1}\Gamma_k-\sum_{j=1}^{k-1}\Phi_{-j}^{(k-1)}\Omega_{k-1}^{-1}\Gamma_{k-j}$$

$$\Phi_i^{(k)}=\Phi_i^{(k-1)}-\Gamma_{-k}\Phi_{-k+i}^{(k-1)}\Omega_{k-1}^{-1}+\sum_{j=1}^{k-1}\Gamma_{-k+j}\Phi_{-k+i}^{(k-1)}\Omega_{k-1}^{-1}\Phi_j^{(k-1)},\quad i=1,2,\cdots k-1$$

$$\Phi_{-i}^{(k)}=\Phi_{-i}^{(k-1)}-\Omega_{k-1}^{-1}\Phi_{k-i}^{(k-1)}\Gamma_k+\sum_{j=1}^{k-1}\Phi_{-j}^{(k-1)}\Omega_{k-1}^{-1}\Phi_{k-i}^{(k-1)}\Gamma_{k-j},\quad i=1,2,\cdots k-1$$

$$\Omega_k=\Gamma_0-\sum_{j=1}^{k}\Gamma_{-j}\Phi_{-j}^{(j)}=\Gamma_0-\sum_{j=1}^{k}\Phi_j^{(j)}\Gamma_j$$

$\boldsymbol{V}_{11}^{(n)}=\Omega_{n-1}^{-1}$

$\boldsymbol{V}_{i+1,1}^{(n)}=-\boldsymbol{V}_{11}^{(n)}\Phi_i^{(n-1)},\quad\boldsymbol{V}_{1,j+1}^{(n)}=-\Phi_{-j}^{(n-1)}\boldsymbol{V}_{11}^{(n)}$

$$i,j=1,2,\cdots,n-1$$

$$V_{i+1,j+1}^{(n)}=V_{ij}^{(n)}+\Phi_{j}^{(n-1)}V_{11}^{(n)}\Phi_{i}^{(n-1)}-\Phi_{-n+i}^{(n-1)}V_{11}^{(n)}\Phi_{n-j}^{(n-1)}$$

$$i=1,\cdots,n-2\ ;\ j=1,\cdots,n-i-1$$

$$V_{n+1-j,n+1-i}^{(n)}=V_{ij}^{(n)}$$

$$i=1,\cdots,n-1\ ;\ j=1,\cdots,n-i$$

二、 Akaike 算法

设分块 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{T}$(式(2.1.6))的各阶块顺序主子阵 $\boldsymbol{T}_k$ 均非奇异.由式(2.3.11)、有

$$\boldsymbol{T}_{k+1}{}'=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_k{}' & \boldsymbol{R}_k\\ \boldsymbol{C}_k{}' & \boldsymbol{\Gamma}_0\end{bmatrix}\tag{2.3.12}$$

引入记号 $\hat{\boldsymbol{C}}_k=\tilde{\boldsymbol{J}}_k\boldsymbol{C}_k=[\boldsymbol{\Gamma}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{\Gamma}_k]'$

同样 $\hat{\boldsymbol{R}}_k=\tilde{\boldsymbol{J}}_k\boldsymbol{R}_k$ 等.则又有

$$\boldsymbol{T}_{k+1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Gamma}_0 & \hat{\boldsymbol{C}}_k{}'\\ \hat{\boldsymbol{R}}_k & \boldsymbol{T}_k\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{T}_{k+1}{}'=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Gamma}_0 & \hat{\boldsymbol{R}}_k{}'\\ \hat{\boldsymbol{C}}_k & \boldsymbol{T}_k{}'\end{bmatrix}\tag{2.3.13}$$

令

$$(\boldsymbol{T}_{k+1})^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_k & \boldsymbol{P}_k{}'\\ \boldsymbol{Q}_k & \boldsymbol{M}_k\end{bmatrix},\quad (\boldsymbol{T}_{k+1}{}')^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Pi}_k & \boldsymbol{H}_k{}'\\ \boldsymbol{L}_k & \boldsymbol{N}_k\end{bmatrix}\tag{2.3.14}$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}_k,\boldsymbol{\Pi}_k$ 是 p 阶方阵,$\boldsymbol{M}_k,\boldsymbol{N}_k$ 是 $k\times k$ 分块矩阵,$\boldsymbol{P}_k,\boldsymbol{Q}_k,\boldsymbol{H}_k,\boldsymbol{L}_k$ 均为 $k\times 1$ 分块矩阵.利用 $\boldsymbol{T}_k$ 的分块次对称性和式(2.3.14),有

$$(\boldsymbol{T}_{k+1})^{-1}=\tilde{\boldsymbol{J}}_{k+1}(\boldsymbol{T}_{k+1}{}')^{-1}\tilde{\boldsymbol{J}}_{k+1}=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{N}}_k & \hat{\boldsymbol{L}}_k\\ \hat{\boldsymbol{H}}_k{}' & \boldsymbol{\Pi}_k\end{bmatrix}\tag{2.3.15}$$

$$(\boldsymbol{T}_{k+1}{}')^{-1}=\tilde{\boldsymbol{J}}_{k+1}(\boldsymbol{T}_{k+1})^{-1}\tilde{\boldsymbol{J}}_{k+1}=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{M}}_k & \hat{\boldsymbol{Q}}_k\\ \hat{\boldsymbol{P}}_k{}' & \boldsymbol{\Sigma}_k\end{bmatrix}\tag{2.3.16}$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{N}}_k=\tilde{\boldsymbol{J}}_k\boldsymbol{N}_k\tilde{\boldsymbol{J}}_k$, $\tilde{\boldsymbol{M}}_k=\tilde{\boldsymbol{J}}_k\boldsymbol{M}_k\tilde{\boldsymbol{J}}_k$. 根据 $(\boldsymbol{T}_{k+1}{}')^{-1}\boldsymbol{T}_{k+1}{}'=\boldsymbol{I}_{(k+1)p}$,由式(2.3.12)~(2.3.14)和(2.3.16)得

$$\left.\begin{array}{l}\Pi_k\hat{R}_k' + H_k'T_k' = O,\quad L_k\hat{R}_k' + N_kT_k' = I_{kp}\\ \Pi_k\Gamma_0 + H_k'\hat{C}_k = I_p\end{array}\right\}\tag{2.3.17}$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{P}_k'T_k' + \Sigma_kC_k' = O,\quad \widetilde{M}_kT_k' + \hat{Q}_kC_k' = I_{kp}\\ \hat{P}_k'R_k + \Sigma_k\Gamma_0 = I_p\end{array}\right\}\tag{2.3.18}$$

再根据 $T_{k+1}T_{k+1}^{-1} = I$ ，由式(2.3.11)，(2.3.14)和(2.3.15)得

$$\hat{R}_k\Sigma_k + T_kQ_k = O,\quad \hat{R}_kP_k' + T_kM_k = I_{kp}\tag{2.3.19}$$

$$T_k\hat{L}_k + C_k\Pi_k = O,\quad T_k\widetilde{N}_k + C_k\hat{H}_k' = I_{kp}\tag{2.3.20}$$

由式(2.3.17)～(2.3.20)的第一式，并利用块次对称性，解得

$$\left.\begin{array}{l}\Pi_k^{-1}H_k' = -\hat{R}_k'(T_k')^{-1},\quad \Sigma_k^{-1}\hat{P}_k' = -C_k'(T_k')^{-1}\\ Q_k\Sigma_k^{-1} = -T_k^{-1}\hat{R}_k,\quad \hat{L}_k\Pi_k^{-1} = -T_k^{-1}C_k\\ \Pi_k^{-1}\hat{H}_k' = -R_k'T_k^{-1},\quad \Sigma_k^{-1}P_k' = -\hat{C}_k'T_k^{-1}\\ \hat{Q}_k\Sigma_k^{-1} = -(T_k')^{-1}R_k,\quad L_k\Pi_k^{-1} = -(T_k')^{-1}\hat{C}_k\end{array}\right\}\tag{2.3.21}$$

而由式(2.3.17)～(2.3.20)的第二式和式(2.3.21)，有

$$N_k = (T_k')^{-1} - L_k\hat{R}_k'(T_k')^{-1} = (T_k')^{-1} + L_k\Pi_k^{-1}H_k'$$

$$\widetilde{M}_k = (T_k')^{-1} - \hat{Q}_kC_k'(T_k')^{-1} = (T_k')^{-1} + \hat{Q}_k\Sigma_k^{-1}\hat{P}_k'$$

$$M_k = T_k^{-1} - T_k^{-1}\hat{R}_kP_k' = T_k^{-1} + Q_k\Sigma_k^{-1}P_k'$$

$$\widetilde{N}_k = T_k^{-1} - T_k^{-1}C_k\hat{H}_k' = T_k^{-1} + \hat{L}_k\Pi_k^{-1}\hat{H}_k'$$

代人式(2.3.14)～(2.3.16)，得

$$\left.\begin{array}{l}(T_{k+1})^{-1} = \begin{bmatrix}\Sigma_k & P_k'\\ Q_k & T_k^{-1} + Q_k\Sigma_k^{-1}P_k'\end{bmatrix}\\ (T_{k+1}')^{-1} = \begin{bmatrix}\Pi_k & H_k'\\ L_k & (T_k')^{-1} + L_k\Pi_k^{-1}H_k'\end{bmatrix}\end{array}\right\}\tag{2.3.22}$$

$$\left.\begin{array}{l}(T_{k+1})^{-1} = \begin{bmatrix}T_k^{-1} + \hat{L}_k\Pi_k^{-1}\hat{H}_k' & \hat{L}_k\\ \hat{H}_k' & \Pi_k\end{bmatrix}\\ (T_{k+1}')^{-1} = \begin{bmatrix}(T_k')^{-1} + \hat{Q}_k\Sigma_k^{-1}\hat{P}_k' & \hat{Q}_k\\ \hat{P}_k' & \Sigma_k\end{bmatrix}\end{array}\right\}\tag{2.3.23}$$

比较式(2.3.22)的第 $i+1$ 行第 $j+1$ 列块元素，得

$$[(\boldsymbol{T}_{k+1})^{-1}]_{i+1,j+1} = [\boldsymbol{T}_k^{-1}]_{ij} + [\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{\Sigma}_k^{-1}\boldsymbol{P}_k']_{ij}$$

$$[(\boldsymbol{T}_{k+1}')^{-1}]_{i+1,j+1} = [(\boldsymbol{T}_k')^{-1}]_{ij} + [\boldsymbol{L}_k\boldsymbol{\Pi}_k^{-1}\boldsymbol{H}_k']_{ij}$$

又比较式(2.3.23)的第 i 行第 j 列块元素，得

$$[(\boldsymbol{T}_{k+1})^{-1}]_{ij} = [\boldsymbol{T}_k^{-1}]_{ij} + [\hat{\boldsymbol{L}}_k\boldsymbol{\Pi}_k^{-1}\hat{\boldsymbol{H}}_k']_{ij}$$

$$[(\boldsymbol{T}_{k+1}')^{-1}]_{ij} = [(\boldsymbol{T}_k')^{-1}]_{ij} + [\hat{\boldsymbol{Q}}_k\boldsymbol{\Sigma}_k^{-1}\hat{\boldsymbol{P}}_k']_{ij}$$

故有

$$\left.\begin{aligned}
&[\boldsymbol{T}_{k+1}^{-1}]_{i+1,j+1} = [\boldsymbol{T}_{k+1}^{-1}]_{ij} + [\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{\Sigma}_k^{-1}\boldsymbol{P}_k' - \hat{\boldsymbol{L}}_k\boldsymbol{\Pi}_k^{-1}\hat{\boldsymbol{H}}_k']_{ij}\\
&[(\boldsymbol{T}_{k+1}')^{-1}]_{ij} = [(\boldsymbol{T}_{k+1}')^{-1}]_{ij} + [\boldsymbol{L}_k\boldsymbol{\Pi}_k^{-1}\boldsymbol{H}_k' - \hat{\boldsymbol{Q}}_k\boldsymbol{\Sigma}_k^{-1}\hat{\boldsymbol{P}}_k']_{ij}
\end{aligned}\right\}$$

(2.3.24)

可见，只要求得 $\boldsymbol{T}_{k+1}^{-1}$ 或 $(\boldsymbol{T}_{k+1}')^{-1}$ 的第 1 行与第 1 列分块元素，就能由式(2.3.24)求得它们的其余元素. 由式(2.3.22)，$\boldsymbol{T}_{k+1}^{-1}$ 或 $(\boldsymbol{T}_{k+1}')^{-1}$ 的第 1 行与第 1 列分块元素，由下列元素确定

$$\boldsymbol{\Pi}_k^{-1}\boldsymbol{H}_k' \ ,\ \boldsymbol{L}_k\boldsymbol{\Pi}_k^{-1} \ ,\ \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1}\hat{\boldsymbol{P}}_k' \ ,\ \hat{\boldsymbol{Q}}_k\boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} \ ,\ \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} \ ,\ \boldsymbol{\Pi}_k^{-1}$$

下面推导它们的递推计算公式. 由式(2.3.21)～(2.3.23)，得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Pi}_{k+1}^{-1}\boldsymbol{H}_{k+1}' &= -\hat{\boldsymbol{R}}_{k+1}'(\boldsymbol{T}_{k+1}')^{-1} = -[\hat{\boldsymbol{R}}_k' \quad \boldsymbol{\Gamma}_{-k-1}]\times\\
&\begin{bmatrix}(\boldsymbol{T}_k')^{-1} + \hat{\boldsymbol{Q}}_k\boldsymbol{\Sigma}_k^{-1}\hat{\boldsymbol{P}}_k' & \hat{\boldsymbol{Q}}_k\\ \hat{\boldsymbol{P}}_k' & \boldsymbol{\Sigma}_k\end{bmatrix} = -[\hat{\boldsymbol{R}}_k'(\boldsymbol{T}_k')^{-1} \quad \boldsymbol{O}] -\\
&(\boldsymbol{\Gamma}_{-k-1} + \hat{\boldsymbol{R}}_k'\hat{\boldsymbol{Q}}_k\boldsymbol{\Sigma}_k^{-1})\boldsymbol{\Sigma}_k[\boldsymbol{\Sigma}_k^{-1}\hat{\boldsymbol{P}}_k' \quad \boldsymbol{I}_p] = [\boldsymbol{\Pi}_k^{-1}\boldsymbol{H}_k' \quad \boldsymbol{O}] -\\
&[\boldsymbol{\Gamma}_{-k-1} + (\boldsymbol{\Pi}_k^{-1}\boldsymbol{H}_k')\boldsymbol{R}_k]\boldsymbol{\Sigma}_k[\boldsymbol{\Sigma}_k^{-1}\hat{\boldsymbol{P}}_k' \quad \boldsymbol{I}_p]
\end{aligned} \qquad (2.3.25)$$

同理可得

$$\boldsymbol{L}_{k+1}\boldsymbol{\Pi}_{k+1}^{-1} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{L}_k\boldsymbol{\Pi}_k^{-1}\\ \boldsymbol{O}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{Q}}_k\boldsymbol{\Sigma}_k^{-1}\\ \boldsymbol{I}_p\end{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_k[\boldsymbol{\Gamma}_{k+1} + \boldsymbol{C}_k'(\boldsymbol{L}_k\boldsymbol{\Pi}_k^{-1})]$$

(2.3.26)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}_{k+1}^{-1}\hat{\boldsymbol{P}}_{k+1}' &= [\boldsymbol{O} \quad \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1}\hat{\boldsymbol{P}}_k'] -\\
&[\boldsymbol{\Gamma}_{k+1} + (\boldsymbol{\Sigma}_k^{-1}\hat{\boldsymbol{P}}_k')\hat{\boldsymbol{C}}_k]\boldsymbol{\Pi}_k[\boldsymbol{I}_p \quad \boldsymbol{\Pi}_k^{-1}\boldsymbol{H}_k']
\end{aligned}$$

(2.3.27)

$$\hat{Q}_{k+1}\Sigma_{k+1}^{-1}=\begin{bmatrix} O \\ \hat{Q}_k\Sigma_k^{-1}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} I_p \\ L_k\Pi_k^{-1}\end{bmatrix}\Pi_k[\Gamma_{-k-1}+\hat{R}_k'(\hat{Q}_k\Sigma_k^{-1})] \tag{2.3.28}$$

根据式(2.3.17)和(2.3.18)的第三式及式(2.3.25)和(2.3.27)，有

$$\begin{aligned}\Pi_{k+1}^{-1}&=\Gamma_0+\Pi_{k+1}^{-1}H_{k+1}'\hat{C}_{k+1}=\Gamma_0+\{[\Pi_k^{-1}H_k' \quad O]-\\&[\Gamma_{-k-1}+(\Pi_k^{-1}H_k')R_k]\Sigma_k[\Sigma_k^{-1}\hat{P}_k \quad I_p]\}\begin{bmatrix}\hat{C}_k \\ \Gamma_{k+1}\end{bmatrix}=\\&\Gamma_0+\Pi_k^{-1}H_k'\hat{C}_k-\\&[\Gamma_{-k-1}+(\Pi_k^{-1}H_k')R_k]\Sigma_k[\Gamma_{k+1}+(\Sigma_k^{-1}\hat{P}_k')\hat{C}_k]=\\&\Pi_k^{-1}-[\Pi_{k+1}^{-1}H_{k+1}']_{k+1}[\Sigma_{k+1}^{-1}\hat{P}_{k+1}']_1\Pi_k^{-1}=\\&\Pi_k^{-1}-\Pi_k^{-1}[\hat{Q}_{k+1}\Sigma_{k+1}^{-1}]_1[L_{k+1}\Pi_{k+1}^{-1}]_{k+1}\end{aligned} \tag{2.3.29}$$

同理可得

$$\begin{aligned}\Sigma_{k+1}^{-1}&=\Sigma_k^{-1}-[\Sigma_{k+1}^{-1}\hat{P}_{k+1}']_1[\Pi_{k+1}^{-1}H_{k+1}']_{k+1}\Sigma_k^{-1}=\\&\Sigma_k^{-1}-\Sigma_k^{-1}[L_{k+1}\Pi_{k+1}^{-1}]_{k+1}[\hat{Q}_{k+1}\Sigma_{k+1}^{-1}]_1\end{aligned} \tag{2.3.30}$$

其中 $[\Sigma_{k+1}^{-1}\hat{P}_{k+1}']_1$ 表示取 $\Sigma_{k+1}^{-1}\hat{P}_{k+1}'$ 的第一个分块元素等. 记

$$T^{-1}=(V_{ij})_{i,j=1}^n, \qquad (T')^{-1}=(S_{ij})_{i,j=1}^n$$

$$[\Phi_1^{(k)} \quad \cdots \quad \Phi_k^{(k)}]=\Pi_k^{-1}H_k', \quad [\Phi_{-1}^{(k)} \quad \cdots \quad \Phi_{-k}^{(k)}]'=L_k\Pi_k^{-1}$$

$$[\Psi_k^{(k)} \quad \cdots \quad \Psi_1^{(k)}]=\Sigma_k^{-1}\hat{P}_k', \quad [\Psi_{-k}^{(k)} \quad \cdots \quad \Psi_{-1}^{(k)}]'=\hat{Q}_k\Sigma_k^{-1}$$

$$\Omega_k=\Sigma_k^{-1}, \quad \Theta_k=\Pi_k^{-1}$$

综上所述，得求解分块 Toeplitz 矩阵 T 之逆矩阵 T^{-1} 或 $(T')^{-1}$ 的 **Akaike 算法**[21]：

$\Omega_0=\Theta_0=\Gamma_0$

对 $k=1,2,\cdots,n-1$

$$\Phi_k^{(k)}=-(\Gamma_{-k}+\sum_{j=1}^{k-1}\Phi_j^{(k-1)}\Gamma_{-k+j})\Omega_{k-1}^{-1}$$

$$\Phi_i^{(k)}=\Phi_i^{(k-1)}+\Phi_k^{(k)}\Psi_{k-i}^{(k-1)}, \quad i=1,2,\cdots k-1$$

$$\Psi_k^{(k)} = -(\Gamma_k + \sum_{j=1}^{k-1}\Psi_{k-j}^{(k-1)}\Gamma_j)\Theta_{k-1}^{-1}$$

$$\Psi_i^{(k)} = \Psi_i^{(k-1)} + \Psi_k^{(k)}\Phi_{k-i}^{(k-1)}, \quad i = 1,2,\cdots k-1$$

$$\Phi_{-k}^{(k)} = -\Omega_{k-1}^{-1}(\Gamma_k + \sum_{j=1}^{k-1}\Gamma_{k-j}\Phi_{-j}^{(k-1)})$$

$$\Phi_{-i}^{(k)} = \Phi_{-i}^{(k-1)} + \Psi_{-k+i}^{(k-1)}\Phi_{-k}^{(k)}, \quad i = 1,2,\cdots k-1$$

$$\Psi_{-k}^{(k)} = -\Theta_{k-1}^{-1}(\Gamma_{-k} + \sum_{j=1}^{k-1}\Gamma_{-j}\Psi_{-k+j}^{(k-1)})$$

$$\Psi_{-i}^{(k)} = \Psi_{-i}^{(k-1)} + \Phi_{-k+i}^{(k-1)}\Psi_{-k}^{(k)}, \quad i = 1,2,\cdots k-1$$

$$\Omega_k = (I_p - \Psi_k^{(k)}\Phi_k^{(k)})\Omega_{k-1} = \Omega_{k-1}(I_p - \Phi_{-k}^{(k)}\Psi_{-k}^{(k)})$$

$$\Theta_k = (I_p - \Phi_k^{(k)}\Psi_k^{(k)})\Theta_{k-1} = \Theta_{k-1}(I_p - \Psi_{-k}^{(k)}\Phi_{-k}^{(k)})$$

$$V_{11} = \Omega_{n-1}^{-1}, \quad S_{11} = \Theta_{n-1}^{-1}$$

$$V_{i+1,1} = \Psi_{-i}^{(n-1)}V_{11}, \quad S_{i+1,1} = \Phi_{-i}^{(n-1)}S_{11}$$

$$i = 1,2,\cdots,n-1$$

$$V_{1,j+1} = V_{11}\Psi_j^{(n-1)}, \quad S_{1,j+1} = S_{11}\Phi_j^{(n-1)}$$

$$j = 1,2,\cdots,n-1$$

$$V_{i+1,j+1} = V_{ij} + \Psi_{-i}^{(n-1)}V_{11}\Psi_j^{(n-1)} - \Phi_{-n+i}^{(n-1)}S_{11}\Phi_{n-j}^{(n-1)}$$

$$S_{i+1,j+1} = S_{ij} + \Phi_{-i}^{(n-1)}S_{11}\Phi_j^{(n-1)} - \Psi_{-n+i}^{(n-1)}V_{11}\Psi_{n-j}^{(n-1)}$$

$$i = 1,\cdots,n-2 \ ; \ j = 1,\cdots,n-i-1$$

$$V_{n+1-j,n+1-i} = V_{ij}, \quad i = 1,\cdots,n-1 \ ; \ j = 1,\cdots,n-i$$

$$S_{n+1-j,n+1-i} = S_{ij}, \quad i = 1,\cdots,n-1 \ ; \ j = 1,\cdots,n-i$$

该算法需 $5n^2-3n-2$ 次 p 阶方阵乘法运算，$5n^2-13n+8$ 次 p 阶方阵加减运算，$2n$ 次 p 阶方阵求逆运算.

三、 Gohberg-Semencul 公式

§2.1已表明，Toeplitz 矩阵的逆矩阵一般不再是 Toeplitz 矩阵，但其逆矩阵可以表示成一些三角 Toeplitz 矩阵的乘积. 这就是著名的 Gohberg-Semencul 公式[18].

定理 2.3.1 设 n 阶 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{T}$ 非奇异. 又设 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{y}}=(y_n,\cdots,y_1)^{\mathrm{T}}$ 分别是线性方程组 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{T}\hat{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{e}$ 的解向量，且 $x_1\neq 0$，则

$$\boldsymbol{T}^{-1}=\frac{1}{x_1}\left\{\begin{bmatrix} x_1 & & & \\ x_2 & x_1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ x_n & \cdots & x_2 & x_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ & y_1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & y_2 \\ & & & y_1 \end{bmatrix}-\right.$$

$$\left.\begin{bmatrix} 0 & & & \\ y_n & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & x_n & \cdots & x_2 \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & x_n \\ & & & 0 \end{bmatrix}\right\} \tag{2.3.31}$$

证明 由 Cramer 法则知，$x_1=y_1=\dfrac{\det\boldsymbol{T}_{n-1}}{\det\boldsymbol{T}}\neq 0$. 这表明 $\boldsymbol{T}$ 的 $n-1$ 阶顺序主子阵 $\boldsymbol{T}_{n-1}$ 非奇异. 此时，由式(2.3.6)和式(2.3.8)得

$$\begin{cases} [\boldsymbol{T}^{-1}]_{11}=\omega_{n-1}^{-1} \\ [\boldsymbol{T}^{-1}]_{i+1,1}=-\omega_{n-1}^{-1}\eta_i^{(n-1)}, \quad [\boldsymbol{T}^{-1}]_{1,j+1}=-\omega_{n-1}^{-1}\eta_{-j}^{(n-1)} \\ [\boldsymbol{T}^{-1}]_{i+1,j+1}=[\boldsymbol{T}^{-1}]_{ij}+\omega_{n-1}^{-1}(\eta_i^{(n-1)}\eta_{-j}^{(n-1)}-\eta_{-n+i}^{(n-1)}\eta_{n-j}^{(n-1)}) \\ \qquad\qquad i,j=1,2,\cdots,n-1 \end{cases}$$

令

$$\begin{cases} x_1=y_1=\omega_{n-1}^{-1} \\ x_{i+1}=-\omega_{n-1}^{-1}\eta_i^{(n-1)}, \quad i=1,2,\cdots,n-1 \\ y_{j+1}=-\omega_{n-1}^{-1}\eta_{-j}^{(n-1)}, \quad j=1,2,\cdots,n-1 \end{cases}$$

则有

$$\begin{cases}[T^{-1}]_{11}=x_1\\ [T^{-1}]_{i+1,1}=x_{i+1},\quad [T^{-1}]_{1,j+1}=y_{j+1}\\ [T^{-1}]_{i+1,j+1}=[T^{-1}]_{ij}+\dfrac{1}{x_1}(x_{i+1}y_{j+1}-y_{n-i+1}x_{n-j+1})\\ \qquad\qquad i,j=1,2,\cdots,n-1\end{cases}$$

将其写成矩阵形式即为式(2.3.31). 式(2.3.31)右乘 e_1，得 $T^{-1}e_1=x$. 式(2.3.31) 取转置再右乘 e_1，得 $T^{-T}e_1=J\hat{y}$. 从而 $Tx=e_1$ ，再利用矩阵 T 的次对称性，得 $T\hat{y}=e_n$. 证毕

注 该定理表明，当 Toeplitz 矩阵 T 及 $n-1$ 阶顺序主子阵 T_{n-1} 可逆时，其逆矩阵由它的第1列及第 n 列元素确定.

四、 Ben-Artzi-Shalom 公式

Gohberg-Semencul 公式隐含地要求 n 阶 Toeplitz 矩阵的 $n-1$ 阶顺序主子阵非奇异. 但 Ben-Artzi-Shalom 公式[83]表明该条件是可以取消的.

定理 2.3.2 设 n 阶 Toeplitz 矩阵 T 非奇异. 又设 $x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, $\hat{y}=(y_n,\cdots,y_1)^{\mathrm{T}}$ 和 $\hat{z}=(z_n,\cdots,z_1)^{\mathrm{T}}$ 使得

$$Tx=e_1,\quad T\hat{y}=ZT\hat{z}$$

且 $z_1\neq 0$，其中 Z 是 n 阶移位矩阵. 则

$$T^{-1}=\frac{1}{z_1}\left\{\begin{bmatrix}x_1 & & & \\ x_2 & x_1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ x_n & \cdots & x_2 & x_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1 & z_2-y_1 & \cdots & z_n-y_{n-1}\\ & z_1 & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & z_2-y_1\\ & & & z_1\end{bmatrix}+\right.$$
$$\left.\begin{bmatrix}y_n & & & \\ y_{n-1}-z_n & y_n & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ y_1-z_2 & \cdots & y_{n-1}-z_n & y_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & x_n & \cdots & x_2\\ & 0 & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & x_n\\ & & & 0\end{bmatrix}\right\} \tag{2.3.32}$$

证明 首先取 $\hat{z} = e_n$. 则 $z_1 = 1$,且

$$T\hat{y} = ZTe_n = (0,\xi_{n-1},\cdots,\xi_1)^{\mathrm{T}} \tag{2.3.33}$$

代入式(2.1.4),有

$$ZT - TZ = (0,\xi_{n-1},\cdots,\xi_1)^{\mathrm{T}}e_n^{\mathrm{T}} - e_1(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1},0) = T\hat{y}e_n^{\mathrm{T}} - Txw^{\mathrm{T}}$$

其中 $w = (\xi_1,\cdots,\xi_{n-1},0)^{\mathrm{T}}$,于是

$$ZT = T[\hat{y}e_n^{\mathrm{T}} - xw^{\mathrm{T}} + Z] \tag{2.3.34}$$

令 $K = \hat{y}e_n^{\mathrm{T}} - xw^{\mathrm{T}} + Z$,则由式(2.3.34)可推得

$$Z^jT = TK^j, \quad j = 0,1,\cdots,n-1 \tag{2.3.35}$$

注意到 $Z^jTx = Z^je_1 = e_{j+1}$ $(j = 0,1,\cdots,n-1)$,则有

$$T[x \quad Kx \quad \cdots \quad K^{n-1}x] = [Tx \quad ZTx \quad \cdots \quad Z^{n-1}Tx] = I_n$$

故

$$T^{-1} = [x \quad Kx \quad \cdots \quad K^{n-1}x] = [c^{(0)} \quad c^{(1)} \quad \cdots \quad c^{(n-1)}] \tag{2.3.36}$$

其中 $c^{(i)} = (c_1^{(i)},\cdots,c_n^{(i)})^{\mathrm{T}} = K^ix$ $(i = 0,1,\cdots,n-1)$. 又

$$c^{(i+1)} = Kc^{(i)} = Zc^{(i)} + c_n^{(i)}\hat{y} - xw^{\mathrm{T}}c^{(i)}, \quad i = 0,1,\cdots,n-2 \tag{2.3.37}$$

由式(2.3.33)和(2.3.35),并利用 T 的次对称性,得

$$\begin{aligned} w^{\mathrm{T}}c^{(i)} &= (0,\xi_{n-1},\cdots,\xi_1)Jc^{(i)} = \hat{y}^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}}Jc^{(i)} = \\ &(y_1,\cdots,y_n)JT^{\mathrm{T}}Jc^{(i)} = (y_1,\cdots,y_n)TK^ix = \\ &(y_1,\cdots,y_n)Z^iTx = (y_1,\cdots,y_n)e_{i+1} = y_{i+1} \end{aligned}$$

而 $$\begin{aligned} c_n^{(i)} &= e_n^{\mathrm{T}}c^{(i)} = e_1^{\mathrm{T}}Jc^{(i)} = (Tx)^{\mathrm{T}}Jc^{(i)} = x^{\mathrm{T}}JTc^{(i)} = \\ &x^{\mathrm{T}}JTK^ix = x^{\mathrm{T}}JZ^iTx = x^{\mathrm{T}}JZ^ie_1 = x^{\mathrm{T}}Je_{i+1} = x_{n-i} \end{aligned}$$

代入式(2.3.37),得

$$c^{(i+1)} = Zc^{(i)} + x_{n-i}\hat{y} - y_{i+1}x, \quad i = 0,1,\cdots,n-2 \tag{2.3.38}$$

从而,由式(2.3.36),得

$$T^{-1}=\begin{bmatrix} x_1 & & & \\ x_2 & x_1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ x_n & \cdots & x_2 & x_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -y_1 & \cdots & -y_{n-1} \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -y_1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix} y_n & & & \\ y_{n-1} & y_n & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ y_1 & \cdots & y_{n-1} & y_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & x_n & \cdots & x_2 \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & x_n \\ & & & 0 \end{bmatrix} \tag{2.3.39}$$

再取 $\hat{z}$ 满足 $T\hat{y}=ZT\hat{z}$ 且 $z_1\neq 0$，则由式(2.1.4) 和(2.3.33)，得

$$T\hat{y}=ZT\hat{z}=TZ\hat{z}+z_1(0,\xi_{n-1},\cdots,\xi_1)^{\mathrm{T}}-(\sum_{j=1}^{n-1}\xi_j z_{n-j+1})e_1$$

即 $$\frac{1}{z_1}T[\hat{y}-Z\hat{z}+(\sum_{j=1}^{n-1}\xi_j z_{n-j+1})x]=(0,\xi_{n-1},\cdots,\xi_1)^{\mathrm{T}}=ZTe_n$$

令 $\hat{u}=\frac{1}{z_1}[\hat{y}-Z\hat{z}+(\sum_{j=1}^{n-1}\xi_j z_{n-j+1})x]$，由上式知，$T\hat{u}=ZTe_n$，即 $\hat{u}$ 相当于式(2.3.33) 中的 $\hat{y}$. 类似于式(2.3.38) 的推导，有

$$\begin{cases} c^{(0)}=x \\ c^{(i+1)}=Zc^{(i)}+x_{n-i}\hat{u}-u_{i+1}x, \quad i=0,1,\cdots,n-2 \end{cases}$$

但

$$\begin{aligned} x_{n-i}\hat{u}-u_{i+1}x=&\frac{x_{n-i}}{z_1}[\hat{y}-Z\hat{z}+(\sum_{j=1}^{n-1}\xi_j z_{n-j+1})x]- \\ &\frac{1}{z_1}[y_{i+1}-z_{i+2}+x_{n-i}(\sum_{j=1}^{n-1}\xi_j z_{n-j+1})]x= \\ &\frac{1}{z_1}[x_{n-i}(\hat{y}-Z\hat{z})-(y_{i+1}-z_{i+2})x] \end{aligned}$$

从而

$$\begin{cases} c^{(0)}=x \\ c^{(i+1)}=Zc^{(i)}+\frac{1}{z_1}[x_{n-i}(\hat{y}-Z\hat{z})-(y_{i+1}-z_{i+2})x] \\ \qquad\qquad i=0,1,\cdots,n-2 \end{cases}$$

借助于式(2.3.39)进行相应的替换，即得式(2.3.32).　　证毕

由该定理可得如下一些推论.

推论 2.3.1　设 n 阶 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{T}$ 非奇异. 又设 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\hat{\boldsymbol{y}}=(y_n,\cdots,y_1)^{\mathrm{T}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{z}}=(z_n,\cdots,z_1)^{\mathrm{T}}$ 使得

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_1,\quad \boldsymbol{T}\hat{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{e}_{i+1},\quad \boldsymbol{T}\hat{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{e}_i,\quad \text{且 } x_{n-i+1}\neq 0$$

则

$$\boldsymbol{T}^{-1}=\frac{1}{x_{n-i+1}}\left\{\begin{bmatrix} x_1 & & & \\ x_2 & x_1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ x_n & \cdots & x_2 & x_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 & z_2-y_1 & \cdots & z_n-y_{n-1} \\ & z_1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & z_2-y_1 \\ & & & z_1\end{bmatrix}+\right.$$
$$\left.\begin{bmatrix} y_n & & & \\ y_{n-1}-z_n & y_n & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ y_1-z_2 & \cdots & y_{n-1}-z_n & y_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & x_n & \cdots & x_2 \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & x_n \\ & & & 0\end{bmatrix}\right\}$$

证明　因 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{T}\hat{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{e}_{i+1}=\boldsymbol{Z}\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{Z}\boldsymbol{T}\hat{\boldsymbol{z}}$，且

$$x_{n-i+1}=\boldsymbol{e}_{n-i+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{T}\hat{\boldsymbol{z}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}=\hat{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}=\hat{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{e}_1=z_1\neq 0$$

由定理 2.3.2 即得.　　证毕

注　该推论表明，适当选择 Toeplitz 矩阵之逆矩阵 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 的三个列，就能构造出 $\boldsymbol{T}^{-1}$.

在推论 2.3.1 中，取 $i=n$，$\hat{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{0}$，即得 Gohberg-Semencul 公式.

推论 2.3.2(Gohberg-Krupnik[17])　设 n 阶 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{T}$ 非奇异，又设 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{y}}=(y_n,\cdots,y_1)^{\mathrm{T}}$ 满足 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{T}\hat{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{e}_2$，且 $x_n\neq 0$，则

$$\boldsymbol{T}^{-1}=\frac{1}{x_n}\left\{\begin{bmatrix} y_n & & & \\ y_{n-1} & y_n & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ y_1 & \cdots & y_{n-1} & y_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & x_n & \cdots & x_2 \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & x_n \\ & & & 0\end{bmatrix}-\right.$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & & & \\ x_2 & x_1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ x_n & \cdots & x_2 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & y_1 & \cdots & y_{n-1} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & y_1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} +$$

$$\left. \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n & x_{n-1} & \cdots & x_1 \end{bmatrix} \right\}$$

证明 在推论 2.3.1 中，取 $i = 1$ ，$\hat{z} = \boldsymbol{x}$ ，经整理即得.

证毕

推论 2.3.3(Heinig-Rost[70]) 设 n 阶 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{T}$ 非奇异，又设 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{y}} = (y_n, \cdots, y_1)^{\mathrm{T}}$ 满足 $\boldsymbol{Tx} = \boldsymbol{e}_1$ ，$\boldsymbol{T}\hat{\boldsymbol{y}} = (0, \xi_{n-1}, \cdots, \xi_1)^{\mathrm{T}}$ ，则

$$\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & & & \\ x_2 & x_1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ x_n & \cdots & x_2 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -y_1 & \cdots & -y_{n-1} \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -y_1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} y_n & & & \\ y_{n-1} & y_n & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ y_1 & \cdots & y_{n-1} & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x_n & \cdots & x_2 \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & x_n \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

证明 这即是式(2.3.39). 证毕

推论 2.3.4(Ben-Artzi-Shalom[83]) 设 n 阶 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{T}$ 非奇异，又设 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{y}} = (y_n, \cdots, y_1)^{\mathrm{T}}$ 满足 $\boldsymbol{Tx} = \boldsymbol{e}_1$ ，$\boldsymbol{T}\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{e} = (1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$ ，且 $y_1 \neq 0$ ，则

$$
T^{-1} = \frac{1}{y_1}\left\{\begin{bmatrix} x_1 & & & \\ x_2 & x_1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ x_n & \cdots & x_2 & x_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 & y_2 - y_1 & \cdots & y_n - y_{n-1} \\ & y_1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & y_2 - y_1 \\ & & & y_1 \end{bmatrix} + \right.
$$

$$
\left.\begin{bmatrix} y_n & & & \\ y_{n-1} - y_n & y_n & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ y_1 - y_2 & \cdots & y_{n-1} - y_n & y_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & x_n & \cdots & x_2 \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & x_n \\ & & & 0 \end{bmatrix}\right\}
$$

证明 注意到

$$
\boldsymbol{T}(\hat{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e} - \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{T}\hat{\boldsymbol{y}}
$$

相应地利用定理 2.3.2 即得. 证毕

五、 具有 Toeplitz 逆的矩阵

前面已指出，Toeplitz 矩阵的逆矩阵一般不再是 Toeplitz 矩阵，但仍是次对称的. 现在的问题是：Toeplitz 矩阵满足什么条件时，其逆矩阵仍是 Toeplitz 矩阵.

引理 2.3.1 设矩阵 $\boldsymbol{T} = (t_{ij})_{i,j=1}^n$ 分块为

$$
\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{T}_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.3.40}
$$

其中 $\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}} = (t_{12}, \cdots, t_{1n})$， $\boldsymbol{c} = (t_{21}, \cdots, t_{n1})^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{T}_{n-1}$ 是 $n-1$ 阶方阵. 则 $\boldsymbol{T}$ 是 Toeplitz 矩阵的充要条件是，$\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{T}_{n-1}$ 均是次对称的.

证明 若 $\boldsymbol{T}$ 是 Toeplitz 矩阵，则 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{T}_{n-1}$ 均是次对称的. 反之，若 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{T}_{n-1}$ 均是次对称矩阵，考虑 $\boldsymbol{T}$ 的元素

$$
t_{1j}, \ t_{2,j+1}, \cdots, \ t_{n-j+1,n}, \quad j = 1, 2, \cdots, n
$$

由 $\boldsymbol{T}$ 的次对称性有 $t_{1j} = t_{n-j+1,n}$， $t_{2,j+1} = t_{n-j,n-1}$， $\cdots$；而由 $\boldsymbol{T}_{n-1}$ 次对称有 $t_{2,j+1} = t_{n-j+1,n}$， $t_{3,j+2} = t_{n-j,n-1}$， $\cdots$；从而

$$
t_{1j} = t_{2,j+1} = \cdots = t_{n-j+1,n}, \quad j = 1, 2, \cdots, n
$$

同理可证 $t_{i1} = t_{i+1,2} = \cdots = t_{n-i+1,n}$ $(i = 2, 3, \cdots, n)$，故 $\boldsymbol{T}$ 是

Toeplitz 矩阵. 证毕

引理 2.3.2 设非奇异次对称矩阵 $\boldsymbol{T}$ 如式(2.3.40)分块,且 $t_{11}\neq 0$,则 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 为 Toeplitz 矩阵的充要条件是,矩阵 $\boldsymbol{B}_{n-1}=\boldsymbol{T}_{n-1}-\dfrac{1}{t_{11}}\boldsymbol{c}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}$ 是次对称的.

证明 由

$$\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \\ -\dfrac{1}{t_{11}}\boldsymbol{c} & \boldsymbol{I}_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_{11} & \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{T}_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{t_{11}}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t_{11} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_{n-1} \end{bmatrix}$$

得

$$\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{t_{11}}+\dfrac{1}{t_{11}^{2}}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{c} & -\dfrac{1}{t_{11}}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{n-1}^{-1} \\ -\dfrac{1}{t_{11}}\boldsymbol{B}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{c} & \boldsymbol{B}_{n-1}^{-1} \end{bmatrix}$$

故由引理 2.3.1 知,$\boldsymbol{T}^{-1}$ 是 Toeplitz 矩阵的充要条件是,$\boldsymbol{B}_{n-1}^{-1}$ 是次对称矩阵,即 $\boldsymbol{B}_{n-1}$ 是次对称矩阵. 证毕

引理 2.3.3 设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 是 n 维列向量,则 $\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 是次对称矩阵的充要条件是,矩阵 $\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{y}\quad \boldsymbol{J}\boldsymbol{x}]$ 的秩为 0 或 1.

证明 若 $\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 是次对称矩阵,则

$$\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J} \tag{2.3.41}$$

如果 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$,则矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的秩为 0 或 1. 如果 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$,给式(2.3.41)右乘 $\boldsymbol{x}$ 得

$$\boldsymbol{y}=k\boldsymbol{J}\boldsymbol{x},\quad k=\frac{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$$

此时,矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的秩为 1. 反之,当矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的秩为 0 时,$\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 是零矩阵,自然是次对称的;而当矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的秩为 1 时,如果 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$或 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$,矩阵 $\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 是零矩阵,如果 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$,必有数 $k\neq 0$ 使得 $\boldsymbol{y}=k\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}$,从而

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}=k\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$$

即 $\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 是次对称的. 证毕

引理 2.3.4 设 $\boldsymbol{P}$ 是 n 阶幂等矩阵，即满足 $\boldsymbol{P}^2=\boldsymbol{P}$，则 $\mathrm{rank}\boldsymbol{P}+\mathrm{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})=n$.

证明 因为 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})=\boldsymbol{O}$，所以 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\leqslant n-\mathrm{rank}\boldsymbol{P}$，即

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{P}+\mathrm{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\leqslant n$$

又由 $\boldsymbol{P}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})=\boldsymbol{I}$ 得

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{P}+\mathrm{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\geqslant n$$

两式结合即得所证. 证毕

定理 2.3.3 设非奇异 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{T}$ 如式(2.3.40)分块，则 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 为 Toeplitz 矩阵的充要条件是，矩阵 $\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{c}\quad \boldsymbol{J}\boldsymbol{r}]$ 的秩为 0 或 1 .

证明 若 $t_{11}\neq 0$，由引理 2.3.2 知，$\boldsymbol{T}^{-1}$ 为 Toeplitz 矩阵的充要条件是矩阵 $\boldsymbol{B}_{n-1}$ 次对称；由于 $\boldsymbol{T}_{n-1}$ 次对称，从而 $\boldsymbol{B}_{n-1}$ 是次对称的充要条件是矩阵 $\boldsymbol{c}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}$ 次对称；再由引理 2.3.3，$\boldsymbol{T}^{-1}$ 为 Toeplitz 矩阵的充要条件是，矩阵 $\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{c}\quad \boldsymbol{J}\boldsymbol{r}]$ 的秩为 0 或 1 .

若 $t_{11}=0$，则 $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{0}$，否则与 $\boldsymbol{T}$ 非奇异矛盾. 设

$$\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix} v_{11} & \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{v} & \boldsymbol{N}_{n-1}\end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ 是 $n-1$ 维列向量，$\boldsymbol{N}_{n-1}$ 是 $n-1$ 阶方阵. 则由 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{I}_n$ 得

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=1,\quad \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_{n-1}=\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \\ &\boldsymbol{N}_{n-1}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{v}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{N}_{n-1}\boldsymbol{T}_{n-1}=\boldsymbol{I}_{n-1}\end{aligned}\right\}\tag{2.3.42}$$

由 $\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=1$ 知，$\boldsymbol{v}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}$ 是幂等矩阵且 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{r}^{T})=1$，从而由式(2.3.42)和引理 2.3.4，得

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{N}_{n-1}\boldsymbol{T}_{n-1})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{I}_{n-1}-\boldsymbol{v}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}})=n-2$$

于是 $\mathrm{rank}\boldsymbol{N}_{n-1}\geqslant n-2$. 又由 $\boldsymbol{N}_{n-1}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 知，矩阵 $\boldsymbol{N}_{n-1}$ 奇异，故 $\mathrm{rank}\boldsymbol{N}_{n-1}=n-2$. 根据引理 2.3.1，$\boldsymbol{T}^{-1}$ 是 Toeplitz 矩阵的充要条件是，$\boldsymbol{T}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{N}_{n-1}$ 是次对称的；于是由 $\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_{n-1}=\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$ 得，$\boldsymbol{N}_{n-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$. 利用线性方程组的理论知 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{J}\boldsymbol{r}$，即 $\mathrm{rank}\boldsymbol{M}=1$. 证毕

定理 2.3.3 的结果表明，n 阶 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的逆矩阵仍是 Toeplitz 矩阵的充要条件是，$\boldsymbol{T}$ 具有如下形式

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} \xi_0 & \mu\xi_1 & \cdots & \mu\xi_{n-1} \\ \lambda\xi_{n-1} & \xi_0 & \cdots & \mu\xi_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda\xi_1 & \lambda\xi_2 & \cdots & \xi_0 \end{bmatrix}$$

其中 λ 和 μ 是数，即 $\boldsymbol{T}$ 是 r-循环矩阵.

六、 Heinig-Rost 算法[70]

考虑求式(2.1.6)的分块 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的逆矩阵.

定理 2.3.4 设分块线性方程组

$$\boldsymbol{TX}=\boldsymbol{E}_1^{(n)},\quad \boldsymbol{TY}=[\boldsymbol{O}\quad \boldsymbol{\Gamma}_{n-1}\quad \cdots\quad \boldsymbol{\Gamma}_1]' \tag{2.3.43}$$

可解，其中 $\boldsymbol{T}$ 是式(2.1.6)的分块 Toeplitz 矩阵，$\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 是 $n\times 1$ 分块矩阵，则 $\boldsymbol{T}$ 可逆，且 $\boldsymbol{T}^{-1}=[\boldsymbol{V}_1\quad \boldsymbol{V}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{V}_n]$ 的诸列 $\boldsymbol{V}_k$ 可递推求得

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{X} \\ &\boldsymbol{V}_{k+1}=\widetilde{\boldsymbol{Z}}_n\boldsymbol{V}_k-\boldsymbol{X}[\boldsymbol{\Gamma}_1\quad \cdots\quad \boldsymbol{\Gamma}_{n-1}\quad \boldsymbol{O}]\boldsymbol{V}_k+\boldsymbol{YE}_n^{(n)\prime}\boldsymbol{V}_k \\ &\qquad\qquad k=1,2,\cdots,n-1 \end{aligned}\right\} \tag{2.3.44}$$

这里 $\widetilde{\boldsymbol{Z}}_n$ 和 $\boldsymbol{E}_i^{(n)}$ 如式(2.1.9)和(2.1.10).

证明 设 $\boldsymbol{TV}_k=\boldsymbol{E}_k^{(n)}\ (k=1,2,\cdots,n)$. 显然 $\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{X}$. 又式(2.1.8)两边右乘 $\boldsymbol{V}_k$ 得

$$\boldsymbol{T}\widetilde{\boldsymbol{Z}}_n\boldsymbol{V}_k-\widetilde{\boldsymbol{Z}}_n\boldsymbol{E}_k^{(n)}=\boldsymbol{TX}[\boldsymbol{\Gamma}_1\quad \cdots\quad \boldsymbol{\Gamma}_{n-1}\quad \boldsymbol{O}]\boldsymbol{V}_k-\boldsymbol{TYE}_n^{(n)\prime}\boldsymbol{V}_k$$

而 $\widetilde{\boldsymbol{Z}}_n\boldsymbol{E}_k^{(n)}=\boldsymbol{E}_{k+1}^{(n)}=\boldsymbol{TV}_{k+1}$，于是

$$\boldsymbol{T}\{\widetilde{\boldsymbol{Z}}_n\boldsymbol{V}_k-\boldsymbol{X}[\boldsymbol{\Gamma}_1\quad \cdots\quad \boldsymbol{\Gamma}_{n-1}\quad \boldsymbol{O}]\boldsymbol{V}_k+\boldsymbol{YE}_n^{(n)\prime}\boldsymbol{V}_k\}=\boldsymbol{E}_{k+1}^{(n)}$$

故 $\boldsymbol{T}$ 可逆，且其各列可由式(2.3.44)递推求得. 证毕

在一定条件下，对于式(2.3.43)的特殊分块线性方程组有如

下快速算法.

定理 2.3.5　设式(2.1.6)的分块 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的各阶分块顺序主子阵 $\boldsymbol{T}_k=(\boldsymbol{\Gamma}_{j-i})_{i,j=1}^{k}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 均非奇异. 又设 $\boldsymbol{X}_k$ 与 $\boldsymbol{Y}_k$ 分别是分块线性方程组

$$\boldsymbol{T}_k\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{E}_1^{(k)},\quad \boldsymbol{T}_k\boldsymbol{Y}_k=[\boldsymbol{\Gamma}_k\quad\cdots\quad\boldsymbol{\Gamma}_1]'$$

的解,其中 $\boldsymbol{\Gamma}_n=\boldsymbol{O}$. 则

$\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{\Gamma}_0^{-1},\quad \boldsymbol{Y}_1=\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{\Gamma}_1,\quad \boldsymbol{\Phi}_0=\boldsymbol{\Gamma}_1$

对 $k=1,2,\cdots,n-1$

$$\boldsymbol{\Phi}_{-k}=[\boldsymbol{\Gamma}_{-k}\quad\cdots\quad\boldsymbol{\Gamma}_{-1}]\boldsymbol{X}_k$$

$$\boldsymbol{\Phi}_k=\boldsymbol{\Gamma}_{k+1}-[\boldsymbol{\Gamma}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{\Gamma}_k]\boldsymbol{Y}_k$$

$$\boldsymbol{\Omega}_k=\boldsymbol{\Omega}_{k-1}-\boldsymbol{\Phi}_{-k}\boldsymbol{\Phi}_{k-1}$$

$$\boldsymbol{X}_{k+1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_k\\ \boldsymbol{O}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\boldsymbol{Y}_k\\ \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\boldsymbol{\Omega}_k^{-1}\boldsymbol{\Phi}_{-k}$$

$$\boldsymbol{Y}_{k+1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{Y}_k\end{bmatrix}+\boldsymbol{X}_{k+1}\boldsymbol{\Phi}_k$$

证明　由定理 1.3.2 得

$$\boldsymbol{X}_{k+1}=\boldsymbol{T}_{k+1}^{-1}\boldsymbol{E}_1^{(k+1)}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_k\\ \boldsymbol{O}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\boldsymbol{Y}_k\\ \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\boldsymbol{\Omega}_k^{-1}\boldsymbol{\Phi}_{-k}$$

其中 $\boldsymbol{\Omega}_k=\boldsymbol{\Gamma}_0-[\boldsymbol{\Gamma}_{-k}\quad\cdots\quad\boldsymbol{\Gamma}_{-1}]\boldsymbol{Y}_k$,又

$$\boldsymbol{T}_{k+1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{Y}_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[\boldsymbol{\Gamma}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{\Gamma}_k]\boldsymbol{Y}_k\\ \boldsymbol{T}_k\boldsymbol{Y}_k\end{bmatrix}=$$

$$[\boldsymbol{\Gamma}_{k+1}\quad\boldsymbol{\Gamma}_k\quad\cdots\quad\boldsymbol{\Gamma}_1]'-\boldsymbol{E}_1^{(k+1)}\boldsymbol{\Phi}_k=$$

$$\boldsymbol{T}_{k+1}\boldsymbol{Y}_{k+1}-(\boldsymbol{T}_{k+1}\boldsymbol{X}_{k+1})\boldsymbol{\Phi}_k$$

于是　$\boldsymbol{Y}_{k+1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{Y}_k\end{bmatrix}+\boldsymbol{X}_{k+1}\boldsymbol{\Phi}_k$ 利用上式可得

$$\boldsymbol{\Omega}_{k+1}=\boldsymbol{\Gamma}_0-[\boldsymbol{\Gamma}_{-k-1}\quad\cdots\quad\boldsymbol{\Gamma}_{-1}]\boldsymbol{Y}_{k+1}=$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_0-[\boldsymbol{\Gamma}_{-k}\quad\cdots\quad\boldsymbol{\Gamma}_{-1}]\boldsymbol{Y}_k-$$

$$[\boldsymbol{\Gamma}_{-k-1}\quad\cdots\quad\boldsymbol{\Gamma}_{-1}]\boldsymbol{X}_{k+1}\boldsymbol{\Phi}_k=\boldsymbol{\Omega}_k-\boldsymbol{\Phi}_{-k-1}\boldsymbol{\Phi}_k$$

证毕

七、 T-Bezout 矩阵

定义 2.3.1 设 $f(\lambda)$ 和 $g(\mu)$ 是两个次数不超过 n 的多项式，以二元多项式

$$\frac{f(\lambda)g(\mu)-\lambda^n g(\lambda^{-1})\mu^n f(\mu^{-1})}{1-\lambda\mu}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\lambda^{i-1}\mu^{j-1}$$

作为生成多项式确定的 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{i,j=1}^{n}$ 称为 **T-Bezout 矩阵**.

定理 2.3.6 设 $\boldsymbol{T}$ 是 n 阶可逆 Toeplitz 矩阵(2.1.1)，则 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 是 T-Bezout 矩阵.

证明 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$， $\hat{\boldsymbol{b}}=(b_n,\cdots,b_1)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{c}=(c_1,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$， $\hat{\boldsymbol{d}}=(d_n,\cdots,d_1)^{\mathrm{T}}$ 分别是下列线性方程组的解向量

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1,\quad \boldsymbol{T}\hat{\boldsymbol{b}}=(0\ \xi_{n-1}\cdots\ \xi_1)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{c}=(\xi_{-1}\cdots\ \xi_{-n+1}0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{T}\hat{\boldsymbol{d}}=\boldsymbol{e}_n$$

则由式(2.1.4)并利用 $\boldsymbol{T}$ 的次对称性得

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Z}\boldsymbol{T}^{-1}=\hat{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}-\boldsymbol{a}\hat{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}$$

或由式(2.1.5)，得

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{c}\hat{\boldsymbol{d}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}-\hat{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}$$

代入式(1.9.1)，得

$$\nabla_{\mathrm{W_T}}\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Z}\boldsymbol{T}^{-1}\\ 0 & -\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}^{-1}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}\\ 0\end{bmatrix}[1\quad -\hat{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}]-\begin{bmatrix}-\hat{\boldsymbol{b}}\\ 1\end{bmatrix}[0\quad \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}] \qquad (2.3.45)$$

或

$$\nabla_{\mathrm{W_T}}\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}^{-1} & 0\\ \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}^{-1}-\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{e}_n\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}1\\ -\boldsymbol{c}\end{bmatrix}[\hat{\boldsymbol{d}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\quad 0]-\begin{bmatrix}0\\ \hat{\boldsymbol{d}}\end{bmatrix}[-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\quad 1] \qquad (2.3.46)$$

由式(2.3.45)和(2.3.46)，并利用定理 1.9.1、定理 1.9.2 和例

1.9.1 的结果知

$$(1-\lambda\mu)T^{-1}(\lambda,\mu)=\Big(\sum_{j=1}^{n}a_j\lambda^{j-1}\Big)\Big(1-\sum_{j=1}^{n}b_j\mu^j\Big)-\Big(-\sum_{j=1}^{n}b_j\lambda^{n-j}+\lambda^n\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}a_j\mu^{n+1-j}\Big)$$

$$(1-\lambda\mu)T^{-1}(\lambda,\mu)=\Big(1-\sum_{j=1}^{n}c_j\lambda^j\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}d_j\mu^{j-1}\Big)-\Big(\sum_{j=1}^{n}d_j\lambda^{n+1-j}\Big)\Big(-\sum_{j=1}^{n}c_j\mu^{n-j}+\mu^n\Big)$$

令 $f(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}a_j\lambda^{j-1},\quad g(\lambda)=1-\sum_{j=1}^{n}b_j\lambda^j$

$$\tilde{f}(\lambda)=1-\sum_{j=1}^{n}c_j\lambda^j,\quad \tilde{g}(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}d_j\lambda^{j-1}$$

则
$$T^{-1}(\lambda,\mu)=\frac{f(\lambda)g(\mu)-\lambda^n g(\lambda^{-1})\mu^n f(\mu^{-1})}{1-\lambda\mu}$$

或
$$T^{-1}(\lambda,\mu)=\frac{\tilde{f}(\lambda)\tilde{g}(\mu)-\lambda^n\tilde{g}(\lambda^{-1})\mu^n\tilde{f}(\mu^{-1})}{1-\lambda\mu}$$

可见 T^{-1} 是 T-Bezout 矩阵.　证毕

利用 T-Bezout 矩阵可以给出 T^{-1} 的一些表达式，说明如下：记 $\nabla_{W_T}T^{-1}=(s_{ij})_{i,j=1}^{n+1}$ 和 $T^{-1}=(v_{ij})_{i,j=1}^{n}$. 由式(1.9.1)，得

$$\left.\begin{aligned}&v_{i1}=s_{i1}, && i=1,2,\cdots,n\\&v_{1j}=s_{1j}, && j=1,2,\cdots,n\\&v_{ij}=v_{i-1,j-1}+s_{ij}, && i,j=2,\cdots,n\end{aligned}\right\}\qquad(2.3.47)$$

又由式(2.3.45)

$$\begin{cases}s_{i1}=a_i, & i=1,2,\cdots,n\\ s_{ij}=-a_ib_{j-1}+b_{n+1-i}a_{n+2-j} & \\ & i=1,2,\cdots,n;\ j=2,3,\cdots,n\end{cases}$$

代入式(2.3.47)，得

$$\begin{cases} v_{i1} = a_i, \quad i = 1,2,\cdots,n \\ v_{ij} = v_{i-1,j-1} - a_i b_{j-1} + b_{n+1-i} a_{n+2-j} \\ \qquad\qquad i = 1,2,\cdots,n;\ j = 2,3,\cdots,n \end{cases}$$

写成矩阵形式可得推论 2.3.3 的 Heinig-Rost 公式.

同理,由式(2.3.46)和(2.3.47),得

$$\begin{cases} v_{1j} = d_j, \quad j = 1,2,\cdots,n \\ v_{ij} = v_{i-1,j-1} - c_{i-1} d_j + d_{n+2-i} c_{n+1-j} \\ \qquad\qquad i = 2,3,\cdots,n;\ j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -c_1 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ -c_{n-1} & \cdots & -c_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \cdots & d_n \\ & d_1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & d_2 \\ & & & d_1 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & & & \\ d_n & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ d_2 & \cdots & d_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_n & c_{n-1} & \cdots & c_1 \\ & c_n & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & c_{n-1} \\ & & & c_n \end{bmatrix}$$

§2.4 求解 Toeplitz 线性方程组

一、 Zohar 算法

考虑线性方程组

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g} \tag{2.4.1}$$

的求解,其中 $\boldsymbol{T}$ 是 n 阶 Toeplitz 矩阵(2.1.1), $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$ 是 n 维未知列向量, $\boldsymbol{f} = (f(1),\cdots,f(n))^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{g} = (g(1),\cdots,g(n))^{\mathrm{T}}$ 是已知的右端向量. 设 $\boldsymbol{T}$ 的各阶顺序主子阵 $\boldsymbol{T}_k$ 均非奇异,又设 $\boldsymbol{x}_k = (x_k(1),$

$\cdots,x_k(k))^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}_k=(y_k(1),\cdots,y_k(k))^{\mathrm{T}},\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{v}_k$ 分别是下列线性方程组的解向量

$$\boldsymbol{T}_k\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{f}_k,\quad \boldsymbol{T}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{g}_k,\quad \boldsymbol{T}_k\boldsymbol{u}_k=\boldsymbol{e}_k^{(k)},\quad \boldsymbol{T}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{e}_k^{(k)}$$

其中 $\boldsymbol{f}_k=(f(1),\cdots,f(k))^{\mathrm{T}}$，　$\boldsymbol{g}_k=(g(1),\cdots,g(k))^{\mathrm{T}}$ 是 k 维向量.

由定理 1.3.3 知

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_k\\0\end{bmatrix}+\sigma_k\boldsymbol{u}_{k+1},\quad \boldsymbol{y}_{k+1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_k\\0\end{bmatrix}+\tau_k\boldsymbol{v}_{k+1}\qquad(2.4.2)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\sigma_k&=f(k+1)-\sum_{j=1}^{k}\xi_{-k-1+j}x_k(j)\\ \tau_k&=g(k+1)-\sum_{j=1}^{k}\xi_{k+1-j}y_k(j)\end{aligned}\right\}\qquad(2.4.3)$$

且有

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{u}_{k+1}&=\boldsymbol{V}_{k+1}\boldsymbol{e}_{k+1}^{(k+1)}=\omega_k^{-1}(-\eta_{-k}^{(k)},\cdots,-\eta_{-1}^{(k)},1)^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{v}_{k+1}&=\boldsymbol{V}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_{k+1}^{(k+1)}=\omega_k^{-1}(-\eta_k^{(k)},\cdots,-\eta_1^{(k)},1)^{\mathrm{T}}\end{aligned}\right\}\qquad(2.4.4)$$

结合式(2.4.2)～(2.4.4)及求逆矩阵的 Trench-Zohar 算法得求解线性方程组式(2.4.1)的 **Zohar 算法**[34]：

$$\omega_0=\xi_0,\quad x_1(1)=f(1)/\xi_0,\quad y_1(1)=g(1)/\xi_0$$

对 $k=1,2,\cdots,n-1$

$$\eta_k^{(k)}=\omega_{k-1}^{-1}(\xi_{-k}-\sum_{j=1}^{k-1}\xi_{-k+j}\eta_j^{(k-1)})$$

$$\eta_{-k}^{(k)}=\omega_{k-1}^{-1}(\xi_k-\sum_{j=1}^{k-1}\xi_{k-j}\eta_{-j}^{(k-1)})$$

$$\eta_i^{(k)}=\eta_i^{(k-1)}-\eta_k^{(k)}\eta_{-k+i}^{(k-1)},\quad \eta_{-i}^{(k)}=\eta_{-i}^{(k-1)}-\eta_{-k}^{(k)}\eta_{k-i}^{(k-1)}$$

$$i=1,2,\cdots k-1$$

$$\omega_k=\omega_{k-1}(1-\eta_k^{(k)}\eta_{-k}^{(k)})$$

$$\sigma_k=f(k+1)-\sum_{j=1}^{k}\xi_{-k-1+j}x_k(j)$$

$$\tau_k = g(k+1) - \sum_{j=1}^{k} \xi_{k+1-j} y_k(j)$$

$$x_{k+1}(k+1) = \sigma_k \omega_k^{-1}$$

$$x_{k+1}(i) = x_k(i) - x_{k+1}(k+1)\eta_{-k-1+i}^{(k)}, \quad i = 1,2,\cdots,k$$

$$y_{k+1}(k+1) = \tau_k \omega_k^{-1}$$

$$y_{k+1}(i) = y_k(i) - y_{k+1}(k+1)\eta_{k+1-i}^{(k)}, \quad i = 1,2,\cdots,k$$

该算法需 $4n^2 - 2n - 2$ 次乘除运算，$4n^2 - 7n + 3$ 次加减运算.

Levinson[1]和 Durbin[3]分别推导出了对称 Toeplitz 矩阵和 Hermite 型 Toeplitz 矩阵类似的算法，只是在选取初值上有差别.

二、 Akaike 算法

考虑分块线性方程组

$$\boldsymbol{TX} = \boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{T}'\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{G} \tag{2.4.5}$$

的求解，其中 $\boldsymbol{T}$ 是分块 Toeplitz 矩阵(2.1.6)，$\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 是 $n \times 1$ 分块未知矩阵，$\boldsymbol{F} = [\boldsymbol{F}(1) \cdots \boldsymbol{F}(n)]'$ 和 $\boldsymbol{G} = [\boldsymbol{G}(1) \cdots \boldsymbol{G}(n)]'$ 是已知的 $n \times 1$ 分块矩阵，而 $\boldsymbol{F}(j),\boldsymbol{G}(j)$ $(j = 1,2,\cdots,n)$ 均为 $p \times q$ 矩阵. 设 $\boldsymbol{T}$ 的各阶块顺序主子阵 $\boldsymbol{T}_k$ 均非奇异，又设 $\boldsymbol{X}_k = [\boldsymbol{X}_k(1) \cdots \boldsymbol{X}_k(k)]'$ 和 $\boldsymbol{Y}_k = [\boldsymbol{Y}_k(1) \cdots \boldsymbol{Y}_k(k)]'$ 分别是下列分块线性方程组

$$\boldsymbol{T}_k\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{F}_k, \quad \boldsymbol{T}_k'\boldsymbol{Y}_k = \boldsymbol{G}_k$$

的解向量其中 $\boldsymbol{F}_k = [\boldsymbol{F}(1) \cdots \boldsymbol{F}(k)]'$ ，$\boldsymbol{G}_k = [\boldsymbol{G}(1) \cdots \boldsymbol{G}(k)]'$. 由式(2.3.23)和(2.3.21)，有

$$\boldsymbol{X}_{k+1} = (\boldsymbol{T}_{k+1})^{-1}\boldsymbol{F}_{k+1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_k^{-1} + \hat{\boldsymbol{L}}_k\boldsymbol{\Pi}_k^{-1}\hat{\boldsymbol{H}}_k' & \hat{\boldsymbol{L}}_k \\ \hat{\boldsymbol{H}}_k' & \boldsymbol{\Pi}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_k \\ \boldsymbol{F}(k+1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_k \\ \boldsymbol{O} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{L}}_k\boldsymbol{\Pi}_k^{-1} \\ \boldsymbol{I}_p \end{bmatrix} \boldsymbol{\Pi}_k [\boldsymbol{F}(k+1) + \boldsymbol{\Pi}_k^{-1}\hat{\boldsymbol{H}}_k'\boldsymbol{F}_k] =$$

$$\begin{bmatrix} X_k \\ O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{L}_k \Pi_k^{-1} \\ I_p \end{bmatrix} \Pi_k [F(k+1) - R_k' X_k]$$

同理　$$Y_{k+1} = \begin{bmatrix} Y_k \\ O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{Q}_k \Sigma_k^{-1} \\ I_p \end{bmatrix} \Sigma_k [G(k+1) - C_k' Y_k]$$

结合求逆矩阵的 Akaike 算法，得求解分块线性方程组式(2.4.5)的 **Akaike 算法 1**[21]：

$$\Omega_0 = \Theta_0 = \Gamma_0, \quad X_1(1) = \Omega_0^{-1} F(1), \quad Y_1(1) = \Theta_0^{-1} G(1)$$

对 $k = 1, 2, \cdots, n-1$

$$\Phi_{-k}^{(k)} = -\Omega_{k-1}^{-1}(\Gamma_k + \sum_{j=1}^{k-1} \Gamma_{k-j} \Phi_{-j}^{(k-1)})$$

$$\Phi_{-i}^{(k)} = \Phi_{-i}^{(k-1)} + \Psi_{-k+i}^{(k-1)} \Phi_{-k}^{(k)}, \quad i = 1, 2, \cdots k-1$$

$$\Psi_{-k}^{(k)} = -\Theta_{k-1}^{-1}(\Gamma_{-k} + \sum_{j=1}^{k-1} \Gamma_{-j} \Psi_{-k+j}^{(k-1)})$$

$$\Psi_{-i}^{(k)} = \Psi_{-i}^{(k-1)} + \Phi_{-k+i}^{(k-1)} \Psi_{-k}^{(k)}, \quad i = 1, 2, \cdots k-1$$

$$\Omega_k = \Omega_{k-1}(I_p - \Phi_{-k}^{(k)} \Psi_{-k}^{(k)})$$

$$\Theta_k = \Theta_{k-1}(I_p - \Psi_{-k}^{(k)} \Phi_{-k}^{(k)})$$

$$X_{k+1}(k+1) = \Theta_k^{-1}(F(k+1) - \sum_{j=1}^{k} \Gamma_{-k-1+j} X_k(j))$$

$$X_{k+1}(i) = X_k(i) + \Phi_{-k-1+i}^{(k)} X_{k+1}(k+1), \quad i = 1, 2, \cdots, k$$

$$Y_{k+1}(k+1) = \Omega_k^{-1}(G(k+1) - \sum_{j=1}^{k} \Gamma_{k+1-j} Y_k(j))$$

$$Y_{k+1}(i) = Y_k(i) + \Psi_{-k-1+i}^{(k)} Y_{k+1}(k+1), \quad i = 1, 2, \cdots, k$$

对分块线性方程组

$$X'T' = F', \quad Y'T = G'$$

仿上述过程推导得 **Akaike 算法2**[21]：

$$\Omega_0 = \Theta_0 = \Gamma_0, \quad X_1(1) = F(1)\Omega_0^{-1}, \quad Y_1(1) = G(1)\Theta_0^{-1}$$

对 $k = 1, 2, \cdots, n-1$

$$\Phi_k^{(k)} = -(\Gamma_{-k} + \sum_{j=1}^{k-1} \Phi_j^{(k-1)} \Gamma_{-k+j}) \Omega_{k-1}^{-1}$$

$$\Phi_i^{(k)} = \Phi_i^{(k-1)} + \Phi_k^{(k)}\Psi_{k-i}^{(k-1)}, \quad i = 1,2,\cdots k-1$$

$$\Psi_k^{(k)} = -(\Gamma_k + \sum_{j=1}^{k-1}\Psi_{k-j}^{(k-1)}\Gamma_j)\Theta_{k-1}^{-1}$$

$$\Psi_i^{(k)} = \Psi_i^{(k-1)} + \Psi_k^{(k)}\Phi_{k-i}^{(k-1)}, \quad i = 1,2,\cdots k-1$$

$$\Omega_k = (I_p - \Psi_k^{(k)}\Phi_k^{(k)})\Omega_{k-1}$$

$$\Theta_k = (I_p - \Phi_k^{(k)}\Psi_k^{(k)})\Theta_{k-1}$$

$$X_{k+1}(k+1) = (F(k+1) - \sum_{j=1}^{k}X_k(j)\Gamma_{-k-1+j})\Omega_k^{-1}$$

$$X_{k+1}(i) = X_k(i) + X_{k+1}(k+1)\Psi_{k+1-i}^{(k)}, \quad i = 1,2,\cdots,k$$

$$Y_{k+1}(k+1) = (G(k+1) - \sum_{j=1}^{k}Y_k(j)\Gamma_{k+1-j})\Theta_k^{-1}$$

$$Y_{k+1}(i) = Y_k(i) + Y_{k+1}(k+1)\Phi_{k+1-i}^{(k)}, \quad i = 1,2,\cdots,k$$

该算法需 $4n^2-4$ 次 p 阶方阵乘法运算，$4n^2-6n+2$ 次 p 阶方阵加减运算，n 次 p 阶方阵求逆运算.

三、 Bareiss 变换法

考虑求解线性方程组

$$Tx = f$$

其中 T 是 n 阶 Toeplitz 矩阵(2.1.1)，$x = (x(1),\cdots,x(n))^T$，$f = (f(1),\cdots,f(n))^T$. 设 T 的各阶顺序主子阵均非奇异. 该方法的基本思想是构造一组同解的方程组

$$W^{(-k+1)}x = f^{(-k+1)}, \quad W^{(k-1)}x = f^{(k-1)}, \quad k = 1,2,\cdots,n$$

其中

$$W^{(0)} = T, \quad f^{(0)} = f$$

$$W^{(-k+1)} = \begin{bmatrix} U^{(-k+1)} \\ T^{(-k+1)} \end{bmatrix} =$$

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
\xi_0^{(0)} & \xi_1^{(0)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \xi_{n-1}^{(0)} \\
0 & \xi_0^{(-1)} & \xi_1^{(-1)} & & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \xi_0^{(-k+1)} & \xi_1^{(-k+1)} & \cdots & \xi_{n-k}^{(-k+1)} \\
\hline
\xi_{-k}^{(-k+1)} & 0 & \cdots & 0 & \xi_0^{(-k+1)} & \cdots & \xi_{n-k-1}^{(-k+1)} \\
\vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\
\xi_{-n+1}^{(-k+1)} & \cdots & \xi_{-k}^{(-k+1)} & 0 & \cdots & 0 & \xi_0^{(-k+1)}
\end{array}\right]
$$

$$
W^{(k-1)} = \begin{bmatrix} T^{(k-1)} \\ L^{(k-1)} \end{bmatrix} =
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccccc}
\xi_0 & 0 & \cdots & 0 & \xi_k^{(k-1)} & \cdots & \cdots & \xi_{n-1}^{(k-1)} \\
\xi_{-1}^{(k-1)} & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\
\xi_{-n+k+1}^{(k-1)} & \cdots & \xi_{-1}^{(k-1)} & \xi_0 & 0 & \cdots & 0 & \xi_k^{(k-1)} \\
\hline
\xi_{-n+k}^{(k-1)} & \cdots & \cdots & \xi_{-1}^{(k-1)} & \xi_0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\
\xi_{-n+1}^{(0)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \xi_{-1}^{(0)} & \xi_0
\end{array}\right]
$$

$$
f^{(-k+1)} = (f^{(-k+1)}(1), \cdots, f^{(-k+1)}(n))^{\mathrm{T}}
$$

$$
f^{(k-1)} = (f^{(k-1)}(1), \cdots, f^{(k-1)}(n))^{\mathrm{T}}
$$

可见，$W^{(-k+1)}$ 及 $W^{(k-1)}$ 中，与主对角线平行的下面 $k-1$ 个子对角线的元素及上面 $k-1$ 个子对角线的元素均为零，且由第 $k+1$ 行到第 n 行及第 1 行到第 $n-k$ 行构成的子矩阵 $T^{(-k+1)}$ 和 $T^{(k-1)}$ 仍具有 Toeplitz 矩阵的特点，即平行于主对角线的各对角线上元素彼此相等.

显然，$W^{(-n+1)}$ 及 $W^{(n-1)}$ 分别是下三角和上三角矩阵. 于是，求解方程组 $W^{(-n+1)}x = f^{(-n+1)}$ 或 $W^{(n-1)}x = f^{(n-1)}$，即得原方程组的解.

以下构造算法，在第 $k+1$ 步，设 $\xi_0^{(-k)} \neq 0$，则

$$W^{(-k)} = \begin{bmatrix} U^{(-k+1)} \\ T^{(-k+1)} - \dfrac{\xi_{-k}^{(-k+1)}}{\xi_0} T^{(k-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^{(-k+1)} \\ \widetilde{T}^{(-k+1)} \end{bmatrix}$$

$$W^{(k)} = \begin{bmatrix} T^{(k-1)} - \dfrac{\xi_k^{(k-1)}}{\xi_0^{(-k)}} \widetilde{T}^{(-k+1)} \\ L^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

$$f^{(-k)} = (f^{(-k+1)}(1), \cdots, f^{(-k+1)}(k), \cdots, f^{(-k+1)}(n))^{\mathrm{T}} - \frac{\xi_{-k}^{(-k+1)}}{\xi_0}(0, \cdots, 0, f^{(k-1)}(1), \cdots, f^{(k-1)}(n-k))^{\mathrm{T}}$$

$$f^{(k)} = (f^{(k-1)}(1), \cdots, f^{(k-1)}(n-k), \cdots, f^{(k-1)}(n))^{\mathrm{T}} - \frac{\xi_k^{(k-1)}}{\xi_0^{(-k)}}(f^{(-k)}(k+1), \cdots, f^{(-k)}(n), 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$$

由此得 **Bareiss** 变换法[8]：

$$\xi_j^{(0)} = \xi_j, \quad j = -n+1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, n-1$$

对 $k = 1, 2, \cdots, n-1$

$$\xi_j^{(-k)} = \xi_j^{(-k+1)} - \frac{\xi_{-k}^{(-k+1)}}{\xi_0} \xi_{k+j}$$

$$j = -n+1, \cdots -k-1, 0, \cdots, n-k-1$$

$$\xi_j^{(k)} = \xi_j^{(k-1)} - \frac{\xi_k^{(k-1)}}{\xi_0^{(-k)}} \xi_{j-k}$$

$$j = -n+k+1, \cdots -1, k+1, \cdots, n-1$$

$$f^{(-k)}(j) = f^{(-k+1)}(j) - \frac{\xi_{-k}^{(-k+1)}}{\xi_0} f^{(k-1)}(j-k)$$

$$j = k+1, \cdots, n$$

$$f^{(k)}(j) = f^{(k-1)}(j) - \frac{\xi_k^{(k-1)}}{\xi_0^{(-k)}} f^{(-k)}(k+j)$$

$$j = 1, \cdots, n-k$$

而由 $W^{(-n+1)}x = f^{(-n+1)}$，得

$$x(k) = \frac{f^{(-k+1)}(k) - \sum_{j=k+1}^{n} \xi_{j-k}^{(-k+1)} x(j)}{\xi_0^{(-k+1)}}, \quad k = n, \cdots, 1$$

该算法需 $\frac{7}{2}n^2-\frac{7}{2}n+1$ 次乘除运算，$\frac{7}{2}n^2-\frac{13}{2}n+3$ 次加减运算.

注 1 Bareiss 变换法要求 $\xi_0^{(-k)}\neq 0$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$ 成立. 可以证明,该条件成立,T 的各阶顺序主子阵必须均非奇异. 当 Toeplitz 矩阵 T 不满足上述条件时,经处理后仍可采用类似的方法计算[8].

注 2 当 T 是对称 Toeplitz 矩阵或 Hermite 型 Toeplitz 矩阵时,计算过程可以化简.

四、 Gohberg-Kailath-Koltracht 算法

考虑求解线性方程组式(2.4.1),其中 T 是 n 阶 Toeplitz 型矩阵(2.1.3). 设 T 的各阶顺序主子阵 T_k 均非奇异,而其余记号同前. 则式(2.4.2)成立,其中

$$\left.\begin{aligned}\sigma_k &= f(k+1)-\sum_{j=1}^{k}t_{k+1,j}x_k(j)\\ \tau_k &= g(k+1)-\sum_{j=1}^{k}t_{j,k+1}y_k(j)\end{aligned}\right\}\qquad(2.4.6)$$

记 Z_k 是 k 阶移位矩阵,$p_k^{(i)}$, $q_k^{(i)}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 是分别由 n 维列向量 $p^{(i)}$, $q^{(i)}$ 的前 k 个分量构成的 k 维列向量,即

$$p_k^{(i)}=(p^{(i)}(1),\cdots,p^{(i)}(k))^{\mathrm T},\quad q_k^{(i)}=(q^{(i)}(1),\cdots,q^{(i)}(k))^{\mathrm T}$$

则由式(2.1.3),得

$$T_{k+1}-Z_{k+1}T_{k+1}Z_{k+1}^{\mathrm T}=\sum_{i=1}^{l}p_{k+1}^{(i)}q_{k+1}^{(i)\mathrm T}\qquad(2.4.7)$$

容易验证

$$Z_{k+1}T_{k+1}Z_{k+1}^{\mathrm T}\begin{bmatrix}0\\u_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0^{\mathrm T}\\0&T_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\u_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\e_k^{(k)}\end{bmatrix}=e_{k+1}^{(k+1)}$$

$$Z_{k+1}T_{k+1}^{\mathrm T}Z_{k+1}^{\mathrm T}\begin{bmatrix}0\\v_k\end{bmatrix}=e_{k+1}^{(k+1)}$$

于是,将式(2.4.7)及其转置分别右乘 $\begin{bmatrix}0\\u_k\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}0\\v_k\end{bmatrix}$,得

$$\left.\begin{aligned} T_{k+1}\begin{bmatrix}0\\ u_k\end{bmatrix} - e_{k+1}^{(k+1)} &= -\sum_{i=1}^{l}\varphi_k^{(i)}p_{k+1}^{(i)} \\ T_{k+1}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0\\ v_k\end{bmatrix} - e_{k+1}^{(k+1)} &= -\sum_{i=1}^{l}\psi_k^{(i)}q_{k+1}^{(i)} \end{aligned}\right\} \tag{2.4.8}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \varphi_k^{(i)} &= -\sum_{j=1}^{k}u_k(j)q^{(i)}(j+1) \\ \psi_k^{(i)} &= -\sum_{j=1}^{k}v_k(j)p^{(i)}(j+1) \quad, \quad i = 1,2,\cdots,l \end{aligned}\right\} \tag{2.4.9}$$

又记 $w_k^{(i)}$ 和 $z_k^{(i)}$ 分别是线性方程组

$$T_k w_k^{(i)} = p_k^{(i)}, \quad T_k^{\mathrm{T}} z_k^{(i)} = q_k^{(i)}, \quad i = 1,2,\cdots,l \tag{2.4.10}$$

的解向量. 式(2.4.8)左乘 T_{k+1}^{-1} 和 $T_{k+1}^{-\mathrm{T}}$，得

$$\begin{bmatrix}0\\ u_k\end{bmatrix} - u_{k+1} = -\sum_{i=1}^{l}\varphi_k^{(i)}w_{k+1}^{(i)}, \quad \begin{bmatrix}0\\ v_k\end{bmatrix} - v_{k+1} = -\sum_{i=1}^{l}\psi_k^{(i)}z_{k+1}^{(i)} \tag{2.4.11}$$

对式(2.4.10)的线性方程组利用定理 1.3.3，得

$$\left.\begin{aligned} w_{k+1}^{(i)} &= \begin{bmatrix}w_k^{(i)}\\ 0\end{bmatrix} + \mu_k^{(i)}u_{k+1} \\ z_{k+1}^{(i)} &= \begin{bmatrix}z_k^{(i)}\\ 0\end{bmatrix} + \nu_k^{(i)}v_{k+1} \quad, \quad i = 1,2,\cdots,l \end{aligned}\right\} \tag{2.4.12}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \mu_k^{(i)} &= p^{(i)}(k+1) - \sum_{j=1}^{k}t_{k+1,j}w_k^{(i)}(j) \\ \nu_k^{(i)} &= q^{(i)}(k+1) - \sum_{j=1}^{k}t_{j,k+1}z_k^{(i)}(j) \end{aligned}\right\}, \quad i = 1,2,\cdots,l \tag{2.4.13}$$

将式(2.4.12)代入式(2.4.11)，并整理得

$$\left.\begin{aligned}(1-\sum_{i=1}^{l}\varphi_k^{(i)}\mu_k^{(i)})\boldsymbol{u}_{k+1}&=\begin{bmatrix}0\\\boldsymbol{u}_k\end{bmatrix}+\sum_{i=1}^{l}\varphi_k^{(i)}\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}_k^{(i)}\\0\end{bmatrix}\\(1-\sum_{i=1}^{l}\psi_k^{(i)}\nu_k^{(i)})\boldsymbol{v}_{k+1}&=\begin{bmatrix}0\\\boldsymbol{v}_k\end{bmatrix}+\sum_{i=1}^{l}\psi_k^{(i)}\begin{bmatrix}\boldsymbol{z}_k^{(i)}\\0\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\tag{2.4.14}$$

可知 $1-\sum_{i=1}^{l}\varphi_k^{(i)}\mu_k^{(i)}\neq 0$，$1-\sum_{i=1}^{l}\psi_k^{(i)}\nu_k^{(i)}\neq 0$，否则由式(2.4.14)可得 $u_k(k)=v_k(k)=0$，从而由 $\boldsymbol{T}_k\boldsymbol{u}_k=\boldsymbol{e}_k^{(k)}$ 和 $\boldsymbol{T}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{e}_k^{(k)}$ 得

$$\begin{cases}\boldsymbol{T}_{k-1}[u_k(1)\ \cdots\ u_k(k-1)]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{T}_{k-1}^{\mathrm{T}}[v_k(1)\ \cdots\ v_k(k-1)]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}\end{cases}$$

这与 $\boldsymbol{T}_{k-1}$ 可逆矛盾.

结合式(2.4.2)，(2.4.6)，(2.4.9)，(2.4.12)～(2.4.14)得求解 Toeplitz 型线性方程组式(2.4.1)的 **Gohberg-Kailath-Koltracht算法**[86]：

$u_1(1)=v_1(1)=1/t_{11}$

$w_1^{(i)}(1)=p^{(i)}(1)/t_{11}$

$(\ z_1^{(i)}(1)=q^{(i)}(1)/t_{11}\ ),\quad i=1,2,\cdots,l$

$x_1(1)=f(1)/t_{11}\quad(\ y_1(1)=g(1)/t_{11}\ )$

对 $k=1,2,\cdots,n-1$

$$\varphi_k^{(i)}=-\sum_{j=1}^{k}u_k(j)q^{(i)}(j+1)$$

$$(\ \psi_k^{(i)}=-\sum_{j=1}^{k}v_k(j)p^{(i)}(j+1)\ ),\quad i=1,2,\cdots,l$$

$$\mu_k^{(i)}=p^{(i)}(k+1)-\sum_{j=1}^{k}t_{k+1,j}w_k^{(i)}(j)$$

$$(\ \nu_k^{(i)}=q^{(i)}(k+1)-\sum_{j=1}^{k}t_{j,k+1}z_k^{(i)}(j)\ ),\quad i=1,2,\cdots,l$$

$$\sigma_k=f(k+1)-\sum_{j=1}^{k}t_{k+1,j}x_k(j)$$

$$\left(\tau_k = g(k+1) - \sum_{j=1}^{k} t_{j,k+1} y_k(j)\right)$$

$$u_{k+1} = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{l} \varphi_k^{(i)} \mu_k^{(i)}} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ u_k \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{l} \varphi_k^{(i)} \begin{bmatrix} w_k^{(i)} \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\left(v_{k+1} = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{l} \psi_k^{(i)} \nu_k^{(i)}} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ v_k \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{l} \psi_k^{(i)} \begin{bmatrix} z_k^{(i)} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right)$$

$$w_{k+1}^{(i)} = \begin{bmatrix} w_k^{(i)} \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_k^{(i)} u_{k+1}, \quad \left(z_{k+1}^{(i)} = \begin{bmatrix} z_k^{(i)} \\ 0 \end{bmatrix} + \nu_k^{(i)} v_{k+1} \right)$$

$$i = 1, 2, \cdots, l$$

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} x_k \\ 0 \end{bmatrix} + \sigma_k u_{k+1}, \quad \left(y_{k+1} = \begin{bmatrix} y_k \\ 0 \end{bmatrix} + \tau_k v_{k+1} \right)$$

该算法需 $(2l+1)n^2 - l + 1$ 次乘除运算，$(2l+1)n^2 - (2l+2)n + 1$ 次加减运算.

五、 Kumar 超快速算法[78]

该算法的基本思想是将 Toeplitz 矩阵先镶嵌成一个大的循环矩阵，并求该循环矩阵的逆矩阵；然后利用循环矩阵逆矩阵的第 1 行和第 1 列求原矩阵之逆的第 1 行和第 1 列；最后求解原 Toeplitz 线性方程组.

第一步(循环镶嵌)：

将式(2.1.1)的 Toeplitz 矩阵镶嵌成一个 $2n-1$ 阶的矩阵

$$C = \begin{bmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_{n-1} & \xi_{-n+1} & \xi_{-n+2} & \cdots & \xi_{-1} \\ \xi_{-1} & \xi_0 & \cdots & \xi_{n-2} & \xi_{n-1} & \xi_{-n+1} & \cdots & \xi_{-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{-n+1} & \xi_{-n+2} & \cdots & \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{n-1} \\ \xi_{n-1} & \xi_{-n+1} & \cdots & \xi_{-1} & \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{-n+1} & \xi_{-n+2} & \xi_{-n+3} & \cdots & \xi_0 \end{bmatrix}$$

它既是 Toeplitz 矩阵，又是循环矩阵. 假定 $\boldsymbol{C}$ 是非奇异的，由 §2.2 知 $\boldsymbol{C}^{-1}$ 仍是循环矩阵，所以只须求出 $\boldsymbol{C}^{-1}$ 的第 1 行即可. 设 $\boldsymbol{C}^{-1}$ 的第 1 行元素为 $(\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_{2n-2})$，作离散富氏变换

$$\lambda_j=\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k\omega^{kj}+\sum_{k=n}^{2n-2}\xi_{-2n+k+1}\omega^{kj},\quad j=0,1,\cdots,2n-2$$

再作其逆变换，得

$$\eta_k=\frac{1}{2n-1}\sum_{j=0}^{2n-2}\lambda_j^{-1}\omega^{-kj},\quad k=0,1,\cdots,2n-2$$

通过循环移位可得 $\boldsymbol{C}^{-1}$ 的第 1 列元素.

第二步（利用 $\boldsymbol{C}^{-1}$ 的首行首列元素求 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 的首行首列元素）：

为推导、叙述方便，先介绍 Toeplitz 矩阵的一个性质.

引理 2.4.1 设 $\boldsymbol{T}_{k+1}$ 为 $k+1$ 阶 Toeplitz 矩阵，其逆矩阵 $\boldsymbol{T}_{k+1}^{-1}=(v_{ij}^{(k+1)})$. 又设 $\boldsymbol{T}_{k+1}$ 的各阶顺序主子阵均非奇异. 将 $\boldsymbol{T}_{k+1}$ 与 $\boldsymbol{T}_{k+1}^{-1}$ 作下列分块

$$\boldsymbol{T}_{k+1}=\begin{bmatrix}\xi_0 & \boldsymbol{c}_k^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{r}_k & \boldsymbol{T}_k\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{T}_{k+1}^{-1}=\begin{bmatrix}v_{11}^{(k+1)} & \boldsymbol{v}_k^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{u}_k & \boldsymbol{V}_{22}\end{bmatrix}\qquad(2.4.15)$$

其中 $\boldsymbol{c}_k=(\xi_1,\cdots,\xi_k)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{r}_k=(\xi_{-1},\cdots,\xi_{-k})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{u}_k=(v_{21}^{(k+1)},\cdots,v_{k+1,1}^{(k+1)})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{v}_k=(v_{12}^{(k+1)},\cdots,v_{1,k+1}^{(k+1)})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{V}_{22}$ 是 k 阶方阵，则 $\boldsymbol{T}_k^{-1}$ 的 i 行 j 列元素 $[\boldsymbol{T}_k^{-1}]_{ij}$ 为

$$[\boldsymbol{T}_k^{-1}]_{ij}=[\boldsymbol{T}_{k+1}^{-1}]_{ij}-\left(\frac{\boldsymbol{J}_k\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{u}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_k}{v_{11}^{(k+1)}}\right)_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots,k\qquad(2.4.16)$$

证明 由 $\boldsymbol{T}_{k+1}\boldsymbol{T}_{k+1}^{-1}=\boldsymbol{I}_{k+1}$ 得

$$\boldsymbol{r}_k v_{11}^{(k+1)}+\boldsymbol{T}_k\boldsymbol{u}_k=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{r}_k\boldsymbol{v}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{T}_k\boldsymbol{V}_{22}=\boldsymbol{I}_k$$

从而
$$\boldsymbol{T}_k^{-1}\boldsymbol{r}_k=-\frac{1}{v_{11}^{(k+1)}}\boldsymbol{u}_k,\quad \boldsymbol{V}_{22}=\boldsymbol{T}_k^{-1}-\boldsymbol{T}_k^{-1}\boldsymbol{r}_k\boldsymbol{v}_k^{\mathrm{T}}$$

即有

$$\boldsymbol{V}_{22}=\boldsymbol{T}_k^{-1}+\frac{1}{v_{11}^{(k+1)}}\boldsymbol{u}_k\boldsymbol{v}_k^{\mathrm{T}}\qquad(2.4.17)$$

代入式(2.4.15)，得

$$\boldsymbol{T}_{k+1}^{-1}=\begin{bmatrix} v_{11}^{(k+1)} & \boldsymbol{v}_k^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{u}_k & \boldsymbol{T}_k^{-1}+\dfrac{1}{v_{11}^{(k+1)}}\boldsymbol{u}_k\boldsymbol{v}_k^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

利用 $\boldsymbol{T}_{k+1}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{T}_k^{-1}$ 的次对称性，有

$$\boldsymbol{T}_{k+1}^{-1}=\boldsymbol{J}_{k+1}(\boldsymbol{T}_{k+1}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{k+1}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_k^{-1}+\dfrac{1}{v_{11}^{(k+1)}}\boldsymbol{J}_k\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{u}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_k & \boldsymbol{J}_k\boldsymbol{v}_k \\ \boldsymbol{u}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_k & v_{11}^{(k+1)} \end{bmatrix}$$

比较两边 i 行 j 列元素即得式(2.4.16). 证毕

由引理 2.4.1 知，$\boldsymbol{T}_k^{-1}=(v_{ij}^{(k)})$ 的首行首列元素可由 $\boldsymbol{T}_{k+1}^{-1}=(v_{ij}^{(k+1)})$ 的首行首列元素求得

$$\left.\begin{aligned} v_{i1}^{(k)} &= v_{i1}^{(k+1)}-\frac{v_{k+1,1}^{(k+1)}v_{1,k-i+2}^{(k+1)}}{v_{11}^{(k+1)}}, \quad i=1,2,\cdots,k \\ v_{1j}^{(k)} &= v_{1j}^{(k+1)}-\frac{v_{1,k+1}^{(k+1)}v_{k-j+2,1}^{(k+1)}}{v_{11}^{(k+1)}}, \quad j=1,2,\cdots,k \end{aligned}\right\} \tag{2.4.18}$$

第一步已求出 $2n-1$ 阶循环矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的逆矩阵，取

$$v_{i1}^{(2n-1)}=\eta_{2n-i}, \quad i=2,3,\cdots,2n-1$$
$$v_{1j}^{(2n-1)}=\eta_{j-1}, \quad j=1,2,\cdots,2n-1$$

对 $k=2n-2,2n-3,\cdots,n$ 利用式(2.4.18)计算，最终可得 n 阶 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 的首行首列元素. 这一过程运算量为 $O(n^2)$. 构造多项式

$$f_{k+1}(x)=v_{11}^{(k+1)}+v_{12}^{(k+1)}x+\cdots+v_{1,k+1}^{(k+1)}x^k$$
$$g_{k+1}(x)=v_{11}^{(k+1)}+v_{21}^{(k+1)}x+\cdots+v_{k+1,1}^{(k+1)}x^k$$
$$\hat{f}_{k+1}(x)=v_{11}^{(k+1)}x^k+v_{12}^{(k+1)}x^{k-1}+\cdots+v_{1,k+1}^{(k+1)}$$
$$\hat{g}_{k+1}(x)=v_{11}^{(k+1)}x^k+v_{21}^{(k+1)}x^{k-1}+\cdots+v_{k+1,1}^{(k+1)}$$

则由式(2.4.18)易知

$$\begin{cases} f_{k+1}(x) = \dfrac{v_{1,k+1}^{(k+1)}}{v_{11}^{(k+1)}}\hat{g}_{k+1}(x) + f_k(x) \\ g_{k+1}(x) = \dfrac{v_{k+1,1}^{(k+1)}}{v_{11}^{(k+1)}}\hat{f}_{k+1}(x) + g_k(x) \end{cases}$$

即由 T_{k+1}^{-1} 的首行(或首列)元素构成的多项式 $f_{k+1}(x)$(或 $g_{k+1}(x)$)除以由 T_{k+1}^{-1} 的首列(或首行)元素构成的多项式 $\hat{g}_{k+1}(x)$(或 $\hat{f}_{k+1}(x)$),其余式恰为由 T_k^{-1} 的首行(或首列)元素构成的多项式 $f_k(x)$ (或 $g_k(x)$).利用这一结果,可由 $f_{2n-1}(x)$, $g_{2n-1}(x)$ 和 $\hat{f}_{2n-1}(x)$, $\hat{g}_{2n-1}(x)$ 开始作多项式除法,即求

$$f_{2n-i}(x) \text{ 除以 } \hat{g}_{2n-i}(x) \text{ 之余式多项式 } f_{2n-i-1}(x)$$
$$g_{2n-i}(x) \text{ 除以 } \hat{f}_{2n-i}(x) \text{ 之余式多项式 } g_{2n-i-1}(x)$$
$$i = 1,2,\cdots,n-1$$

如果采用称之为半除算法的一种多项式快速算法进行上述运算,求多项式 $f_n(x)$ 和 $g_n(x)$,从而求得 T^{-1} 的首行首列元素,只需 $O(n\log_2^2 n)$ 次运算[76].

第三步(利用 T^{-1} 的首行首列元素求解线性方程组 $Tx = b$):

由式(2.4.15)知,$[V_{22}]_{ij} = [T_{k+1}^{-1}]_{i+1,j+1}$;而由式(2.4.17)有

$$[V_{22}]_{ij} = [T_k^{-1}]_{ij} + \left(\frac{1}{v_{11}^{(k+1)}}u_k v_k^{\mathrm{T}}\right)_{ij}$$

将式(2.4.16)代入上式并整理得

$$[T^{-1}]_{i+1,j+1} = [T^{-1}]_{ij} + \left(\frac{u_{n-1}v_{n-1}^{\mathrm{T}} - J_{n-1}v_{n-1}u_{n-1}^{\mathrm{T}}J_{n-1}}{v_{11}^{(n)}}\right)_{ij}$$
$$i,j = 1,2,\cdots,n-1 \qquad (2.4.19)$$

这样利用第二步求出的 T^{-1} 的首行首列元素,由式(2.4.19)即可得到它的全部元素.然而,下面将看到,只用 T^{-1} 的首行首列元素就可以直接求解 Toeplitz 方程组 $Tx = b$,其中 $b = (b_0,b_1,\cdots,b_{n-1})^{\mathrm{T}}$.

重新记 T^{-1} 的首行首列元素分别为

$$(s_0,s_1,\cdots,s_{n-1}),\quad (t_0,t_1,\cdots,t_{n-1})^{\mathrm{T}},\quad s_0=t_0$$

定义下列 $2n-1$ 维列向量

$$\boldsymbol{h}=(t_{n-1},\cdots,t_1,s_0,s_1,\cdots,s_{n-1})^{\mathrm{T}}$$

$$\tilde{\boldsymbol{b}}=(0,\cdots,0,b_0,b_1,\cdots,b_{n-1})^{\mathrm{T}}$$

$$\tilde{\boldsymbol{s}}=(0,\cdots,0,\tilde{s}_1,\cdots,\tilde{s}_{n-1})^{\mathrm{T}},\quad \tilde{s}_j=s_j/s_0,\quad j=1,2,\cdots,n-1$$

$$\tilde{\boldsymbol{t}}=(0,\cdots,0,\tilde{t}_{n-1},\cdots,\tilde{t}_1)^{\mathrm{T}},\quad \tilde{t}_j=t_j/t_0,\quad j=1,2,\cdots,n-1$$

根据式(2.4.19)可推知,矩阵 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 由 $n\times(2n-1)$ 矩阵

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\\(\boldsymbol{Zh})^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\\(\boldsymbol{Z}^2\boldsymbol{h})^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\(\boldsymbol{Z}^{n-1}\boldsymbol{h})^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{p}_{n-1}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{q}_{n-1}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

的最右边 n 列组成,其中 $\boldsymbol{Z}$ 是 $2n-1$ 阶移位矩阵,而

$$\boldsymbol{p}_k=\sum_{j=1}^{k}t_j\boldsymbol{Z}^{k-j}\tilde{\boldsymbol{s}},\quad \boldsymbol{q}_k=\sum_{j=1}^{k}s_{n-j}\boldsymbol{Z}^{k-j}\tilde{\boldsymbol{t}},\quad k=1,2,\cdots,n-1$$

于是,线性方程组 $\boldsymbol{Tx}=\boldsymbol{b}$ 的解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{V}\tilde{\boldsymbol{b}}=(u_0,u_1,\cdots,u_{n-1})^{\mathrm{T}}+(0,y_{n-2},\cdots,y_0)^{\mathrm{T}}-(0,z_{n-2},\cdots,z_0)^{\mathrm{T}}\tag{2.4.20}$$

式中

$$u_j=\tilde{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^j\boldsymbol{h},\quad j=0,1,\cdots,n-1\tag{2.4.21}$$

$$y_j=\tilde{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_{n-j-1},\quad z_j=\tilde{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_{n-j-1},\quad j=0,1,\cdots,n-2\tag{2.4.22}$$

令

$$v_j=\tilde{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^j\tilde{\boldsymbol{s}},\quad w_j=\tilde{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^j\tilde{\boldsymbol{t}},\quad j=0,1,\cdots,n-2\tag{2.4.23}$$

并定义 $2n-1$ 维列向量

$$\boldsymbol{v}=(0,\cdots,0,v_0,v_1,\cdots,v_{n-2})^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{w}=(0,\cdots,0,w_0,w_1,\cdots,w_{n-2})^{\mathrm{T}}$$

则式(2.4.22)的 y_j 和 z_j 可表为

$$y_j = \nu^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^j\tilde{\boldsymbol{t}}, \quad z_j = w^{\mathrm{T}}Z^j\tilde{s}, \quad j = 0,1,\cdots,n-2 \tag{2.4.24}$$

这一步若利用式(2.4.20),(2.4.21),(2.4.23)和(2.4.24)求线性方程组的解,计算量为 $O(n^2)$;但式(2.4.21),(2.4.23)和(2.4.24)可转化为循环卷积的计算,并可借助于离散富氏变换来实现,该步的计算量为 $O(n\log_2^2 n)$.

以上三步即为 Kumar 算法的计算步骤,其总运算量为 $O(n\log_2^2 n)$.

§2.5 Toeplitz 矩阵的三角分解

考虑分块 Toeplitz 矩阵(2.1.6),并设其所有分块顺序主子阵 $\boldsymbol{T}_k = (\Gamma_{j-i})_{i,j=1}^k$ 均非奇异.求矩阵 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{T}'$ 的如下三角分解

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}, \quad \widetilde{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{T}' = \widetilde{\boldsymbol{R}} \tag{2.5.1}$$

其中

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_p & & & \\ \boldsymbol{L}_{21} & \boldsymbol{I}_p & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \boldsymbol{L}_{n1} & \cdots & \boldsymbol{L}_{n,n-1} & \boldsymbol{I}_p \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{11} & \boldsymbol{R}_{12} & \cdots & \boldsymbol{R}_{1n} \\ & \boldsymbol{R}_{22} & \cdots & \boldsymbol{R}_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \boldsymbol{R}_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{L}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_p & & & \\ \widetilde{\boldsymbol{L}}_{21} & \boldsymbol{I}_p & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \widetilde{\boldsymbol{L}}_{n1} & \cdots & \widetilde{\boldsymbol{L}}_{n,n-1} & \boldsymbol{I}_p \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\boldsymbol{R}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{R}}_{11} & \widetilde{\boldsymbol{R}}_{12} & \cdots & \widetilde{\boldsymbol{R}}_{1n} \\ & \widetilde{\boldsymbol{R}}_{22} & \cdots & \widetilde{\boldsymbol{R}}_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \widetilde{\boldsymbol{R}}_{nn} \end{bmatrix}$$

由式(2.5.1)得一组等式

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{L}_{k+1,1}[\Gamma_1 \ \cdots \ \Gamma_{k-1}] + \boldsymbol{L}_{k+1,2}[\Gamma_0 \ \cdots \ \Gamma_{k-2}] + \cdots + \\ &\quad \boldsymbol{L}_{k+1,k}[\Gamma_{-k+2} \ \cdots \ \Gamma_0] + [\Gamma_{-k+1} \ \cdots \ \Gamma_{-1}] = [\boldsymbol{O} \ \cdots \ \boldsymbol{O}] \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

$$\boldsymbol{L}_{k,1}[\boldsymbol{\Gamma}_0 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Gamma}_{k-2}] + \boldsymbol{L}_{k,2}[\boldsymbol{\Gamma}_{-1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Gamma}_{k-3}] + \cdots + \boldsymbol{L}_{k,k-1}[\boldsymbol{\Gamma}_{-k+2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Gamma}_0] + [\boldsymbol{\Gamma}_{-k+1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Gamma}_{-1}] = [\boldsymbol{O} \quad \cdots \quad \boldsymbol{O}] \tag{2.5.3}$$

$$\boldsymbol{L}_{k+1,1}\boldsymbol{\Gamma}_0 + \boldsymbol{L}_{k+1,2}\boldsymbol{\Gamma}_{-1} + \cdots + \boldsymbol{L}_{k+1,k}\boldsymbol{\Gamma}_{-k+1} + \boldsymbol{\Gamma}_{-k} = \boldsymbol{O} \tag{2.5.4}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{L}}_{k,1}[\boldsymbol{\Gamma}_0 \quad \boldsymbol{\Gamma}_{-1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Gamma}_{-k+2}] + \widetilde{\boldsymbol{L}}_{k,2}[\boldsymbol{\Gamma}_1 \quad \boldsymbol{\Gamma}_0 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Gamma}_{-k+3}] + \cdots + \widetilde{\boldsymbol{L}}_{k,k-1}[\boldsymbol{\Gamma}_{k-2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Gamma}_0] + [\boldsymbol{\Gamma}_{k-1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Gamma}_1] = [\boldsymbol{O} \quad \cdots \quad \boldsymbol{O}] \tag{2.5.5}$$

令

$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{L}_{k+1,1}, \quad \boldsymbol{X}_j = \boldsymbol{L}_{k+1,j} - \boldsymbol{L}_{k,j-1}, \quad j = 2,3,\cdots,k \tag{2.5.6}$$

式(2.5.2)与式(2.5.3)相减，得

$$\boldsymbol{X}_1[\boldsymbol{\Gamma}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Gamma}_{k-1}] + \boldsymbol{X}_2[\boldsymbol{\Gamma}_0 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Gamma}_{k-2}] + \cdots + \boldsymbol{X}_k[\boldsymbol{\Gamma}_{-k+2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Gamma}_0] = [\boldsymbol{O} \quad \cdots \quad \boldsymbol{O}] \tag{2.5.7}$$

将式(2.5.5)分量倒序排列，并左乘 $\boldsymbol{X}_1$，然后与式(2.5.7)相减得

$$(\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1\widetilde{\boldsymbol{L}}_{k,k-1})[\boldsymbol{\Gamma}_0 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Gamma}_{k-2}] + \cdots + (\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{X}_1\widetilde{\boldsymbol{L}}_{k1})[\boldsymbol{\Gamma}_{-k+2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Gamma}_0] = [\boldsymbol{O} \quad \cdots \quad \boldsymbol{O}]$$

即

$$[\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1\widetilde{\boldsymbol{L}}_{k,k-1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{X}_1\widetilde{\boldsymbol{L}}_{k1}]\boldsymbol{T}_{k-1} = [\boldsymbol{O} \quad \cdots \quad \boldsymbol{O}]$$

由 $\boldsymbol{T}_{k-1}$ 非奇异得

$$\boldsymbol{X}_{i+1} - \boldsymbol{X}_1\widetilde{\boldsymbol{L}}_{k,k-i} = \boldsymbol{O}, \quad i = 1,2,\cdots,k-1 \tag{2.5.8}$$

又由式(2.5.4)和(2.5.6)得

$$\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{\Gamma}_0 + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{\Gamma}_{-1} + \cdots + \boldsymbol{X}_k\boldsymbol{\Gamma}_{-k+1} + \sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{L}_{kj}\boldsymbol{\Gamma}_{-j} = \boldsymbol{O}$$

将式(2.5.8)代入并整理得

$$\boldsymbol{X}_1\sum_{j=1}^{k}\widetilde{\boldsymbol{L}}_{kj}\boldsymbol{\Gamma}_{j-k} + \sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{L}_{kj}\boldsymbol{\Gamma}_{-j} = \boldsymbol{O}$$

于是

$$\boldsymbol{X}_1 \xlongequal{\text{def}} \boldsymbol{C}_k = -\boldsymbol{F}_k\widetilde{\boldsymbol{D}}_k^{-1} \tag{2.5.9}$$

其中

$$\boldsymbol{F}_k = \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{L}_{kj}\boldsymbol{\Gamma}_{-j}, \quad \widetilde{\boldsymbol{D}}_k = \sum_{j=1}^{k} \widetilde{\boldsymbol{L}}_{kj}\boldsymbol{\Gamma}_{j-k} \tag{2.5.10}$$

从而由式(2.5.6),(2.5.8)和(2.5.9)得

$$\boldsymbol{L}_{k+1,j} = \boldsymbol{L}_{k,j-1} + \boldsymbol{C}_k\widetilde{\boldsymbol{L}}_{k,k-j+1}, \quad j = 1,2,\cdots,k \tag{2.5.11}$$

这里规定 $\boldsymbol{L}_{k,0} = \boldsymbol{O}$ ，$\boldsymbol{L}_{k,k} = \widetilde{\boldsymbol{L}}_{k,k} = \boldsymbol{I}$.

同上面推导类似,可得

$$\widetilde{\boldsymbol{L}}_{k+1,j} = \widetilde{\boldsymbol{L}}_{k,j-1} + \widetilde{\boldsymbol{C}}_k\boldsymbol{L}_{k,k-j+1}, \quad j = 1,2,\cdots,k \tag{2.5.12}$$

其中

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}_k = -\widetilde{\boldsymbol{F}}_k\boldsymbol{D}_k^{-1}, \quad \widetilde{\boldsymbol{F}}_k = \sum_{j=1}^{k} \widetilde{\boldsymbol{L}}_{kj}\boldsymbol{\Gamma}_j, \quad \boldsymbol{D}_k = \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{L}_{kj}\boldsymbol{\Gamma}_{k-j} \tag{2.5.13}$$

利用式(2.5.10)和(2.5.12),有

$$\left.\begin{aligned} &\widetilde{\boldsymbol{D}}_1 = \boldsymbol{\Gamma}_0 \\ &\widetilde{\boldsymbol{D}}_{k+1} = \sum_{j=1}^{k+1} \widetilde{\boldsymbol{L}}_{k+1,j}\boldsymbol{\Gamma}_{j-k-1} = \sum_{j=2}^{k+1} \widetilde{\boldsymbol{L}}_{k,j-1}\boldsymbol{\Gamma}_{j-k-1} + \\ &\qquad \widetilde{\boldsymbol{C}}_k \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{L}_{k,k-j+1}\boldsymbol{\Gamma}_{j-k-1} = \widetilde{\boldsymbol{D}}_k + \widetilde{\boldsymbol{C}}_k\boldsymbol{F}_k \\ &\qquad\qquad j = 1,2,\cdots,n-1 \end{aligned}\right\} \tag{2.5.14}$$

同理,利用式(2.5.11)和(2.5.13),有

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{\Gamma}_0 \\ &\boldsymbol{D}_{k+1} = \boldsymbol{D}_k + \boldsymbol{C}_k\widetilde{\boldsymbol{F}}_k \quad , \quad j = 1,2,\cdots,n-1 \end{aligned}\right\} \tag{2.5.15}$$

最后求 $\boldsymbol{R}_{ij}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ij}$. 由式(2.5.1)得

$$\boldsymbol{R}_{ik} = \sum_{j=1}^{i} \boldsymbol{L}_{ij}\boldsymbol{\Gamma}_{k-j}, \quad i = 1,2,\cdots,k \tag{2.5.16}$$

利用式(2.5.11)和(2.5.16),有

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{R}_{1,k+1}=\boldsymbol{\Gamma}_k\\&\boldsymbol{R}_{i+1,k+1}=\sum_{j=1}^{i+1}\boldsymbol{L}_{i+1,j}\boldsymbol{\Gamma}_{k+1-j}=\sum_{j=2}^{i+1}\boldsymbol{L}_{i,j-1}\boldsymbol{\Gamma}_{k+1-j}+\\&\qquad\boldsymbol{C}_i\sum_{j=1}^{i}\widetilde{\boldsymbol{L}}_{i,i-j+1}\boldsymbol{\Gamma}_{k+1-j}=\boldsymbol{R}_{ik}+\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{Q}_{ik}\\&\qquad i=1,2,\cdots,k\end{aligned}\right\}\tag{2.5.17}$$

其中

$$\boldsymbol{Q}_{ik}=\sum_{j=1}^{i}\widetilde{\boldsymbol{L}}_{ij}\boldsymbol{\Gamma}_{k-i+j}\tag{2.5.18}$$

又由式(2.5.12),(2.5.18)和(2.5.16)得

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{Q}_{1k}=\boldsymbol{\Gamma}_k\\&\boldsymbol{Q}_{i+1,k}=\sum_{j=1}^{i+1}\widetilde{\boldsymbol{L}}_{i+1,j}\boldsymbol{\Gamma}_{k-i+j-1}=\sum_{j=2}^{i+1}\widetilde{\boldsymbol{L}}_{i,j-1}\boldsymbol{\Gamma}_{k-i+j-1}+\\&\qquad\widetilde{\boldsymbol{C}}_i\sum_{j=1}^{i}\boldsymbol{L}_{i,i-j+1}\boldsymbol{\Gamma}_{k-i+j-1}=\boldsymbol{Q}_{ik}+\widetilde{\boldsymbol{C}}_i\boldsymbol{R}_{ik}\\&\qquad i=1,2,\cdots,k-1\end{aligned}\right\}\tag{2.5.19}$$

比较式(2.5.18)与(2.5.13),以及式(2.5.16)与(2.5.13),得

$$\boldsymbol{Q}_{kk}=\widetilde{\boldsymbol{F}}_k,\quad \boldsymbol{R}_{kk}=\boldsymbol{D}_k\tag{2.5.20}$$

完全类似地可以得到

$$\left.\begin{aligned}&\widetilde{\boldsymbol{R}}_{1,k+1}=\boldsymbol{\Gamma}_{-k},\quad \widetilde{\boldsymbol{R}}_{i+1,k+1}=\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ik}+\widetilde{\boldsymbol{C}}_i\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{ik},\quad i=1,2,\cdots,k\\&\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{1k}=\boldsymbol{\Gamma}_{-k},\quad \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{i+1,k}=\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{ik}+\boldsymbol{C}_i\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ik},\quad i=1,2,\cdots,k-1\\&\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{kk}=\boldsymbol{F}_k,\quad \widetilde{\boldsymbol{R}}_{kk}=\widetilde{\boldsymbol{D}}_k\end{aligned}\right\}\tag{2.5.21}$$

结合式(2.5.11)~(2.5.13),(2.5.17),(2.5.19)~(2.5.21),得 **Rissanen 算法**[25](求 $\boldsymbol{T}$ 及 $\boldsymbol{T}'$ 的三角分解):

$$\boldsymbol{Q}_{1j}=\boldsymbol{\Gamma}_j,\quad \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{1j}=\boldsymbol{\Gamma}_{-j},\quad j=1,2,\cdots,n$$
$$\boldsymbol{L}_{jj}=\widetilde{\boldsymbol{L}}_{jj}=\boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{R}_{1j}=\boldsymbol{\Gamma}_{j-1},\quad \widetilde{\boldsymbol{R}}_{1j}=\boldsymbol{\Gamma}_{-j+1}$$

$$j = 1,2,\cdots,n$$

对 $k = 1,2,\cdots,n-1$

$$\boldsymbol{C}_k = -\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{kk}\widetilde{\boldsymbol{R}}_{kk}^{-1},\quad \widetilde{\boldsymbol{C}}_k = -\boldsymbol{Q}_{kk}\boldsymbol{R}_{kk}^{-1}$$

$$\boldsymbol{L}_{k+1,j+1} = \boldsymbol{L}_{kj} + \boldsymbol{C}_k\widetilde{\boldsymbol{L}}_{k,k-j},\quad j = 1,\cdots,k$$

$$\widetilde{\boldsymbol{L}}_{k+1,j+1} = \widetilde{\boldsymbol{L}}_{kj} + \widetilde{\boldsymbol{C}}_k\boldsymbol{L}_{k,k-j},\quad j = 1,\cdots,k$$

$$\boldsymbol{R}_{k+1,j+1} = \boldsymbol{R}_{kj} + \boldsymbol{C}_k\boldsymbol{Q}_{kj},\quad j = k+1,\cdots,n$$

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}_{k+1,j+1} = \widetilde{\boldsymbol{R}}_{kj} + \widetilde{\boldsymbol{C}}_k\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{kj},\quad j = k+1,\cdots,n$$

$$\boldsymbol{Q}_{k+1,j} = \boldsymbol{Q}_{kj} + \widetilde{\boldsymbol{C}}_k\boldsymbol{R}_{kj},\quad j = 1,\cdots,k$$

$$\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{k+1,j} = \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{kj} + \boldsymbol{C}_k\widetilde{\boldsymbol{R}}_{kj},\quad j = 1,\cdots,k$$

该算法需 $3n^2+O(n)$ 次 p 阶方阵乘法运算，$3n^2+O(n)$ 次 p 阶方阵加减运算，$2n-2$ 次 p 阶方阵求逆运算.

§2.6　Toeplitz 矩阵的 QR 分解

矩阵的 QR 分解在解决最小二乘问题、特征值计算、广义逆矩阵的计算等方面，都是十分重要的. 1984年，Sweet[71]提出求 n 阶 Toeplitz 矩阵 QR 分解的快速算法. 该方法计算 $\boldsymbol{R}$ 需 $10n^2+O(n)$ 次乘除运算，若同时计算 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 则需 $25n^2+O(n)$ 次乘除运算. Bojanczyk-Brent-de Hoog 等人将 Sweet 方法作了改进，改进后的方法不但减少了运算次数，而且可用于 $m\times n$ 的 Toeplitz 矩阵情形，算出 $\boldsymbol{R}$ 仅需 $mn+6n^2+O(n)$ 次乘除运算，若同时求出 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 则需 $13mn+6n^2+O(n)$ 次乘除运算. 该算法进行 QR 分解时要用到秩-1修正矩阵的 Cholesky 分解方法.

一、　秩-1 修正算法

设 $\boldsymbol{R}$ 是具有正对角元的 n 阶上三角矩阵，$\boldsymbol{x}$ 是给定的 n 维列向量，则秩 -1 修正矩阵

$$X = R^{\mathrm{T}}R + xx^{\mathrm{T}}$$

是正定的，且有惟一的 Cholesky 分解

$$X = \widetilde{R}^{\mathrm{T}}\widetilde{R}$$

其中 $\widetilde{R}$ 是具有正对角元的 n 阶上三角矩阵．利用 R 和 x 经过较少的计算可得出 $\widetilde{R}$．考虑扩张的 $(n+1)\times n$ 矩阵

$$Y = \begin{bmatrix} x^{\mathrm{T}} \\ R \end{bmatrix}$$

若有 $n+1$ 阶正交矩阵 U 使 Y 三角化，即 $UY = \begin{bmatrix} \Delta \\ 0^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$，其中 Δ 表示具有正对角元的上三角矩阵．则 $\Delta = \widetilde{R}$，这是因为

$$Y^{\mathrm{T}}Y = (UY)^{\mathrm{T}}(UY) = [\Delta^{\mathrm{T}} \quad 0]\begin{bmatrix} \Delta \\ 0^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \Delta^{\mathrm{T}}\Delta$$

又
$$Y^{\mathrm{T}}Y = [x \quad R^{\mathrm{T}}]\begin{bmatrix} x^{\mathrm{T}} \\ R \end{bmatrix} = R^{\mathrm{T}}R + xx^{\mathrm{T}} = X = \widetilde{R}^{\mathrm{T}}\widetilde{R}$$

由 Cholesky 分解的惟一性知，$\Delta = \widetilde{R}$．

为使 Y 三角化，只须将 R 的对角元化为零即可．因此，正交矩阵 U 可通过 n 次 Givens 变换 $U_{k,k+1}$ $(k = 1,2,\cdots,n)$ 得到，即

$$U_{n,n+1}U_{n-1,n}\cdots U_{12}Y = \begin{bmatrix} \widetilde{R} \\ 0^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

其中 $U_{k,k+1}$ 具有形式

$$U_{k,k+1} = \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & c_k & s_k & & & \\ & & & -s_k & c_k & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ k\ \text{行} \\ k+1\ \text{行} \\ \\ \\ \\ \end{array} \tag{2.6.1}$$

而数 c_k 和 s_k 满足 $c_k^2+s_k^2=1$，且使得 $\boldsymbol{U}_{k-1,k}\cdots\boldsymbol{U}_{12}\boldsymbol{Y}$ 的第 $k+1$ 行 k 列元素为零. 注意到 $\boldsymbol{U}_{k,k+1}$ 仅改变 $\boldsymbol{U}_{k-1,k}\cdots\boldsymbol{U}_{12}\boldsymbol{Y}$ 的第 $k,k+1$ 行元素，记 $\boldsymbol{U}_{k-1,k}\cdots\boldsymbol{U}_{12}\boldsymbol{Y}$ 的第 k 行元素为 $(0,\cdots,0,\tilde{a}_{kk},\cdots,\tilde{a}_{kn})$，而它的第 $k+1$ 行元素就是 $\boldsymbol{R}$ 的第 k 行元素，即 $(0,\cdots,0,r_{kk},\cdots,r_{kn})$；又记 $\widetilde{\boldsymbol{R}}$ 的第 k 行元素为 $(0,\cdots,0,\tilde{r}_{kk},\cdots,\tilde{r}_{kn})$. 则由 $\boldsymbol{U}_{k,k+1}\cdots\boldsymbol{U}_{12}\boldsymbol{Y}$ 的第 $k,k+1$ 行元素得

$$\begin{bmatrix} c_k & s_k \\ -s_k & c_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{kk} & \cdots & \tilde{a}_{kn} \\ 0 & \cdots & 0 & r_{kk} & \cdots & r_{kn} \end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \tilde{r}_{kk} & \tilde{r}_{k,k+1} & \cdots & \tilde{r}_{kn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \tilde{a}_{k+1,k+1} & \cdots & \tilde{a}_{k+1,n} \end{bmatrix}$$

于是有

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{r}_{kk}=\sqrt{\tilde{a}_{kk}^2+r_{kk}^2},\quad c_k=\frac{\tilde{a}_{kk}}{\tilde{r}_{kk}},\quad s_k=\frac{r_{kk}}{\tilde{r}_{kk}} \\ &\tilde{r}_{kj}=c_k\tilde{a}_{kj}+s_kr_{kj},\quad \tilde{a}_{k+1,j}=-s_k\tilde{a}_{kj}+c_kr_{kj} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad j=k+1,\cdots,n \end{aligned}\right\}\tag{2.6.2}$$

对 $k=1,2,\cdots,n$ 重复上述步骤即得 $\widetilde{\boldsymbol{R}}$. 这一过程需 $2n^2+2n$ 次乘除运算，n 次开方运算，n^2 次加减运算.

设 $\boldsymbol{R}$ 是具有正对角元的 n 阶上三角矩阵，$\boldsymbol{x}$ 是给定的 n 维列向量，考虑秩 -1 修正矩阵

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$$

又设所取的向量 $\boldsymbol{x}$ 使得 $\boldsymbol{P}$ 是正定矩阵，则 $\boldsymbol{P}$ 可进行 Cholesky 分解

$$\boldsymbol{P}=\hat{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{R}}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 是具有正对角元的 n 阶上三角矩阵. 同样，利用 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 可经较少的计算求出 $\hat{\boldsymbol{R}}$. 假设 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 已知，需求解的是 $\boldsymbol{R}$，即

$$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}=\hat{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{R}}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

问题转化为前面讨论过的情形，即可通过 n 次 Givens 变换 $\boldsymbol{V}_{k,k+1}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 将 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\\ \hat{\boldsymbol{R}}\end{bmatrix}$ 化为 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$. 记 $(0,\cdots,0,\hat{a}_{kk},\cdots,$

$\hat{a}_{kn}$) 为 $V_{k-1,k}\cdots V_{12}\begin{bmatrix}x^T\\ \hat{R}\end{bmatrix}$ 的第 k 行元素，又记 $(0,\cdots,0,\hat{r}_{kk},\cdots,\hat{r}_{kn})$ 和 $(0,\cdots,0,r_{kk},\cdots,r_{kn})$ 分别是 $\hat{R}$ 和 R 的第 k 行元素. 则有

$$\begin{bmatrix} c_k & s_k \\ -s_k & c_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \hat{a}_{kk} & \cdots & \hat{a}_{kn} \\ 0 & \cdots & 0 & \hat{r}_{kk} & \cdots & \hat{r}_{kn} \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & r_{kk} & r_{k,k+1} & \cdots & r_{kn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \hat{a}_{k+1,k+1} & \cdots & \hat{a}_{k+1,n} \end{bmatrix}$$

于是
$$\begin{cases} r_{kk} = \sqrt{\hat{a}_{kk}^2 + \hat{r}_{kk}^2}, \quad c_k = \dfrac{\hat{a}_{kk}}{r_{kk}}, \quad s_k = \dfrac{\hat{r}_{kk}}{r_{kk}} \\ r_{kj} = c_k\hat{a}_{kj} + s_k\hat{r}_{kj}, \quad \hat{a}_{k-1,j} = -s_k\hat{a}_{kj} + c_k\hat{r}_{kj} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad j = k+1,\cdots,n \end{cases}$$

故有

$$\left.\begin{aligned} &\hat{r}_{kk} = \sqrt{r_{kk}^2 - \hat{a}_{kk}^2}, \quad c_k = \frac{\hat{a}_{kk}}{r_{kk}}, \quad s_k = \frac{\hat{r}_{kk}}{r_{kk}} \\ &\hat{r}_{kj} = \frac{r_{kj} - c_k\hat{a}_{kj}}{s_k}, \quad \hat{a}_{k+1,j} = -s_k\hat{a}_{kj} + c_k\hat{r}_{kj} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad j = k+1,\cdots,n \end{aligned}\right\} \tag{2.6.3}$$

求出 $\hat{R}$ 仍需 $2n^2+2n$ 次乘除运算，n 次开方运算和 n^2 次加减运算.

二、 三角因子 R 的计算

设 T 是 $m\times n$ 列满秩 Toeplitz 矩阵 $(m\geqslant n)$

$$T = \begin{bmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_{n-1} \\ \xi_{-1} & \xi_0 & \cdots & \xi_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \xi_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{-m+1} & \xi_{-m+2} & \cdots & \xi_{-m+n} \end{bmatrix} \tag{2.6.4}$$

将 $\boldsymbol{T}$ 按两种方式分块，即

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\xi_0 & \boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{T}_{-1}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_{-1} & \boldsymbol{y}_2\\ \boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}} & \xi_{m+n}\end{bmatrix}\tag{2.6.5}$$

其中 $\boldsymbol{T}_{-1}$ 是 $\boldsymbol{T}$ 的 $(m-1)\times(n-1)$ 阶主子阵，而

$$\boldsymbol{x}_1=(\xi_{-1},\xi_{-2},\cdots,\xi_{-m+1})^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{x}_2=(\xi_{-m+1},\xi_{-m+2},\cdots,\xi_{-m+n-1})^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{y}_1=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1})^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{y}_2=(\xi_{n-1},\xi_{n-2},\cdots,\xi_{-m+n+1})^{\mathrm{T}}$$

设 $\boldsymbol{T}$ 的 QR 分解为

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 是 $m\times n$ 按列正交矩阵，$\boldsymbol{R}$ 是具有正对角元的 n 阶上三角矩阵．将 $\boldsymbol{R}$ 按两种方式分块，即

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}r_{11} & \boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R}_b\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_t & \boldsymbol{r}_2\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & r_{nn}\end{bmatrix}\tag{2.6.6}$$

其中 $\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}=(r_{12},\cdots,r_{1n})$ ，$\boldsymbol{r}_2=(r_{1n},\cdots,r_{n-1,n})^{\mathrm{T}}$ ，$\boldsymbol{R}_b$ 与 $\boldsymbol{R}_t$ 是 $n-1$ 阶上三角矩阵．将式(2.6.5)和式(2.6.6)代入 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}$ ，得

$$\begin{bmatrix}r_{11}^2 & r_{11}\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}\\ r_{11}\boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{R}_b^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_b+\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi_0^2+\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1 & \xi_0\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{-1}\\ \xi_0\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{T}_{-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{T}_{-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{-1}\end{bmatrix}$$

和

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_t & \boldsymbol{R}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_2\\ \boldsymbol{r}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_t & \boldsymbol{r}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_2+r_{nn}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_{-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{-1}+\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{T}_{-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2+\xi_{-m+n}\boldsymbol{x}_2\\ \boldsymbol{y}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{-1}+\xi_{-m+n}\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{y}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2+\xi_{-m+n}^2\end{bmatrix}$$

比较对应的元素，有

$$\boldsymbol{R}_b^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_b+\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{T}_{-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{-1}\quad ,\ \boldsymbol{R}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_t=\boldsymbol{T}_{-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{-1}+\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_2^{T}$$
$$r_{11}^2=\xi_0^2+\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1\quad ,\ r_{11}\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}=\xi_0\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{-1}$$

从而

$$\boldsymbol{R}_b^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_b=\boldsymbol{R}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_t+\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}\tag{2.6.7}$$

$$r_{11}=\sqrt{\xi_0^2+\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1},\quad \boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}=\frac{\xi_0\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{-1}}{r_{11}}\tag{2.6.8}$$

将式(2.6.7)写成三个依序排列的秩 -1 修正矩阵

$$\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{R}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_t + \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{R}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{R}_b^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_b = \boldsymbol{R}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}$$

于是,由秩 -1 修正算法知,可找到 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{U}$,$\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{W}$,使得

$$\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{R}_t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_1\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} \tag{2.6.9}$$

$$\boldsymbol{V}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{R}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_1\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} \tag{2.6.10}$$

$$\boldsymbol{W}\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{R}_b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_2\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} \tag{2.6.11}$$

其中 $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_{n-1,n}\cdots\boldsymbol{U}_{12}$,$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_{n-1,n}\cdots\boldsymbol{V}_{12}$,$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}_{n-1,n}\cdots\boldsymbol{W}_{12}$,而 $\boldsymbol{U}_{k,k+1}$,$\boldsymbol{V}_{k,k+1}$ 和 $\boldsymbol{W}_{k,k+1}$ 均是形如式(2.6.1)的 n 阶 Givens 变换矩阵.

因 $\boldsymbol{y}_1$ 已知,由式(2.6.8)求出 r_{11} 和 $\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}} = (r_{12},\cdots,r_{1n})$,于是 $\boldsymbol{R}_t$ 的第 1 行已知(见式(2.6.6)),从而 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{R}_t\end{bmatrix}$ 的前两行已知;用 $\boldsymbol{U}_{12}$ 左乘之并由式(2.6.9)可确定出 $\boldsymbol{R}_1$ 的第 1 行;而用 $\boldsymbol{V}_{12}$ 左乘 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{R}_2\end{bmatrix}$ 并由式(2.6.10)可确定出 $\boldsymbol{R}_2$ 的第 1 行;再用 $\boldsymbol{W}_{12}$ 左乘 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{R}_b\end{bmatrix}$ 并由式(2.6.11)可确定出 $\boldsymbol{R}_b$ 的第 1 行. 根据式(2.6.6),$\boldsymbol{R}_t$ 的第 2 行可由 $\boldsymbol{R}_b$ 的第 1 行得到,又可重复上述过程求出 $\boldsymbol{R}_1$,$\boldsymbol{R}_2$ 和 $\boldsymbol{R}_b$ 的第 2 行,这样又得到 $\boldsymbol{R}_t$ 的第 3 行……

求矩阵 $\boldsymbol{R}$ 诸行的第 k 步描述如下:

记 $\boldsymbol{U}_{k-1,k}\cdots\boldsymbol{U}_{12}\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{R}_t\end{bmatrix}$ 的第 k,$k+1$ 行分别为

$$(0,\cdots,0,\tilde{r}_{kk},\cdots,\tilde{r}_{k,n-1}),\quad (0,\cdots,0,r_{kk},\cdots,r_{k,n-1})$$

矩阵 $V_{k-1,k}\cdots V_{12}\begin{bmatrix}x_2^{\mathrm T}\\ R_2\end{bmatrix}$ 的第 $k,k+1$ 行分别为

$$(0,\cdots,0,\tilde a_{kk},\cdots,\tilde a_{k,n-1}),\quad (0,\cdots,0,\hat r_{kk},\cdots,\hat r_{k,n-1})$$

矩阵 $W_{k-1,k}\cdots W_{12}\begin{bmatrix}r_1^{\mathrm T}\\ R_b\end{bmatrix}$ 的第 $k,k+1$ 行分别为

$$(0,\cdots,0,\hat a_{kk},\cdots,\hat a_{k,n-1}),\quad (0,\cdots,0,r_{k+1,k+1},\cdots,r_{k+1,n})$$

递推计算的第 k 步是分别用 $U_{k,k+1},V_{k,k+1}$ 和 $W_{k,k+1}$ 左乘上述三个矩阵，写出其第 $k,k+1$ 行分别为

$$\begin{bmatrix}c_k & s_k\\ -s_k & c_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & \tilde r_{kk} & \cdots & \tilde r_{k,n-1}\\ 0 & \cdots & 0 & r_{kk} & \cdots & r_{k,n-1}\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{k,n-1}\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \tilde r_{k+1,k+1} & \cdots & \tilde r_{k+1,n-1}\end{bmatrix}\quad(2.6.12)$$

$$\begin{bmatrix}\alpha_k & \beta_k\\ -\beta_k & \alpha_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & \tilde a_{kk} & \cdots & \tilde a_{k,n-1}\\ 0 & \cdots & 0 & \hat r_{kk} & \cdots & \hat r_{k,n-1}\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{k,n-1}\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \tilde a_{k+1,k+1} & \cdots & \tilde a_{k+1,n-1}\end{bmatrix}\quad(2.6.13)$$

$$\begin{bmatrix}\gamma_k & \delta_k\\ -\delta_k & \gamma_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & \hat a_{kk} & \cdots & \hat a_{k,n-1}\\ 0 & \cdots & 0 & r_{k+1,k+1} & \cdots & r_{k+1,n}\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & \hat r_{kk} & \hat r_{k,k+1} & \cdots & \hat r_{k,n-1}\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \hat a_{k+1,k+1} & \cdots & \hat a_{k+1,n-1}\end{bmatrix}\quad(2.6.14)$$

结合式(2.6.8)，(2.6.3)和(2.6.12)～(2.6.14)得 **Bojanczyk-Brent-de Hoog 算法**(求三角因子 R)[84]：

$$\tilde r_{1j}=\xi_j,\quad \tilde a_{1j}=\xi_{-m+j},\quad j=1,2,\cdots,n-1$$

$$r_{11}=\sqrt{\xi_0^2+\sum_{i=1}^{m-1}\xi_{-i}^2}$$

$$r_{1,j+1}=\frac{1}{r_{11}}(\xi_0\xi_{-j}+\sum_{i=1}^{m-1}\xi_{-i}\xi_{j-i}),\quad \hat a_{1j}=r_{1,j+1}$$
$$j=1,2,\cdots,n-1$$

对 $k=1,2,\cdots,n-1$

$$a_{kk}=\sqrt{\tilde{r}_{kk}^2+r_{kk}^2},\quad c_k=\frac{\tilde{r}_{kk}}{a_{kk}},\quad s_k=\frac{r_{kk}}{a_{kk}}$$

$$a_{kj}=c_k\tilde{r}_{kj}+s_kr_{kj},\quad \tilde{r}_{k+1,j}=-s_k\tilde{r}_{kj}+c_kr_{kj}$$

$$j=k+1,\cdots,n-1$$

$$\hat{r}_{kk}=\sqrt{a_{kk}^2-\tilde{a}_{kk}^2},\quad \alpha_k=\frac{\tilde{a}_{kk}}{a_{kk}},\quad \beta_k=\frac{\hat{r}_{kk}}{a_{kk}}$$

$$\hat{r}_{kj}=\frac{a_{kj}-\alpha_k\tilde{a}_{kj}}{\beta_k},\quad \tilde{a}_{k+1,j}=-\beta_k\tilde{a}_{kj}+\alpha_k\hat{r}_{kj}$$

$$j=k+1,\cdots,n$$

$$r_{k+1,k+1}=\sqrt{\hat{r}_{kk}^2-\hat{a}_{kk}^2},\quad \gamma_k=\frac{\hat{a}_{kk}}{\hat{r}_{kk}},\quad \delta_k=\frac{r_{k+1,k+1}}{\hat{r}_{kk}}$$

$$r_{k+1,j+1}=\frac{\hat{r}_{kj}-\gamma_k\hat{a}_{kj}}{\delta_k},\quad \hat{a}_{k+1,j}=-\delta_k\hat{a}_{kj}+\gamma_kr_{k+1,j+1}$$

$$j=k+1,\cdots,n-1$$

求出三角因子 $\boldsymbol{R}$ 需 $mn+6n^2+O(n)$ 次乘除运算，$mn+3n^2+O(n)$ 次加减运算和 $3n-2$ 次开方运算.

仅求出三角因子 $\boldsymbol{R}$ 即可求解线性方程组 $\boldsymbol{Tx}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{T}$ 是 $m\times n$ 的 Toeplitz 矩阵(2.6.4). 对 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$ 利用 Bojanczyk-Brent-de Hoog 算法得 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{QR}$，于是线性方程组转化为 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，故

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{QR}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{R}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$

三、 正交因子 Q 的计算

在求出三角因子 $\boldsymbol{R}$（同时也求得了正交矩阵 $\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{W}$）后，可以进一步求得正交因子 $\boldsymbol{Q}$. 将 Toeplitz 矩阵(2.6.4)分块为

$$\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{C}\quad \boldsymbol{t}_n]=[\boldsymbol{t}_1\quad \boldsymbol{D}]$$

其中 $\boldsymbol{t}_1$ 和 $\boldsymbol{t}_n$ 分别是矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的第 1 列和第 n 列，而由(2.6.5)知

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_{-1}\\ \boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{T}_{-1}\end{bmatrix}$$

又因　$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{C}\quad \boldsymbol{t}_n]=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{t}_1\quad \boldsymbol{D}]=\boldsymbol{R}$$

结合式(2.6.6)得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_t\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{R}_b\end{bmatrix}\tag{2.6.15}$$

令

$$\boldsymbol{Q}_d^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{W}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\tag{2.6.16}$$

由式(2.6.11)得

$$\boldsymbol{Q}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}=\boldsymbol{W}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}=\boldsymbol{W}\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{R}_b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_2\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\tag{2.6.17}$$

构造 $(m+1)\times(n-1)$ 矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{T}_{-1}\\ \boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{C}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\tag{2.6.18}$$

又令 $(n+1)\times(m+1)$ 行正交矩阵

$$\hat{\boldsymbol{Q}}=\begin{bmatrix}1&\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},\quad \tilde{\boldsymbol{Q}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}&1\\ \boldsymbol{Q}_d^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

及 $n+1$ 阶正交矩阵

$$\hat{\boldsymbol{U}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}&1\end{bmatrix},\quad \tilde{\boldsymbol{V}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{V}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}&1\end{bmatrix}$$

利用式(2.6.9),(2.6.10),(2.6.15),(2.6.17)和(2.6.18)得

$$\hat{\boldsymbol{U}}\hat{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{U}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{R}_t\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_1\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},\quad \tilde{\boldsymbol{V}}\tilde{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{B}=\tilde{\boldsymbol{V}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{R}_2\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_1\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

为使上式成立,可要求 $\hat{\boldsymbol{U}}\hat{\boldsymbol{Q}}$ 与 $\tilde{\boldsymbol{V}}\tilde{\boldsymbol{Q}}$ 的前 $n-1$ 行相等,即

$$[\boldsymbol{I}_{n-1}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{0}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=[\boldsymbol{I}_{n-1}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{0}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{V}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}&1\\ \boldsymbol{Q}_d^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}\tag{2.6.19}$$

式(2.6.16)及式(2.6.19)为求解列正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的基本公式.

考虑计算列正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的第 k 步，此时 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$ 的前 k 行及 $\boldsymbol{Q}_d^{\mathrm{T}}$ 的前 $k-1$ 行已确定，要利用式(2.6.19)及 $\boldsymbol{U}_{k,k+1}$，$\boldsymbol{V}_{k,k+1}$ 确定 $\boldsymbol{Q}_d^{\mathrm{T}}$ 的第 k 行及中间结果，再由式(2.6.16)及 $\boldsymbol{W}_{k,k+1}$ 确定 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$ 的第 $k+1$ 行. 记 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$ 的第 k 行为 $(q_{k1},\cdots,q_{km})$，又记 $\boldsymbol{Q}_d^{\mathrm{T}}$ 的第 k 行为 $(\tilde{q}_{k1},\cdots,\tilde{q}_{km})$. 可知

$$(q_{11},\cdots,q_{1m})=\frac{\boldsymbol{t}_1^{\mathrm{T}}}{r_{11}} \tag{2.6.20}$$

记矩阵 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_{k-1,k}\cdots\boldsymbol{U}_{12} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$ 的第 $k,k+1$ 行为 $\begin{bmatrix}\hat{b}_{k1} & \hat{b}_{k2} & \cdots & \hat{b}_{k,m+1}\\ 0 & q_{k1} & \cdots & q_{km}\end{bmatrix}$，而记矩阵 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{V}_{k-1,k}\cdots\boldsymbol{V}_{12} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1\\ \boldsymbol{Q}_d^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$ 的第 $k,k+1$ 行为 $\begin{bmatrix}\tilde{b}_{k1} & \cdots & \tilde{b}_{km} & \tilde{b}_{k,m+1}\\ \tilde{q}_{k1} & \cdots & \tilde{q}_{km} & 0\end{bmatrix}$，又记矩阵 $\boldsymbol{W}_{k-1,k}\cdots\boldsymbol{W}_{12}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$ 的第 $k,k+1$ 行为 $\begin{bmatrix}p_{k1} & \cdots & p_{km}\\ q_{k+1,1} & \cdots & q_{k+1,m}\end{bmatrix}$，则

$$\begin{aligned}(\hat{b}_{11},\hat{b}_{12},\cdots,\hat{b}_{1,m+1})&=(1,0,\cdots,0)\\ (\tilde{b}_{11},\cdots,\tilde{b}_{1m},\tilde{b}_{1,m+1})&=(0,\cdots,0,1)\end{aligned} \tag{2.6.21}$$

由式(2.6.19)得

$$\begin{bmatrix}c_k & s_k\\ -s_k & c_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{b}_{k1} & \hat{b}_{k2} & \cdots & \hat{b}_{k,m+1}\\ 0 & q_{k1} & \cdots & q_{km}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_k & \beta_k\\ -\beta_k & \alpha_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{b}_{k1} & \cdots & \tilde{b}_{km} & \tilde{b}_{k,m+1}\\ \tilde{q}_{k1} & \cdots & \tilde{q}_{km} & 0\end{bmatrix} \tag{2.6.22}$$

而由式(2.6.16)得

$$\begin{bmatrix}\tilde{q}_{k1} & \cdots & \tilde{q}_{km}\\ p_{k+1,1} & \cdots & p_{k+1,m}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma_k & \delta_k\\ -\delta_k & \gamma_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{k1} & \cdots & p_{km}\\ q_{k+1,1} & \cdots & q_{k+1,m}\end{bmatrix} \tag{2.6.23}$$

结合式(2.6.20)～(2.6.23)得 **Bojanczyk-Brent-de Hoog 算法**(求正交因子 $\boldsymbol{Q}$)[84]：

$$q_{1j}=\frac{\xi_{j-1}}{r_{11}},\quad p_{1j}=q_{1j},\quad j=1,2,\cdots,m$$

$$\hat{b}_{11}=1,\quad \hat{b}_{1j}=0,\quad j=2,3,\cdots,m+1$$

$$\bar{b}_{1j}=0,\quad j=1,2,\cdots,m,\quad \bar{b}_{1,m+1}=1$$

对 $k=1,2,\cdots,n-1$

$$\tilde{q}_{kj}=\frac{1}{\beta_k}(c_k\hat{b}_{kj}+s_kq_{k,j-1}-\alpha_k\bar{b}_{kj})$$

$$j=1,2,\cdots,m$$

$$\hat{b}_{k+1,1}=-s_k\hat{b}_{k1},\quad \hat{b}_{k+1,j}=-s_k\hat{b}_{kj}+c_kq_{k,j-1}$$

$$j=2,\cdots,m+1$$

$$\bar{b}_{k+1,j}=-\beta_k\bar{b}_{kj}+\alpha_k\tilde{q}_{kj},\quad j=1,2,\cdots,m$$

$$\bar{b}_{k+1,m+1}=-\beta_k\bar{b}_{k,m+1}$$

$$q_{k+1,j}=\frac{1}{\delta_k}(\tilde{q}_{kj}-\gamma_kp_{kj}),\quad j=1,2,\cdots,m$$

$$p_{k+1,j}=-\delta_kp_{kj}+\gamma_kq_{k+1,j},\quad j=1,2,\cdots,m$$

求出正交因子 $\boldsymbol{Q}$ 需 $12mn+O(n)$ 次乘除运算，$6mn+O(n)$ 次加减运算.

当矩阵的条件数较大时，该算法的计算精度并不比标准 QR 分解的计算精度高，因为进行矩阵 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 的 Cholesky 分解是坏条件问题.

§2.7 Toeplitz 矩阵的乘法运算

一、 Toeplitz 矩阵乘 Toeplitz 矩阵

设两个 n 阶 Toeplitz 矩阵

$$\boldsymbol{T}_1=(\xi_{j-i})_{i,j=1}^n,\quad \boldsymbol{T}_2=(\eta_{j-i})_{i,j=1}^n \tag{2.7.1}$$

下面建立计算 $\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2$ 的快速算法.

算法 1

将 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{T}_1$ 和 $\boldsymbol{T}_2$ 分解成三角矩阵之和,即

$$\boldsymbol{T}_1 = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{U}_1,\quad \boldsymbol{T}_2 = \boldsymbol{L}_2 + \boldsymbol{U}_2$$

其中

$$\boldsymbol{L}_1 = \begin{bmatrix} \xi_0 & & & \\ \xi_{-1} & \xi_0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \xi_{-n+1} & \cdots & \xi_{-1} & \xi_0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{U}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \xi_1 & \cdots & \xi_{n-1} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \xi_1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}_2 = \begin{bmatrix} \eta_0 & & & \\ \eta_{-1} & \eta_0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \eta_{-n+1} & \cdots & \eta_{-1} & \eta_0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{U}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \eta_1 & \cdots & \eta_{n-1} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \eta_1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2 = \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_2 + \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_2 + \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{L}_2 + \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{U}_2 = \boldsymbol{\Delta}_1 + \boldsymbol{\Delta}_2 + \boldsymbol{\Delta}_3$$

其中 $\boldsymbol{\Delta}_1 = \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_2 + \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_2$,$\boldsymbol{\Delta}_2 = \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{L}_2$,$\boldsymbol{\Delta}_3 = \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{U}_2$. 由定理 2.2.8 知,Δ_1是 Toeplitz 矩阵,设 $\boldsymbol{\Delta}_1 = (\mu_{j-i})_{i,j=1}^n$,则其元素由式

$$\begin{cases} \mu_{-k} = \sum_{j=0}^{k} \xi_{-j}\eta_{-k+j}, & k = 0,1,2,\cdots,n-1 \\ \mu_1 = 0 & \\ \mu_k = \sum_{j=1}^{k-1} \xi_j\eta_{k-j}, & k = 2,3,\cdots,n-1 \end{cases}$$

计算。若设 $\boldsymbol{\Delta}_2 = \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{L}_2 = (b_{ij})_{i,j=1}^n$,$\boldsymbol{\Delta}_3 = \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{U}_2 = (c_{ij})_{i,j=1}^n$,易知它

们的元素可按式

$$\begin{cases} b_{in} = \xi_{n-i}\eta_0, & i = 1,2,\cdots,n-1 \\ b_{nj} = 0, & j = 1,2,\cdots,n \\ b_{ij} = b_{i+1,j+1} + \xi_{n-i}\eta_{-n+j}, & i,j = n-1,n-2,\cdots,1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{i1} = 0, & i = 1,2,\cdots,n \\ c_{1j} = \xi_0\eta_{j-1}, & j = 2,3,\cdots,n \\ c_{i+1,j+1} = c_{ij} + \xi_{-i}\eta_j, & i,j = 1,2,\cdots,n-1 \end{cases}$$

递推计算. 最后作矩阵加法 $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$ 即得 $\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2$.

该算法需 $3n^2 + O(n)$ 次乘除运算, $5n^2 + O(n)$ 次加减运算.

算法 2

引理 2.7.1　任一 n 阶 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{T} = (\xi_{j-i})_{i,j=1}^{n}$ 均可分解为循环矩阵与斜循环矩阵之和.

证明　对 n 阶 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{T}$ 作如下分解

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} \\ -s_{n-1} & s_0 & \cdots & s_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -s_1 & -s_2 & \cdots & s_0 \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \boldsymbol{C} + \boldsymbol{S}$$

其中

$$\begin{cases} c_0 + s_0 = \xi_0 \quad (\text{可取 } c_0 = \xi_0, \quad s_0 = 0) \\ c_j = \dfrac{1}{2}(\xi_j + \xi_{-n+j}), \quad s_j = \dfrac{1}{2}(\xi_j - \xi_{-n+j}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad j = 1,2,\cdots,n-1 \end{cases}$$

显然 $\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 分别为循环矩阵和斜循环矩阵.　　证毕

这一结果称之为 Toeplitz 矩阵的**循环分解**.

对式(2.7.1)的两个 n 阶 Toeplitz 矩阵分别作循环分解

$$\boldsymbol{T}_1 = \boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{S}_1, \quad \boldsymbol{T}_2 = \boldsymbol{C}_2 + \boldsymbol{S}_2$$

其中

$$\boldsymbol{C}_i = \begin{bmatrix} c_0^{(i)} & c_1^{(i)} & \cdots & c_{n-1}^{(i)} \\ c_{n-1}^{(i)} & c_0^{(i)} & \cdots & c_{n-2}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^{(i)} & c_2^{(i)} & \cdots & c_0^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_i = \begin{bmatrix} s_0^{(i)} & s_1^{(i)} & \cdots & s_{n-1}^{(i)} \\ -s_{n-1}^{(i)} & s_0^{(i)} & \cdots & s_{n-2}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -s_1^{(i)} & -s_2^{(i)} & \cdots & s_0^{(i)} \end{bmatrix}, \quad i = 1,2$$

分别是循环矩阵和斜循环矩阵. 则

$$\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2 = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2 + \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2 + \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{S}_2 + \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{C}_2$$

由定理 2.2.4 知，$\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2$ 仍是循环矩阵，而 $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2$ 为斜循环矩阵. 设

$$\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2 = \operatorname{circ}(x_0, \cdots, x_{n-1}), \quad \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2 = \operatorname{circ}(y_0, \cdots, y_{n-1})$$

则由 $(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}) = (c_0^{(1)}, c_1^{(1)}, \cdots, c_{n-1}^{(1)})\boldsymbol{C}_2$ 和 $(y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}) = (s_0^{(1)}, s_1^{(1)}, \cdots, s_{n-1}^{(1)})\boldsymbol{S}_2$ 得

$$\left.\begin{aligned} x_j &= \sum_{k=0}^{j} c_k^{(1)} c_{j-k}^{(2)} + \sum_{k=j+1}^{n-1} c_k^{(1)} c_{n+j-k}^{(2)} \\ y_j &= \sum_{k=0}^{j} s_k^{(1)} s_{j-k}^{(2)} - \sum_{k=j+1}^{n-1} s_k^{(1)} s_{n+j-k}^{(2)} \end{aligned}\right\}, \quad j = 0, 1, \cdots, n-1 \tag{2.7.2}$$

这恰是计算两个长为 n 的序列 $c_j^{(1)}$ 和 $c_j^{(2)}$ $(j = 0,1,\cdots,n-1)$（或 $s_j^{(1)}$ 和 $s_j^{(2)}$ $(j = 0,1,\cdots,n-1)$）的循环卷积(或斜循环卷积). 若采用离散富氏变换算法，式(2.7.2)的计算量为 $O(n\log_2 n)$.

下面考虑 $\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{S}_2$ 的计算. 因

$$S_2 = 2\begin{bmatrix} s_0^{(2)} & s_1^{(2)} & \cdots & s_{n-1}^{(2)} \\ & s_0^{(2)} & \cdots & s_{n-2}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & s_0^{(2)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_0^{(2)} & s_1^{(2)} & \cdots & s_{n-1}^{(2)} \\ s_{n-1}^{(2)} & s_0^{(2)} & \cdots & s_{n-2}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1^{(2)} & s_2^{(2)} & \cdots & s_0^{(2)} \end{bmatrix} \xlongequal{\text{def}} 2S_2^{(2)} - C_2^{(2)}$$

其中 $S_2^{(2)}$ 是上三角 Toeplitz 矩阵，$C_2^{(2)}$ 是循环矩阵. 于是

$$C_1S_2 = 2C_1S_2^{(2)} - C_1C_2^{(2)}$$

由于 $C_1C_2^{(2)}$ 仍是循环矩阵，设 $C_1C_2^{(2)} = \mathrm{circ}(x_0^{(1)},\cdots,x_{n-1}^{(1)})$，如同式(2.7.2)，有

$$x_j^{(1)} = \sum_{k=0}^{j} c_k^{(1)} s_{j-k}^{(2)} + \sum_{k=j+1}^{n-1} c_k^{(1)} s_{n+j-k}^{(2)}, \quad j = 0,1,\cdots,n-1 \tag{2.7.3}$$

若设 $C_1S_2^{(2)} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$，直接计算可得

$$\left.\begin{aligned} a_{1,j+1} &= \sum_{k=0}^{j} c_k^{(1)} s_{j-k}^{(2)}, & j &= 0,1,\cdots,n-1 \\ a_{i+1,1} &= c_{n-i}^{(1)} s_0^{(2)}, & i &= 1,2,\cdots,n-1 \\ a_{i+1,j+1} &= a_{ij} + c_{n-i}^{(1)} s_j^{(2)}, & i,j &= 1,2,\cdots,n-1 \end{aligned}\right\} \tag{2.7.4}$$

构造两个长为 $2n$ 的序列

$$\tilde{c}_k^{(1)} = \begin{cases} c_k^{(1)}, & k = 0,1,\cdots,n-1 \\ 0, & k = n,n+1,\cdots,2n-1 \end{cases}$$

$$\tilde{s}_k^{(2)} = \begin{cases} s_k^{(2)}, & k = 0,1,\cdots,n-1 \\ 0, & k = n,n+1,\cdots,2n-1 \end{cases}$$

则

$$a_{1,j+1} = \sum_{k=0}^{j} c_k^{(1)} s_{j-k}^{(2)} = \sum_{k=0}^{j} \tilde{c}_k^{(1)} \tilde{s}_{j-k}^{(2)} + \sum_{k=j+1}^{2n-1} \tilde{c}_k^{(1)} \tilde{s}_{2n+j-k}^{(2)}$$

$$j = 0,1,\cdots,n-1 \tag{2.7.5}$$

即可通过计算两个长为 $2n$ 序列的循环卷积求 $a_{1,j+1}$. 借助于离散富氏变换,求 C_1S_2的乘法运算量为 $n^2+O(n\log_2 n)$.

同理, $S_1C_2=2S_1^{(1)}C_2-C_1^{(1)}C_2$,其中

$$S_1^{(1)}=\begin{bmatrix} s_0^{(1)} & s_1^{(1)} & \cdots & s_{n-1}^{(1)} \\ & s_0^{(1)} & \cdots & s_{n-2}^{(1)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & s_0^{(1)} \end{bmatrix},\quad C_1^{(1)}=\begin{bmatrix} s_0^{(1)} & s_1^{(1)} & \cdots & s_{n-1}^{(1)} \\ s_{n-1}^{(1)} & s_0^{(1)} & \cdots & s_{n-2}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1^{(1)} & s_2^{(1)} & \cdots & s_0^{(1)} \end{bmatrix}$$

设 $C_1^{(1)}C_2=\mathrm{circ}(x_0^{(2)},\cdots,x_{n-1}^{(2)})$,则

$$x_j^{(2)}=\sum_{k=0}^{j}s_k^{(1)}c_{j-k}^{(2)}+\sum_{k=j+1}^{n-1}s_k^{(1)}c_{n+j-k}^{(2)},\quad j=0,1,\cdots,n-1 \tag{2.7.6}$$

而 $S_1^{(1)}C_2=(b_{ij})_{i,j=1}^n$ 的元素可递推计算得到

$$\left.\begin{aligned} b_{n-i,n}&=\sum_{k=0}^{i}s_k^{(1)}c_{i-k}^{(2)}, && i=0,1,\cdots,n-1 \\ b_{n,j+1}&=s_0^{(1)}c_j^{(2)}, && j=0,1,\cdots,n-2 \\ b_{ij}&=b_{i+1,j+1}+s_{n-i}^{(1)}c_j^{(2)}, && i,j=n-1,n-2,\cdots,1 \end{aligned}\right\} \tag{2.7.7}$$

构造两个长为 $2n$ 的序列

$$\tilde{s}_k^{(1)}=\begin{cases} s_k^{(1)}, & k=0,1,\cdots,n-1 \\ 0, & k=n,n+1,\cdots,2n-1 \end{cases}$$

$$\tilde{c}_k^{(2)}=\begin{cases} c_k^{(2)}, & k=0,1,\cdots,n-1 \\ 0, & k=n,n+1,\cdots,2n-1 \end{cases}$$

则

$$b_{n-i,n}=\sum_{k=0}^{i}s_k^{(1)}c_{i-k}^{(2)}=\sum_{k=0}^{i}\tilde{s}_k^{(1)}\tilde{c}_{i-k}^{(2)}+\sum_{k=i+1}^{2n-1}\tilde{s}_k^{(1)}\tilde{c}_{2n+i-k}^{(2)}$$

$$i=0,1,\cdots,n-1 \tag{2.7.8}$$

综上所述,利用循环分解,计算两个 n 阶 Toeplitz 矩阵乘积的

快速算法步骤为：

第一步： 按引理 2.7.1 分别将两个 Toeplitz 矩阵分解为循环矩阵与斜循环矩阵之和，即 $\boldsymbol{T}_i=\boldsymbol{C}_i+\boldsymbol{S}_i\ (i=1,2)$；

第二步： 借助于离散富氏变换，计算循环卷积和斜循环卷积(2.7.2)，得乘积 $\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2$和 $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2$；

第三步： 借助于离散富氏变换，计算循环卷积(2.7.3)和(2.7.5)，再由(2.7.4)计算 $\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{S}_2^{(2)}$ 的其余元素，得乘积 $\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{S}_2=2\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{S}_2^{(2)}-\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2^{(2)}$；

第四步： 借助于离散富氏变换，计算循环卷积(2.7.6)和(2.7.8)，再由(2.7.7)计算 $\boldsymbol{S}_1^{(1)}\boldsymbol{C}_2$ 的其余元素，得乘积 $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{C}_2=2\boldsymbol{S}_1^{(1)}\boldsymbol{C}_2-\boldsymbol{C}_1^{(1)}\boldsymbol{C}_2$；

第五步： 求和 $\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2+\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2+\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{S}_2+\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{C}_2$ 即得 $\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2$.

该算法所需乘法运算量为 $2n^2+O(n\log_2 n)$.

二、 Toeplitz 矩阵乘 Vandermonde 矩阵

Vandermonde 矩阵是工程计算中应用范围很广的一类矩阵，其形式为

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \eta_0 & \eta_1 & \cdots & \eta_{n-1} \\ \eta_0^2 & \eta_1^2 & \cdots & \eta_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \eta_0^{n-1} & \eta_1^{n-1} & \cdots & \eta_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.7.9}$$

以下研究式(2.1.1)的 n 阶 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{T}$ 与 Vandermonde 矩阵 $\boldsymbol{V}$ 之乘积的快速算法. 将 $\boldsymbol{T}$ 分解为

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U} \tag{2.7.10}$$

其中

$$L=\begin{bmatrix}\xi_0 & & & \\ \xi_{-1} & \xi_0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \xi_{-n+1} & \cdots & \xi_{-1} & \xi_0\end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix}0 & \xi_1 & \cdots & \xi_{n-1}\\ & 0 & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & \xi_1\\ & & & 0\end{bmatrix}$$

于是

$$TV=LV+UV \tag{2.7.11}$$

设 $LV=(b_{ij})_{i,j=1}^{n}$，$UV=(c_{ij})_{i,j=1}^{n}$．因

$$\begin{bmatrix}b_{1,j+1}\\ b_{2,j+1}\\ b_{3,j+1}\\ \vdots\\ b_{n,j+1}\end{bmatrix}=L\begin{bmatrix}1\\ \eta_j\\ \eta_j^2\\ \vdots\\ \eta_j^{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi_0\\ \xi_{-1}+\xi_0\eta_j\\ \xi_{-2}+\xi_{-1}\eta_j+\xi_0\eta_j^2\\ \vdots\\ \xi_{-n+1}+\xi_{-n+2}\eta_j+\cdots+\xi_0\eta_j^{n-1}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\xi_0\\ \xi_{-1}+\xi_0\eta_j\\ \xi_{-2}+(\xi_{-1}+\xi_0\eta_j)\eta_j\\ \vdots\\ \xi_{-n+1}+(\xi_{-n+2}+\cdots+\xi_0\eta_j^{n-2})\eta_j\end{bmatrix}$$

从而其元素可递推计算

$$\left.\begin{aligned}&b_{1,j+1}=\xi_0\\ &b_{k+1,j+1}=\xi_{-k}+b_{k,j+1}\eta_j\quad,\quad k=1,2,\cdots,n-1\end{aligned}\right\} \tag{2.7.12}$$

又因

$$\begin{bmatrix} c_{1,j+1} \\ c_{2,j+1} \\ c_{3,j+1} \\ \vdots \\ c_{n,j+1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{U} \begin{bmatrix} 1 \\ \eta_j \\ \eta_j^2 \\ \vdots \\ \eta_j^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1\eta_j + \xi_2\eta_j^2 + \cdots + \xi_{n-1}\eta_j^{n-1} \\ \xi_1\eta_j^2 + \cdots + \xi_{n-2}\eta_j^{n-1} \\ \vdots \\ \xi_1\eta_j^{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (\xi_1 + \xi_2\eta_j + \cdots + \xi_{n-1}\eta_j^{n-2})\eta_j \\ (\xi_1 + \xi_2\eta_j + \cdots + \xi_{n-2}\eta_j^{n-3})\eta_j^2 \\ \vdots \\ \xi_1\eta_j^{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

从而

$$c_{n,j+1} = 0,\quad c_{k,j+1} = d_{n-k,j}\eta_j^k,\quad k = 1,2,\cdots,n-1 \tag{2.7.13}$$

其中 $d_{kj} = \sum_{i=1}^{k} \xi_i \eta_j^{i-1}\ (k = 1,2,\cdots,n-1)$，它们也可以递推计算

$$d_{1j} = \xi_1,\quad d_{k+1,j} = d_{kj} + \xi_{k+1}\eta_j^k,\quad k = 1,2,\cdots,n-2 \tag{2.7.14}$$

按式(2.7.12)，(2.7.14)，(2.7.13)和(2.7.11)求乘积 $\boldsymbol{TV}$，需 $4n^2 - 6n$ 次乘法运算，$3n^2 - 3n$ 次加减运算．

§2.8　三对角 Toeplitz 矩阵

考虑如下的 n 阶三对角 Toeplitz 矩阵

$$\boldsymbol{T}_n = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & & \\ \gamma & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta \\ & & \gamma & \alpha \end{bmatrix},\quad \beta\gamma \neq 0 \tag{2.8.1}$$

在构造三次样条函数及用差分法求解微分方程等问题中，须要求

解以该矩阵为系数矩阵的线性方程组.

一、 行列式、特征值与特征向量

对于三对角 Toeplitz 矩阵(2.8.1)的行列式、特征值与特征向量,有如下的显式表达式.

定理 2.8.1 设 $\boldsymbol{T}_n$ 是 n 阶三对角 Toeplitz 矩阵式(2.8.1),则

1) 当 $\alpha^2-4\beta\gamma\neq 0$ 时,

$$\det\boldsymbol{T}_n=\frac{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma})^{n+1}-(\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma}}$$

当 $\alpha^2-4\beta\gamma=0$ 时,

$$\det\boldsymbol{T}_n=\frac{n+1}{2^n}\alpha^n$$

2) $\boldsymbol{T}_n$ 的 n 个特征值为

$$\lambda_k=\alpha+2\sqrt{\beta\gamma}\cos\frac{k\pi}{n+1},\quad k=1,2,\cdots,n$$

3) 设对应特征值 λ_k 的特征向量为 $\boldsymbol{x}^{(k)}=(x_1^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})^{\mathrm{T}}$,则

$$x_j^{(k)}=\left(\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\right)^{j-1}\sin\frac{jk\pi}{n+1},\quad j=1,2,\cdots,n$$

证明 设 $\boldsymbol{D}_n=\det\boldsymbol{T}_n$,按第1行展开得

$$\boldsymbol{D}_n=\alpha\boldsymbol{D}_{n-1}-\beta\gamma\boldsymbol{D}_{n-2}\tag{2.8.2}$$

取 p,q 为方程 $x^2-\alpha x+\beta\gamma=0$ 的根,即

$$p=\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma}}{2},\quad q=\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma}}{2}$$

则式(2.8.2)可改写为 $\boldsymbol{D}_n-p\boldsymbol{D}_{n-1}=q(\boldsymbol{D}_{n-1}-p\boldsymbol{D}_{n-2})$. 注意到 $\boldsymbol{D}_2-p\boldsymbol{D}_1=q^2$,可递推求得 $\boldsymbol{D}_n-p\boldsymbol{D}_{n-1}=q^n$,从而

$$\boldsymbol{D}_n=p^n+p^{n-1}q+\cdots+pq^{n-1}+q^n=$$

$$\begin{cases} \dfrac{p^{n+1}-q^{n+1}}{p-q}, & \alpha^2-4\beta\gamma\neq 0 \\ (n+1)p^n, & \alpha^2-4\beta\gamma=0 \end{cases}$$

整理之即得 1).

为求得 $\boldsymbol{T}_n$ 的特征值，将 1)中 $\det\boldsymbol{T}_n$ 的元素 α 换成 $\lambda-\alpha$ 即得特征多项式 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T}_n)$. 从而，由 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T}_n)=0$ 得

$$(\lambda-\alpha+\sqrt{(\lambda-\alpha)^2-4\beta\gamma})^{n+1}-(\lambda-\alpha-\sqrt{(\lambda-\alpha)^2-4\beta\gamma})^{n+1}=0$$

于是

$$\frac{\lambda_k-\alpha+\sqrt{(\lambda_k-\alpha)^2-4\beta\gamma}}{\lambda_k-\alpha-\sqrt{(\lambda_k-\alpha)^2-4\beta\gamma}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n+1}}$$

$$\mathrm{i}=\sqrt{-1}, \qquad k=1,2,\cdots,n$$

(上式中若取 $k=0$，则有 $\sqrt{(\lambda_0-\alpha)^2-4\beta\gamma}=0$，由 1)得 $0=\det(\lambda_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T}_n)=\dfrac{n+1}{2^n}(\lambda_0-\alpha)^n$，从而 $\beta\gamma=0$，这与假设矛盾.)解之，得

$$(\lambda_k-\alpha)^2=4\beta\gamma\cos^2\frac{k\pi}{n+1}, \quad k=1,2,\cdots,n$$

即得 2). 将 $\lambda_k=\alpha+2\sqrt{\beta\gamma}\cos\dfrac{k\pi}{n+1}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 代入 $(\lambda_k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T}_n)\boldsymbol{x}^{(k)}=\boldsymbol{0}$，且令 $x_1^{(k)}=\sin\dfrac{k\pi}{n+1}$，可求得 3).　　证毕

二、 求解线性方程组

将三对角 Toeplitz 矩阵(2.8.1)分解为

$$\boldsymbol{T}_n=p\widetilde{\boldsymbol{L}}\widetilde{\boldsymbol{U}} \tag{2.8.3}$$

其中

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} l & 1 & & & \\ & l & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & l & 1 \end{bmatrix}_{n\times(n+1)}, \quad \tilde{U} = \begin{bmatrix} u & & & \\ 1 & u & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & u \\ & & & 1 \end{bmatrix}_{(n+1)\times n}$$

比较式(2.8.3)两边的元素，得

$$p(1+lu)=\alpha,\quad pl=\gamma,\quad pu=\beta$$

于是

$$l=\frac{\gamma}{p},\quad u=\frac{\beta}{p},\quad p=\frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma}}{2} \tag{2.8.4}$$

故求解线性方程组 $\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}$ 的问题转化为求解线性方程组

$$\tilde{L}\tilde{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{g},\quad \tilde{U}\boldsymbol{x}=\tilde{\boldsymbol{y}} \tag{2.8.5}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_n)^{\mathrm{T}}$，$\tilde{\boldsymbol{y}}=(y_1,\cdots,y_n,y_{n+1})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{g}=\frac{1}{p}\boldsymbol{f}=(g_1,\cdots,g_n)^{\mathrm{T}}$. 由式(2.8.5)，得

$$\begin{cases} ly_{j-1}+y_j=g_{j-1}, & j=2,\cdots,n+1 \\ ux_1=y_1 \\ x_j+ux_{j+1}=y_{j+1}, & j=n-1,\cdots,2,1 \\ x_n=y_{n+1} \end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned} x_1 &= y_2-ux_2=y_2+(-u)y_3+(-u)^2x_3=\cdots= \\ &\quad y_2+(-u)y_3+(-u)^2y_4+\cdots+(-u)^{n-1}y_{n+1} \end{aligned} \tag{2.8.6}$$

又

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= g_j-ly_j=g_j+(-l)g_{j-1}+(-l)^2y_{j-1}=\cdots= \\ &\quad g_j+(-l)g_{j-1}+\cdots+(-l)^{j-1}g_1+(-l)^jux_1 \\ &\qquad j=1,2,\cdots,n \end{aligned}$$

代入式(2.8.6)并整理得

$$[1 + lu + (lu)^2 + \cdots + (lu)^n]x_1 = [1 + lu + (lu)^2 + \cdots + (lu)^{n-1}]g_1 + (-u)[1 + lu + (lu)^2 + \cdots + (lu)^{n-2}]g_2 + \cdots + (-u)^{n-2}[1 + lu]g_{n-1} + (-u)^{n-1}g_n$$

于是，当 $lu \neq 1$ 时，

$$x_1 = \frac{1}{1-(lu)^{n+1}}[g_1 + (-u)g_2 + \cdots + (-u)^{n-1}g_n] + l(-u)^n[g_n + (-l)g_{n-1} + \cdots + (-l)^{n-1}g_1] \tag{2.8.7}$$

而当 $lu = 1$ 时，

$$x_1 = \frac{1}{n+1}[ng_1 + (-u)(n-1)g_2 + \cdots + (-u)^{n-2}2g_{n-1} + (-u)^{n-1}g_n] \tag{2.8.8}$$

综上所述，得如下算法.

算法 2.8.1（求解 $T_n x = f$）

$$p = \frac{\alpha + \mathrm{sign}(\alpha)\sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}}{2}, \quad l = \frac{\gamma}{p}, \quad u = \frac{\beta}{p}$$

$$g_k = \frac{f_k}{p}, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

若 $lu \neq 1$

$s_1 = g_1, \quad s_j = g_j - ls_{j-1}, \quad j = 2, \cdots, n$

$t_n = g_n, \quad t_j = g_j - ut_{j+1}, \quad j = n-1, \cdots, 1$

$$x_1 = \frac{t_1 + l(-u)^n s_n}{1-(lu)^{n+1}}$$

若 $lu = 1$

$t_n = g_n, \quad t_j = (n+1-j)g_j - ut_{j+1}$

$j = n-1, \cdots, 1$

$$x_1 = \frac{t_1}{n+1}$$

$y_1 = ux_1, \quad y_j = g_{j-1} - ly_{j-1}, \quad j = 2, \cdots, n+1$

$$x_n = y_{n+1}, \quad x_j = y_{j+1} - u x_{j+1}, \quad j = n-1,\cdots,2$$

该算法约需 $5n$ 次乘除运算，$4n$ 次加减运算.

如果将 n 阶三对角 Toeplitz 矩阵(2.8.1)分解为如下的形式

$$\boldsymbol{T}_n = p[\boldsymbol{LU} + lu\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}]$$

其中 $\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & l & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}, \quad \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & u & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & u \\ & & & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$

则 p,l,u 仍由式(2.8.4)确定. 利用 Sherman-Morrison 公式，得

$$\boldsymbol{T}_n^{-1} = \frac{1}{p}\left[(\boldsymbol{LU})^{-1} - \frac{lu(\boldsymbol{LU})^{-1}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{LU})^{-1}}{1 + lu\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{LU})^{-1}\boldsymbol{e}_1}\right] \tag{2.8.9}$$

若记 $\boldsymbol{g} = \frac{1}{p}\boldsymbol{f} = (g_1,\cdots,g_n)^{\mathrm{T}}$，又设 $\boldsymbol{y} = (y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{z} = (z_1,\cdots,z_n)^{\mathrm{T}}$ 分别是线性方程组

$$\boldsymbol{LUy} = \boldsymbol{g}, \quad \boldsymbol{LUz} = \boldsymbol{e}_1 \tag{2.8.10}$$

的解向量，则由式(2.8.9)知，$\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$ 的解为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} - \frac{luy_1\boldsymbol{z}}{1 + luz_1}$$

而式(2.8.10)的两个线性方程组可转化为

$$\boldsymbol{Ls} = \boldsymbol{g}, \quad \boldsymbol{Uy} = \boldsymbol{s}, \quad \boldsymbol{Lt} = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{Uz} = \boldsymbol{t}$$

综上所述，得如下算法.

算法 2.8.2 (求解 $\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$)

$$p = \frac{\alpha + \mathrm{sign}(\alpha)\sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}}{2}, \quad l = \frac{\gamma}{p}, \quad u = \frac{\beta}{p}$$

$$g_k = \frac{f_k}{p}, \quad k = 1,2,\cdots,n$$

$$s_1 = g_1, \quad t_1 = 1$$

$$s_j = g_j - ls_{j-1}, \quad t_j = -lt_{j-1}, \quad j = 2,\cdots,n$$

$$y_n = s_n, \quad z_n = t_n$$

$$y_j = s_j - uy_{j+1}, \quad z_j = t_j - uz_{j+1}, \quad j = n-1,\cdots,1$$

$$x_k = y_k - \frac{luy_1}{1+luz_1}z_k, \quad k = 1,2,\cdots,n$$

该算法约需 $5n$ 次乘除运算，$4n$ 次加减运算.

注 式(2.8.10)中两个线性方程组可以并行计算.

三、 求逆矩阵及广义逆矩阵

将 n 阶三对角 Toeplitz 矩阵(2.8.1)写成分块形式

$$\boldsymbol{T}_n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c} & \boldsymbol{M} \\ 0 & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}} & 0 \\ \boldsymbol{N} & \boldsymbol{J}\boldsymbol{r} \end{bmatrix}, \quad n \geqslant 3$$

其中 $\boldsymbol{c} = (\alpha,\gamma,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{r} = (\alpha,\beta,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{J}$ 是 $n-1$ 阶次单位矩阵，而

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \beta & & & & \\ \alpha & \ddots & & & \\ \gamma & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma & \alpha & \beta \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} \gamma & \alpha & \beta & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \beta \\ & & & \ddots & \alpha \\ & & & & \gamma \end{bmatrix} \tag{2.8.11}$$

分别是 $n-1$ 阶非奇异下三角 Toeplitz 矩阵和上三角 Toeplitz 矩阵. 令

$$\begin{cases} x_1 = 1, \quad \boldsymbol{x} = (x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{c} \\ y_1 = 1, \quad \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (y_2,\cdots,y_n) = -\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{-1} \\ p = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{x} = \gamma x_{n-1} + \alpha x_n, \quad q = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{r} = \beta y_{n-1} + \alpha y_n \end{cases} \tag{2.8.12}$$

于是，由 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{N}$ 的次对称性得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J} &= -\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{J} = -\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}^{-1} \\ \boldsymbol{J}\boldsymbol{y} &= -\boldsymbol{J}\boldsymbol{N}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{r} \end{aligned} \tag{2.8.13}$$

利用式(2.8.13)可得

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ x^{\mathrm{T}}J & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & M \\ 0 & c^{\mathrm{T}}J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0^{\mathrm{T}} \\ x & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M \\ p & 0^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

和

$$\begin{bmatrix} 1 & y^{\mathrm{T}} \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r^{\mathrm{T}} & 0 \\ N & Jr \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & Jy \\ 0^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0^{\mathrm{T}} & q \\ N & 0 \end{bmatrix}$$

从而 T_n 可逆的充要条件是 $p \neq 0$ 或 $q \neq 0$，且

$$T_n^{-1} = \begin{bmatrix} 0^{\mathrm{T}} & 0 \\ M^{-1} & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{p}\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}[x^{\mathrm{T}}J \quad 1] = \begin{bmatrix} 0 & N^{-1} \\ 0 & 0^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} + \frac{1}{q}\begin{bmatrix} Jy \\ 1 \end{bmatrix}[1 \quad y^{\mathrm{T}}] \tag{2.8.14}$$

注意到 M^{-1} 与 N^{-1} 分别是下三角和上三角矩阵，由式(2.8.14)知，T_n^{-1} 的上三角部分由矩阵 $\frac{1}{p}(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}(x_n,\cdots,x_1)$ 的上三角部分给出，而 T_n^{-1} 的下三角部分由矩阵 $\frac{1}{q}(y_n,\cdots,y_1)^{\mathrm{T}}(y_1,\cdots,y_n)$ 的下三角部分给出. 综上所述，可得求解三对角 Toeplitz 矩阵 T_n 之逆矩阵 $T_n^{-1} = (v_{ij})$ 的快速算法.

算法 2.8.3 (求 T_n^{-1})

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 1$$

$$x_{k+1} = -\frac{1}{\beta}(\alpha x_k + \gamma x_{k-1}), \quad y_{k+1} = -\frac{1}{\gamma}(\alpha y_k + \beta y_{k-1})$$

$$k = 1,2,\cdots,n-1$$

$$p = \alpha x_n + \gamma x_{n-1}, \quad q = \alpha y_n + \beta y_{n-1}$$

$$v_{ij} = \begin{cases} \dfrac{x_i x_{n-j+1}}{p}, & i \leqslant j \\[2ex] \dfrac{y_{n-i+1} y_j}{q}, & i > j \\[2ex] v_{n-j+1,n-i+1} & \text{（次对称性）} \end{cases}$$

该算法约需 $n^2 + O(n)$ 次乘除运算，$2n$ 次加减运算.

当 T_n 是实三对角 Toeplitz 矩阵且不可逆时，$p = q = 0$，此时 $\operatorname{rank} T_n = n - 1$，且 T_n 的满秩分解为

$$T_n=\begin{bmatrix} & I\\ -x^TJ & \end{bmatrix}M[-x \quad I]=\begin{bmatrix}-y^T\\ I\end{bmatrix}N[I \quad -Jy]$$

于是 T_n 的 Moore-Penrose 逆为

$$T_n^+=\begin{bmatrix}-x^T\\ I\end{bmatrix}(I+xx^T)^{-1}M^{-1}(I+Jxx^TJ)^{-1}[I \quad -Jx]=$$

$$\begin{bmatrix} I\\ -y^TJ\end{bmatrix}(I+Jyy^TJ)^{-1}N^{-1}(I+yy^T)^{-1}[-y \quad I]$$

利用 Sherman 公式，由上式整理得

$$T_n^+=\begin{bmatrix}\mathbf{0}^T & 0\\ M^{-1} & \mathbf{0}\end{bmatrix}+\frac{1}{1+x^Tx}\begin{bmatrix}1\\ x\end{bmatrix}[-x^TM^{-1} \quad 0]+$$

$$\frac{1}{1+x^Tx}\begin{bmatrix}0\\ -M^{-1}Jx\end{bmatrix}[x^TJ \quad 1]+\frac{x^TM^{-1}Jx}{(1+x^Tx)^2}\begin{bmatrix}1\\ x\end{bmatrix}[x^TJ \quad 1] \tag{2.8.15}$$

$$T_n^+=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & N^{-1}\\ 0 & \mathbf{0}^T\end{bmatrix}+\frac{1}{1+y^Ty}\begin{bmatrix}-N^{-1}y\\ 0\end{bmatrix}[1 \quad y^T]+$$

$$\frac{1}{1+y^Ty}\begin{bmatrix}Jy\\ 1\end{bmatrix}[0 \quad -y^TJN^{-1}]+\frac{y^TJN^{-1}y}{(1+y^Ty)^2}\begin{bmatrix}Jy\\ 1\end{bmatrix}[1 \quad y^T] \tag{2.8.16}$$

令

$$\left.\begin{aligned} &u_1=0,\quad u=(u_2,\cdots,u_n)^T=-M^{-1}Jx\\ &v_1=0,\quad v^T=(v_2,\cdots,v_n)=-y^TJN^{-1}\\ &\rho=1+x^Tx,\quad \omega=x^TM^{-1}Jx=-x^Tu\\ &\sigma=1+y^Ty,\quad \tau=y^TJN^{-1}y=-v^Ty\end{aligned}\right\} \tag{2.8.17}$$

由 M 与 N 的次对称性得

$$u^TJ=-x^TM^{-1},\quad Jv=-N^{-1}y$$

从而由式(2.8.15)～(2.8.17)知，T_n^+ 的上三角部分由矩阵

$$\frac{1}{\rho}[x_1 \cdots x_n]^T[u_n \cdots u_1]+\frac{1}{\rho}[u_1 \cdots u_n]^T[x_n \cdots x_1]+$$

$$\frac{\omega}{\rho^2}[x_1 \cdots x_n]^{\mathrm{T}}[x_n \cdots x_1]$$

的上三角部分给出，而 $\boldsymbol{T}_n^+$ 的下三角部分由矩阵

$$\frac{1}{\sigma}(v_n,\cdots,v_1)^{\mathrm{T}}(y_1,\cdots,y_n)+\frac{1}{\sigma}(y_n,\cdots,y_1)^{\mathrm{T}}(v_1,\cdots,v_n)+$$

$$\frac{\tau}{\sigma^2}(y_n,\cdots,y_1)^{\mathrm{T}}(y_1,\cdots,y_n)$$

的下三角部分给出. 综上所述，可得求解三对角 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{T}_n$ 之 Moore-Penrose 逆 $\boldsymbol{T}_n^+=(v_{ij})$ 的快速算法.

算法 2.8.4（求 $\boldsymbol{T}_n^+$）

$$x_0=0,\quad x_1=1,\quad y_0=0,\quad y_1=1$$

$$x_{k+1}=-\frac{1}{\beta}(\alpha x_k+\gamma x_{k-1})$$

$$y_{k+1}=-\frac{1}{\gamma}(\alpha y_k+\beta y_{k-1}),\quad k=1,2,\cdots,n-1$$

$$u_0=u_1=0,\quad v_0=v_1=0$$

$$u_{k+1}=-\frac{1}{\beta}(x_{n-k+2}+\alpha u_k+\gamma u_{k-1})$$

$$v_{k+1}=-\frac{1}{\gamma}(y_{n-k+2}+\alpha v_k+\beta v_{k-1})$$

$$k=1,2,\cdots,n-1$$

$$\rho=1+\sum_{j=2}^{n}x_j^2,\quad \omega=-\sum_{j=2}^{n}x_j u_j$$

$$\sigma=1+\sum_{j=2}^{n}y_j^2,\quad \tau=-\sum_{j=2}^{n}v_j y_j$$

$$v_{ij}=\begin{cases}\dfrac{x_i u_{n-j+1}}{\rho}+\dfrac{u_i x_{n-j+1}}{\rho}+\dfrac{\omega x_i x_{n-j+1}}{\rho^2}, & i\leqslant j\\[2ex] \dfrac{v_{n-i+1}y_j}{\sigma}+\dfrac{y_{n-i+1}v_j}{\sigma}+\dfrac{\tau y_{n-i+1}y_j}{\sigma^2}, & i>j\\[2ex] v_{n-j+1,n-i+1} & \text{（次对称性）}\end{cases}$$

该算法约需 $3n^2+O(n)$ 次乘除运算，$n^2+O(n)$ 次加减运算.

四、 对角相似变换

对于式(2.8.1)的实三对角 Toeplitz 矩阵，可以通过对角相似变换化为对称或“反对称”的形式.

取 n 阶对角矩阵 $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(1,\delta,\delta^2,\cdots,\delta^{n-1})\quad(\delta>0)$，有

$$\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\delta & & \\ \gamma/\delta & \alpha & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta\delta \\ & & \gamma/\delta & \alpha\end{bmatrix}$$

若 $\beta\gamma>0$，令 $\beta\delta=\gamma/\delta$，于是有 $\delta=\sqrt{\gamma/\beta}$，且

$$\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\alpha & \sqrt{\beta\gamma} & & \\ \sqrt{\beta\gamma} & \alpha & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \sqrt{\beta\gamma} \\ & & \sqrt{\beta\gamma} & \alpha\end{bmatrix}$$

若 $\beta\gamma<0$，令 $\beta\delta=-\gamma/\delta$，于是有 $\delta=\sqrt{-\gamma/\beta}$，且

$$\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\alpha & \sqrt{-\beta\gamma} & & \\ -\sqrt{-\beta\gamma} & \alpha & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \sqrt{-\beta\gamma} \\ & & -\sqrt{-\beta\gamma} & \alpha\end{bmatrix}$$

§2.9 周期三对角 Toeplitz 矩阵

如下形式的 n 阶方阵称为**周期三对角 Toeplitz 矩阵**

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta & & \xi \\ \gamma & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta \\ \eta & & \gamma & \alpha\end{bmatrix} \tag{2.9.1}$$

在构造具有周期边界条件的三次样条函数或用差分法求解具有周期边界条件的微分方程等问题中，要遇到这类矩阵.

一、 求解两类特殊周期三对角 Toeplitz 方程组

考虑求解线性方程组

$$\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f},\quad \boldsymbol{T}_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f} \tag{2.9.2}$$

的问题，其中 $\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2$是两类特殊的周期三对角 Toeplitz 矩阵

$$\boldsymbol{T}_1=\begin{bmatrix}\alpha & \beta & & \gamma \\ \gamma & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & & \gamma & \alpha\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{T}_2=\begin{bmatrix}\alpha & \beta & & \beta \\ \gamma & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta \\ \gamma & & \gamma & \alpha\end{bmatrix} \tag{2.9.3}$$

而 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_n)^{\mathrm{T}}$. 将 $\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2$分解为

$$\boldsymbol{T}_1=p\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{U}_1,\quad \boldsymbol{T}_2=p\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{U}_2 \tag{2.9.4}$$

其中 $$\boldsymbol{L}_1=\begin{bmatrix}1 & & & l \\ l & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & l & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{U}_1=\begin{bmatrix}1 & u & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & u \\ u & & & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}_2=\begin{bmatrix}1 & & & u \\ l & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & l & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{U}_2=\begin{bmatrix}1 & u & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & u \\ l & & & 1\end{bmatrix}$$

比较式(2.9.4)两边的元素知，p,l,u 仍由式(2.8.4)确定. 于是求解线性方程组(2.9.2)转化为求解

$$\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{y}=\boldsymbol{g},\quad \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y} \tag{2.9.5}$$

和

$$\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}, \quad \boldsymbol{U}_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \tag{2.9.6}$$

其中 $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)^T$, $\boldsymbol{g} = \frac{1}{p}\boldsymbol{f} = (g_1, \cdots, g_n)^T$. 由式(2.9.5),得

$$\left.\begin{aligned} & y_1 = g_1 - l y_n \\ & y_j = g_j - l y_{j-1}, \quad j = 2, \cdots, n \\ & x_n = y_n - u x_1 \\ & x_j = y_j - u x_{j+1}, \quad j = n-1, \cdots, 2, 1 \end{aligned}\right\} \tag{2.9.7}$$

从而

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1 + (-l)y_n = g_1 + (-l)g_n + (-l)^2 y_{n-1} = \\ &\quad \cdots = g_1 + (-l)g_n + (-l)^2 g_{n-1} + \cdots + \\ &\quad (-l)^{n-1} g_2 + (-l)^n y_1 \\ x_n &= y_n + (-u)x_1 = y_n + (-u)y_1 + \\ &\quad (-u)^2 y_2 + \cdots + (-u)^{n-1} y_{n-1} + (-u)^n x_n \end{aligned}$$

即

$$y_1 = \frac{g_1 + (-l)g_n + \cdots + (-l)^{n-1} g_2}{1 - (-l)^n}$$

$$x_n = \frac{y_n + (-u)y_1 + \cdots + (-u)^{n-1} y_{n-1}}{1 - (-u)^n}$$

采用嵌套过程计算 y_1, x_n,并结合式(2.8.4)和(2.9.7)得如下算法.

算法 2.9.1 (求解 $\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$)

$$p = \frac{\alpha + \operatorname{sign}(\alpha)\sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}}{2}, \quad l = \frac{\gamma}{p}, \quad u = \frac{\beta}{p}$$

$$g_k = \frac{f_k}{p}, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

$$s_1 = g_2, \quad s_j = g_{j+1} - l s_{j-1}, \quad j = 2, \cdots, n-1$$

$$s_n = g_1 - l s_{n-1}$$

$$t_n = y_{n-1}, \quad t_j = y_{j-1} - u t_{j+1}, \quad j = n-1, \cdots, 2$$

$$t_1 = y_n - ut_2$$

$$y_1 = \frac{s_n}{1-(-l)^n}, \quad x_n = \frac{t_1}{1-(-u)^n}$$

$$y_j = g_j - ly_{j-1}, \quad j = 2, \cdots, n$$

$$x_j = y_j - ux_{j+1}, \quad j = n-1, \cdots, 1$$

又由式(2.9.6)得

$$\begin{cases} y_1 = g_1 - uy_n \\ y_j = g_j - ly_{j-1}, \quad j = 2, \cdots, n \\ x_n = y_n - lx_1 \\ x_j = y_j - ux_{j+1}, \quad j = n-1, \cdots, 2, 1 \end{cases}$$

同理可推得

$$y_1 = \frac{g_1 + (-u)[g_n + (-l)g_{n-1} \cdots + (-l)^{n-2}g_2]}{1 + u(-l)^{n-1}}$$

$$x_n = \frac{y_n + (-l)[y_1 + (-u)y_2 \cdots + (-u)^{n-2}y_{n-1}]}{1 + l(-u)^{n-1}}$$

从而得如下算法.

算法 2.9.2 (求解 $T_2 x = f$)

$$p = \frac{\alpha + \operatorname{sign}(\alpha)\sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}}{2}, \quad l = \frac{\gamma}{p}, \quad u = \frac{\beta}{p}$$

$$g_k = \frac{f_k}{p}, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

$$s_1 = g_2, \quad s_j = g_{j+1} - ls_{j-1}, \quad j = 2, \cdots, n-1$$

$$s_n = g_1 - us_{n-1}$$

$$t_n = y_{n-1}, \quad t_j = y_{j-1} - ut_{j+1}, \quad j = n-1, \cdots, 2$$

$$t_1 = y_n - lt_2$$

$$y_1 = \frac{s_n}{1 + u(-l)^{n-1}}, \quad x_n = \frac{t_1}{1 + l(-u)^{n-1}}$$

$$y_j = g_j - ly_{j-1}, \quad j = 2, \cdots, n$$

$$x_j = y_j - ux_{j+1}, \quad j = n-1, \cdots, 1$$

上述两种算法约需 $5n$ 次乘除运算，$4n$ 次加减运算.

二、 求逆矩阵及广义逆矩阵

对于一般的周期三对角 Toeplitz 矩阵(2.9.1)，设其满足 $\beta\gamma \neq 0$，且分块为

$$
\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta & \xi \boldsymbol{e}_{n-2}^{(n-2)\mathrm{T}} \\ \gamma \boldsymbol{e}_1^{(n-2)} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{M} \\ \eta & 0 & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta \boldsymbol{e}_1^{(n-2)\mathrm{T}} & \xi \\ \gamma & \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}} & 0 \\ \eta \boldsymbol{e}_{n-2}^{(n-2)} & \boldsymbol{N} & \boldsymbol{J}\boldsymbol{r}\end{bmatrix}, \quad n \geqslant 4 \tag{2.9.8}
$$

其中 $\boldsymbol{c}=(\alpha,\gamma,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ ，$\boldsymbol{r}=(\alpha,\beta,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 均是 $n-2$ 维列向量，$\boldsymbol{J}$ 是 $n-2$ 阶次单位矩阵，而 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{N}$ 分别是如式(2.8.11)的 $n-2$ 阶非奇异上三角 Toeplitz 矩阵和下三角 Toeplitz 矩阵. 令

$$
\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{w} &= -\gamma \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{e}_1^{(n-2)}, & \boldsymbol{x} &= -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{c} \\
\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} &= -\xi \boldsymbol{e}_{n-2}^{(n-2)\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{-1}, & \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} &= -\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}^{-1} \\
\tilde{\boldsymbol{w}} &= -\eta \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{e}_{n-2}^{(n-2)}, & \tilde{\boldsymbol{x}} &= -\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{r} \\
\tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} &= -\beta \boldsymbol{e}_1^{(n-2)\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{-1}, & \tilde{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}} &= -\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{-1}
\end{aligned}\right\} \tag{2.9.9}
$$

由 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{N}$ 的次对称性得

$$
\boldsymbol{J}\boldsymbol{y}=\frac{\xi}{\gamma}\boldsymbol{w},\quad \boldsymbol{J}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{J}\tilde{\boldsymbol{w}}=\frac{\eta}{\beta}\tilde{\boldsymbol{y}},\quad \boldsymbol{J}\tilde{\boldsymbol{x}}=\tilde{\boldsymbol{z}} \tag{2.9.10}
$$

利用式(2.9.9)和(2.9.10)容易验证

$$
\begin{bmatrix}1 & \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} & 1 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha & \beta & \xi \boldsymbol{e}_{n-2}^{(n-2)\mathrm{T}} \\ \gamma \boldsymbol{e}_1^{(n-2)} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{M} \\ \eta & 0 & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \\ 0 & 1 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{w} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}\end{bmatrix} \tag{2.9.11}
$$

和

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & \tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}\\0 & 1 & \tilde{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha & \beta\boldsymbol{e}_1^{(n-2)\mathrm{T}} & \xi\\\gamma & \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}} & 0\\\eta\boldsymbol{e}_{n-2}^{(n-2)} & \boldsymbol{N} & \boldsymbol{Jr}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\\tilde{\boldsymbol{w}} & \tilde{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{I}\\0 & 1 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{\delta}_{11} & \tilde{\delta}_{12} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\\tilde{\delta}_{21} & \tilde{\delta}_{22} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N}\end{bmatrix}\tag{2.9.12}$$

其中

$$\delta_{11}=\alpha+\gamma\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1^{(n-2)}=\alpha+\xi\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_{n-2}^{(n-2)}$$

$$\delta_{12}=\beta+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}=\beta+\xi\boldsymbol{e}_{n-2}^{(n-2)\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

$$\delta_{21}=\eta+\gamma\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1^{(n-2)}=\eta+\gamma\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_{n-2}^{(n-2)}$$

$$\delta_{22}=\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Jc}$$

$$\tilde{\delta}_{11}=\alpha+\beta\boldsymbol{e}_1^{(n-2)\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{w}}=\alpha+\eta\boldsymbol{e}_{n-2}^{(n-2)\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$

$$\tilde{\delta}_{12}=\xi+\beta\boldsymbol{e}_1^{(n-2)\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}=\xi+\beta\boldsymbol{e}_{n-2}^{(n-2)\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{z}}$$

$$\tilde{\delta}_{21}=\gamma+\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{w}}=\gamma+\eta\tilde{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_{n-2}^{(n-2)}$$

$$\tilde{\delta}_{22}=\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\tilde{\boldsymbol{z}}$$

引入记号 $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\\delta_{21} & \delta_{22}\end{bmatrix},\quad \tilde{\boldsymbol{D}}=\begin{bmatrix}\tilde{\delta}_{11} & \tilde{\delta}_{12}\\\tilde{\delta}_{21} & \tilde{\delta}_{22}\end{bmatrix}$

则关于周期三对角 Toeplitz 矩阵(2.9.8)的逆矩阵和广义逆矩阵有如下结果.

定理 2.9.1 对于 n 阶周期三对角 Toeplitz 矩阵(2.9.8)有：

1) $\mathrm{rank}\boldsymbol{T}=n$ 的充要条件是 $\det\boldsymbol{D}\neq 0$ 或 $\det\tilde{\boldsymbol{D}}\neq 0$，且此时

$$\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 0\\0 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 0\\\boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}^{-1} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\\boldsymbol{w} & \boldsymbol{x}\end{bmatrix}\boldsymbol{D}^{-1}\begin{bmatrix}1 & \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} & 0\\0 & \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N}^{-1}\\0 & 0 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\\tilde{\boldsymbol{w}} & \tilde{\boldsymbol{x}}\\0 & 1\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{D}}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0 & \tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}\\0 & 1 & \tilde{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

2) $\mathrm{rank}\boldsymbol{T}=n-2$ 的充要条件是 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{O}$ 或 $\tilde{\boldsymbol{D}}=\boldsymbol{O}$，且当 $\boldsymbol{T}$ 是实矩阵时，有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{T}^{+}= & \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 0 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}^{-1} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}+ \\
& \frac{1}{\omega_1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \boldsymbol{w} & \boldsymbol{x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} & -\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ -\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} & 1+\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{-1} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{-1} & 0 \end{bmatrix}+ \\
& \frac{1}{\omega_2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{y} & -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} & -\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} \\ -\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} & 1+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}+ \\
& \frac{1}{\omega_1\omega_2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \boldsymbol{w} & \boldsymbol{x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} & -\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ -\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} & 1+\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{y} & \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{y} & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{z} \end{bmatrix}\times \\
& \begin{bmatrix} 1+\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} & -\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} \\ -\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} & 1+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{T}^{+}= & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N}^{-1} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}+ \\
& \frac{1}{\widetilde{\omega}_1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \widetilde{\boldsymbol{w}} & \widetilde{\boldsymbol{x}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+\widetilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{x}} & -\widetilde{\boldsymbol{w}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{x}} \\ -\widetilde{\boldsymbol{w}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{x}} & 1+\widetilde{\boldsymbol{w}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{w}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\widetilde{\boldsymbol{w}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{-1} \\ 0 & 0 & -\widetilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{-1} \end{bmatrix}+ \\
& \frac{1}{\widetilde{\omega}_2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\boldsymbol{N}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{y}} & -\boldsymbol{N}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{z}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+\widetilde{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{z}} & -\widetilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{z}} \\ -\widetilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{z}} & 1+\widetilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{y}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \widetilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} \\ 0 & 1 & \widetilde{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}+ \\
& \frac{1}{\widetilde{\omega}_1\widetilde{\omega}_2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \widetilde{\boldsymbol{w}} & \widetilde{\boldsymbol{x}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+\widetilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{x}} & -\widetilde{\boldsymbol{w}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{x}} \\ -\widetilde{\boldsymbol{w}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{x}} & 1+\widetilde{\boldsymbol{w}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{w}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{w}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{y}} & \widetilde{\boldsymbol{w}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{z}} \\ \widetilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{y}} & \widetilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{z}} \end{bmatrix}\times \\
& \begin{bmatrix} 1+\widetilde{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{z}} & -\widetilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{z}} \\ -\widetilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{z}} & 1+\widetilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{y}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \widetilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} \\ 0 & 1 & \widetilde{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

其中

$$\omega_1 = (1 + \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w})(1 + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})^2$$
$$\omega_2 = (1 + \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})(1 + \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}) - (\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z})^2$$
$$\widetilde{\omega}_1 = (1 + \widetilde{\boldsymbol{w}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{w}})(1 + \widetilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{x}}) - (\widetilde{\boldsymbol{w}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{x}})^2$$
$$\widetilde{\omega}_2 = (1 + \widetilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{y}})(1 + \widetilde{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{z}}) - (\widetilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{z}})^2$$

3) $\mathrm{rank}\boldsymbol{T} = n - 1$ 的充要条件是 $\det\boldsymbol{D} = 0$（或 $\det\widetilde{\boldsymbol{D}} = 0$），且至少某个 $\delta_{ij} \neq 0$（或 $\widetilde{\delta}_{ij} \neq 0$）. 当 $\boldsymbol{T}$ 是秩为 $n-1$ 的实矩阵时，有

$$\boldsymbol{T}^+ = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 0 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}^{-1} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} +$$
$$\frac{\delta_{ij}}{\sigma_i\tau_j}\begin{bmatrix} \lambda_1^{(i)} \\ \lambda_2^{(i)} \\ \lambda_1^{(i)}\boldsymbol{w} + \lambda_2^{(i)}\boldsymbol{x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mu_1^{(j)} & \mu_1^{(j)}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} + \mu_2^{(j)}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} & \mu_2^{(j)} \end{bmatrix} +$$
$$\frac{\boldsymbol{u}^{(i)\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{v}^{(j)}}{\sigma_i\tau_j}\begin{bmatrix} \delta_{i2} \\ -\delta_{i1} \\ \boldsymbol{u}^{(i)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta_{2j} & \boldsymbol{v}^{(j)\mathrm{T}} & -\delta_{1j} \end{bmatrix} +$$
$$\frac{1}{\sigma_i}\begin{bmatrix} \delta_{i2} \\ -\delta_{i1} \\ \boldsymbol{u}^{(i)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{u}^{(i)\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{-1} & 0 \end{bmatrix} +$$
$$\frac{1}{\tau_j}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{v}^{(j)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta_{2j} & \boldsymbol{v}^{(j)\mathrm{T}} & -\delta_{1j} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N}^{-1} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} +$$

$$\frac{\tilde{\delta}_{ij}}{\tilde{\sigma}_i\tilde{\tau}_j}\begin{bmatrix}\tilde{\lambda}_1^{(i)}\\ \tilde{\lambda}_1^{(i)}\tilde{w}+\tilde{\lambda}_2^{(i)}\tilde{x}\\ \tilde{\lambda}_2^{(i)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\mu}_1^{(j)} & \tilde{\mu}_2^{(j)} & \tilde{\mu}_1^{(j)}\tilde{y}^{\mathrm{T}}+\tilde{\mu}_2^{(j)}\tilde{z}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}+$$

$$\frac{\tilde{u}^{(i)\mathrm{T}}N^{-1}\tilde{v}^{(j)}}{\tilde{\sigma}_i\tilde{\tau}_j}\begin{bmatrix}\tilde{\delta}_{i2}\\ \tilde{u}^{(i)}\\ -\tilde{\delta}_{i1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\delta}_{2j} & -\tilde{\delta}_{1j} & \tilde{v}^{(j)\mathrm{T}}\end{bmatrix}+$$

$$\frac{1}{\tilde{\sigma}_i}\begin{bmatrix}\tilde{\delta}_{i2}\\ \tilde{u}^{(i)}\\ -\tilde{\delta}_{i1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & -\tilde{u}^{(i)\mathrm{T}}N^{-1}\end{bmatrix}+$$

$$\frac{1}{\tilde{\tau}_j}\begin{bmatrix}0\\ -N^{-1}\tilde{v}^{(j)}\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\delta}_{2j} & -\tilde{\delta}_{1j} & \tilde{v}^{(j)\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

其中

$$u^{(i)}=\delta_{i1}x-\delta_{i2}w,\quad v^{(j)}=\delta_{2j}y-\delta_{1j}z$$
$$\sigma_i=\delta_{i1}^2+\delta_{i2}^2+u^{(i)\mathrm{T}}u^{(i)},\quad \tau_j=\delta_{1j}^2+\delta_{2j}^2+v^{(j)\mathrm{T}}v^{(j)}$$
$$\lambda_1^{(i)}=\delta_{i1}-u^{(i)\mathrm{T}}x,\quad \lambda_2^{(i)}=\delta_{i2}+u^{(i)\mathrm{T}}w$$
$$\mu_1^{(j)}=\delta_{1j}-v^{(j)\mathrm{T}}z,\quad \mu_2^{(j)}=\delta_{2j}+v^{(j)\mathrm{T}}y$$
$$\tilde{u}^{(i)}=\tilde{\delta}_{i1}\tilde{x}-\tilde{\delta}_{i2}\tilde{w},\quad \tilde{v}^{(j)}=\tilde{\delta}_{2j}\tilde{y}-\tilde{\delta}_{1j}\tilde{z}$$
$$\tilde{\sigma}_i=\tilde{\delta}_{i1}^2+\tilde{\delta}_{i2}^2+\tilde{u}^{(i)\mathrm{T}}\tilde{u}^{(i)},\quad \tilde{\tau}_j=\tilde{\delta}_{1j}^2+\tilde{\delta}_{2j}^2+\tilde{v}^{(j)\mathrm{T}}\tilde{v}^{(j)}$$
$$\tilde{\lambda}_1^{(i)}=\tilde{\delta}_{i1}-\tilde{u}^{(i)\mathrm{T}}\tilde{x},\quad \tilde{\lambda}_2^{(i)}=\tilde{\delta}_{i2}+\tilde{u}^{(i)\mathrm{T}}\tilde{w}$$
$$\tilde{\mu}_1^{(j)}=\tilde{\delta}_{1j}-\tilde{v}^{(j)\mathrm{T}}\tilde{z},\quad \tilde{\mu}_2^{(j)}=\tilde{\delta}_{2j}+\tilde{v}^{(j)\mathrm{T}}\tilde{y}$$

证明 1) 由式(2.9.11)即知，$\mathrm{rank}T=n$ 的充要条件是 $\det D\neq 0$，且

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0^{\mathrm{T}}\\ 0 & 1 & 0^{\mathrm{T}}\\ w & x & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D^{-1} & O\\ O & M^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & y^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & z^{\mathrm{T}} & 1\\ 0 & I & 0\end{bmatrix}$$

整理之即得定理中 1)的第1式. 同理可证第2式.

2) 由式(2.9.11)即知，rank$\boldsymbol{T}=n-2$ 的充要条件是 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{O}$，且 $\boldsymbol{T}$ 的一种满秩分解为

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{I}\\ -\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{M}[-\boldsymbol{w}\quad -\boldsymbol{x}\quad \boldsymbol{I}]$$

于是 $\boldsymbol{T}$ 的 Moore-Penrose 逆为

$$\boldsymbol{T}^{+}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\\ -\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{I}\end{bmatrix}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{M}^{-1}\times \qquad (2.9.13)$$
$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}})^{-1}[-\boldsymbol{y}\quad \boldsymbol{I}\quad -\boldsymbol{z}]$$

由 Sherman-Morrison 公式得

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{I}-[\boldsymbol{y}\quad \boldsymbol{z}]\begin{bmatrix}1+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} & \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\\ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} & 1+\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=$$
$$\boldsymbol{I}-\frac{1}{\omega_2}[\boldsymbol{y}\quad \boldsymbol{z}]\begin{bmatrix}1+\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} & -\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\\ -\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} & 1+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

代入式(2.9.13)并整理之，即得定理中2)的第1式. 同理可证第2式.

3) 由式(2.9.11)知，rank$\boldsymbol{T}=n-1$ 的充要条件是 det$\boldsymbol{D}=0$ 且至少某个 $\delta_{ij}\neq 0$. 不妨设 $\delta_{11}\neq 0$. 因为

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ -\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}} & 1 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ 0 & 1 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\delta_{11} & 0 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ 0 & 0 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}\end{bmatrix}$$

结合式(2.9.11)得 $\boldsymbol{T}$ 的一种满秩分解

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & -\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\\ \frac{\delta_{21}}{\delta_{11}} & -\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_{11} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ -\boldsymbol{w} & -\boldsymbol{x} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\delta_{11} & -\delta_{11}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0} & \delta_{11}\boldsymbol{I}\\ \delta_{21} & -\delta_{11}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_{11}^{-1} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0} & \delta_{11}^{-2}\boldsymbol{M}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ -\delta_{11}\boldsymbol{w} & -\delta_{11}\boldsymbol{x} & \delta_{11}\boldsymbol{I}\end{bmatrix}$$

于是，$\boldsymbol{T}$ 的 Moore-Penrose 逆为

$$\boldsymbol{T}^{+}=\begin{bmatrix}\delta_{11} & -\delta_{11}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\\ \delta_{12} & -\delta_{11}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0} & \delta_{11}\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}\begin{bmatrix}\delta_{11} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0} & \delta_{11}^{2}\boldsymbol{M}^{-1}\end{bmatrix}\boldsymbol{C}^{-1}\times$$
$$\begin{bmatrix}\delta_{11} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & \delta_{21}\\ -\delta_{11}\boldsymbol{y} & \delta_{11}\boldsymbol{I} & -\delta_{11}\boldsymbol{z}\end{bmatrix} \tag{2.9.14}$$

其中 $$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\delta_{11}^{2}+\delta_{12}^{2} & -\delta_{11}(\delta_{11}\boldsymbol{w}+\delta_{12}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\\ -\delta_{11}(\delta_{11}\boldsymbol{w}+\delta_{12}\boldsymbol{x}) & \delta_{11}^{2}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{T}+\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\delta_{11}^{2}+\delta_{21}^{2} & -\delta_{11}(\delta_{11}\boldsymbol{y}+\delta_{21}\boldsymbol{z})^{\mathrm{T}}\\ -\delta_{11}(\delta_{11}\boldsymbol{y}+\delta_{21}\boldsymbol{z}) & \delta_{11}^{2}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}})\end{bmatrix}$$

利用

$$\begin{bmatrix}1 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \dfrac{\delta_{11}(\delta_{11}\boldsymbol{w}+\delta_{12}\boldsymbol{x})}{\delta_{11}^{2}+\delta_{12}^{2}} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}1 & \dfrac{\delta_{11}(\delta_{11}\boldsymbol{w}+\delta_{12}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}}{\delta_{11}^{2}+\delta_{12}^{2}}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}\delta_{11}^{2}+\delta_{12}^{2} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0} & \delta_{11}^{2}\left(\boldsymbol{I}+\dfrac{\boldsymbol{u}^{(1)}\boldsymbol{u}^{(1)\mathrm{T}}}{\delta_{11}^{2}+\delta_{12}^{2}}\right)\end{bmatrix}$$

及 Sherman-Morrison 公式，得

$$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{\delta_{11}(\delta_{11}\boldsymbol{w}+\delta_{12}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}}{\delta_{11}^{2}+\delta_{12}^{2}}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\delta_{11}^{2}+\delta_{12}^{2}} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0} & \dfrac{1}{\delta_{11}^{2}}\left(\boldsymbol{I}-\dfrac{\boldsymbol{u}^{(1)}\boldsymbol{u}^{(1)\mathrm{T}}}{\sigma_{1}}\right)\end{bmatrix}\times$$
$$\begin{bmatrix}1 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \dfrac{\delta_{11}(\delta_{11}\boldsymbol{w}+\delta_{12}\boldsymbol{x})}{\delta_{11}^{2}+\delta_{12}^{2}} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}$$

将上式及C^{-1}的类似表达式代入式(2.9.14)并整理即得定理中 3)的第 1 式.同理可证第 2 式.　　证毕

在定理 2.9.1 给出的逆矩阵和广义逆矩阵各表达式中,第 1 个矩阵是严格下三角矩阵或严格上三角矩阵,因此可利用其秩 2 或秩 1 修正矩阵,分别求得逆矩阵或广义逆矩阵的上三角和下三角部分,所需运算量为$O(n^2)$.

§2.10　带状 Toeplitz 矩阵

一、 求逆矩阵的 Allgower 算法[22]

考虑对称的 n 阶带状 Toeplitz 矩阵

$$\boldsymbol{T}_n = \begin{bmatrix} \xi_0 & \cdots & \xi_r & & \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \\ \xi_r & & \ddots & & \xi_r \\ & \ddots & & \ddots & \vdots \\ & & \xi_r & \cdots & \xi_0 \end{bmatrix}, \quad \xi_r \neq 0 \qquad (2.10.1)$$

并设$\boldsymbol{T}_n^{-1} = (v_{ij})_{i,j=1}^n$,其中$v_{ij} = v_{ji}$.如果求得$\boldsymbol{T}_n^{-1}$的$\dfrac{r(r+1)}{2}$个元素

$$v_{ij}, \quad j = i, i+1, \cdots, r \text{ 和 } i = 1, 2, \cdots, r \qquad (2.10.2)$$

则由$\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{T}_n^{-1} = \boldsymbol{I}$得

$$\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{T}_n\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_2, \ \cdots, \ \boldsymbol{T}_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{e}_n$$

其中$\boldsymbol{v}_j = (v_{1j}, \cdots, v_{nj})^{\mathrm{T}}$.于是,由第 1 式可递推求得$v_{r+1,1}, \cdots, v_{n1}$;由第 2 式可求得$v_{r+1,2}, \cdots, v_{n2}$;…,最后由第 n 式可求得$v_{r+1,n}, \cdots, v_{nn}$,从而得到$\boldsymbol{T}_n^{-1}$的全部元素(可利用$\boldsymbol{T}_n^{-1}$的对称性及次对称性求解).

以下讨论 $r = 1$ 和 2 时,确定$\boldsymbol{T}_n^{-1}$的部分元素(2.10.2).

情形1：$r=1$

此时 $\boldsymbol{T}_n$ 是对称三对角 Toeplitz 矩阵，只须确定 v_{11}．由求逆的公式法知

$$v_{11}=\frac{\det \boldsymbol{T}_{n-1}}{\det \boldsymbol{T}_n}$$

利用定理 2.8.1 得到 $\det\boldsymbol{T}_{n-1}$ 和 $\det\boldsymbol{T}_n$ 的表达式，即可求得 v_{11}．

情形2：$r=2$

此时 $\boldsymbol{T}_n=(t_{ij})_{n\times n}$ 是对称五对角 Toeplitz 矩阵，须确定 v_{11},v_{12} 和 v_{22}．记 $A_n=\det\boldsymbol{T}_n$，又记 B_{n-1},C_{n-1},D_{n-1} 分别是 $\det\boldsymbol{T}_n$ 中 t_{12}，t_{13}，t_{22}的余子式．由行列式展开定理得

$$\begin{cases}A_n=\xi_0A_{n-1}-\xi_1B_{n-1}+\xi_2C_{n-1}\\ B_n=\xi_1A_{n-1}-\xi_2B_{n-1}\\ C_n=\xi_1B_{n-1}-\xi_2D_{n-1}\\ D_n=\xi_0A_{n-1}-\xi_2^2A_{n-2}\end{cases}$$

将其写成矩阵形式，有

$$\boldsymbol{X}_n=\begin{bmatrix}A_n\\ B_n\\ C_n\\ D_n\\ A_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi_0 & -\xi_1 & \xi_2 & 0 & 0\\ \xi_1 & -\xi_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \xi_1 & 0 & -\xi_2 & 0\\ \xi_0 & 0 & 0 & 0 & -\xi_2^2\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{n-1}\\ B_{n-1}\\ C_{n-1}\\ D_{n-1}\\ A_{n-2}\end{bmatrix}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}_{n-1}$$

于是 $\boldsymbol{X}_{n+i}=\boldsymbol{M}^i\boldsymbol{X}_n\ (i=1,2,\cdots,)$．矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的特征多项式为

$$\begin{aligned}f(\lambda)=&\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M})=\lambda^5-(\xi_0-\xi_2)\lambda^4-\\ &(\xi_0\xi_2-\xi_1^2)\lambda^3+\xi_2(\xi_0\xi_2-\xi_1^2)\lambda^2+\xi_2^3(\xi_0-\xi_2)\lambda-\xi_2^5=\\ &(\lambda-\xi_2)[\lambda^4+(2\xi_2-\xi_0)\lambda^3+(2\xi_2^2+\xi_1^2-2\xi_0\xi_2)\lambda^2+\\ &\xi_2^2(2\xi_2-\xi_0)\lambda+\xi_2^4]\end{aligned}$$

从而由 Hamilton-Cayley 定理知，$f(\boldsymbol{M})\boldsymbol{X}_n=\boldsymbol{O}$，即

$$\boldsymbol{X}_{n+5}-(\xi_0-\xi_2)\boldsymbol{X}_{n+4}-(\xi_0\xi_2-\xi_1^2)\boldsymbol{X}_{n+3}+$$

$$\xi_2(\xi_0\xi_2-\xi_1^2)\boldsymbol{X}_{n+2}+\xi_2^3(\xi_0-\xi_2)\boldsymbol{X}_{n+1}-\xi_2^5\boldsymbol{X}_n=\boldsymbol{O}$$

可见 A_n,B_n,C_n,D_n 都是常系数齐次差分方程

$$x_{n+5}-(\xi_0-\xi_2)x_{n+4}-(\xi_0\xi_2-\xi_1^2)x_{n+3}+$$
$$\xi_2(\xi_0\xi_2-\xi_1^2)x_{n+2}+\xi_2^3(\xi_0-\xi_2)x_{n+1}-\xi_2^5x_n=0$$

的解. 解出它们后,可求得

$$v_{11}=A_{n-1}/A_n,\quad v_{12}=-B_{n-1}/A_n,\quad v_{22}=D_{n-1}/A_n$$

利用之,可求出 $\boldsymbol{T}_n^{-1}$ 的全部元素.

例 2.10.1 取 $\xi_0=3,\xi_1=2,\xi_2=1$. 可求得

$$f(\lambda)=(\lambda-1)^3(\lambda^2+\lambda+1)$$

求解差分方程

$$x_{n+5}-2x_{n+4}+x_{n+3}-x_{n+2}+2x_{n+1}-x_n=0$$

得

$$\begin{cases}A_n=\dfrac{1}{9}\left(10+12n+3n^2-\cos\dfrac{2\pi n}{3}+\sqrt{3}\sin\dfrac{2\pi n}{3}\right)\\ B_n=\dfrac{1}{9}\left(4+9n+3n^2-4\cos\dfrac{2\pi n}{3}\right)\\ C_n=\dfrac{1}{3}\left(1-\cos\dfrac{2\pi n}{3}-\sqrt{3}\sin\dfrac{2\pi n}{3}\right)\\ D_n=\dfrac{1}{9}\left(5+18n+6n^2-5\cos\dfrac{2\pi n}{3}-3\sqrt{3}\sin\dfrac{2\pi n}{3}\right)\end{cases}$$

例 2.10.2 取 $\xi_0=6,\xi_1=-4,\xi_2=1$. 可求得 $f(\lambda)=(\lambda-1)^5$. 于是

$$\begin{cases}A_n=\dfrac{1}{12}(n+1)(n+2)^2(n+3)\\ B_n=-\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)(n+3)\\ D_n=\dfrac{1}{12}n(n+1)(n+3)(5n+4)\end{cases}$$

利用之可求得

$$v_{ij}=-\frac{(n+1-i)(n+2-i)j(j+1)}{1!3!(n+1)(n+2)(n+3)}\times$$
$$[(i+1)(j-1)(n+3)-i(j+2)(n+1)]$$

二、 求解线性方程组及逆矩阵的 Trench 算法

考虑带状 Toeplitz 矩阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\xi_0 & \cdots & \xi_r & & \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \\ \xi_{-s} & & \ddots & & \xi_r \\ & \ddots & & \ddots & \vdots \\ & & \xi_{-s} & \cdots & \xi_0\end{bmatrix},\quad \xi_r\xi_{-s}\neq 0 \tag{2.10.3}$$

先求解以带状 Toeplitz 矩阵(2.10.3)为系数阵的线性方程组

$$\boldsymbol{Tx}=\boldsymbol{b} \tag{2.10.4}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$,并假设

$$1\leqslant r\leqslant s\leqslant n-1 \tag{2.10.5}$$

所得的算法也可用于 $1\leqslant s\leqslant r\leqslant n-1$ 的情形. 这是因为 $\boldsymbol{JTJ}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{J}$ 是次单位矩阵,且线性方程组(2.10.4)可转化为 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{x}}=\hat{\boldsymbol{b}}$ 其中 $\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Jx}$, $\hat{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{Jb}$,而 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$ 满足(2.10.5).

定理 2.10.1　设式(2.10.3)的带状 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{T}$ 非奇异,数 $c_{-r-s+1},\cdots,c_{r+n-1}$ 和 $z_{-s+1},\cdots,z_{n+r}$ 分别由下式确定:

$$c_i=\begin{cases}0, & r-s+1\leqslant i<0\\ \xi_r^{-1}, & i=0\\ -\xi_r^{-1}\sum\limits_{k=-s}^{r-1}\xi_k c_{k+i-r}, & 1\leqslant i\leqslant r+n-1\end{cases} \tag{2.10.6}$$

$$z_i = \begin{cases} 0, & -s+1 \leqslant i \leqslant r \\ \xi_r^{-1}\left(b_{i-r} - \sum\limits_{k=-s}^{r-1} \xi_k z_{k+i-r}\right), & r+1 \leqslant i \leqslant n+r \end{cases} \tag{2.10.7}$$

则 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组(2.10.4)之解的充要条件是

$$x_i = z_i + \sum_{j=1}^{r} y_j c_{i-j}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n \tag{2.10.8}$$

其中 $y_1, \cdots, y_r$ 满足 r 阶 Toeplitz 线性方程组

$$\sum_{j=1}^{r} c_{n+i-j} y_j = -z_{n+i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant r \tag{2.10.9}$$

证明 式(2.10.4)等价于线性方程组

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccc|ccc} \xi_{-s} & \cdots & \xi_{-1} & \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_r & & & & & \\ & \ddots & \vdots & \xi_{-1} & \ddots & \ddots & & \ddots & & & & \\ & & \xi_{-s} & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \xi_r & & & \\ & & & \xi_{-s} & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \xi_r & & \\ & & & & \ddots & & \ddots & \ddots & \xi_1 & \vdots & \ddots & \\ & & & & & \xi_{-s} & \cdots & \xi_{-1} & \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_r \end{array}\right] \tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b} \tag{2.10.10}$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{x}} = (x_{-s+1}, \cdots, x_{n+r})^{\mathrm{T}}$，且

$$x_i = 0, \quad -s+1 \leqslant i \leqslant 0 \text{ 和 } n+1 \leqslant i \leqslant n+r \tag{2.10.11}$$

将式(2.10.10)写成分量形式

$$\sum_{k=-s}^{r} \xi_k x_{k+i} = b_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n \tag{2.10.12}$$

由式(2.10.7)，得

$$\sum_{k=-s}^{r} \xi_k z_{k+i} = b_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n \tag{2.10.13}$$

若 $i \geqslant 1$ 且 $1 \leqslant j \leqslant r$，则 $i - j + r \geqslant 1$，由式(2.10.6)得

$$\sum_{k=-s}^{r}\xi_k c_{k+i-j}=\sum_{k=-s}^{r}\xi_k c_{k+(i-j+r)-r}=0 \qquad (2.10.14)$$

充分性. 取

$$x_i=z_i+\sum_{j=1}^{r}y_j c_{i-j}, \quad -s+1\leqslant i\leqslant n+r \qquad (2.10.15)$$

则由式(2.10.6),(2.10.7)和(2.10.9)知,式(2.10.11)成立. 于是,由式(2.10.13)~(2.10.15)可推得

$$\sum_{k=-s}^{r}\xi_k x_{k+i}=\sum_{k=-s}^{r}\xi_k z_{k+i}+\sum_{k=-s}^{r}\xi_k\Big(\sum_{j=1}^{r}y_j c_{k+i-j}\Big)=$$

$$b_i+\sum_{j=1}^{r}y_j\Big(\sum_{k=-s}^{r}\xi_k c_{k+i-j}\Big)=b_i, \quad 1\leqslant i\leqslant n$$

必要性. 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 是方程组(2.10.4)的解. 令

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=(\underbrace{0,\cdots,0}_{s},x_1,\cdots,x_n,\underbrace{0,\cdots,0}_{r})^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{z}=(\underbrace{0,\cdots,0}_{s},z_1,\cdots,z_{n+r})^{\mathrm{T}}$$

又令 $$\boldsymbol{w}=\tilde{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{z}=(w_{-s+1},\cdots,w_0,w_1,\cdots,w_{n+r})^{\mathrm{T}}$$

则由式(2.10.12)和(2.10.13)知, $\boldsymbol{w}$ 满足

$$\left.\begin{aligned} &w_i=0, && -s+1\leqslant i\leqslant 0 \\ &\sum_{k=-s}^{r}\xi_k w_{k+i}=0, && 1\leqslant i\leqslant n \end{aligned}\right\} \qquad (2.10.16)$$

这是含 $n+r+s$ 个未知量, $n+s$ 个独立方程的线性方程组,其解空间是 r 维的. 由式(2.10.14)易知 r 个向量

$$\boldsymbol{u}_j=(c_{-s+1-j},c_{-s+2-j},\cdots,c_{r+n-j})^{\mathrm{T}}, \quad 1\leqslant j\leqslant r$$

是式(2.10.16)的解空间的一组基. 从而,存在 $y_1,\cdots,y_r$,使得

$$\tilde{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{z}=\boldsymbol{w}=\sum_{j=1}^{r}y_j\boldsymbol{u}_j$$

由此即得式(2.10.8)和(2.10.9).

证毕

由定理 2.10.1 得求解线性方程组(2.10.4)的 **Trench 算法**[93]：

第一步： 由式(2.10.6)求出 $c_{-r-s+1},\cdots,c_{r+n-1}$；

第二步： 由式(2.10.7)求出 $z_{-s+1},\cdots,z_{n+r}$；

第三步： 求解 r 阶线性方程组(2.10.9)得到 $y_1,\cdots,y_r$；

第四步： 利用式(2.10.8)求出 $x_1,\cdots,x_n$.

第一、二、四步需乘除法次数分别为 $(r+s)(2n+r-s-1)/2$ 、$n+(r+s)(2n-r-s-1)/2$ 和 $rn-r(r-1)/2$. 而式(2.10.9)是以 r 阶 Toeplitz 阵为系数阵的线性方程组，因此，有 $O(r^2)$ 算法解之. 故当 r 比 n 小得多，且 $s=n-1$ 时，该算法运算量约为 $O(n^2)$. 若 r 与 s 均很小，则约需 $(2r+2s+1)n$ 次乘除运算.

特别地，当 $r=0$ 时，$\boldsymbol{T}$ 是下三角 Toeplitz 矩阵，$\boldsymbol{x}=(z_1,\cdots,z_n)^{\mathrm{T}}$ 是方程组(2.10.4)的解，其中 z_i 由式(2.10.7)确定.

当 $r=s=1$ 时，$\boldsymbol{T}$ 是三对角 Toeplitz 矩阵. 此时算法简化为：

$$
\begin{cases}
c_0 = 1/\xi_1, \quad c_1 = -\xi_0 c_0/\xi_1 \\
c_i = -(\xi_0 c_{i-1} + \xi_{-1} c_{i-2})/\xi_1, \quad i = 1,2,\cdots,n \\
z_1 = 0, \quad z_2 = b_1/\xi_1 \\
z_i = (b_{i-1} - \xi_0 z_{i-1} - \xi_{-1} z_{i-2})/\xi_1, \quad i = 3,\cdots,n+1 \\
y_1 = -z_{n+1}/c_n, \quad x_i = z_i + y_1 c_{i-1}, \quad i = 1,2,\cdots,n
\end{cases}
$$

该算法需 $7n+1$ 次乘除运算，$4n-3$ 次加减运算.

由定理 2.10.1 可看出，式(2.10.3)的带状 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{T}$ 可逆的充要条件是方程组(2.10.9)的系数阵 $\boldsymbol{C}=(c_{n+i-j})_{i,j=1}^{r}$ 可逆. 下面定理给出了利用已得到的 c_i 及 $\boldsymbol{C}^{-1}=(w_{ij})_{i,j=1}^{r}$ 求 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 的公式.

定理 2.10.2 设式(2.10.3)的带状 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{T}$ 是可逆的，则 $\boldsymbol{T}^{-1}=(v_{ij})_{i,j=1}^{n}$ 的元素为

$$v_{ij}=c_{i-j-r}-\sum_{p=1}^{r}\sum_{q=1}^{r}w_{pq}c_{n+q-j-r}c_{i-p},\quad 1\leqslant i,j\leqslant n$$

(2.10.17)

证明　对线性方程组 $\boldsymbol{Tx}=\boldsymbol{e}_j$ $(1\leqslant j\leqslant n)$ 利用定理 2.10.1 得

$$\boldsymbol{x}=(v_{1j},v_{2j},\cdots,v_{nj})^{\mathrm{T}}\quad (\text{即 } \boldsymbol{x} \text{ 是 } \boldsymbol{T}^{-1} \text{ 的第 } j \text{ 列})$$

此时式(2.10.7)变为

$$z_i=\begin{cases}0, & -s+1\leqslant i\leqslant j+r-1\\ \xi_r^{-1}, & i=j+r\\ -\xi_r^{-1}\sum\limits_{k=-s}^{r-1}\xi_k z_{k+i-r}, & j+r+1\leqslant i\leqslant n+r\end{cases}$$

与式(2.10.6)比较知，$z_i=c_{i-j-r}$，从而由式(2.10.8)，得

$$v_{ij}=c_{i-j-r}+\sum_{p=1}^{r}y_p c_{i-p},\quad 1\leqslant i\leqslant n \tag{2.10.18}$$

而式(2.10.9)变为

$$\sum_{p=1}^{r}c_{n+q-p}y_p=-c_{n+q-j-r},\quad 1\leqslant q\leqslant r$$

解之，得　$$y_p=-\sum_{q=1}^{r}w_{pq}c_{n+q-j-r},\quad 1\leqslant p\leqslant r$$

代入式(2.10.18)即得式(2.10.17).　　证毕

当 $r=0$ 时，$\boldsymbol{T}$ 是下三角 Toeplitz 矩阵，则 $\boldsymbol{T}^{-1}=(v_{ij})$ 的元素为

$$v_{ij}=c_{i-j},\quad 1\leqslant i,j\leqslant n$$

而
$$c_i=\begin{cases}0, & i<0\\ \xi_0^{-1}, & i=0\\ -\xi_0^{-1}\sum\limits_{k=-s}^{-1}\xi_k c_{k+i}, & i\geqslant 1\end{cases}$$

当 $r = s = 1$ 时，$\boldsymbol{T}$ 是三对角 Toeplitz 矩阵. 逆阵的元素为

$$v_{ij} = c_{i-j-1} - \frac{c_{n-j}c_{i-1}}{c_n}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n$$

而
$$c_i = \begin{cases} 0, & i < 0 \\ \xi_1^{-1}, & i = 0 \\ -\xi_1^{-1}(\xi_0 c_{i-1} + \xi_{-1} c_{i-2}), & i \geqslant 1 \end{cases}$$

三、 求逆矩阵的 Trench 算法[33]

在 § 2.3 的 Trench-Zohar 算法中取

$$\sigma_j^{(n-1)} = \eta_{-j}^{(n-1)}, \quad j = 1, 2, \cdots, n-1$$

则 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{T}^{-1} = (v_{ij})_{i,j=1}^n$ 的元素可按如下过程求得，即

$$\omega_{n-1} = \xi_0 - \sum_{j=1}^{n-1} \xi_{-j}\sigma_j^{(n-1)} = \xi_0 - \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j \eta_j^{(n-1)} \tag{2.10.19}$$

$$\left.\begin{aligned} & v_{11} = \omega_{n-1}^{-1} \\ & v_{i+1,1} = -\omega_{n-1}^{-1}\eta_i^{(n-1)}, \quad v_{1,j+1} = -\omega_{n-1}^{-1}\sigma_j^{(n-1)} \\ & \qquad\qquad i, j = 1, 2, \cdots, n-1 \\ & v_{i+1,j+1} = v_{ij} + \omega_{n-1}^{-1}(\eta_i^{(n-1)}\sigma_j^{(n-1)} - \sigma_{n-i}^{(n-1)}\eta_{n-j}^{(n-1)}) \\ & \qquad\qquad i, j = 1, 2, \cdots, n-1 \end{aligned}\right\} \tag{2.10.20}$$

而由式(2.3.1)知，$\sigma_j^{(n-1)}$ 和 $\eta_j^{(n-1)}$ 应满足

$$\sum_{j=1}^{n-1} \xi_{i-j}\sigma_j^{(n-1)} = \xi_i, \quad \sum_{j=1}^{n-1} \xi_{j-i}\eta_j^{(n-1)} = \xi_{-i}, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1 \tag{2.10.21}$$

若 $\boldsymbol{T}$ 是式(2.10.3)的带状 Toeplitz 矩阵，令

$$\begin{cases}\sigma_0^{(n-1)}=-1\\ \sigma_j^{(n-1)}=0,\quad n\leqslant j\leqslant n+s-1\text{ 或 }-r+1\leqslant j\leqslant -1\\ \eta_0^{(n-1)}=-1\\ \eta_j^{(n-1)}=0,\quad n\leqslant j\leqslant n+r-1\text{ 或 }-s+1\leqslant j\leqslant -1\end{cases}\tag{2.10.22}$$

则式(2.10.21)可简化为

$$\sum_{k=-s}^{r}\xi_k\sigma_{i-k}^{(n-1)}=0,\quad \sum_{k=-s}^{r}\xi_k\eta_{i+k}^{(n-1)}=0,\quad -\infty<i<\infty\tag{2.10.23}$$

求满足条件式(2.10.22)的差分方程式(2.10.23)的解

$$\sigma_{-r}^{(n-1)},\ \sigma_0^{(n-1)},\ \sigma_1^{(n-1)},\ \cdots,\ \sigma_{n-1}^{(n-1)}$$

和

$$\eta_{-s}^{(n-1)},\ \eta_0^{(n-1)},\ \eta_1^{(n-1)},\ \cdots,\ \eta_{n-1}^{(n-1)}\tag{2.10.24}$$

则由式(2.10.19),(2.10.22)和(2.10.23)(在(2.10.23)中取 $i=0$),得

$$\omega_{n-1}=-\sum_{j=0}^{n-1}\xi_{-j}\sigma_j^{(n-1)}=-\sum_{j=0}^{s}\xi_{-j}\sigma_j^{(n-1)}=$$
$$-\sum_{k=-s}^{0}\xi_k\sigma_{-k}^{(n-1)}=-\sum_{k=-s}^{r-1}\xi_k\sigma_{-k}^{(n-1)}=\xi_r\sigma_{-r}^{(n-1)}\tag{2.10.25}$$

同理 $$\omega_{n-1}=\xi_{-s}\eta_{-s}^{(n-1)}$$

由式(2.10.25)和(2.10.20)即可求出 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 的全部元素.

利用 Trench-Zohar 算法求 $\sigma_j^{(n-1)}$ 及 $\eta_j^{(n-1)}$ 时,计算量为$O(n^2)$;而当 $r+s<n-1$ 时,求解差分方程式(2.10.23),得到式(2.10.24)诸元素的计算量仅为 $O(n)$. 如果差分方程式(2.10.23)不易求解,结合 Trench-Zohar 算法可以得到求 $\sigma_j^{(n-1)}$ 及 $\eta_j^{(n-1)}$ 的如下修正算法:

设 $r+s\leqslant k<n-1$ 且 $\boldsymbol{T}_k,\boldsymbol{T}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{T}_n$ 均可逆.

第一步： 将式(2.10.21)中的 $n-1$ 换成 k，并解得

$$\sigma_1^{(k)}, \cdots, \sigma_k^{(k)} \text{ 和 } \eta_1^{(k)}, \cdots, \eta_k^{(k)}$$

然后计算 $\omega_k = \xi_0 - \sum_{j=1}^{s} \xi_{-j}\sigma_j^{(k)} = \xi_0 - \sum_{j=1}^{r} \xi_j \eta_j^{(k)}$

第二步： 对 $k+1 \leqslant m \leqslant n-1$，计算

$$\sigma_m^{(m)} = -\omega_{m-1}^{-1} \sum_{j=m-r}^{m-1} \xi_{m-j}\sigma_j^{(m-1)}$$

$$\eta_m^{(m)} = -\omega_{m-1}^{-1} \sum_{j=m-s}^{m-1} \xi_{-m+j}\eta_j^{(m-1)}$$

$$\sigma_i^{(m)} = \sigma_i^{(m-1)} - \sigma_m^{(m)}\eta_{m-i}^{(m-1)}$$

$$i = 1, \cdots, s-1; i = m-r+1, \cdots, m-1$$

$$\eta_i^{(m)} = \eta_i^{(m-1)} - \eta_m^{(m)}\sigma_{m-i}^{(m-1)}$$

$$i = 1, \cdots, r-1; i = m-s+1, \cdots, m-1$$

$$\omega_m = (1 - \sigma_m^{(m)}\eta_m^{(m)})\omega_{m-1}$$

第三步： 计算

$$\sigma_i^{(n-1)} = -\frac{1}{\xi_{-s}} \sum_{j=-r}^{s-1} \xi_{-j}\sigma_{i-s+j}^{(n-1)}, \quad i = s, \cdots, m-r$$

$$\eta_i^{(n-1)} = -\frac{1}{\xi_r} \sum_{j=-s}^{r-1} \xi_j \eta_{i-r+j}^{(n-1)}, \quad i = r, \cdots, m-s$$

其中

$$\sigma_0^{(n-1)} = -1, \quad \sigma_j^{(n-1)} = 0, \quad -r+1 \leqslant j \leqslant -1$$

$$\eta_0^{(n-1)} = -1, \quad \eta_j^{(n-1)} = 0, \quad -s+1 \leqslant j \leqslant -1$$

§2.11 Toeplitz 矩阵的特征问题

对于一般 Toeplitz 矩阵的特征值与特征向量，相应的数值算法较少. 本节介绍求对称带状 Toeplitz 矩阵及 Hermite 型 Toeplitz 矩阵特征问题的计算方法.

一、 Handy-Barlow 算法

先介绍一类特殊的矩阵.

定义 2.11.1 如果 n 阶方阵 $S=(s_{ij})_{i,j=1}^{n}$ 的元素满足

$$s_{i-1,j}+s_{i+1,j}=s_{i,j-1}+s_{i,j+1},\quad i,j=1,2,\cdots,n \tag{2.11.1}$$

其中规定 $s_{0j}=s_{i0}=s_{i,n+1}=s_{n+1,j}=0$，则称 S 为**交叉和矩阵**.

显然，交叉和矩阵由它的第 1 行（或第 1 列）元素完全确定. 例如5 阶交叉和矩阵为

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ b & a+c & b+d & c+e & d \\ c & b+d & a+c+e & b+d & c \\ d & c+e & b+d & a+c & b \\ e & d & c & b & a \end{bmatrix}$$

n 阶三对角矩阵

$$G=Z+Z^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.11.2}$$

也是交叉和矩阵. 交叉和矩阵具有如下一些性质.

定理 2.11.1 设 $S=(s_{ij})_{i,j=1}^{n}$ 和 $R=(r_{ij})_{i,j=1}^{n}$ 均为交叉和矩阵，ρ 是数，则

1) ρS ，$S+R$ ，SR 均是交叉和矩阵；

2) $$S=\sum_{j=0}^{n-1}\gamma_{j+1}G^{j}; \tag{2.11.3}$$

其中 G 如式(2.11.2)，而 γ_j $(j=1,2,\cdots,n)$ 可通过求解方程组

$$Ur=c \tag{2.11.4}$$

得到，式中 $r=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)^{\mathrm{T}}$，$c$ 是 S 的第1列元素，$U=$

$(u_{ij})_{i,j=1}^{n}$ 是上三角矩阵，其元素满足

$$u_{ij}=\begin{cases}u_{i-1,j-1}+u_{i+1,j-1}, & 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\\ 0, & 1\leqslant j<i\leqslant n\end{cases}\tag{2.11.5}$$

这里规定 $u_{0j}=u_{n+1,j}=0,\ u_{00}=1$；

3) $\boldsymbol{S}$ 的特征值为

$$\lambda_k=\sum_{j=0}^{n-1}\gamma_{j+1}\left(2\cos\frac{k\pi}{n+1}\right)^j,\quad k=1,2,\cdots,n\tag{2.11.6}$$

对应的单位正交向量为

$$\boldsymbol{q}_k=\sqrt{\frac{2}{n+1}}\left(\sin\frac{k\pi}{n+1},\sin\frac{2k\pi}{n+1},\cdots,\sin\frac{nk\pi}{n+1}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$k=1,2,\cdots,n\tag{2.11.7}$$

证明 1) $\rho\boldsymbol{S}$ 与 $\boldsymbol{S}+\boldsymbol{R}$ 显然是交叉和矩阵. 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{SR}=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$，则

$$a_{i-1,j}+a_{i+1,j}=\sum_{k=1}^{n}(s_{i-1,k}+s_{i+1,k})r_{k,j}=$$

$$\sum_{k=1}^{n}(s_{i,k-1}+s_{i,k+1})r_{k,j}=\sum_{l=1}^{n}s_{il}(r_{l+1,j}+r_{l-1,j})=$$

$$\sum_{l=1}^{n}s_{il}(r_{l,j-1}+r_{l,j+1})=a_{i,j-1}+a_{i,j+1}$$

故 $\boldsymbol{SR}$ 是交叉和矩阵.

2) 由 1) 知 $\sum_{j=0}^{n-1}\gamma_{j+1}\boldsymbol{G}^j$ 仍是交叉和矩阵. 令

$$\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{G}\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{G}^{n-1}\boldsymbol{e}_1)$$

则 $\boldsymbol{U}$ 的元素由式(2.11.5)确定. 又由式(2.11.4)得

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{r}=\sum_{j=0}^{n-1}\gamma_{j+1}\boldsymbol{G}^j\boldsymbol{e}_1=\left(\sum_{j=0}^{n-1}\gamma_{j+1}\boldsymbol{G}^j\right)\boldsymbol{e}_1$$

即 $\sum_{j=0}^{n-1}\gamma_{j+1}\boldsymbol{G}^j$ 的第1列元素与 $\boldsymbol{S}$ 的第1列元素相同，故式(2.11.3)

成立.

3) 由定理 2.8.1 知,矩阵 G 的特征值为

$$\mu_k = 2\cos\frac{k\pi}{n+1},\quad k = 1,2,\cdots,n$$

对应的单位正交特征向量 q_k 如式(2.11.7),从而由式(2.11.3)得 S 的特征值

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{n-1}\gamma_{j+1}\mu_k^j,\quad k = 1,2,\cdots,n$$

对应的单位正交特征向量仍为 q_k. 证毕

考虑求解 n 阶对称带状 Toeplitz 矩阵(2.10.1)的特征问题,并假定 $r-1 \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$(其中[·]表示取整函数).引入 n 阶方阵

$$H_n = \begin{bmatrix} \xi_2 & \cdots & \xi_r & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & & & \vdots \\ \xi_r & \iddots & & & & 0 \\ 0 & & & & \iddots & \xi_r \\ \vdots & & & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \xi_r & \cdots & \xi_2 \end{bmatrix} \tag{2.11.8}$$

(第三章称之为 Hankel 矩阵).如果令 $S = T_n - H_n$,易知 S 是交叉和矩阵,其第 1 列元素为

$$c = (\xi_0 - \xi_2,\cdots,\xi_{k-2} - \xi_k,\xi_{k-1},\xi_k,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}} \tag{2.11.9}$$

Handy-Barlow 算法[156]的计算步骤如下:

第一步:由方程组(2.11.4)求出 $r = (\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)^{\mathrm{T}}$,其中 c 如式(2.11.9);

第二步:计算交叉和矩阵 S 的特征值(2.11.6)和特征向量(2.11.7),则有

$$S = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}} = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j q_j q_j^{\mathrm{T}}$$

式中 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,而 $Q = (q_1\ q_2\ \cdots\ q_n)$ 是正交矩阵;

第三步：记式(2.11.8)的矩阵 H_n 左上角的 $r-1$ 阶子矩阵为

$$\widetilde{H}=\begin{bmatrix}\xi_2 & \cdots & \xi_r\\ \vdots & \iddots & \\ \xi_r & & \end{bmatrix}$$

按标准方法求矩阵 $\widetilde{H}$ 的特征值和特征向量，有

$$\widetilde{H}=\sum_{j=1}^{r-1}\mu_j p_j p_j^{\mathrm{T}}$$

其中 μ_j $(j=1,2,\cdots,r-1)$ 是 $\widetilde{H}$ 的特征值，p_j $(j=1,2,\cdots,r-1)$ 是对应的 $r-1$ 维单位正交特征向量. 注意到 H_n 的右下角 $r-1$ 阶子矩阵为 $J\widetilde{H}J$ (J 是 $r-1$ 阶次单位矩阵)，则有

$$H_n=\sum_{j=1}^{r-1}\mu_j\begin{bmatrix}p_j\\ 0\end{bmatrix}[p_j^{\mathrm{T}}\quad 0^{\mathrm{T}}]+\sum_{j=1}^{r-1}\mu_j\begin{bmatrix}0\\ Jp_j\end{bmatrix}[0^{\mathrm{T}}\quad (Jp_j)^{\mathrm{T}}]$$

第四步：由第二步和第三步的结果得

$$T_n=S+H_n=Q[\Lambda+Q^{\mathrm{T}}HQ]Q^{\mathrm{T}}=$$

$$Q\Big(\Lambda+\sum_{j=1}^{r-1}\mu_j Q^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}p_j\\ 0\end{bmatrix}[p_j^{\mathrm{T}}\quad 0^{\mathrm{T}}]Q+$$

$$\sum_{j=1}^{r-1}\mu_j Q^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0\\ Jp_j\end{bmatrix}[0^{\mathrm{T}}\quad (Jp_j)^{\mathrm{T}}]Q\Big)Q^{\mathrm{T}}$$

于是，求 T_n 的特征问题可转化为求 $2r-2$ 个对角秩 1 修正矩阵的特征问题(§1.10(三))，即

$D_1=\Lambda$，　$W_1=Q^{\mathrm{T}}$

对 $j=1,2,\cdots,2r-2$

$$z_j=\begin{cases}W_j\begin{bmatrix}p_j\\ 0\end{bmatrix}, & j\leqslant r-1\\ W_j\begin{bmatrix}0\\ Jp_{j-r+1}\end{bmatrix}, & j>r-1\end{cases}$$

$$\rho_j=\begin{cases}\mu_j, & j\leqslant r-1\\ \mu_{j-r+1}, & j>r-1\end{cases}$$

$\boldsymbol{D}_j + \rho_j \boldsymbol{z}_j \boldsymbol{z}_j^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}_{j+1} \boldsymbol{D}_{j+1} \boldsymbol{P}_{j+1}^{\mathrm{T}}$　（$\boldsymbol{D}_{j+1}$ 的对角元素是 $\boldsymbol{D}_j + \rho_j \boldsymbol{z}_j \boldsymbol{z}_j^{\mathrm{T}}$ 的特征值，$\boldsymbol{P}_{j+1}$ 的列向量是对应的单位特征向量）

$\boldsymbol{W}_{j+1} = \boldsymbol{P}_{j+1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{W}_j$

最后得

$$\boldsymbol{T}_n = \boldsymbol{W}_{2r-1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}_{2r-1} \boldsymbol{W}_{2r-1}$$

从而得到 $\boldsymbol{T}_n$ 的特征值和特征向量.

该算法所需运算量约为 $18rn^2$（假如在求对角秩 1 修正矩阵特征问题时没采用压缩处理，否则计算量更少）. 实际计算表明，当 $r \ll n$ 时，该算法具有很高的计算精度[149].

二、 Trench 算法

考虑 Hermite 型 Toeplitz 矩阵

$$\boldsymbol{T}_n = (\xi_{j-i})_{i,j=1}^n, \quad \xi_{-j} = \bar{\xi}_j \tag{2.11.10}$$

设 $\boldsymbol{T}_k$ $(k = 1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{T}$ 的 k 阶顺序主子阵，又设

$$p_k(\lambda) = \det(\boldsymbol{T}_k - \lambda \boldsymbol{I}_k), \quad k = 1,2,\cdots,n$$

$$\boldsymbol{c}_k = (\xi_{-1}, \xi_{-2}, \cdots, \xi_{-k})^{\mathrm{T}}, \quad k = 1,2,\cdots,n$$

$$q_1(\lambda) = \xi_0 - \lambda, \quad q_k(\lambda) = \frac{p_k(\lambda)}{p_{k-1}(\lambda)}, \quad k = 2,3,\cdots,n$$

定理 2.11.2　若 λ 不是 $\boldsymbol{T}_{n-1}$ 的特征值，且 $\boldsymbol{y}_{n-1}(\lambda)$ 是方程组

$$(\boldsymbol{T}_{n-1} - \lambda \boldsymbol{I}_{n-1}) \boldsymbol{y}_{n-1}(\lambda) = \boldsymbol{c}_{n-1} \tag{2.11.11}$$

的解向量，则

$$q_n(\lambda) = \xi_0 - \lambda - \boldsymbol{c}_{n-1}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{y}_{n-1}(\lambda) \tag{2.11.12}$$

$$q_n'(\lambda) = -1 - \boldsymbol{y}_{n-1}^{\mathrm{H}}(\lambda) \boldsymbol{y}_{n-1}(\lambda) \tag{2.11.13}$$

此外，若 λ 是 $\boldsymbol{T}_n$ 的特征值，则对应的特征向量为

$$\boldsymbol{x}_n(\lambda) = \begin{bmatrix} -1 \\ \boldsymbol{y}_{n-1}(\lambda) \end{bmatrix} \tag{2.11.14}$$

证明　因为

$$T_n - \lambda I_n = \begin{bmatrix} \xi_0 - \lambda & c_{n-1}^H \\ c_{n-1} & T_{n-1} - \lambda I_{n-1} \end{bmatrix}$$

所以

$$p_n(\lambda) = \det(T_n - \lambda I_n) =$$

$$\det\begin{bmatrix} \xi_0 - \lambda - c_{n-1}^H(T_{n-1} - \lambda I_{n-1})^{-1}c_{n-1} & 0^T \\ c_{n-1} & T_{n-1} - \lambda I_{n-1} \end{bmatrix} =$$

$$(\xi_0 - \lambda - c_{n-1}^H y_{n-1}(\lambda))p_{n-1}(\lambda)$$

即得式(2.11.12). 又

$$(T_n - \lambda I_n)x_n(\lambda) = \begin{bmatrix} \xi_0 - \lambda & c_{n-1}^H \\ c_{n-1} & T_{n-1} - \lambda I_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ y_{n-1}(\lambda) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -q_n(\lambda) \\ 0 \end{bmatrix}$$

当 λ 是 T_n 的特征值时，$p_n(\lambda) = 0$，从而 $q_n(\lambda) = 0$. 由上式知 $x_n(\lambda)$ 是 λ 对应的特征向量. 将式(2.11.11)对 λ 求导得

$$(T_{n-1} - \lambda I_{n-1})' y_{n-1}(\lambda) + (T_{n-1} - \lambda I_{n-1})y'_{n-1}(\lambda) = 0$$

即
$$(T_{n-1} - \lambda I_{n-1})y'_{n-1}(\lambda) = y_{n-1}(\lambda)$$

由上式及式(2.11.12)得

$$q_n'(\lambda) = -1 - c_{n-1}^H y'_{n-1}(\lambda) =$$
$$-1 - y_{n-1}^H(\lambda)(T_{n-1} - \lambda I_{n-1})y'_{n-1}(\lambda) =$$
$$-1 - y_{n-1}^H(\lambda)y_{n-1}(\lambda)$$

证毕

定理 2.11.3 若 λ 不是 T_k $(k = 1,2,\cdots,n-1)$ 的特征值，设 $y_k(\lambda) = (y_{k1}(\lambda), y_{k2}(\lambda), \cdots, y_{kk}(\lambda))^T$ 是方程组

$$(T_k - \lambda I_k)y_k(\lambda) = c_k,\quad k = 1,2,\cdots,n-1$$

的解向量，则方程组(2.11.11)的解向量 $y_{n-1}(\lambda)$ 可递推求得

$$\omega_0(\lambda) = \xi_0 - \lambda,\quad y_{11}(\lambda) = \frac{\xi_{-1}}{\xi_0 - \lambda}$$

对 $k = 2,\cdots,n-1$

$$\omega_{k-1}(\lambda) = (1 - |y_{k-1,k-1}(\lambda)|^2)\omega_{k-2}(\lambda) \tag{2.11.15}$$

$$y_{kk}(\lambda) = \omega_{k-1}^{-1}(\lambda)(\xi_{-k} - \sum_{j=1}^{k-1}\xi_{j-k}y_{k-1,j}(\lambda))$$

$$y_{ki}(\lambda) = y_{k-1,i}(\lambda) - y_{kk}(\lambda)y_{k-1,k-i}(\lambda)$$

$$i = 1,2,\cdots,k-1$$

证明　对方程组

$$(\boldsymbol{T}_k - \lambda\boldsymbol{I}_k)\boldsymbol{y}_k(\lambda) = \boldsymbol{c}_k, \quad k = 1,2,\cdots,n-1$$

利用 Zohar 算法(§2.4(一))求解,并整理之即得(2.11.15).

证毕

定理 2.11.4　设 $2 \leqslant m \leqslant n$,且 λ 不是 $\boldsymbol{T}_k$ $(k = 1,2,\cdots,m)$ 的特征值,又设 $\mathrm{neg}_m(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{T}_m$ 的小于 λ 的特征值个数(重特征值按其重数计数),则 $\mathrm{neg}_m(\lambda)$ 等于数组 $\{\omega_0(\lambda),\omega_1(\lambda),\cdots,\omega_{m-1}(\lambda)\}$ 中所含负值的个数,其中 $\omega_k(\lambda)$ $(k = 0,1,\cdots,n-2)$ 由式(2.11.15)确定,而

$$\omega_{n-1}(\lambda) = q_n(\lambda) \tag{2.11.16}$$

证明　设 $\boldsymbol{T}_m$ 的特征值按递增顺序排列,即

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_m$$

则 $\boldsymbol{T}_m - \lambda\boldsymbol{I}_m$ 的特征值为

$$\lambda_1 - \lambda\ ,\ \lambda_2 - \lambda\ ,\ \cdots\ ,\ \lambda_m - \lambda$$

文献[48]表明,当 $m \geqslant 2$ 时,有

$$\boldsymbol{L}_m^{\mathrm{H}}(\lambda)(\boldsymbol{T}_m - \lambda\boldsymbol{I}_m)\boldsymbol{L}_m(\lambda) = \mathrm{diag}(\omega_{m-1}(\lambda),\cdots,\omega_0(\lambda)) \tag{2.11.17}$$

其中

$$\boldsymbol{L}_m(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -y_{1,m-1}(\lambda) & 1 & & & \\ -y_{2,m-1}(\lambda) & -y_{1,m-2}(\lambda) & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ -y_{m-1,m-1}(\lambda) & -y_{m-1,m-2}(\lambda) & \cdots & -y_{11}(\lambda) & 1 \end{bmatrix}$$

而 $\omega_j(\lambda)$ $(j = 1,2,\cdots,n-2)$ 和 $y_{kj}(\lambda)$ $(k = 1,2,\cdots,n-1;\ j =$

$1,2,\cdots,k$) 由式(2.11.15)确定.

由 Sylvester 惯性定理(参见文献[76])知,矩阵 $\boldsymbol{T}_m-\lambda\boldsymbol{I}_m$ 所含正特征值、负特征值及零特征值的个数分别等于数组 $\{\omega_0(\lambda),\omega_1(\lambda),\cdots,\omega_{m-1}(\lambda)\}$ 所含正值、负值及零的个数,故 $\mathrm{neg}_m(\lambda)$ 等于该数组所含负值的个数.

又因 $\det\boldsymbol{L}_m(\lambda)=1$,由式(2.11.17)得

$$p_m(\lambda)=\omega_0(\lambda)\cdots\omega_{m-1}(\lambda),\quad 1\leqslant m\leqslant n$$

取 $m=n$ 有 $p_n(\lambda)=\omega_{n-1}(\lambda)p_{n-1}(\lambda)$ 即 $\omega_{n-1}(\lambda)=q_n(\lambda)$. 证毕

定理 2.11.5 设 a,b 不是 $\boldsymbol{T}_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 的特征值,且 (a,b) 只包含 $\boldsymbol{T}_n$ 的一个特征值(重数为1),则 (a,b) 不包含 $\boldsymbol{T}_{n-1}$ 的特征值的充要条件是 $\omega_{n-1}(a)>0$ 和 $\omega_{n-1}(b)<0$.

证明 根据定理 2.11.4 及假设知,$\mathrm{neg}_n(b)=1+\mathrm{neg}_n(a)$,即数组 $\{\omega_0(b),\cdots,\omega_{n-2}(b),\omega_{n-1}(b)\}$ 比 $\{\omega_0(a),\cdots,\omega_{n-2}(a),\omega_{n-1}(a)\}$ 多一个负值. 如果 $\omega_{n-1}(a)<0$ 或 $\omega_{n-1}(b)>0$,则数组 $\{\omega_0(b),\cdots,\omega_{n-2}(b)\}$ 必定比 $\{\omega_0(a),\cdots,\omega_{n-2}(a)\}$ 包含更多的负值,因此 (a,b) 至少包含 $\boldsymbol{T}_{n-1}$ 的一个特征值. 反之,若 $\omega_{n-1}(a)>0$ 和 $\omega_{n-1}(b)<0$,则数组 $\{\omega_0(b),\cdots,\omega_{n-2}(b)\}$ 和 $\{\omega_0(a),\cdots,\omega_{n-2}(a)\}$ 必包含同样多的负数,从而 $\mathrm{neg}_{n-1}(b)=\mathrm{neg}_{n-1}(a)$,即 (a,b) 不包含 $\boldsymbol{T}_{n-1}$ 的特征值. 证毕

根据上述诸定理,描述求 Hermite 型 Toeplitz 矩阵特征问题的 **Trench 算法**[117]如下:

设 Hermite 型 Toeplitz 矩阵的特征值按递增顺序排列,即

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$$

需要求出第 i 个特征值 λ_i,要求 λ_i 不是 $\boldsymbol{T}_k$ $(k=1,2,\cdots,n-1)$ 的特征值. 由分隔定理 1.10.1 知,λ_i 是 $\boldsymbol{T}_n$ 的单特征根.

第一步:求一区间 (a,b),使其仅包含 $\boldsymbol{T}_n$ 的特征值 λ_i,但不含 $\boldsymbol{T}_{n-1}$ 的任何特征值. 根据定理 2.11.3 和定理 2.11.4 知,a 和 b 应满足

$$\begin{cases}\mathrm{neg}_n(a)=i-1, & \mathrm{neg}_n(b)=i \\ \omega_{n-1}(a)>0, & \omega_{n-1}(b)<0\end{cases} \tag{2.11.18}$$

计算过程中先取 a 和 b，使得 $\mathrm{neg}_n(a)\leqslant i-1$ 且 $\mathrm{neg}_n(b)\geqslant i$. 如果式(2.11.18)成立，则该步完成，否则，取 $c=\dfrac{a+b}{2}$，当 $\mathrm{neg}_n(c)\leqslant i-1$ 时，令 $a=c$，而当 $\mathrm{neg}_n(c)\geqslant i$ 时，令 $b=c$. 重复这一过程，经过有限步后，可使式(2.11.18)成立. 为保证第二步的迭代计算，可继续采用对分法或其它方法，使得区间 (a,b) 充分地小。

第二步：利用 Newton 法求 λ_i. 注意到 λ_i 也是 $q_n(\lambda)$ 的根，构造迭代

$$\mu_{k+1}=\mu_k-\frac{q_n(\mu_k)}{q_n{}'(\mu_k)}=$$
$$\mu_k+\frac{\xi_0-\mu_k-\boldsymbol{c}_{n-1}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}_{n-1}(\mu_k)}{1+\boldsymbol{y}_{n-1}^{\mathrm{H}}(\mu_k)\boldsymbol{y}_{n-1}(\mu_k)},\quad k=0,1,\cdots$$

使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\mu_k=\lambda_i$. 式中利用了式(2.11.12)和(2.11.13)，而 $\boldsymbol{y}_{n-1}(\lambda)$ 可由式(2.11.15)求出. 文献[117]表明，这一迭代过程实质上形成了 Rayleigh 商迭代，因此，其收敛速度是很快的。

第三步：求出特征值 λ_i 后，对应的特征向量由式(2.11.14)求得.

§2.12 一些特殊的 Toeplitz 矩阵

§2.2 及 §2.7 分别研究了循环矩阵和三对角 Toeplitz 矩阵，本节继续给出其它一些常见的特殊 Toeplitz 矩阵的行列式、逆矩阵或广义逆矩阵、特征值与特征向量等的显式表达式.

类型一

$$T_n = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \gamma & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \gamma & \cdots & \gamma & \alpha \end{bmatrix}, \quad \beta\gamma \neq 0$$

分两种情形考虑如下：

情形1： $\beta = \gamma$

将 $\det T_n$ 的第 2,⋯ n 列加到第 1 列，再将第 1 行的(−1)倍分别加到第 2,⋯ n 行，得

$$\det T_n = [\alpha + (n-1)\beta](\alpha - \beta)^{n-1}$$

T_n 的特征多项式为

$$\det(T_n - \lambda I_n) = [\alpha - \lambda + (n-1)\beta](\alpha - \lambda - \beta)^{n-1}$$

于是 T_n 的特征值为

$$\lambda_1 = \alpha + (n-1)\beta, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = \alpha - \beta$$

易求得对应的特征向量为

$$x_1 = (1,1,\cdots,1)^T, \quad x_2 = (1-,1,0,\cdots,0)^T$$

$$x_3 = (-1,0,1,\cdots,0)^T, \cdots, \quad x_n = (-1,0,\cdots,0,1)^T$$

当 $\alpha \neq \beta$ 且 $\alpha \neq -(n-1)\beta$ 时，直接计算可求得

$$T_n^{-1} = \frac{1}{[\alpha + (n-1)\beta](\alpha - \beta)} \times \begin{bmatrix} \alpha + (n-2)\beta & -\beta & \cdots & -\beta \\ -\beta & \alpha + (n-2)\beta & \cdots & -\beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta & -\beta & \cdots & \alpha + (n-2)\beta \end{bmatrix}$$

当 $\alpha = \beta$ 时

$$T_n = \beta \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

而当 $\alpha = -(n-1)\beta$ 时

$$T_n = \beta\begin{bmatrix} -n+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -n+1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & -n+1 \end{bmatrix}$$

对这两种情形均有 $\det T_n = 0$，可求得 T_n 的 Moore-Penrose 逆为

$$T_n^+ = \frac{1}{n^2\beta^2}T_n$$

情形2： $\beta \neq \gamma$

记 $D_n = \det T_n$。将 D_n 的最后一列写成 $(\beta+0,\beta+0,\cdots,\beta+(\alpha-\beta))^{\mathrm{T}}$ 并利用行列式的性质可推得

$$D_n = (\alpha-\beta)D_{n-1} + \beta(\alpha-\gamma)^{n-1} \qquad (2.12.1)$$

同样，将 D_n 的最后一行写成 $(\gamma+0,\gamma+0,\cdots,\gamma+(\alpha-\gamma))$ 可得

$$D_n = (\alpha-\gamma)D_{n-1} + \gamma(\alpha-\beta)^{n-1} \qquad (2.12.2)$$

联立求解式(2.12.1)和(2.12.2)，得

$$D_n = \frac{\beta(\alpha-\gamma)^n - \gamma(\alpha-\beta)^n}{\beta-\gamma}$$

于是 T_n 的特征值为

$$\det(T_n - \lambda I_n) = \frac{\beta(\alpha-\lambda-\gamma)^n - \gamma(\alpha-\lambda-\beta)^n}{\beta-\gamma}$$

由 $\det(T_n - \lambda I_n) = 0$，得

$$\left(\frac{\alpha-\lambda-\gamma}{\alpha-\lambda-\beta}\right)^n = \frac{\gamma}{\beta} \qquad (2.12.3)$$

令 $\dfrac{\gamma}{\beta} = \omega^n$，则由式(2.12.3)得

$$\frac{\alpha-\lambda_k-\gamma}{\alpha-\lambda_k-\beta} = \omega e^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}, \quad k = 0,1,,\cdots,n-1$$

于是 T_n 的特征值为

$$\lambda_k = \alpha - \frac{\gamma - \beta\omega e^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}}{1-\omega e^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}}, \quad k = 0,1,,\cdots,n-1$$

类型二

$$
\boldsymbol{T}_n = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & \\ \alpha^2 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ \alpha^n & \cdots & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \neq 0 \tag{2.12.4}
$$

设 $\boldsymbol{T}_k$ 是 $\boldsymbol{T}_n$ 的 k 阶顺序主子阵，又设

$$
\varphi_k(\lambda) = \det(\boldsymbol{T}_k - \lambda \boldsymbol{I}_k), \quad k = 1,2,\cdots,n
$$

按 $\det(\boldsymbol{T}_k - \lambda \boldsymbol{I}_k)$ 的最后一行展开，得

$$
\varphi_k(\lambda) = (\alpha - \lambda)\varphi_{k-1}(\lambda) + \sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j \alpha^{j+1}\varphi_{k-1-j}(\lambda)
$$

$$
k = 2,3,\cdots,n \tag{2.12.5}
$$

式中 $\varphi_0(\lambda) = 1$ ，$\varphi_1(\lambda) = \alpha - \lambda$. 由式(2.12.5)

$$
\alpha\varphi_{k-1}(\lambda) = \alpha(\alpha - \lambda)\varphi_{k-2}(\lambda) + \sum_{j=1}^{k-2}(-1)^j \alpha^{j+2}\varphi_{k-2-j}(\lambda) =
$$

$$
-\alpha\lambda\varphi_{k-2}(\lambda) - \sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j \alpha^{j+1}\varphi_{k-1-j}(\lambda)
$$

代入式(2.12.5)，得

$$
\varphi_k(\lambda) = -\lambda\varphi_{k-1}(\lambda) - \alpha\lambda\varphi_{k-2}(\lambda), \quad k = 2,3,\cdots,n \tag{2.12.6}
$$

令 $\lambda = 4\alpha\cos^2\theta$ ，则

$$
\varphi_1(\lambda) = \alpha - \lambda = \alpha - 4\alpha\cos^2\theta = -\alpha\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}
$$

设对 $n \leqslant k$ ，有

$$
\varphi_k(\lambda) = (-\alpha)^k 2^{k-1}\cos^{k-1}\theta\frac{\sin(k+2)\theta}{\sin\theta} \tag{2.12.7}
$$

则当 $n = k+1$ 时，由式(2.12.6)

$$
\varphi_{k+1}(\lambda) = -\lambda\varphi_k(\lambda) - \alpha\lambda\varphi_{k-1}(\lambda) =
$$

$$-4\alpha\cos^2\theta\left[(-\alpha)^k 2^{k-1}\cos^{k-1}\theta\,\frac{\sin(k+2)\theta}{\sin\theta}\right]-$$

$$4\alpha^2\cos^2\theta\left[(-\alpha)^{k-1}2^{k-2}\cos^{k-2}\theta\,\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}\right]=$$

$$(-\alpha)^{k+1}2^k\cos^k\theta\,\frac{\sin(k+3)\theta}{\sin\theta}$$

由归纳假设知，式(2.12.7)对任意自然数 k 均成立. 特别地，矩阵 $\boldsymbol{T}_n$ 的特征多项式为

$$\det(\boldsymbol{T}_n-\lambda\boldsymbol{I}_n)=\varphi_n(\lambda)=$$

$$(-\alpha)^n 2^{n-1}\left(\frac{\lambda}{4\alpha}\right)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\sin\left[(n+2)\arccos\left(\frac{\lambda}{4\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\right]}{\sin\left[\arccos\left(\frac{\lambda}{4\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\right]}$$

故 $\boldsymbol{T}_n$ 的特征值为

$$\lambda_k=4\alpha\cos^2\frac{k\pi}{n+2},\quad k=1,2,\cdots,n-\left[\frac{n}{2}\right]$$

$$\lambda=0,\quad \left[\frac{n}{2}\right]\text{重}$$

式中[·]表示取整函数.

设对应特征值 λ_i 的特征向量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，则

$$x_k=(-1)^{n-k}\varphi_{k-1}(\lambda_i),\quad k=1,2,\cdots,n \qquad (2.12.8)$$

这是因为，利用式(2.12.5)和(2.12.8)可知，$(\boldsymbol{T}_n-\lambda\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{x}$ 的第 k 个分量 $(k<n)$ 为

$$\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^{j+1}x_{k-j}+(\alpha-\lambda_i)x_k+x_{k+1}=$$

$$(-1)^{n-k}\left[\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j\alpha^{j+1}\varphi_{k-1-j}(\lambda_i)+\right.$$

$$\left.(\alpha-\lambda_i)\varphi_{k-1}(\lambda_i)-\varphi_k(\lambda_i)\right]=0$$

而 $(\boldsymbol{T}_n - \lambda \boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{x}$ 的第 n 个分量为

$$\sum_{j=1}^{n-1}\alpha^{j+1}x_{n-j} + (\alpha - \lambda_i)x_n =$$

$$\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\alpha^{j+1}\varphi_{n-1-j}(\lambda_i) + (\alpha - \lambda_i)\varphi_{n-1}(\lambda_i) = \varphi_n(\lambda_i) = 0$$

综上所述，有 $(\boldsymbol{T}_n - \lambda \boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，故式(2.12.8)所确定的 $\boldsymbol{x}$ 是对应特征值 λ_i 的特征向量. 特别地，零特征值对应的特征向量为

$$(1, -\alpha, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$$

如果式(2.12.4)的矩阵中 α 是实数，则可直接验证 $\boldsymbol{T}_n$ 的 Moore-Penrose 逆为

$$\boldsymbol{T}_2^+ = \frac{1}{(\alpha^2+1)^2}\begin{bmatrix} \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}_n^+ = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\alpha^2+1} & & & & \\ \frac{1}{\alpha^2+1} & & & & \\ -\alpha & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & -\alpha & \frac{1}{\alpha^2+1} & \frac{\alpha}{\alpha^2+1} \end{bmatrix}, \quad n \geqslant 3$$

类型三

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma} & \boldsymbol{I}_n & & \\ \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{\Gamma} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \boldsymbol{I}_n \\ & & \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{\Gamma} \end{bmatrix}$$

式中
$$\Gamma=\begin{bmatrix}\rho-4 & 1 & & \\ 1 & \rho-4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & \rho-4\end{bmatrix}_{n\times n}$$

在求偏微分方程数值解时将遇到这类分块三对角 Toeplitz 矩阵.

设 λ 是 $\boldsymbol{T}$ 的特征值,对应的特征向量为

$$\boldsymbol{x}=(x_{11},\cdots,x_{n1},x_{12},\cdots,x_{n2},\cdots,x_{1n},\cdots,x_{nn})^{\mathrm{T}}$$

则由 $\boldsymbol{Tx}=\lambda\boldsymbol{x}$ 得

$$\left.\begin{aligned}&x_{i-1,j}+x_{i,j-1}+(\rho-4)x_{ij}+x_{i+1,j}+x_{i,j+1}=\lambda x_{ij}\\&x_{i0}=x_{0j}=x_{i,n+1}=x_{n+1,j}=0,\quad i,j=1,2,\cdots,n\end{aligned}\right\}\tag{2.12.9}$$

设
$$x_{ij}=y_i\sin\frac{kj\pi}{n+1},\quad k=1,2,\cdots,n$$

代入式(2.12.9)并整理得

$$\begin{cases}y_0=y_{n+1}=0\\ y_{i-1}+y_i\left(\rho-2-4\sin^2\dfrac{k\pi}{2(n+1)}\right)+y_{i+1}=\lambda y_i\\ \qquad\qquad i=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

这是 n 阶三对角 Toeplitz 矩阵的特征问题,由定理 2.8.1 知,其特征值为

$$\begin{aligned}\lambda_{kl}&=\rho-2-4\sin^2\frac{k\pi}{2(n+1)}+2\cos\frac{l\pi}{n+1}=\\&\rho-4\sin^2\frac{k\pi}{2(n+1)}-4\sin^2\frac{l\pi}{2(n+1)},\quad l=1,2,\cdots,n\end{aligned}$$

对应的特征向量为

$$\boldsymbol{y}^{(l)}=(y_1^{(l)},\cdots,y_n^{(l)})^{\mathrm{T}}$$

其中
$$y_i^{(l)}=\sin\frac{li\pi}{n+1},\quad i=1,2,\cdots,n$$

这样一来，T 的 n^2 个特征值为

$$\lambda_{kl} = \rho - 4\sin^2\frac{k\pi}{2(n+1)} - 4\sin^2\frac{l\pi}{2(n+1)},\quad k,l = 1,2,\cdots,n$$

对应的特征向量为

$$\boldsymbol{x}^{(k,l)} = (x_{11}^{(k,l)},\cdots,x_{n1}^{(k,l)},\cdots,x_{1n}^{(k,l)},\cdots,x_{nn}^{(k,l)})^{\mathrm{T}}$$

式中 $$x_{ij}^{(k,l)} = \sin\frac{il\pi}{n+1}\sin\frac{jk\pi}{n+1},\quad i,j = 1,2,\cdots,n$$

易知这 n^2 个特征向量是两两正交的.

类型四

$$\boldsymbol{T}_n = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \rho \\ \rho^{n-1} & \cdots & \rho & 1 \end{bmatrix},\quad 0<\rho<1 \quad (2.12.10)$$

广义实平稳马尔可夫信号的自协方差矩阵即为该类型的 Toeplitz 矩阵.

设 $D_n = \det\boldsymbol{T}_n$，将 D_n 的第 2 行的 $-\rho$ 倍加到第 1 行，再按第 1 行展开并递推之，有

$$D_n = (1-\rho^2)D_{n-1} = \cdots = (1-\rho^2)^{n-1}$$

于是 $\boldsymbol{T}_n$ 是可逆矩阵，可求得其逆矩阵为

$$\boldsymbol{T}_n^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{bmatrix} 1 & -\rho & & & \\ -\rho & 1+\rho^2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1+\rho^2 & -\rho \\ & & & -\rho & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\boldsymbol{I} - \frac{\rho}{1-\rho^2}\boldsymbol{C}$$

式中
$$C=\begin{bmatrix}\rho & 1 & & & \\ 1 & 0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & 1 & \rho\end{bmatrix}$$

为求出矩阵 $\boldsymbol{T}_n$ 的特征值与特征向量，先求矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的特征值和特征向量.

由盖尔定理和 $0<\rho<1$ 可知，矩阵 C 的特征值 μ 满足 $|\mu|<2$（因 2 和 -2 不是 C 的特征值），故设 C 的特征值为

$$\mu_j=2\cos\omega_j,\quad 0<\omega_j<\pi,\quad j=1,2,\cdots,n \tag{2.12.11}$$

对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}_j=(x_{j1},x_{j2},\cdots,x_{jn})^{\mathrm T}$，则由 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_j=(2\cos\omega_j)\boldsymbol{x}_j$ 得

$$\begin{cases}\rho x_{j1}+x_{j2}=(2\cos\omega_j)x_{j1}\\ x_{j,k-1}+x_{j,k+1}=(2\cos\omega_j)x_{jk},\quad k=2,3,\cdots,n-1\\ x_{j,n-1}+\rho x_{jn}=(2\cos\omega_j)x_{jn}\end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases}x_{j,k-1}-(2\cos\omega_j)x_{jk}+x_{j,k+1}=0,\quad k=1,2,\cdots,n\\ x_{j0}=\rho x_{j1},\quad x_{j,n+1}=\rho x_{jn}\end{cases}$$

上述差分方程的通解为

$$x_{jk}=a_j\cos k\omega_j+b_j\sin k\omega_j=A_j\sin(k\omega_j+\theta_j) \tag{2.12.12}$$

式中
$$A_j=\sqrt{a_j^2+b_j^2},\quad \tan\theta_j=\frac{a_j}{b_j}$$

代入 $x_{j0}=\rho x_{j1}$ 和 $x_{j,n+1}=\rho x_{jn}$，得

$$\begin{cases}a_j=\rho(a_j\cos\omega_j+b_j\sin\omega_j)\\ a_j\cos(n+1)\omega_j+b_j\sin(n+1)\omega_j=\rho(a_j\cos n\omega_j+b_j\sin n\omega_j)\end{cases} \tag{2.12.13}$$

这是关于 a_j 与 b_j 的齐次线性方程组，它有非零解 a_j,b_j 的充要条

件是

$$(1-\rho\cos\omega_j)[\sin(n+1)\omega_j-\rho\sin n\omega_j]+$$
$$\rho\sin\omega_j[\cos(n+1)\omega_j-\rho\cos n\omega_j]=0$$

将上式化简后得

$$\sin(n+1)\omega_j-2\rho\sin n\omega_j+\rho^2\sin(n-1)\omega_j=0 \quad (2.12.14)$$

这就是 ω_j 所应满足的关系式. 如果记

$$f(\omega)=\sin(n+1)\omega-2\rho\sin n\omega+\rho^2\sin(n-1)\omega$$

则有

$$f\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)=(-1)^j2\rho\left[1-\rho\cos\frac{j\pi}{n+1}\right]\sin\frac{j\pi}{n+1}$$

可见 $\operatorname{sign}f\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)=(-1)^j$ $(j=1,2,\cdots,n)$. 又易知当 $0<\omega\ll 1$ 时, $f(\omega)>0$, 于是式(2.12.14)的 n 个根 ω_j $(j=1,2,\cdots,n)$ 满足

$$0<\omega_1<\frac{\pi}{n+1}<\omega_2<\frac{2\pi}{n+1}<\cdots<\omega_n<\frac{n\pi}{n+1}$$

可利用数值方法求出它们. 求出 ω_j 后, 由式(2.12.13)得

$$\tan\theta_j=\frac{a_j}{b_j}=\frac{\rho\sin\omega_j}{1-\rho\cos\omega_j}$$

又设 $\boldsymbol{x}_j$ 是单位向量, 即满足 $\boldsymbol{x}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_j=\sum_{k=1}^{n}x_{jk}^2=1$, 由式(2.12.12), 得

$$A_j=\left[\sum_{k=1}^{n}\sin^2(k\omega_j+\theta_j)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

这样一来, 特征向量 $\boldsymbol{x}_j$ 中的元素 x_{jk} $(k=1,2,\cdots,n)$ 就可由式(2.12.12)完全确定, 它也是式(2.12.10)的 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{T}_n$ 的特征向量, 而 $\boldsymbol{T}_n$ 的特征值为

$$\lambda_j=\frac{1}{\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}-\frac{\rho}{1-\rho^2}\mu_j}=\frac{1-\rho^2}{(1+\rho^2)-2\rho\cos\omega_j}$$

$$j=1,2,\cdots,n$$

第三章　Hankel 矩阵

§3.1　Hankel 矩阵的定义及性质

定义 3.1.1 形如

$$H=(\eta_{i+j-1})_{i,j=1}^{n}=\begin{bmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n\\ \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \eta_{n+1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \eta_n & \eta_{n+1} & \cdots & \eta_{2n-1}\end{bmatrix}\qquad(3.1.1)$$

的对称矩阵称为 **Hankel 矩阵**.

Hankel 矩阵与 Toeplitz 矩阵有着密切的联系.事实上,可以直接验证,若用次单位矩阵 $\boldsymbol{J}$ 左乘或右乘 Hankel 矩阵 $\boldsymbol{H}$,其结果 $\boldsymbol{JH}$ 或 $\boldsymbol{HJ}$ 都是 Toeplitz 矩阵.因此,第二章有关 Toeplitz 矩阵的一些结果可转化为 Hankel 矩阵的相应结果.

著名的 Hilbert 矩阵 $\boldsymbol{H}=\left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{i,j=1}^{n}$ 是特殊的 Hankel 矩阵.

容易验证式(3.1.1),Hankel 矩阵 $\boldsymbol{H}$ 满足关系式

$$\boldsymbol{ZH}-\boldsymbol{HZ}^{\mathrm{T}}=(0,\eta_1,\cdots,\eta_{n-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_1(0,\eta_1,\cdots,\eta_{n-1})\qquad(3.1.2)$$

$$\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}-\boldsymbol{HZ}=(\eta_{n+1},\cdots,\eta_{2n-1},0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_n(\eta_{n+1},\cdots,\eta_{2n-1},0)\qquad(3.1.3)$$

其中 $\boldsymbol{Z}$ 是 n 阶位移矩阵.

§3.2 求 Hankel 矩阵的逆矩阵

一、 Trench 算法

设 n 阶 Hankel 矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的各阶顺序主子阵

$$\boldsymbol{H}_k = (\eta_{i+j-1})_{i,j=1}^{k}, \quad k = 1,2,\cdots,n \tag{3.2.1}$$

均非奇异. 又设

$$\boldsymbol{H}_k^{-1} = \boldsymbol{V}_k = (v_{rs}^{(k)})_{r,s=1}^{k}, \quad k = 1,2,\cdots,n$$

则所有的 $\boldsymbol{V}_k$ 仍是对称的，且有

$$\sum_{j=1}^{k} \eta_{r+j-1} v_{js}^{(k)} = \delta_{rs}, \quad r = 1,2,\cdots,k;\ s = 1,2,\cdots,k \tag{3.2.2}$$

其中 $\delta_{rs} = \begin{cases} 1, & r = s \\ 0, & r \neq s \end{cases}$ 是 Kronecker 记号. 记

$$\mu_s^{(k)} = -\sum_{j=1}^{k} \eta_{k+j} v_{js}^{(k)}, \quad s = 1,2,\cdots,k \tag{3.2.3}$$

为方便起见，假设

$$\mu_0^{(k)} = \mu_{k+2}^{(k)} = 0, \quad \mu_{k+1}^{(k)} = 1, \quad v_{0s}^{(k)} = v_{k+1,s}^{(k)} = 0 \tag{3.2.4}$$

由式(3.2.2)和(3.2.3)

$$\sum_{j=1}^{k+1} \eta_{r+j-1} v_{js}^{(k)} = \delta_{rs} - \delta_{r,k+1}\mu_s^{(k)}$$

$$r = 1,\cdots,k+1;\ s = 1,2,\cdots,k$$

于是

$$\sum_{j=1}^{k+1} \eta_{r+j-1} v_{js}^{(k)} = \sum_{j=1}^{k+1} \eta_{r+j-1} v_{js}^{(k+1)} - \mu_s^{(k)} \sum_{j=1}^{k+1} \eta_{r+j-1} v_{j,k+1}^{(k+1)}$$

比较两边系数得

$$v_{rs}^{(k)} = v_{rs}^{(k+1)} - \mu_s^{(k)} v_{r,k+1}^{(k+1)}, \quad r = 1,\cdots,k+1;\ s = 1,2,\cdots,k \tag{3.2.5}$$

特别地，当 $r=k+1$ 时，由式(3.2.5)得

$$v_{k+1,s}^{(k+1)}=\mu_s^{(k)}v_{k+1,k+1}^{(k+1)} \tag{3.2.6}$$

用 η_{k+s} 乘式(3.2.6)，并对 s 从 1 到 $k+1$ 求和

$$1=\sum_{s=1}^{k+1}\eta_{k+s}v_{k+1,s}^{(k+1)}=v_{k+1,k+1}^{(k+1)}\sum_{s=1}^{k+1}\eta_{k+s}\mu_s^{(k)}=v_{k+1,k+1}^{(k+1)}\lambda_{k+1} \tag{3.2.7}$$

其中

$$\lambda_{k+1}=\sum_{j=1}^{k+1}\eta_{k+j}\mu_j^{(k)} \tag{3.2.8}$$

将式(3.2.6)和式(3.2.7)代入式(3.2.5)，得

$$v_{rs}^{(k+1)}=v_{rs}^{(k)}+\lambda_{k+1}^{-1}\mu_r^{(k)}\mu_s^{(k)},\quad r,s=1,\cdots,k+1 \tag{3.2.9}$$

由式(3.2.9)即可从 V_k 求得 V_{k+1}. 但该式可以进一步化简.

由于

$$\sum_{j=1}^{k+1}\eta_{r+j-1}v_{j-1,s+1}^{(k)}=\sum_{j=2}^{k+1}\eta_{r+j-1}v_{j-1,s+1}^{(k)}=\sum_{j=1}^{k}\eta_{r+j}v_{j,s+1}^{(k)}=$$
$$\begin{cases}\delta_{rs}, & r=1,2,\cdots,k-1;\ s=0,1,\cdots,k-1\\ -\mu_{s+1}^{(k)}, & r=k;\ s=0,1,\cdots,k-1\end{cases}$$

从而

$$\sum_{j=1}^{k}\eta_{r+j-1}v_{j-1,s+1}^{(k)}=\delta_{rs}-\delta_{rk}\mu_{s+1}^{(k)}-\eta_{k+r}v_{k,s+1}^{(k)}$$
$$r=1,\cdots,k;\ s=0,1,\cdots,k \tag{3.2.10}$$

又

$$\sum_{j=1}^{k}\eta_{r+j-1}\mu_j^{(k)}=-\sum_{j=1}^{k}\eta_{r+j-1}\Big(\sum_{i=1}^{k}\eta_{k+i}v_{ij}^{(k)}\Big)=$$
$$-\sum_{i=1}^{k}\eta_{k+i}\Big(\sum_{j=1}^{k}\eta_{r+j-1}v_{ji}^{(k)}\Big)=$$
$$-\sum_{i=1}^{k}\eta_{k+i}\delta_{ri}=-\eta_{k+r}$$

代入式(3.2.10)，得

$$\sum_{j=1}^{k}\eta_{r+j-1}v_{j-1,s+1}^{(k)} = \sum_{j=1}^{k}\eta_{r+j-1}v_{js}^{(k)} -$$

$$\mu_{s+1}^{(k)}\sum_{j=1}^{k}\eta_{r+j-1}v_{jk}^{(k)} + v_{k,s+1}^{(k)}\sum_{j=1}^{k}\eta_{r+j-1}\mu_j^{(k)}$$

比较两边系数，并利用式(3.2.6)和(3.2.7)整理得

$$v_{rs}^{(k)} = v_{r-1,s+1}^{(k)} + \lambda_k^{-1}(\mu_r^{(k-1)}\mu_{s+1}^{(k)} - \mu_r^{(k)}\mu_{s+1}^{(k-1)})$$

$$r = 1,\cdots,k;\ s = 0,1,\cdots,k \qquad (3.2.11)$$

可见，只要求得 $\{\mu_r^{(k)}\}$ 和 $\{\mu_r^{(k-1)}\}$，由式(3.2.11)即可求出 $\boldsymbol{H}_k^{-1}$.

将式(3.2.11)代入式(3.2.3)，有

$$\mu_s^{(k)} = -\sum_{j=1}^{k+1}\eta_{k+j}v_{js}^{(k)} = -\sum_{j=1}^{k+1}\eta_{k+j}v_{j-1,s+1}^{(k)} -$$

$$\lambda_k^{-1}\mu_{s+1}^{(k)}\sum_{j=1}^{k+1}\eta_{k+j}\mu_j^{(k-1)} + \lambda_k^{-1}\mu_{s+1}^{(k-1)}\sum_{j=1}^{k+1}\eta_{k+j}\mu_j^{(k)} =$$

$$-\sum_{j=1}^{k+1}\eta_{k+j}v_{j-1,s+1}^{(k)} - \lambda_k^{-1}\mu_{s+1}^{(k)}\rho_k + \lambda_k^{-1}\mu_{s+1}^{(k-1)}\lambda_{k+1}$$

$$s = 0,1,\cdots,k \qquad (3.2.12)$$

其中

$$\rho_{k+1} = \sum_{j=1}^{k+1}\eta_{k+j+1}\mu_j^{(k)} \qquad (3.2.13)$$

又由式(3.2.9)和(3.2.4)得

$$\sum_{j=1}^{k+1}\eta_{k+j}v_{j-1,s+1}^{(k)} = \sum_{j=1}^{k+1}\eta_{k+j+1}v_{j,s+1}^{(k)} =$$

$$\sum_{j=1}^{k+1}\eta_{k+j+1}v_{j,s+1}^{(k+1)} - \lambda_{k+1}^{-1}\mu_{s+1}^{(k)}\sum_{j=1}^{k+1}\eta_{k+j+1}\mu_j^{(k)} =$$

$$-\mu_{s+1}^{(k+1)} - \lambda_{k+1}^{-1}\mu_{s+1}^{(k)}\rho_{k+1}$$

代入式(3.2.12)，得

$$\mu_s^{(k)} = \mu_{s+1}^{(k+1)} + \lambda_{k+1}^{-1}\rho_{k+1}\mu_{s+1}^{(k)} - \lambda_k^{-1}\rho_k\mu_{s+1}^{(k)} + \lambda_k^{-1}\lambda_{k+1}\mu_{s+1}^{(k-1)}$$

$$s = 0,1,\cdots,k$$

将 s 换成 $s-1$ 解得

$$\mu_s^{(k+1)} = (\lambda_k^{-1}\rho_k - \lambda_{k+1}^{-1}\rho_{k+1})\mu_s^{(k)} + \mu_{s-1}^{(k)} - \lambda_k^{-1}\lambda_{k+1}\mu_s^{(k-1)}$$
$$s = 1,\cdots,k+1 \quad (3.2.14)$$

结合式(3.2.3),(3.2.4),(3.2.8),(3.2.9),(3.2.11),(3.2.13)和(3.2.14),可得求 Hankel 矩阵之逆矩阵的 **Trench 算法**[7]:

$$\mu_1^{(1)} = -\eta_2/\eta_1,\quad \lambda_1 = \eta_1,\quad \rho_1 = \eta_2$$

对 $k = 1,2,\cdots,n-2$

$$\lambda_{k+1} = \sum_{j=1}^{k+1}\eta_{k+j}\mu_j^{(k)},\quad \rho_{k+1} = \sum_{j=1}^{k+1}\eta_{k+j+1}\mu_j^{(k)}$$

$$\mu_s^{(k+1)} = (\lambda_k^{-1}\rho_k - \lambda_{k+1}^{-1}\rho_{k+1})\mu_s^{(k)} + \mu_{s-1}^{(k)} - \lambda_k^{-1}\lambda_{k+1}\mu_s^{(k-1)}$$
$$s = 1,\cdots,k+1$$

(其中 $\mu_0^{(k)} = \mu_{k+1}^{(k-1)} = 0,\quad \mu_{k+1}^{(k)} = 1$)

$$\lambda_n = \sum_{j=1}^{n}\eta_{n+j-1}\mu_j^{(n-1)}$$

$$v_{rs}^{(n-1)} = v_{r-1,s+1}^{(n-1)} + \lambda_{n-1}^{-1}(\mu_r^{(n-2)}\mu_{s+1}^{(n-1)} - \mu_r^{(n-1)}\mu_{s+1}^{(n-2)})$$
$$1 \leqslant r \leqslant s \leqslant n-1$$

$$v_{rs}^{(n)} = v_{rs}^{(n-1)} + \lambda_n^{-1}\mu_r^{(n-1)}\mu_s^{(n-1)}$$

(其中 $v_{0,s+1}^{(n-1)} = v_{rn}^{(n-1)} = 0$), $1 \leqslant r \leqslant s \leqslant n$

$$v_{sr}^{(n)} = v_{rs}^{(n)},\quad 1 \leqslant s < r \leqslant n$$

二、 分块 Hankel 矩阵之逆矩阵的三角表示

本段推导要用到 §1.8 的结果,但相应地取 $m = n$.

定理 3.2.1(Labahn-Chio-Cabay[127]) 设 H 是分块 Hankel 矩阵

$$H = (\Gamma_{i+j-1})_{i,j=1}^{n},\quad \Gamma_j \text{ 均为 } p \text{ 阶方阵} \qquad (3.2.15)$$

若 p 阶方阵 $Q_j, V_j, \tilde{Q}_j, \tilde{V}_j$ 分别满足

$$\left.\begin{aligned} &H[Q_{n-1}\ \cdots\ Q_1\ \ Q_0]' = E_n^{(n)} \\ &H[V_n\ \cdots\ V_2\ \ V_1]' = -[\Gamma_{n+1}\ \cdots\ \Gamma_{2n-1}\ \ \Gamma_{2n}]' \end{aligned}\right\}$$
$$(3.2.16)$$

$$\left.\begin{aligned}&[\widetilde{Q}_{n-1}\quad\cdots\quad\widetilde{Q}_0]H=E_n^{(n)T}\\&[\widetilde{V}_n\quad\cdots\quad\widetilde{V}_1]H=-[\Gamma_{n+1}\quad\cdots\quad\Gamma_{2n-1}\quad\Gamma_{2n}]\end{aligned}\right\}\tag{3.2.17}$$

其中 Γ_{2n} 是任意 p 阶方阵，$E_i^{(n)}$ 如式(2.1.10)，则 H 可逆，且

$$H^{-1}=\begin{bmatrix}V_{n-1}&\cdots&V_1&I\\\vdots&\iddots&\iddots&\\V_1&\iddots&&\\I&&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{Q}_{n-1}&\widetilde{Q}_{n-2}&\cdots&\widetilde{Q}_0\\&\widetilde{Q}_{n-1}&\ddots&\vdots\\&&\ddots&\widetilde{Q}_{n-2}\\&&&\widetilde{Q}_{n-1}\end{bmatrix}-$$
$$\begin{bmatrix}Q_{n-2}&\cdots&Q_0&O\\\vdots&\iddots&\iddots&\\Q_0&\iddots&&\\O&&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{V}_n&\widetilde{V}_{n-1}&\cdots&\widetilde{V}_1\\&\widetilde{V}_n&\ddots&\vdots\\&&\ddots&\widetilde{V}_{n-1}\\&&&\widetilde{V}_n\end{bmatrix}\tag{3.2.18}$$

或

$$H^{-1}=\begin{bmatrix}Q_{n-1}&&&\\Q_{n-2}&Q_{n-1}&&\\\vdots&\ddots&\ddots&\\Q_0&\cdots&Q_{n-2}&Q_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{V}_{n-1}&\cdots&\widetilde{V}_1&I\\\vdots&\iddots&\iddots&\\\widetilde{V}_1&\iddots&&\\I&&&\end{bmatrix}-$$
$$\begin{bmatrix}V_n&&&\\V_{n-1}&V_n&&\\\vdots&\ddots&\ddots&\\V_1&\cdots&V_{n-1}&V_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{Q}_{n-2}&\cdots&\widetilde{Q}_0&O\\\vdots&\iddots&\iddots&\\\widetilde{Q}_0&\iddots&&\\O&&&\end{bmatrix}\tag{3.2.19}$$

证明 由式(1.8.19)

$$U_n(z)\widetilde{Q}_{n-1}(z)-P_{n-1}(z)\widetilde{V}_n(z)=z^{2n-1}I$$
$$V_n(z)\widetilde{Q}_{n-1}(z)-Q_{n-1}(z)\widetilde{V}_n(z)=O$$
$$-V_n(z)\widetilde{P}_{n-1}(z)+Q_{n-1}(z)\widetilde{U}_n(z)=z^{2n-1}I$$

比较上面诸式中 $z^n,z^{n+1},\cdots,z^{2n-1}$ 的系数，并写成矩阵，得

$$\begin{bmatrix} U_n & \cdots & U_1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & U_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widetilde{Q}_{n-1} & \cdots & \widetilde{Q}_0 \\ & \ddots & \vdots \\ & & \widetilde{Q}_{n-1} \end{bmatrix}-$$

$$\begin{bmatrix} P_{n-1} & \cdots & P_0 \\ & \ddots & \vdots \\ & & P_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widetilde{V}_n & \cdots & \widetilde{V}_1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & \widetilde{V}_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & & \\ & \ddots & \\ & & I \end{bmatrix} \tag{3.2.20}$$

$$\begin{bmatrix} & & V_n \\ & \iddots & \vdots \\ V_n & \cdots & V_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widetilde{Q}_{n-1} & \cdots & \widetilde{Q}_0 \\ & \ddots & \vdots \\ & & \widetilde{Q}_{n-1} \end{bmatrix}-$$

$$\begin{bmatrix} & & Q_{n-1} \\ & \iddots & \vdots \\ Q_{n-1} & \cdots & Q_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widetilde{V}_n & \cdots & \widetilde{V}_1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & \widetilde{V}_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} O & & \\ & \ddots & \\ & & O \end{bmatrix} \tag{3.2.21}$$

$$-\begin{bmatrix} V_n & & \\ \vdots & \ddots & \\ V_1 & \cdots & V_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widetilde{P}_{n-1} & & \\ \vdots & \ddots & \\ \widetilde{P}_0 & \cdots & \widetilde{P}_{n-1} \end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix} Q_{n-1} & & \\ \vdots & \ddots & \\ Q_0 & \cdots & Q_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widetilde{U}_n & & \\ \vdots & \ddots & \\ \widetilde{U}_1 & \cdots & \widetilde{U}_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & & \\ & \ddots & \\ & & I \end{bmatrix} \tag{3.2.22}$$

又比较式(1.8.9)中 $z^0,z^1,\cdots,z^{2n-2}$ 的系数，并写成矩阵，得

$$H\begin{bmatrix} Q_{n-2} & \cdots & Q_0 & O \\ \vdots & \iddots & \iddots & \\ Q_0 & \iddots & & \\ O & & & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_{n-1} & \cdots & P_0 \\ & \ddots & \vdots \\ & & P_{n-1} \end{bmatrix}-$$

$$\begin{bmatrix} & & \Gamma_0 \\ & \iddots & \vdots \\ \Gamma_0 & \cdots & \Gamma_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & Q_{n-1} \\ & \iddots & \vdots \\ Q_{n-1} & \cdots & Q_0 \end{bmatrix} \tag{3.2.23}$$

同样比较式(1.8.4)中 $z^0,z^1,\cdots,z^{2n-1}$ 的系数，并写成矩阵，得

$$
H\begin{bmatrix} V_{n-1} & \cdots & V_0 \\ \vdots & \iddots & \\ V_0 & & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} U_n & \cdots & U_1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & U_n \end{bmatrix}-
\begin{bmatrix} & & \Gamma_0 \\ & \iddots & \vdots \\ \Gamma_0 & \cdots & \Gamma_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & V_n \\ & \iddots & \vdots \\ V_n & \cdots & V_1 \end{bmatrix} \tag{3.2.24}
$$

结合式(3.2.20)、(3.2.21)、(3.2.23)和(3.2.24),有

$$
\begin{aligned}
&H\left\{\begin{bmatrix} V_{n-1} & \cdots & V_0 \\ \vdots & \iddots & \\ V_0 & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widetilde{Q}_{n-1} & \cdots & \widetilde{Q}_0 \\ & \ddots & \vdots \\ & & \widetilde{Q}_{n-1} \end{bmatrix}-\right.\\
&\left.\begin{bmatrix} Q_{n-2} & \cdots & Q_0 & O \\ \vdots & \iddots & \iddots & \\ Q_0 & \iddots & & \\ O & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widetilde{V}_n & \cdots & \widetilde{V}_1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & \widetilde{V}_n \end{bmatrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix} U_n & \cdots & U_1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & U_n \end{bmatrix}-\right.\\
&\left.\begin{bmatrix} & & \Gamma_0 \\ & \iddots & \vdots \\ \Gamma_0 & \cdots & \Gamma_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & V_n \\ & \iddots & \vdots \\ V_n & \cdots & V_1 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} \widetilde{Q}_{n-1} & \cdots & \widetilde{Q}_0 \\ & \ddots & \vdots \\ & & \widetilde{Q}_{n-1} \end{bmatrix}-\\
&\left\{\begin{bmatrix} P_{n-1} & \cdots & P_0 \\ & \ddots & \vdots \\ & & P_{n-1} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} & & \Gamma_0 \\ & \iddots & \vdots \\ \Gamma_0 & \cdots & \Gamma_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & Q_{n-1} \\ & \iddots & \vdots \\ Q_{n-1} & \cdots & Q_0 \end{bmatrix}\right\}\times\\
&\begin{bmatrix} \widetilde{V}_n & \cdots & \widetilde{V}_1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & \widetilde{V}_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & & \\ & \ddots & \\ & & I \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

所以 H 可逆,且 H^{-1} 的表达式如式(3.2.18).

再比较式(1.8.16)中 $z^0,z^1,\cdots,z^{2n-2}$ 的系数,并写成矩阵,得

$$
\begin{bmatrix}
\widetilde{Q}_{n-2} & \cdots & \widetilde{Q}_0 & O \\
\vdots & \iddots & \iddots & \\
\widetilde{Q}_0 & \iddots & & \\
O & & &
\end{bmatrix} H = \begin{bmatrix}
\widetilde{P}_{n-1} & & \\
\vdots & \ddots & \\
\widetilde{P}_0 & \cdots & \widetilde{P}_{n-1}
\end{bmatrix} -
$$

$$
\begin{bmatrix}
 & & \widetilde{Q}_{n-1} \\
 & \iddots & \vdots \\
\widetilde{Q}_{n-1} & \cdots & \widetilde{Q}_0
\end{bmatrix} \begin{bmatrix}
 & & \Gamma_0 \\
 & \iddots & \vdots \\
\Gamma_0 & \cdots & \Gamma_{n-1}
\end{bmatrix} \tag{3.2.25}
$$

同样比较式(1.8.5)中 $z^0, z^1, \cdots, z^{2n-1}$ 的系数,并写成矩阵,得

$$
\begin{bmatrix}
\widetilde{V}_{n-1} & \cdots & \widetilde{V}_0 \\
\vdots & \iddots & \\
\widetilde{V}_0 & &
\end{bmatrix} H = \begin{bmatrix}
\widetilde{U}_n & & \\
\vdots & \ddots & \\
\widetilde{U}_1 & \cdots & \widetilde{U}_n
\end{bmatrix} -
$$

$$
\begin{bmatrix}
 & & \widetilde{V}_n \\
 & \iddots & \vdots \\
\widetilde{V}_n & \cdots & \widetilde{V}_1
\end{bmatrix} \begin{bmatrix}
 & & \Gamma_0 \\
 & \iddots & \vdots \\
\Gamma_0 & \cdots & \Gamma_{n-1}
\end{bmatrix} \tag{3.2.26}
$$

又式(3.2.21)可重排为

$$
\begin{bmatrix}
V_n & & \\
\vdots & \ddots & \\
V_1 & \cdots & V_n
\end{bmatrix} \begin{bmatrix}
 & & \widetilde{Q}_{n-1} \\
 & \iddots & \vdots \\
\widetilde{Q}_{n-1} & \cdots & \widetilde{Q}_0
\end{bmatrix} -
$$

$$
\begin{bmatrix}
Q_{n-1} & & \\
\vdots & \ddots & \\
Q_0 & \cdots & Q_{n-1}
\end{bmatrix} \begin{bmatrix}
 & & \widetilde{V}_n \\
 & \iddots & \vdots \\
\widetilde{V}_n & \cdots & \widetilde{V}_1
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
O & & \\
 & \ddots & \\
 & & O
\end{bmatrix} \tag{3.2.27}
$$

结合式(3.2.22),(3.2.25)~(3.2.27),有

$$
\left\{ \begin{bmatrix}
Q_{n-1} & & \\
\vdots & \ddots & \\
Q_0 & \cdots & Q_{n-1}
\end{bmatrix} \begin{bmatrix}
\widetilde{V}_{n-1} & \cdots & \widetilde{V}_0 \\
\vdots & \iddots & \\
\widetilde{V}_0 & &
\end{bmatrix} - \right.
$$

$$\left.\begin{bmatrix} V_n & & \\ \vdots & \ddots & \\ V_1 & \cdots & V_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widetilde{Q}_{n-2} & \cdots & \widetilde{Q}_0 & O \\ \vdots & ⋰ & ⋰ & \\ \widetilde{Q}_0 & ⋰ & & \\ O & & & \end{bmatrix}\right\} H = \begin{bmatrix} I & & \\ & \ddots & \\ & & I \end{bmatrix}$$

故 H 可逆，且 H^{-1} 的表达式如式(3.2.19)。

式(3.2.18)和(3.2.19)分别左乘 $[O \cdots O\ I]$ 和右乘 $[O \cdots O\ I]'$，即得式(3.2.17)和(3.2.16)的第 1 式；式(1.8.8)即为式(3.2.16)的第 2 式；由式(1.8.4)可推得式(3.2.17)的第 2 式。

证毕

推论 3.2.1 设 H 是分块 Hankel 矩阵(3.2.15)，若 p 阶方阵 $Q_j, X_j, \widetilde{Q}_j, \widetilde{X}_j$ 分别满足

$$H[Q_{n-1} \quad \cdots \quad Q_1 \quad Q_0]' = E_n^{(n)}$$

$$[\widetilde{Q}_{n-1} \quad \cdots \quad \widetilde{Q}_0]H = E_n^{(n)'}$$

$$H\begin{bmatrix} X_{n-1} \\ \vdots \\ X_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_2 & \cdots & \Gamma_{n+1} \\ \vdots & ⋰ & \vdots \\ \Gamma_{n+1} & \cdots & \Gamma_{2n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_{n-1} \\ \vdots \\ Y_0 \end{bmatrix} \tag{3.2.28}$$

$$[\widetilde{X}_{n-1} \cdots \widetilde{X}_0]H = [\widetilde{Y}_{n-1} \cdots \widetilde{Y}_0]\begin{bmatrix} \Gamma_2 & \cdots & \Gamma_{n+1} \\ \vdots & ⋰ & \vdots \\ \Gamma_{n+1} & \cdots & \Gamma_{2n} \end{bmatrix}$$

其中 $\Gamma_{2n}, Y_j, \widetilde{Y}_j$ 均是任意 p 阶方阵，且 Y_0 与 $\widetilde{Y}_0$ 非奇异。则 H 可逆，且

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} V_{n-1} & \cdots & V_1 & I \\ \vdots & ⋰ & ⋰ & \\ V_1 & ⋰ & & \\ I & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widetilde{Q}_{n-1} & \widetilde{Q}_{n-2} & \cdots & \widetilde{Q}_0 \\ & \widetilde{Q}_{n-1} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \widetilde{Q}_{n-2} \\ & & & \widetilde{Q}_{n-1} \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} Q_{n-2} & \cdots & Q_0 & O \\ \vdots & ⋰ & ⋰ & \\ Q_0 & ⋰ & & \\ O & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{V}_n & \widetilde{V}_{n-1} & \cdots & \widetilde{V}_1 \\ & \widetilde{V}_n & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \widetilde{V}_{n-1} \\ & & & \widetilde{V}_n \end{bmatrix} \quad (3.2.29)$$

或

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{n-1} & & & \\ Q_{n-2} & Q_{n-1} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ Q_0 & \cdots & Q_{n-2} & Q_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{V}_{n-1} & \cdots & \widetilde{V}_1 & I \\ \vdots & ⋰ & ⋰ & \\ \widetilde{V}_1 & ⋰ & & \\ I & & & \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} V_n & & & \\ V_{n-1} & V_n & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ V_1 & \cdots & V_{n-1} & V_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{Q}_{n-2} & \cdots & \widetilde{Q}_0 & O \\ \vdots & ⋰ & ⋰ & \\ \widetilde{Q}_0 & ⋰ & & \\ O & & & \end{bmatrix}$$

$$(3.2.30)$$

其中

$$\left.\begin{aligned} V_j &= (Y_j - X_{j-1})Y_0^{-1}, \quad j = 1,2,\cdots,n-1 \\ V_n &= -X_{n-1}Y_0^{-1} \end{aligned}\right\} \quad (3.2.31)$$

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{V}_j &= \widetilde{Y}_0^{-1}(\widetilde{Y}_j - \widetilde{X}_{j-1}), \quad j = 1,2,\cdots,n-1 \\ \widetilde{V}_n &= -\widetilde{Y}_0^{-1}\widetilde{X}_{n-1} \end{aligned}\right\} \quad (3.2.32)$$

证明 由式(3.2.28)

$$H[X_{n-1} \quad \cdots \quad X_0]' = H[O \quad Y_{n-1} \quad \cdots \quad Y_1]' + [\Gamma_{n+1} \quad \cdots \quad \Gamma_{2n}]'Y_0$$

$$[\widetilde{X}_{n-1} \quad \cdots \quad \widetilde{X}_0]H = [O \quad \widetilde{Y}_{n-1} \quad \cdots \quad \widetilde{Y}_1]H + \widetilde{Y}_0[\Gamma_{n+1} \quad \cdots \quad \Gamma_{2n}]$$

利用式(3.2.16)和(3.2.17)，得

$$[V_n \quad \cdots \quad V_1]' = \{[O \quad Y_{n-1} \quad \cdots \quad Y_1]' - [X_{n-1} \quad \cdots \quad X_0]'\}Y_0^{-1}$$

$$[\widetilde{V}_n \quad \cdots \quad \widetilde{V}_1] = \widetilde{Y}_0^{-1}\{[O \quad \widetilde{Y}_{n-1} \quad \cdots \quad \widetilde{Y}_1] - [\widetilde{X}_{n-1} \quad \cdots \quad \widetilde{X}_0]\}$$

代入式(3.2.18)和(3.2.19)即得所需结果. 证毕

注 在推论 3.2.1 中取 $Y_1 = \cdots = Y_{n-1} = \widetilde{Y}_1 = \cdots = \widetilde{Y}_{n-1} = O$ 和 $Y_0 = \widetilde{Y}_0 = -I$,即得定理 3.2.1 的结果.

推论 3.2.2 设 H 是分块 Hankel 矩阵(3.2.15),若 p 阶方阵 $Q_j, X_j, Y_j, \widetilde{Q}_j, \widetilde{X}_j, \widetilde{Y}_j$ 分别满足

$$H[Q_{n-1} \quad \cdots \quad Q_0]' = E_n^{(n)}, \quad [\widetilde{Q}_{n-1} \quad \cdots \quad \widetilde{Q}_0]H = E_n^{(n)\prime} \tag{3.2.33}$$

$$H[X_{n-1} \quad \cdots \quad X_0]' = E_i^{(n)}, \quad [\widetilde{X}_{n-1} \quad \cdots \quad \widetilde{X}_0]H = E_i^{(n)\prime}$$
$$H[Y_{n-1} \quad \cdots \quad Y_0]' = E_{i+1}^{(n)}, \quad [\widetilde{Y}_{n-1} \quad \cdots \quad \widetilde{Y}_0]H = E_{i+1}^{(n)\prime} \tag{3.2.34}$$

且 Y_0 与 $\widetilde{Y}_0$ 均非奇异. 则 H 可逆,且

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} V_{n-1} & \cdots & V_1 & I \\ \vdots & \iddots & \iddots & \\ V_1 & \iddots & & \\ I & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{Q}_{n-1} & \widetilde{Q}_{n-2} & \cdots & \widetilde{Q}_0 \\ & \widetilde{Q}_{n-1} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \widetilde{Q}_{n-2} \\ & & & \widetilde{Q}_{n-1} \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} Q_{n-2} & \cdots & Q_0 & O \\ \vdots & \iddots & \iddots & \\ Q_0 & \iddots & & \\ O & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{V}_n & \widetilde{V}_{n-1} & \cdots & \widetilde{V}_1 \\ & \widetilde{V}_n & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \widetilde{V}_{n-1} \\ & & & \widetilde{V}_n \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} Q_{n-2} & \cdots & Q_0 & O \\ \vdots & \iddots & \iddots & \\ Q_0 & \iddots & & \\ O & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_i & & \\ & \ddots & \\ & & W_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{Q}_{n-1} & \cdots & \widetilde{Q}_0 \\ & \ddots & \vdots \\ & & \widetilde{Q}_{n-1} \end{bmatrix}$$

或

$$
H^{-1}=\begin{bmatrix} Q_{n-1} & & & \\ Q_{n-2} & Q_{n-1} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ Q_0 & \cdots & Q_{n-2} & Q_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widetilde{V}_{n-1} & \cdots & \widetilde{V}_1 & I \\ \vdots & ⋰ & ⋰ & \\ \widetilde{V}_1 & ⋰ & & \\ I & & & \end{bmatrix}-
$$

$$
\begin{bmatrix} V_n & & & \\ V_{n-1} & V_n & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ V_1 & \cdots & V_{n-1} & V_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widetilde{Q}_{n-2} & \cdots & \widetilde{Q}_0 & O \\ \vdots & ⋰ & ⋰ & \\ \widetilde{Q}_0 & ⋰ & & \\ O & & & \end{bmatrix}-
$$

$$
\begin{bmatrix} Q_{n-1} & & \\ \vdots & \ddots & \\ Q_0 & \cdots & Q_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_i & & \\ & \ddots & \\ & & W_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widetilde{Q}_{n-2} & \cdots & \widetilde{Q}_0 & O \\ \vdots & ⋰ & ⋰ & \\ \widetilde{Q}_0 & ⋰ & & \\ O & & & \end{bmatrix}
$$

其中

$$
\begin{cases} V_j=(Y_j-X_{j-1})Y_0^{-1}, & j=1,2,\cdots,n-1 \\ V_n=-X_{n-1}Y_0^{-1} \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} \widetilde{V}_j=\widetilde{Y}_0^{-1}(\widetilde{Y}_j-\widetilde{X}_{j-1}), & j=1,2,\cdots,n-1 \\ \widetilde{V}_n=-\widetilde{Y}_0^{-1}\widetilde{X}_{n-1} \end{cases}
$$

$$
W_i=\widetilde{Y}_0^{-1}(\widetilde{Y}_{n-i}-Y_{n-i})Y_0^{-1}
$$

证明　由式(3.2.34)

$$
\begin{bmatrix} \Gamma_2 & \cdots & \Gamma_{n+1} \\ \vdots & ⋰ & \vdots \\ \Gamma_{n+1} & \cdots & \Gamma_{2n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_{n-1} \\ \vdots \\ Y_0 \end{bmatrix}=E_i^{(n)}+E_n^{(n)}C \tag{3.2.35}
$$

其中 $C=\Gamma_{n+1}Y_{n-1}+\cdots+\Gamma_{2n}Y_0$．利用式(3.2.33)，有

$$
H\left\{\begin{bmatrix} X_{n-1} \\ \vdots \\ X_0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} Q_{n-1} \\ \vdots \\ Q_0 \end{bmatrix}C\right\}=E_i^{(n)}+E_n^{(n)}C=
$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_2 & \cdots & \Gamma_{n+1} \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ \Gamma_{n+1} & \cdots & \Gamma_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{n-1} \\ \vdots \\ Y_0 \end{bmatrix} \tag{3.2.36}$$

同理可得

$$\{[\widetilde{X}_{n-1} \quad \cdots \quad \widetilde{X}_0] + \widetilde{C}[\widetilde{Q}_{n-1} \quad \cdots \quad \widetilde{Q}_0]\}H =$$

$$[\widetilde{Y}_{n-1} \quad \cdots \quad \widetilde{Y}_0]\begin{bmatrix} \Gamma_2 & \cdots & \Gamma_{n+1} \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ \Gamma_{n+1} & \cdots & \Gamma_{2n} \end{bmatrix}$$

其中 $\widetilde{C} = \widetilde{Y}_{n-1}\Gamma_{n+1} + \cdots + \widetilde{Y}_0\Gamma_{2n}$. 又由式(3.2.33)~(3.2.36)，有

$$\begin{aligned} \widetilde{Y}_{n-i} &= [\widetilde{Y}_{n-1} \quad \cdots \quad \widetilde{Y}_0]E_i^{(n)} = \\ & [\widetilde{Y}_{n-1} \quad \cdots \quad \widetilde{Y}_0]H[X_{n-1} \quad \cdots \quad X_0]' = \\ & [\widetilde{Y}_{n-1} \quad \cdots \quad \widetilde{Y}_0]\begin{bmatrix} \Gamma_2 & \cdots & \Gamma_{n+1} \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ \Gamma_{n+1} & \cdots & \Gamma_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{n-1} \\ \vdots \\ Y_0 \end{bmatrix} - \\ & [\widetilde{Y}_{n-1} \quad \cdots \quad \widetilde{Y}_0]H\begin{bmatrix} Q_{n-1} \\ \vdots \\ Q_0 \end{bmatrix}C = \\ & [\widetilde{Y}_{n-1} \quad \cdots \quad \widetilde{Y}_0]\{H[O \quad Y_{n-1} \quad \cdots \quad Y_1]' + \\ & [\Gamma_{n+1} \quad \cdots \quad \Gamma_{2n}]'Y_0\} - \widetilde{Y}_0C = \\ & E_{i+1}^{(n)\prime}[O \quad Y_{n-1} \quad \cdots \quad Y_1]' + \widetilde{C}Y_0 - \widetilde{Y}_0C = \\ & Y_{n-i} + \widetilde{C}Y_0 - \widetilde{Y}_0C \end{aligned}$$

于是

$$\widetilde{Y}_0^{-1}\widetilde{C} - CY_0^{-1} = \widetilde{Y}_0^{-1}(\widetilde{Y}_{n-i} - Y_{n-i})Y_0^{-1} = W_i \tag{3.2.37}$$

分别用 $X_j + Q_jC$ 和 $\widetilde{X}_j + \widetilde{C}\widetilde{Q}_j$ 替换式(3.2.31)，(3.2.32)中的 X_j 和 $\widetilde{X}_j$ ，代入式(3.2.29)和(3.2.30)，经整理并利用式(3.2.37)，即得所需结果. 证毕

定理 3.2.2 (Gohberg-Semencul) 设 H 是分块 Hankel 矩阵

(3.2.15)，若 p 阶方阵 $\boldsymbol{Q}_j,\boldsymbol{G}_j,\widetilde{\boldsymbol{Q}}_j,\widetilde{\boldsymbol{G}}_j$ 分别满足

$$\boldsymbol{H}[\boldsymbol{Q}_{n-1}\quad\cdots\quad\boldsymbol{Q}_0]' = \boldsymbol{E}_n^{(n)},\quad [\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{n-1}\quad\cdots\quad\widetilde{\boldsymbol{Q}}_0]\boldsymbol{H} = \boldsymbol{E}_n^{(n)\prime}$$

$$\boldsymbol{H}[\boldsymbol{G}_{n-1}\quad\cdots\quad\boldsymbol{G}_0]' = \boldsymbol{E}_1^{(n)},\quad [\widetilde{\boldsymbol{G}}_{n-1}\quad\cdots\quad\widetilde{\boldsymbol{G}}_0]\boldsymbol{H} = \boldsymbol{E}_1^{(n)\prime}$$

且 $\boldsymbol{G}_0$ 与 $\widetilde{\boldsymbol{G}}_0$ 非奇异，则 $\boldsymbol{H}$ 可逆，且

$$\boldsymbol{H}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{n-1}\boldsymbol{G}_0^{-1} & \cdots & \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}_0^{-1} & \boldsymbol{I} \\ \vdots & \iddots & \iddots & \\ \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}_0^{-1} & \iddots & & \\ \boldsymbol{I} & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{n-1} & \cdots & \widetilde{\boldsymbol{Q}}_0 \\ & \ddots & \vdots \\ & & \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{n-1} \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{n-2} & \cdots & \boldsymbol{Q}_0 & \boldsymbol{O} \\ \vdots & \iddots & \iddots & \\ \boldsymbol{Q}_0 & \iddots & & \\ \boldsymbol{O} & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \widetilde{\boldsymbol{G}}_0^{-1}\widetilde{\boldsymbol{G}}_{n-1} & \cdots & \widetilde{\boldsymbol{G}}_0^{-1}\widetilde{\boldsymbol{G}}_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \widetilde{\boldsymbol{G}}_0^{-1}\widetilde{\boldsymbol{G}}_{n-1} \\ & & & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$$

或

$$\boldsymbol{H}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{n-1} & & \\ \vdots & \ddots & \\ \boldsymbol{Q}_0 & \cdots & \boldsymbol{Q}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{G}}_0^{-1}\widetilde{\boldsymbol{G}}_{n-1} & \cdots & \widetilde{\boldsymbol{G}}_0^{-1}\widetilde{\boldsymbol{G}}_1 & \boldsymbol{I} \\ \vdots & \iddots & \iddots & \\ \widetilde{\boldsymbol{G}}_0^{-1}\widetilde{\boldsymbol{G}}_1 & \iddots & & \\ \boldsymbol{I} & & & \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & & & \\ \boldsymbol{G}_{n-1}\boldsymbol{G}_0^{-1} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}_0^{-1} & \cdots & \boldsymbol{G}_{n-1}\boldsymbol{G}_0^{-1} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{n-2} & \cdots & \widetilde{\boldsymbol{Q}}_0 & \boldsymbol{O} \\ \vdots & \iddots & \iddots & \\ \widetilde{\boldsymbol{Q}}_0 & \iddots & & \\ \boldsymbol{O} & & & \end{bmatrix}$$

证明 取 $\boldsymbol{R}_0 = \widetilde{\boldsymbol{R}}_0 = \boldsymbol{F}_n = \widetilde{\boldsymbol{F}}_n = \boldsymbol{I}$，则由定理 1.8.4 知，$\boldsymbol{H}$ 可逆．利用式(1.8.31)，(1.8.9)、(1.8.26)，(1.8.16)和(1.8.30)，仿定理 3.2.1 的证明可得所需结果． 证毕

三、 H-Bezout 矩阵

定义 3.2.1 设 $f(\lambda)$ 和 $g(\mu)$ 是两个次数不超过 n 的多项

式,以二元多项式

$$\frac{f(\lambda)g(\mu)-g(\lambda)f(\mu)}{\lambda-\mu}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\lambda^{i-1}\mu^{j-1}$$

作为生成多项式确定的 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{i,j=1}^{n}$ 称为 **H-Bezout 矩阵**.

定理 3.2.3 设 $\boldsymbol{H}$ 是 n 阶可逆 Hankel 矩阵(3.1.1),则 $\boldsymbol{H}^{-1}$ 是 H-Bezout 矩阵.

证明 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{b}=(b_1,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{c}=(c_1,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{d}=(d_1,\cdots,d_n)^{\mathrm{T}}$ 分别是线性方程组

$$\boldsymbol{Ha}=(0,\eta_1,\cdots,\eta_{n-1})^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{Hb}=\boldsymbol{e}_1$$

$$\boldsymbol{Hc}=\boldsymbol{e}_n,\quad \boldsymbol{Hd}=(\eta_{n+1},\cdots,\eta_{2n-1},0)^{\mathrm{T}}$$

的解向量,则由式(3.1.2)和(3.1.3),得

$$\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{-1}=\boldsymbol{ab}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{ba}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{ZH}^{-1}=\boldsymbol{dc}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{cd}^{\mathrm{T}}$$

代入式(1.9.2),得

$$\nabla_{W_H}\boldsymbol{H}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{-1}\\ \boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{-1}\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}-1\\ \boldsymbol{a}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\tag{3.2.38}$$

和

$$\nabla_{W_H}\boldsymbol{H}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{ZH}^{-1}-\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{e}_n\\ \boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{-1} & 0\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}} & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}\\ -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}\tag{3.2.39}$$

由式(3.2.38)和(3.2.39),并利用定理 1.9.1,定理 1.9.2 及例 1.9.1的结果知

$$(\lambda-\mu)H^{-1}(\lambda,\mu)=\left(-1+\sum_{j=1}^{n}a_j\lambda^j\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_j\mu^j\right)-\left(\sum_{j=1}^{n}b_j\lambda^j\right)\left(-1+\sum_{j=1}^{n}a_j\mu^j\right)$$

$$(\lambda-\mu)H^{-1}(\lambda,\mu)=\left(\sum_{j=1}^{n}c_j\lambda^{j-1}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}d_j\mu^{j-1}-\mu^n\right)-\left(\sum_{j=1}^{n}d_j\lambda^{j-1}-\lambda^n\right)\left(\sum_{j=1}^{n}c_j\mu^{j-1}\right)$$

令

$$f(\lambda)=-1+\sum_{j=1}^{n}a_j\lambda^j,\quad g(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}b_j\lambda^j$$

$$\tilde{f}(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}c_j\lambda^{j-1},\quad \tilde{g}(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}d_j\lambda^{j-1}-\lambda^n$$

则得
$$H^{-1}(\lambda,\mu)=\frac{f(\lambda)g(\mu)-g(\lambda)f(\mu)}{\lambda-\mu}$$

和
$$H^{-1}(\lambda,\mu)=\frac{\tilde{f}(\lambda)\tilde{g}(\mu)-\tilde{g}(\lambda)\tilde{f}(\mu)}{\lambda-\mu}$$

可见 H^{-1} 是 H-Bezout 矩阵. 证毕

利用 H-Bezout 矩阵可以给出 H^{-1} 的一些表达式,说明如下:记 $\nabla_{W_H}H^{-1}=(s_{ij})_{i,j=1}^{n+1}$ 和 $H^{-1}=(v_{ij})_{i,j=1}^{n}$. 由式(1.9.2),得

$$\left.\begin{aligned}&v_{1j}=-s_{1,j+1},\quad j=1,2,\cdots,n\\&v_{in}=-s_{i,n+1},\quad i=2,3,\cdots,n\\&v_{ij}=v_{i-1,j+1}-s_{i,j+1}\\&\qquad i=2,\cdots,n;\ j=1,\cdots,n-1\end{aligned}\right\}\tag{3.2.40}$$

又由式(3.2.38)

$$\begin{cases}s_{1,j+1}=-b_j,\quad j=1,2,\cdots,n\\s_{i,j+1}=a_{i-1}b_j-b_{i-1}a_j\\\qquad i=2,\cdots,n;\ j=1,\cdots,n\end{cases}$$

代人式(3.2.40),得

$$\begin{cases} v_{1j} = b_j, \quad j = 1,2,\cdots,n \\ v_{in} = b_{i-1}a_n - a_{i-1}b_n, \quad i = 2,3,\cdots,n \\ v_{ij} = v_{i-1,j+1} + b_{i-1}a_j - a_{i-1}b_j \\ \qquad\qquad i = 2,\cdots,n;\ j = 1,\cdots,n-1 \end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -a_1 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ -a_{n-1} & \cdots & -a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ \vdots & ⋰ & ⋰ & \\ b_{n-1} & ⋰ & & \\ b_n & & & \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & & & \\ b_1 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ b_{n-1} & \cdots & b_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & ⋰ & ⋰ & \\ a_{n-1} & ⋰ & & \\ a_n & & & \end{bmatrix}$$

同理，由式(3.2.39)和(3.2.40)，得

$$\begin{cases} v_{in} = c_i, \quad i = 1,2,\cdots,n \\ v_{1j} = d_1c_{j+1} - c_1d_{j+1}, \quad j = 1,\cdots,n-1 \\ v_{ij} = v_{i-1,j+1} - c_id_{j+1} + d_ic_{j+1} \\ \qquad\qquad i = 2,\cdots,n;\ j = 1,\cdots,n-1 \end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} c_1 & & & \\ c_2 & c_1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ c_n & \cdots & c_2 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d_2 & \cdots & -d_n & 1 \\ \vdots & ⋰ & ⋰ & \\ -d_n & ⋰ & & \\ 1 & & & \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ d_2 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ d_n & \cdots & d_2 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & \cdots & c_n & 0 \\ \vdots & ⋰ & ⋰ & \\ c_n & ⋰ & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

§3.3　求解 Hankel 线性方程组

本节考虑求解线性方程组

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f} \tag{3.3.1}$$

的快速算法，其中 $\boldsymbol{H}$ 是 n 阶 Hankel 阵，$\boldsymbol{x}=(x(1),\cdots,x(n))^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{f}=(f(1),\cdots,f(n))^{\mathrm{T}}$.

设 $\boldsymbol{H}_k$ 是 $\boldsymbol{H}$ 的 k 阶顺序主子阵且均非奇异，$\boldsymbol{x}_k=(x_k(1),\cdots,x_k(k))^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组

$$\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{f}_k,\quad k=1,2,\cdots,n \tag{3.3.2}$$

的解向量，其中 $\boldsymbol{f}_k=(f(1),\cdots,f(k))^{\mathrm{T}}$. 由定理 1.3.3 知，(3.3.2)的解可递推求得

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_k\\0\end{bmatrix}+\sigma_k\boldsymbol{u}_{k+1},\quad k=1,2,\cdots,n-1 \tag{3.3.3}$$

这里 $\sigma_k=f(k+1)-\sum_{j=1}^{k}\eta_{k+j}x_k(j)$，而 $\boldsymbol{u}_k=(u_k(1),\cdots,u_k(k))^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{u}_k=\boldsymbol{e}_k^{(k)}$ 的解向量. 记

$$\mu_k=-\sum_{j=1}^{k}\eta_{k+j}u_k(j),\quad \nu_k=-\sum_{j=1}^{k}\eta_{k+j+1}u_k(j) \tag{3.3.4}$$

则易验证

$$\boldsymbol{H}_{k+1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_k\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_k^{(k)}\\-\mu_k\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_{k+1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_{k-1}\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_{k-1}^{(k-1)}\\-\mu_{k-1}\\-\nu_{k-1}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{H}_{k+1}\begin{bmatrix}0\\\boldsymbol{u}_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_{k-1}^{(k-1)}\\-\mu_k\\-\nu_k\end{bmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{H}_{k+1}\left\{\begin{bmatrix}0\\\boldsymbol{u}_k\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_{k-1}\\0\\0\end{bmatrix}-(\mu_{k-1}-\mu_k)\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_k\\0\end{bmatrix}\right\}=$$

$$[\nu_{k-1} - \nu_k + (\mu_{k-1} - \mu_k)\mu_k]e_{k+1}^{(k+1)} \qquad (3.3.5)$$

可知 $\nu_{k-1} - \nu_k + (\mu_{k-1} - \mu_k)\mu_k \neq 0$，否则，由式(3.3.5)得

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{u}_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_{k-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - (\mu_{k-1} - \mu_k)\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_k \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

从而 $u_k(k) = 0$. 由 $\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{e}_k^{(k)}$ 得

$$\boldsymbol{H}_{k-1}(u_k(1),\cdots,u_k(k-1))^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$$

根据 $\boldsymbol{H}_{k-1}$ 可逆知 $u_k(1) = \cdots = u_k(k-1) = 0$. 但 $\boldsymbol{u}_k$ 是 $\boldsymbol{H}_k^{-1}$ 的最后一列，不可能为零向量. 故由式(3.3.5)

$$\boldsymbol{u}_{k+1} = \frac{1}{\nu_{k-1} - \nu_k + (\mu_{k-1} - \mu_k)\mu_k}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{u}_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_{k-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \right.$$

$$\left.(\mu_{k-1} - \mu_k)\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_k \\ 0 \end{bmatrix}\right\}, \quad k = 1,2,\cdots,n-1 \qquad (3.3.6)$$

结合式(3.3.3)，(3.3.4)和(3.3.6)得求解 Hankel 线性方程组 $\boldsymbol{Hx} = \boldsymbol{f}$ 的 **Gohberg-Kailath-Koltracht 算法**[86]：

$$u_1(1) = \frac{1}{\eta_1}, \quad x_1(1) = \frac{f(1)}{\eta_1}$$

$$\mu_1 = -\eta_2 u_1(1), \quad \nu_1 = -\eta_3 u_1(1)$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\eta_1\eta_3 - \eta_2^2}\begin{bmatrix} -\eta_2 \\ \eta_1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\eta_1\eta_3 - \eta_2^2}\begin{bmatrix} \eta_3 f(1) - \eta_2 f(2) \\ \eta_1 f(2) - \eta_2 f(1) \end{bmatrix}$$

对 $k = 2,\cdots,n-1$

$$\mu_k = -\sum_{j=1}^{k}\eta_{k+j}u_k(j), \quad \nu_k = -\sum_{j=1}^{k}\eta_{k+j+1}u_k(j)$$

$$\boldsymbol{u}_{k+1} = \frac{1}{\nu_{k-1} - \nu_k + (\mu_{k-1} - \mu_k)\mu_k} \times$$

$$\left\{\begin{bmatrix}0\\ u_k\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}u_{k-1}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}-(\mu_{k-1}-\mu_k)\begin{bmatrix}u_k\\ 0\end{bmatrix}\right\}$$

$$\sigma_k = f(k+1)-\sum_{j=1}^{k}\eta_{k+j}x_k(j)$$

$$x_{k+1}=\begin{bmatrix}x_k\\ 0\end{bmatrix}+\sigma_k u_{k+1}$$

该算法需 $3n^2+O(n)$ 次乘除运算，$3n^2+O(n)$ 次加减运算.

§3.4　Hankel 矩阵的三角分解

一、 Phillips 算法

设式(3.1.1)的实 Hankel 阵 $\boldsymbol{H}$ 的各阶顺序主子阵均非奇异，则它可进行三角分解.

取定 n 阶对称正定矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和 n 维列向量 $\boldsymbol{v}$，使得矩阵

$$\boldsymbol{F}=[\boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{Bv}\quad \boldsymbol{B}^2\boldsymbol{v}\quad \cdots\quad \boldsymbol{B}^{n-1}\boldsymbol{v}] \tag{3.4.1}$$

非奇异. 若令

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}^{-1}$$

则 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异实对称矩阵，且由

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{i-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{j-1}\boldsymbol{v})_{i,j=1}^{n} \tag{3.4.2}$$

及 $\boldsymbol{H}$ 是 Hankel 矩阵知

$$\eta_{j+1}=\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{j}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{j-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}=\cdots=\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{j}\boldsymbol{v},\quad j=0,1,\cdots \tag{3.4.3}$$

取 $\boldsymbol{q}_1=\boldsymbol{v}$ 和 $\beta_1=0$，按如下过程构造向量组

$$\boldsymbol{q}_{k+1}=(\boldsymbol{B}-\alpha_k\boldsymbol{I})\boldsymbol{q}_k-\beta_k\boldsymbol{q}_{k-1},\quad k=1,2,\cdots,n \tag{3.4.4}$$

其中参数 α_k，β_k 使得 $\boldsymbol{q}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_{k+1}=0$，$\boldsymbol{q}_{k-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_{k+1}=0$. 利用式(3.4.3)和(3.4.4)可解得

$$\left.\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{q_k^{\mathrm{T}}ABq_k}{q_k^{\mathrm{T}}Aq_k}\\ \beta_k &= \frac{q_{k-1}^{\mathrm{T}}ABq_k}{q_{k-1}^{\mathrm{T}}Aq_{k-1}} = \frac{(Bq_{k-1})^{\mathrm{T}}Aq_k}{q_{k-1}^{T}Aq_{k-1}} = \frac{q_k^{\mathrm{T}}Aq_k}{q_{k-1}^{\mathrm{T}}Aq_{k-1}}\end{aligned}\right\} \tag{3.4.5}$$

可以证明 $q_i^{\mathrm{T}}Aq_j = 0\ (i \neq j)$. 若记 $Q = [q_1\ \ q_2\ \ \cdots\ \ q_n]$, 则有

$$Q^{\mathrm{T}}AQ = D = \mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n),\quad d_k = q_k^{\mathrm{T}}Aq_k \tag{3.4.6}$$

又由式(3.4.4)

$$Bq_k = \beta_k q_{k-1} + \alpha_k q_k + q_{k+1},\quad k = 1,2,\cdots,n \tag{3.4.7}$$

其中 $q_{n+1} = \mathbf{0}$. 递推计算得

$$\begin{cases}Bq_1 = \alpha_1 q_1 + q_2 \overset{\text{def}}{=\!=} r_{12}q_1 + q_2\\ B^2q_1 = (\alpha_1^2 + \beta_2)q_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)q_2 + q_3 \overset{\text{def}}{=\!=} r_{13}q_1 + r_{23}q_2 + q_3\\ \qquad\vdots\\ B^{n-1}q_1 \overset{\text{def}}{=\!=} r_{1n}q_1 + \cdots + r_{n-1,n}q_{n-1} + q_n\end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$F = QR \tag{3.4.8}$$

其中 $R = (r_{ij})_{i,j=1}^{n}$ 是单位上三角矩阵(即对角元为 1 的上三角矩阵). 从而由式(3.4.2)、(3.4.6)和(3.4.8), 得

$$H = F^{\mathrm{T}}AF = R^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}AQR = R^{\mathrm{T}}DR \tag{3.4.9}$$

此即为 Hankel 矩阵 H 的一种三角分解.

构造 $n \times 2n$ 矩阵

$$\begin{aligned}W &= [q_1\ \ Bq_1\ \ B^2q_1\ \ \cdots\ \ B^{2n-1}q_1] =\\ &\quad [F\ \ B^nF] = Q[R\ \ Q^{-1}B^nF]\end{aligned} \tag{3.4.10}$$

若记 $[A]_j$ 为矩阵 A 的第 j 列, 而 Z 是 $2n$ 阶移位矩阵, 则

$$[BW]_j = [WZ]_j,\quad j = 1,2,\cdots,2n-1$$

将式(3.4.7)写成矩阵形式

$$BQ = QT$$

其中 $\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_2 & & \\ 1 & \alpha_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta_n \\ & & 1 & \alpha_n\end{bmatrix}$ 是三对角矩阵．又由式(3.4.10)

$$\boldsymbol{BW}=\boldsymbol{BQ}[\boldsymbol{R}\quad \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}^n\boldsymbol{F}]=\boldsymbol{QT}[\boldsymbol{R}\quad \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}^n\boldsymbol{F}]$$

于是可以推得 $[\boldsymbol{T}[\boldsymbol{R}\quad \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}^n\boldsymbol{F}]]_j=[[\boldsymbol{R}\quad \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}^n\boldsymbol{F}]\boldsymbol{Z}]_j$，也就是 $[\boldsymbol{DTD}^{-1}[\boldsymbol{DR}\quad \boldsymbol{DQ}^{-1}\boldsymbol{B}^n\boldsymbol{F}]]_j=[[\boldsymbol{DR}\quad \boldsymbol{DQ}^{-1}\boldsymbol{B}^n\boldsymbol{F}]\boldsymbol{Z}]_j$．令

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{DTD}^{-1}=(p_{ij})_{n\times n},\quad \boldsymbol{C}=[\boldsymbol{DR}\quad \boldsymbol{DQ}^{-1}\boldsymbol{B}^n\boldsymbol{F}]=(c_{ij})_{n\times 2n}$$

则有

$$[\boldsymbol{PC}]_j=[\boldsymbol{CZ}]_j\quad (j=1,2,\cdots,2n-1)$$

比较两边第 k 行第 j 列元素，并注意 $\boldsymbol{P}$ 是三对角矩阵，有

$$p_{k,k-1}c_{k-1,j}+p_{kk}c_{kj}+p_{k,k+1}c_{k+1,j}=c_{k,j+1}\tag{3.4.11}$$

根据式(3.4.5)和(3.4.6)，得

$$p_{k,k-1}=\frac{d_k}{d_{k-1}}=\beta_k,\quad p_{kk}=\alpha_k,\quad p_{k,k+1}=\frac{d_k}{d_{k+1}}\beta_{k+1}=1$$

代入式(3.4.11)解得

$$c_{k+1,j}=c_{k,j+1}-\alpha_k c_{kj}-\beta_k c_{k-1,j}\tag{3.4.12}$$

又由式(3.4.1)，(3.4.6)，(3.4.8)和(3.4.9)，并注意到 $\boldsymbol{R}$ 是单位上三角矩阵，得

$$\boldsymbol{e}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{e}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{R}^{\mathrm T}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{e}_1^{\mathrm T}[\boldsymbol{R}^{\mathrm T}\boldsymbol{DR}\quad \boldsymbol{R}^{\mathrm T}\boldsymbol{DQ}^{-1}\boldsymbol{B}^n\boldsymbol{F}]=$$
$$\boldsymbol{e}_1^{\mathrm T}[\boldsymbol{H}\quad \boldsymbol{F}^{\mathrm T}\boldsymbol{AB}^n\boldsymbol{F}]$$

利用式(3.4.3)可知，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 1 行元素应为

$$c_{1j}=\eta_j,\quad j=1,2,\cdots,2n-1$$

而由式(3.4.12)可递推求得 $\boldsymbol{C}$ 中 $\boldsymbol{DR}$ 部分的元素。如 $n=3$，则须要确定的元素为

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & * \\ 0 & c_{22} & c_{23} & c_{24} & * & * \\ 0 & 0 & c_{33} & * & * & *\end{array}\right]$$

从而对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 和上三角矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的元素为

$$d_k = c_{kk}, \quad r_{kj} = \frac{c_{kj}}{d_k}, \quad j = k+1,\cdots n; k = 1,2,\cdots,n$$

又 $\beta_k = \dfrac{d_k}{d_{k-1}} = \dfrac{c_{kk}}{c_{k-1,k-1}}$ $(k = 2,\cdots,n)$．为确定 α_k，由 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{R}^{-1}$，得

$$\boldsymbol{q}_k = \boldsymbol{B}^{k-1}\boldsymbol{q}_1 + [\boldsymbol{R}^{-1}]_{k-1,k}\boldsymbol{B}^{k-2}\boldsymbol{q}_1 + \cdots$$

其中 $[\boldsymbol{R}^{-1}]_{k-1行k列}$ 表示 $\boldsymbol{R}^{-1}$ 的第 $k-1$ 行第 k 列元素，于是

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{q}_k = \boldsymbol{B}^k\boldsymbol{q}_1 + [\boldsymbol{R}^{-1}]_{k-1,k}\boldsymbol{B}^{k-1}\boldsymbol{q}_1 + \cdots \tag{3.4.13}$$

上面两式代入式(3.4.7)，并整理得

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{q}_k = \boldsymbol{B}^k\boldsymbol{q}_1 + [\boldsymbol{R}^{-1}]_{k,k+1}\boldsymbol{B}^{k-1}\boldsymbol{q}_1 + \alpha_k\boldsymbol{B}^{k-1}\boldsymbol{q}_1 + \cdots \tag{3.4.14}$$

比较式(3.4.13)和(3.4.14)中 $\boldsymbol{B}^{k-1}\boldsymbol{q}_1$ 的系数，并求出 $\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D}$ 的第 $k-1$ 行第 k 列元素和第 k 行第 $k+1$ 列元素得

$$\alpha_k = [\boldsymbol{R}^{-1}]_{k-1,k} - [\boldsymbol{R}^{-1}]_{k,k+1} = -\frac{c_{k-1,k}}{c_{k-1,k-1}} + \frac{c_{k,k+1}}{c_{k,k}}$$

特别地，由 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{q}_2 + \alpha_1\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{B}\boldsymbol{q}_1 + [\boldsymbol{R}^{-1}]_{1,2}\boldsymbol{q}_1 + \alpha_1\boldsymbol{q}_1$，得

$$\alpha_1 = -[\boldsymbol{R}^{-1}]_{1,2} = \frac{c_{12}}{c_{11}}$$

综上所述，得求 Hankel 矩阵三角分解的 **Phillips 算法**[16]：

$c_{1j} = \eta_j, \quad j = 1,2,\cdots,2n-1$

$\alpha_1 = \dfrac{c_{12}}{c_{11}}, \quad \beta_1 = 0 \quad , \quad d_1 = c_{11}$

$r_{1j} = \dfrac{c_{1j}}{d_1}, \quad j = 2,\cdots,n$

对 $k = 2,3,\cdots,n$

$$c_{k,j} = c_{k-1,j+1} - \alpha_{k-1}c_{k-1,j} - \beta_{k-1}c_{k-2,j}$$
$$j = k,\cdots,2n-k$$

$$d_k = c_{kk} \quad , \quad r_{kj} = \frac{c_{k,j}}{d_k}, \quad j = k+1,\cdots,n$$

$$\alpha_k = \frac{c_{k,k+1}}{c_{kk}} - \frac{c_{k-1,k}}{c_{k-1,k-1}}, \quad \beta_k = \frac{c_{k,k}}{c_{k-1,k-1}}, \quad k \neq n$$

最后，由式(3.4.9)得 Hankel 矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的三角分解.

二、 Rissanen 算法

考虑式(3.2.15)的分块 Hankel 矩阵 $\boldsymbol{H}$，并设其所有分块顺序主子阵 $\boldsymbol{H}_k=(\boldsymbol{\Gamma}_{i+j-1})_{i,j=1}^{k}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 均非奇异. 求矩阵 $\boldsymbol{H}$ 如下的三角分解

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{R} \tag{3.4.15}$$

其中

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & & & \\ \boldsymbol{L}_{21} & \boldsymbol{I} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \boldsymbol{L}_{n1} & \cdots & \boldsymbol{L}_{n,n-1} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_{11} & \boldsymbol{R}_{12} & \cdots & \boldsymbol{R}_{1n} \\ & \boldsymbol{R}_{22} & \cdots & \boldsymbol{R}_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \boldsymbol{R}_{nn}\end{bmatrix}$$

由式(3.4.15)可得一组等式

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{L}_{k-1,1} & \cdots & \boldsymbol{L}_{k-1,k-2} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{L}_{k1} & \cdots & \boldsymbol{L}_{k,k-2} & \boldsymbol{L}_{k,k-1} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Gamma}_1 & \cdots & \boldsymbol{\Gamma}_{k-2} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\Gamma}_k & \cdots & \boldsymbol{\Gamma}_{2k-3}\end{bmatrix}=$$
$$[\boldsymbol{O} \quad \cdots \quad \boldsymbol{O}] \tag{3.4.16}$$

$$[\boldsymbol{L}_{k1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{L}_{k,k-1} \quad \boldsymbol{I}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Gamma}_{k-1} & \boldsymbol{\Gamma}_k \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{\Gamma}_{2k-2} & \boldsymbol{\Gamma}_{2k-1}\end{bmatrix}=[\boldsymbol{O} \quad \boldsymbol{R}_{kk}] \tag{3.4.17}$$

$$\boldsymbol{L}_{k1}[\boldsymbol{\Gamma}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Gamma}_{k-1}]+\cdots+\boldsymbol{L}_{k,k-1}[\boldsymbol{\Gamma}_k \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Gamma}_{2k-3}]+$$
$$[\boldsymbol{\Gamma}_{k+1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Gamma}_{2k-2}]=[\boldsymbol{O} \quad \cdots \quad \boldsymbol{O}] \tag{3.4.18}$$

$$\boldsymbol{L}_{k+1,1}[\boldsymbol{\Gamma}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Gamma}_{k-2}]+\boldsymbol{L}_{k+1,2}[\boldsymbol{\Gamma}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Gamma}_{k-1}]+\cdots+$$
$$\boldsymbol{L}_{k+1,k}[\boldsymbol{\Gamma}_k \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Gamma}_{2k-3}]+[\boldsymbol{\Gamma}_{k+1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Gamma}_{2k-2}]=[\boldsymbol{O} \quad \cdots \quad \boldsymbol{O}] \tag{3.4.19}$$

$$\boldsymbol{L}_{k1}[\boldsymbol{\Gamma}_k \quad \boldsymbol{\Gamma}_{k+1}]+\cdots+\boldsymbol{L}_{k,k-1}[\boldsymbol{\Gamma}_{2k-2} \quad \boldsymbol{\Gamma}_{2k-1}]+$$
$$[\boldsymbol{\Gamma}_{2k-1} \quad \boldsymbol{\Gamma}_{2k}]=[\boldsymbol{R}_{kk} \quad \boldsymbol{R}_{k,k+1}] \tag{3.4.20}$$

$$L_{k+1,1}[\Gamma_{k-1} \quad \Gamma_k]+L_{k+1,2}[\Gamma_k \quad \Gamma_{k+1}]+\cdots+$$
$$L_{k+1,k}[\Gamma_{2k-2} \quad \Gamma_{2k-1}]+[\Gamma_{2k-1} \quad \Gamma_{2k}]=[O \quad O] \qquad (3.4.21)$$

令

$$\left.\begin{aligned}X_1 &= L_{k+1,1}\\ X_j &= L_{k+1,j}-L_{k,j-1}, \quad j=2,\cdots,k\end{aligned}\right\} \qquad (3.4.22)$$

由式(3.4.18),(3.4.19)和式(3.4.20),(3.4.21)分别得

$$[X_1 \quad \cdots \quad X_k]\begin{bmatrix}\Gamma_1 & \cdots & \Gamma_{k-2}\\ \vdots & & \vdots\\ \Gamma_k & \cdots & \Gamma_{2k-3}\end{bmatrix}=[O \quad \cdots \quad O] \qquad (3.4.23)$$

$$[X_1 \quad \cdots \quad X_k]\begin{bmatrix}\Gamma_{k-1} & \Gamma_k\\ \vdots & \vdots\\ \Gamma_{2k-2} & \Gamma_{2k-1}\end{bmatrix}=-[R_{kk} \quad R_{k,k+1}] \qquad (3.4.24)$$

注意到 H 的所有分块顺序主子阵均非奇异,由式(3.4.16)、式(3.4.23)及齐次线性方程组理论知,存在 p 阶矩阵 F_k 和 G_{k-1} 使得

$$[X_1 \quad \cdots \quad X_k]=F_k[L_{k1} \quad \cdots \quad L_{k,k-1} \quad I]+$$
$$G_{k-1}[L_{k-1,1} \quad \cdots \quad L_{k-1,k-2} \quad I \quad O] \qquad (3.4.25)$$

上式两边右乘 $\begin{bmatrix}\Gamma_{k-1} & \Gamma_k\\ \vdots & \vdots\\ \Gamma_{2k-2} & \Gamma_{2k-1}\end{bmatrix}$,并利用式(3.4.17),(3.4.20)和(3.4.24),得

$$-[R_{kk} \quad R_{k,k+1}]=F_k[O \quad R_{kk}]+G_{k-1}[R_{k-1,k-1} \quad R_{k-1,k}]$$

于是有

$$G_{k-1}=-R_{kk}R_{k-1,k-1}^{-1}, \quad F_k=-(G_{k-1}R_{k-1,k}+R_{k,k+1})R_{kk}^{-1} \qquad (3.4.26)$$

而由(3.4.22)和(3.4.25),有

$$L_{k+1,j}=L_{k,j-1}+F_kL_{kj}+G_{k-1}L_{k-1,j},\quad j=1,2,\cdots,k \tag{3.4.27}$$

其中规定 $L_{k,0}=L_{k-1,k}=O$，$L_{kk}=I$．又由式(3.4.15)和(3.4.27)

$$R_{1,k+1}=\Gamma_{k+1}$$

$$\begin{aligned}R_{i+1,k+1}=&\sum_{j=1}^{i+1}L_{i+1,j}\Gamma_{k+j}=\\&\Gamma_{k+i+1}+\sum_{j=1}^{i}(L_{i,j-1}+F_iL_{ij}+G_{i-1}L_{i-1,j})\Gamma_{k+j}=\\&\Gamma_{k+i+1}+\sum_{j=2}^{i}L_{i,j-1}\Gamma_{k+j}+F_iR_{i,k+1}+G_{i-1}R_{i-1,k+1}=\\&\sum_{j=1}^{i}L_{ij}\Gamma_{k+1+j}+F_iR_{i,k+1}+G_{i-1}R_{i-1,k+1}=\\&R_{i,k+2}+F_iR_{i,k+1}+G_{i-1}R_{i-1,k+1},\quad i=1,2,\cdots,k\end{aligned} \tag{3.4.28}$$

结合式(3.4.26)～(3.4.28)得求分块 Hankel 矩阵三角分解式(3.4.15)的 **Rissanen 算法**[25]：

$L_{jj}=I\quad,\quad j=1,2,\cdots,n$

$R_{1j}=\Gamma_j\quad,\quad j=1,2,\cdots,2n-1$

$G_0=O$

对 $k=1,2,\cdots,n-1$

$\quad F_k=-(G_{k-1}R_{k-1,k}+R_{k,k+1})R_{kk}^{-1}$

$\quad L_{k+1,j}=L_{k,j-1}+F_kL_{kj}+G_{k-1}L_{k-1,j},\quad j=1,2,\cdots,k$

$\qquad$（其中规定 $L_{k,0}=L_{k-1,k}=O$）

$\quad R_{k+1,j+1}=R_{k,j+2}+F_kR_{k,j+1}+G_{k-1}L_{k-1,j+1}$

$\qquad\qquad j=k,k+1,\cdots,2n-k-1$

$\quad G_k=-R_{k+1,k+1}R_{kk}^{-1}$

三、 Chun-Kailath 算法

设式(3.1.1)的 n 阶 Hankel 矩阵 H 的各阶顺序主子阵非奇

异，从而 $\boldsymbol{H}$ 可进行三角分解．构造 $2n$ 阶矩阵

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H} & \boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix} \tag{3.4.29}$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 是 Hankel 矩阵，其次对角线元素及右下角元素全为零，并使得 $\boldsymbol{M}$ 为 $2n$ 阶 Hankel 矩阵．如对三阶 Hankel 矩阵

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\\ \eta_2 & \eta_3 & \eta_4\\ \eta_3 & \eta_4 & \eta_5\end{bmatrix}$$

应取

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\eta_4 & \eta_5 & 0\\ \eta_5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

对于矩阵 $\boldsymbol{M}$ 应用定理 1.4.1，即设

$$\boldsymbol{M}^{(0)}=\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{M},\quad \boldsymbol{M}^{(i)}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_i\end{bmatrix},\quad i=1,2,\cdots,n$$

其中 $\boldsymbol{B}_i$ 是 $2n-i$ 阶方阵，又设 $2n$ 维列向量

$$\tilde{\boldsymbol{l}}_i=(0,\cdots,0,\tilde{l}_i(i),\cdots,\tilde{l}_i(2n))^{\mathrm{T}}$$

满足

$$\tilde{\boldsymbol{l}}_i=\boldsymbol{M}^{(i-1)}\boldsymbol{e}_i^{(2n)},\quad \tilde{d}_i=\frac{1}{\tilde{l}_i(i)} \tag{3.4.30}$$

则

$$\boldsymbol{M}^{(i-1)}=\tilde{\boldsymbol{l}}_i\tilde{d}_i\tilde{\boldsymbol{l}}_i^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{M}^{(i)},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{3.4.31}$$

将上述过程进行 n 步，得到矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的部分三角分解

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{L}_1\\ \boldsymbol{L}_2\end{bmatrix}\boldsymbol{D}\begin{bmatrix}\boldsymbol{L}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{L}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}+\boldsymbol{M}^{(n)} \tag{3.4.32}$$

其中 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{L}_1\\ \boldsymbol{L}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{l}}_1 & \cdots & \tilde{\boldsymbol{l}}_n\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(\tilde{d}_1,\cdots,\tilde{d}_n)$，而 $\boldsymbol{L}_1,\boldsymbol{L}_2$ 是 n 阶方阵．由式(3.4.32)即可得矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的三角分解

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}_1^{\mathrm{T}}$$

下面推导 $\tilde{l}_i$ 的递推计算公式. 容易验证

$$Z_{2n}M - MZ_{2n}^{\mathrm{T}} = (1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}(0,-\eta_1,\cdots,-\eta_{2n-1}) - (0,-\eta_1,\cdots,-\eta_{2n-1})^{\mathrm{T}}(1,0,\cdots,0)$$

若令

$$\Delta M^{(i)} = Z_{2n}M^{(i)} - M^{(i)}Z_{2n}^{\mathrm{T}},\quad i = 0,1,\cdots,n \tag{3.4.33}$$

则 $\operatorname{rank}(\Delta M^{(0)}) \leqslant 2$，而由定理 1.4.2 知

$$\operatorname{rank}(\Delta M^{(i)}) \leqslant \operatorname{rank}(\Delta M^{(i-1)}) \leqslant \cdots \leqslant 2$$

注意到 $\Delta M^{(i)}$ 是反对称矩阵，故存在 $2n$ 维列向量

$$\tilde{x}_{i-1} = (0,\cdots,0,\tilde{x}_{i-1}(i),\cdots,\tilde{x}_{i-1}(2n))^{\mathrm{T}}$$

$$\tilde{y}_{i-1} = (0,\cdots,0,\tilde{y}_{i-1}(i),\cdots,\tilde{y}_{i-1}(2n))^{\mathrm{T}}$$

使得

$$\Delta M^{(i-1)} = \tilde{x}_{i-1}\tilde{y}_{i-1}^{\mathrm{T}} - \tilde{y}_{i-1}\tilde{x}_{i-1}^{\mathrm{T}},\quad i = 1,2,\cdots,n \tag{3.4.34}$$

上式两边右乘 $e_i^{(2n)}$，并利用式(3.4.30)和(3.4.33)，得

$$Z_{2n}\tilde{l}_i = \tilde{y}_{i-1}(i)\tilde{x}_{i-1} - \tilde{x}_{i-1}(i)\tilde{y}_{i-1} \tag{3.4.35}$$

又由式(3.4.31)，(3.4.33)～(3.4.35)，得

$$\begin{aligned}\tilde{x}_i\tilde{y}_i^{\mathrm{T}} - \tilde{y}_i\tilde{x}_i^{\mathrm{T}} = \Delta M^{(i)} &= Z_{2n}(M^{(i-1)} - \tilde{l}_i\tilde{d}_i\tilde{l}_i^{\mathrm{T}}) - \\ &(M^{(i-1)} - \tilde{l}_i\tilde{d}_i\tilde{l}_i^{\mathrm{T}})Z_{2n}^{\mathrm{T}} = \\ &\Delta M^{(i-1)} - Z_{2n}\tilde{l}_i\tilde{d}_i\tilde{l}_i^{\mathrm{T}} + \tilde{l}_i\tilde{d}_i\tilde{l}_i^{\mathrm{T}}Z_{2n}^{\mathrm{T}} = \\ &\tilde{x}_{i-1}\tilde{y}_{i-1}^{\mathrm{T}} - \tilde{y}_{i-1}\tilde{x}_{i-1}^{\mathrm{T}} - \tilde{y}_{i-1}(i)\tilde{d}_i\tilde{x}_{i-1}\tilde{l}_i^{\mathrm{T}} + \\ &\tilde{x}_{i-1}(i)\tilde{d}_i\tilde{y}_{i-1}\tilde{l}_i^{\mathrm{T}} + \tilde{y}_{i-1}(i)\tilde{d}_i\tilde{l}_i\tilde{x}_{i-1}^{\mathrm{T}} - \tilde{x}_{i-1}(i)\tilde{d}_i\tilde{l}_i\tilde{y}_{i-1}^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

于是可取

$$\tilde{x}_i = \tilde{x}_{i-1} - \tilde{d}_i\tilde{x}_{i-1}(i)\tilde{l}_i,\quad \tilde{y}_i = \tilde{y}_{i-1} - \tilde{d}_i\tilde{y}_{i-1}(i)\tilde{l}_i \tag{3.4.36}$$

结合式(3.4.35)与(3.4.36)得 Hankel 矩阵的快速三角分解算法.

Chun-Kailath 算法 1[132] （求 Hankel 矩阵的三角分解）

$$\tilde{x}_0 = e_1^{(2n)},\quad \tilde{y}_0 = (0,-\eta_1,\cdots,-\eta_{2n-1})^{\mathrm{T}}$$

对 $i=1,2,\cdots,n$

$$\tilde{l}_i(k)=\tilde{y}_{i-1}(i)\tilde{x}_{i-1}(k+1)-\tilde{x}_{i-1}(i)\tilde{y}_{i-1}(k+1)$$

$$k=i,i+1,\cdots,2n-1$$

$$\tilde{l}_i(2n)=0$$

$$\tilde{d}_i=\frac{1}{\tilde{l}_i(i)}$$

$$\tilde{x}_i(k)=\tilde{x}_{i-1}(k)-\tilde{d}_i\tilde{x}_{i-1}(i)\tilde{l}_i(k)$$

$$\tilde{y}_i(k)=\tilde{y}_{i-1}(k)-\tilde{d}_i\tilde{y}_{i-1}(i)\tilde{l}_i(k)$$

$$k=i+1,\cdots,2n$$

最后得到

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}\tilde{l}_1(1) & & & \\ \tilde{l}_1(2) & \tilde{l}_2(2) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \tilde{l}_1(n) & \tilde{l}_2(n) & \cdots & \tilde{l}_n(n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{d}_1 & & & \\ & \tilde{d}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{d}_n\end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix}\tilde{l}_1(1) & \tilde{l}_1(2) & \cdots & \tilde{l}_1(n) \\ & \tilde{l}_2(2) & \cdots & \tilde{l}_2(n) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \tilde{l}_n(n)\end{bmatrix}$$

该算法需 $6n^2-n$ 次乘除运算，$\frac{9}{2}n^2-\frac{7}{2}n$ 次加减运算.

为推导出计算 Hankel 阵之逆阵的快速三角分解算法，构造 $4n+1$ 阶带状辅助矩阵

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{2n} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 0 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{I}_{2n} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix} \tag{3.4.37}$$

其中 $\boldsymbol{M}$ 是式(3.4.29)的 $2n$ 阶矩阵. 对于矩阵 $\boldsymbol{N}$ 应用定理 1.4.1，即设

$$\boldsymbol{N}^{(0)}=\hat{\boldsymbol{B}}_0=\boldsymbol{N},\quad \boldsymbol{N}^{(i)}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \hat{\boldsymbol{B}}_i\end{bmatrix},\quad i=1,2,\cdots$$

其中 $\hat{B}_i$ 为 $4n-i$ 阶矩阵. 若取 $4n+1$ 维列向量 $\hat{l}_i$ 和数 $\hat{d}_i$ 为

$$\hat{l}_i = N^{(i-1)}e_i^{(4n+1)}, \quad \hat{d}_i = \frac{1}{\hat{l}_i(i)}, \quad i = 1,2,\cdots \tag{3.4.38}$$

则

$$N^{(i-1)} = \hat{l}_i\hat{d}_i\hat{l}_i^{\mathrm{T}} + N^{(i)} \tag{3.4.39}$$

由 $N^{(i-1)}$ 的构造知, $4n+1$ 维列向量 $\hat{l}_i$ 具有如下形状:

$$\hat{l}_i = (0,\cdots,0,\hat{l}_i(i),\cdots,\hat{l}_i(2n-1),0,0,\hat{l}_i(2n+2),$$
$$\cdots,\hat{l}_i(2n+i+1),0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

将式(3.4.39)的过程只进行 n 步, 得到矩阵 N 的部分三角分解

$$N = [L_1 \quad L_2 \quad \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \quad U \quad O]'\hat{D}[L_1^{\mathrm{T}} \quad L_2^{\mathrm{T}} \quad \mathbf{0} \quad U^{\mathrm{T}} \quad O] + N^{(n)} \tag{3.4.40}$$

其中

$$[L_1 \quad L_2 \quad \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \quad U \quad O]' = [\hat{l}_1 \quad \cdots \quad \hat{l}_n], \quad \hat{D} = \mathrm{diag}(\hat{d}_1,\cdots,\hat{d}_n)$$

而 L_1, L_2, U 是 n 阶方阵. 由 N 为带状矩阵知, U 是上三角矩阵. 比较式(3.4.40)与(3.4.37)得, $H = L_1\hat{D}L_1^{\mathrm{T}}$, $L_1\hat{D}U^{\mathrm{T}} = I_n$. 于是 $H^{-1} = U\hat{D}U^{\mathrm{T}}$. 这是 Hankel 矩阵 H 之逆矩阵的一种三角分解. 容易验证

$$\begin{bmatrix} Z_{2n} & O \\ O & Z_{2n+1}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} N - N \begin{bmatrix} Z_{2n}^{\mathrm{T}} & O \\ O & Z_{2n+1} \end{bmatrix} =$$
$$e_1^{(4n+1)}(0, -\eta_1, \cdots, -\eta_{2n-1}, -1, 0, \cdots, 0) -$$
$$(0, -\eta_1, \cdots, -\eta_{2n-1}, -1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}} e_1^{(4n+1)\mathrm{T}} \tag{3.4.41}$$

令

$$\tilde{\Delta}N^{(i)} = \begin{bmatrix} Z_{2n} & O \\ O & Z_{2n+1}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} N^{(i)} - N^{(i)} \begin{bmatrix} Z_{2n}^{\mathrm{T}} & O \\ O & Z_{2n+1} \end{bmatrix} \tag{3.4.42}$$

则由式(3.4.41)知, $\mathrm{rank}(\tilde{\Delta}N^{(0)}) \leqslant 2$. 仿定理 1.4.2 的证明过程可得(注意 $\begin{bmatrix} Z_{2n} & O \\ O & Z_{2n+1}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$ 不是下三角阵, 但相应的结论仍成立)

$$\mathrm{rank}(\tilde{\Delta}N^{(i)}) \leqslant \mathrm{rank}(\tilde{\Delta}N^{(i-1)}) \leqslant \cdots \leqslant 2$$

故存在 $4n+1$ 维列向量

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{i-1}=(0,\cdots,0,\hat{x}_{i-1}(i),\cdots,\hat{x}_{i-1}(2n+i),0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}_{i-1}=(0,\cdots,0,\hat{y}_{i-1}(i),\cdots,\hat{y}_{i-1}(2n+i),0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

使得
$$\tilde{\Delta}N^{(i-1)}=\hat{\boldsymbol{x}}_{i-1}\hat{\boldsymbol{y}}_{i-1}^{\mathrm{T}}-\hat{\boldsymbol{y}}_{i-1}\hat{\boldsymbol{x}}_{i-1}^{\mathrm{T}}$$

（注意 $\tilde{\Delta}N^{(i)}$ 是反对称的）与式(3.4.35)和(3.4.36)类似的推导过程得

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_{2n} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Z}_{2n+1}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\hat{\boldsymbol{l}}_i=\hat{y}_{i-1}(i)\hat{\boldsymbol{x}}_{i-1}-\hat{x}_{i-1}(i)\hat{\boldsymbol{y}}_{i-1}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_i=\hat{\boldsymbol{x}}_{i-1}-\hat{d}_i\hat{x}_{i-1}(i)\hat{\boldsymbol{l}}_i,\quad \hat{\boldsymbol{y}}_i=\hat{\boldsymbol{y}}_{i-1}-\hat{d}_i\hat{y}_{i-1}(i)\hat{\boldsymbol{l}}_i$$

于是得

Chun-Kailath 算法 2[132] （求 Hankel 矩阵 $\boldsymbol{H}$ 之逆矩阵的三角分解）

$$\hat{\boldsymbol{x}}_0=\boldsymbol{e}_1^{(4n+1)},\quad \hat{\boldsymbol{y}}_0=(0,-\eta_1,\cdots,-\eta_{2n-1},-1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

对 $i=1,2,\cdots,n$

$$\hat{l}_i(k)=\hat{y}_{i-1}(i)\hat{x}_{i-1}(k+1)-\hat{x}_{i-1}(i)\hat{y}_{i-1}(k+1)$$
$$k=i,\cdots,2n-1$$

$$\hat{l}_i(2n)=\hat{l}_i(2n+1)=0$$

$$\hat{l}_i(k)=\hat{y}_{i-1}(i)\hat{x}_{i-1}(k-1)-\hat{x}_{i-1}(i)\hat{y}_{i-1}(k-1)$$
$$k=2n+2,\cdots,2n+i+1$$

$$\hat{d}_i=\frac{1}{\hat{l}_i(i)}$$

$$\hat{x}_i(k)=\hat{x}_{i-1}(k)-\hat{d}_i\hat{x}_{i-1}(i)\hat{l}_i(k)$$

$$\hat{y}_i(k)=\hat{y}_{i-1}(k)-\hat{d}_i\hat{y}_{i-1}(i)\hat{l}_i(k)$$
$$k=i+1,\cdots,2n+i$$

$$\hat{x}_i(2n+i+1)=-\hat{d}_i\hat{x}_{i-1}(i)\hat{l}_i(2n+i+1)$$

$$\hat{y}_i(2n+i+1)=-\hat{d}_i\hat{y}_{i-1}(i)\hat{l}_i(2n+i+1)$$

最后得

$$
H^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{l}_1(2n+2) & \hat{l}_2(2n+2) & \cdots & \hat{l}_n(2n+2) \\ & \hat{l}_2(2n+3) & \cdots & \hat{l}_n(2n+3) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \hat{l}_n(3n+1) \end{bmatrix} \times
\begin{bmatrix} \hat{d}_1 & & & \\ & \hat{d}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \hat{d}_n \end{bmatrix} \times
\begin{bmatrix} \hat{l}_1(2n+2) & & & \\ \hat{l}_2(2n+2) & \hat{l}_2(2n+3) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \hat{l}_n(2n+2) & \hat{l}_n(2n+3) & \cdots & \hat{l}_n(3n+1) \end{bmatrix}
$$

该算法需 $7n^2 + 4n$ 次乘除运算，$\frac{11}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ 次加减运算.

§3.5　Toeplitz+Hankel 矩阵

在一些应用问题中，须要求解以 Toeplitz 矩阵与 Hankel 矩阵之和为系数矩阵的线性方程组

$$
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{3.5.1}
$$

其中

$$
\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{H} = (\xi_{j-i} + \eta_{i+j-1})_{i,j=1}^{n} \tag{3.5.2}
$$

而 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，简称 $\boldsymbol{A}$ 为 T+H 阵.

前面介绍的 Toeplitz 矩阵及 Hankel 矩阵的快速算法不能直接用于该类矩阵.

一、 Merchant-Parks 算法[57]

式(3.5.1)的线性方程组可写为

$$\begin{bmatrix} T & HJ \\ JH & JTJ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ Jx \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b \\ Jb \end{bmatrix} \tag{3.5.3}$$

引入 $2n$ 阶方阵 $Q=(q_{ij})_{i,j=1}^{2n}$，其中

$$q_{ij}=\begin{cases} 1, & i=2k-1; j=k \\ 1, & i=2k; j=n+k, \quad k=1,2,\cdots,n \\ 0, & 其它 \end{cases} \tag{3.5.4}$$

容易验证 Q 是正交矩阵，且由式(3.5.3)得

$$\left\{Q\begin{bmatrix} T & HJ \\ JH & JTJ \end{bmatrix}Q^{\mathrm{T}}\right\}\left\{Q\begin{bmatrix} x \\ Jx \end{bmatrix}\right\}=Q\begin{bmatrix} b \\ Jb \end{bmatrix} \tag{3.5.5}$$

令

$$\Gamma_k=\begin{bmatrix} \xi_k & \eta_{n-k} \\ \eta_{n+k} & \xi_{-k} \end{bmatrix}, \quad k=-n+1,\cdots,-1,0,1,\cdots,n-1$$

$$\boldsymbol{x}_j=\begin{bmatrix} x_j \\ x_{n-j+1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_j=\begin{bmatrix} b_j \\ b_{n-j+1} \end{bmatrix}, \quad j=1,2,\cdots,n$$

则式(3.5.5)为以分块 Toeplitz 矩阵为系数矩阵的线性方程组

$$\begin{bmatrix} \Gamma_0 & \Gamma_1 & \cdots & \Gamma_{n-1} \\ \Gamma_{-1} & \Gamma_0 & \cdots & \Gamma_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{-n+1} & \Gamma_{-n+2} & \cdots & \Gamma_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

于是当其分块顺序主子阵均非奇异时，可利用 Akaike 算法(§2.4)(二)求解.

二、 Heinig-Jankowski-Rost 算法[102]

利用式(2.1.4)，(2.1.5)，(3.1.2)和(3.1.3)容易验证，式(3.5.2)的 T+H 阵 A 满足

$$A(Z+Z^{\mathrm{T}})-(Z+Z^{\mathrm{T}})A=\sum_{j=1}^{4} g_j f_j^{\mathrm{T}} \tag{3.5.6}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&g_1 = f_3 = e_1 \quad , \quad g_2 = f_4 = e_n \\
&f_1 = (\xi_1 + \eta_0, \xi_2 + \eta_1, \cdots, \xi_n + \eta_{n-1})^{\mathrm{T}} \\
&f_2 = (\xi_{-n} + \eta_{n+1}, \xi_{-n+1} + \eta_{n+2}, \cdots, \xi_{-1} + \eta_{2n})^{\mathrm{T}} \\
&g_3 = -(\xi_{-1} + \eta_0, \xi_{-2} + \eta_1, \cdots, \xi_{-n} + \eta_{n-1})^{\mathrm{T}} \\
&g_4 = -(\xi_n + \eta_{n+1}, \xi_{n-1} + \eta_{n+2}, \cdots, \xi_1 + \eta_{2n})^{\mathrm{T}}
\end{aligned}\right\} \tag{3.5.7}$$

而 η_0,η_{2n},ξ_n 和 ξ_{-n} 是任意给定的数.

首先考虑以 T+H 阵 A 为系数矩阵的如下一些线性方程组的解法,即

$$Ax_j = g_j, \quad j = 1,2,3,4 \tag{3.5.8}$$

$$A^{\mathrm{T}}y_j = f_j, \quad j = 1,2,3,4 \tag{3.5.9}$$

定理 3.5.1 设 T+H 阵 A 的 k 阶顺序主子阵 $A_k = (\xi_{j-i} + \eta_{i+j-1})_{i,j=1}^{k}$ 均非奇异. 又设 $g_j^{(k)}$ 和 $f_j^{(k)}$ $(j = 1,2,3,4)$ 是将式(3.5.7)的 g_j 与 f_j 中 n 换成 k 后所得的 k 维列向量, $x_j^{(k)}$ 是线性方程组

$$A_k x_j^{(k)} = g_j^{(k)}, \quad j = 1,2,3,4$$

的解向量,则

$$\left.\begin{aligned}
&x_2^{(k+1)} = \frac{1}{\sigma_2^{(k)}}\begin{bmatrix} x_4^{(k)} \\ 1 \end{bmatrix} \\
&x_j^{(k+1)} = \begin{bmatrix} x_j^{(k)} \\ 0 \end{bmatrix} - \sigma_j^{(k)} x_2^{(k+1)}, \quad j = 1,3
\end{aligned}\right\} \tag{3.5.10}$$

$$x_4^{(k+1)} = (Z_{k+1} + Z_{k+1}^{\mathrm{T}})\begin{bmatrix} x_4^{(k)} \\ 1 \end{bmatrix} - \tau_0^{(k)}\begin{bmatrix} x_4^{(k-1)} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} -$$

$$\tau_2^{(k)}\begin{bmatrix} x_4^{(k)} \\ 1 \end{bmatrix} - \tau_1^{(k)} x_1^{(k+1)} - \tau_3^{(k)} x_3^{(k+1)} \tag{3.5.11}$$

其中

$$\begin{cases}\sigma_2^{(k)} = \boldsymbol{f}_2^{(k)\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_4^{(k)} + \xi_0 + \eta_{2k+1}, \quad \sigma_1^{(k)} = \boldsymbol{f}_2^{(k)\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1^{(k)} \\ \sigma_3^{(k)} = \boldsymbol{f}_2^{(k)\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_3^{(k)} - \xi_{-k-1} - \eta_k, \quad \omega^{(k)} = \boldsymbol{f}_2^{(k)\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_4^{(k-1)} \\ 1\end{bmatrix} \\ \tau_0^{(k)} = \dfrac{\sigma_2^{(k)}}{\sigma_2^{(k-1)}}, \quad \tau_2^{(k)} = \dfrac{\omega^{(k+1)}}{\sigma_2^{(k)}} - \dfrac{\omega^{(k)}}{\sigma_2^{(k-1)}} \\ \tau_j^{(k)} = \boldsymbol{f}_j^{(k+1)\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_4^{(k)} \\ 1\end{bmatrix}, \quad j = 1,3\end{cases}$$

证明 注意到

$$\boldsymbol{A}_{k+1} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_k & -\boldsymbol{g}_4^{(k)} \\ \boldsymbol{f}_2^{(k)\mathrm{T}} & \xi_0 + \eta_{2k+1}\end{bmatrix}$$

从而

$$\boldsymbol{A}_{k+1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_4^{(k)} \\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{0} \\ \sigma_2^{(k)}\end{bmatrix} = \sigma_2^{(k)}\boldsymbol{e}_{k+1}^{(k+1)} \tag{3.5.12}$$

$$\boldsymbol{A}_{k+1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_j^{(k)} \\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{g}_j^{(k)} \\ \boldsymbol{f}_2^{(k)\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_j^{(k)}\end{bmatrix} = \boldsymbol{g}_j^{(k+1)} + \sigma_j^{(k)}\boldsymbol{e}_{k+1}^{(k+1)}, \quad j = 1,3 \tag{3.5.13}$$

由式(3.5.12)知，$\sigma_2^{(k)} \neq 0$，否则与 $\boldsymbol{A}_{k+1}$ 非奇异矛盾. 求解上面两式即得式(3.5.10). 又

$$\boldsymbol{A}_{k+1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_4^{(k-1)} \\ 1 \\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma_2^{(k-1)}\boldsymbol{e}_k^{(k)} \\ \omega^{(k)}\end{bmatrix} = \sigma_2^{(k-1)}\boldsymbol{e}_k^{(k+1)} + \omega^{(k)}\boldsymbol{e}_{k+1}^{(k+1)} \tag{3.5.14}$$

且由式(3.5.6)

$$\boldsymbol{A}_{k+1}(\boldsymbol{Z}_{k+1} + \boldsymbol{Z}_{k+1}^{\mathrm{T}}) - (\boldsymbol{Z}_{k+1} + \boldsymbol{Z}_{k+1}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{A}_{k+1} = \sum_{j=1}^{4}\boldsymbol{g}_j^{(k+1)}\boldsymbol{f}_j^{(k+1)\mathrm{T}} \tag{3.5.15}$$

于是，由式(3.5.12)～(3.5.15)，得

$$\boldsymbol{A}_{k+1}\left\{(\boldsymbol{Z}_{k+1} + \boldsymbol{Z}_{k+1}^{\mathrm{T}})\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_4^{(k)} \\ 1\end{bmatrix} - \tau_0^{(k)}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_4^{(k-1)} \\ 1 \\ 0\end{bmatrix} - \right.$$

$$\left.\tau_2^{(k)}\begin{bmatrix} x_4^{(k)} \\ 1 \end{bmatrix} - \tau_1^{(k)} x_1^{(k+1)} - \tau_3^{(k)} x_3^{(k+1)} \right\} =$$

$$(Z_{k+1} + Z_{k+1}^{\mathrm{T}})A_{k+1}\begin{bmatrix} x_4^{(k)} \\ 1 \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{4} g_j^{(k+1)} f_j^{(k+1)\mathrm{T}} \begin{bmatrix} x_4^{(k)} \\ 1 \end{bmatrix} -$$

$$\tau_0^{(k)} A_{k+1}\begin{bmatrix} x_4^{(k-1)} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \tau_2^{(k)} A_{k+1}\begin{bmatrix} x_4^{(k)} \\ 1 \end{bmatrix} - \tau_1^{(k)} g_1^{(k+1)} - \tau_3^{(k)} g_3^{(k+1)} =$$

$$\sigma_2^{(k)}(Z_{k+1} + Z_{k+1}^{\mathrm{T}})e_{k+1}^{(k+1)} + \omega^{(k+1)} g_2^{(k+1)} + g_4^{(k+1)} -$$

$$\tau_0^{(k)}[\sigma_2^{(k-1)} e_k^{(k+1)} + \omega^{(k)} e_{k+1}^{(k+1)}] - \tau_2^{(k)} \sigma_2^{(k)} e_{k+1}^{(k+1)} =$$

$$\sigma_2^{(k)} e_k^{(k+1)} + \omega^{(k+1)} e_{k+1}^{(k+1)} + g_4^{(k+1)} - \tau_0^{(k)} \sigma_2^{(k-1)} e_k^{(k+1)} -$$

$$\tau_0^{(k)} \omega^{(k)} e_{k+1}^{(k+1)} - \tau_2^{(k)} \sigma_2^{(k)} e_{k+1}^{(k+1)} = g_4^{(k+1)}$$

即得式(3.5.11).　　证毕

利用式(3.5.10)和(3.5.11)求式(3.5.8)的线性方程组，约需 $6n^2 + O(n)$ 次乘除运算，$\frac{13}{2}n^2 + O(n)$ 次加减运算.

由于 A^{T} 仍是 T+H 阵，可以类似地求解式(3.5.9)的线性方程组.

另一方面，利用式(3.5.8)和(3.5.9)的线性方程组的解，可以递推求出 A^{-1} 的元素.

定理 3.5.2　设线性方程组(3.5.8)可解，则 T+H 阵 A 非奇异，且 $A^{-1} = [v_1\, v_2 \cdots v_n]$ 的诸列可递推求得

$$\left.\begin{aligned} & v_0 = \mathbf{0}, \quad v_1 = x_1 \\ & v_{k+1} = (Z + Z^{\mathrm{T}})v_k - v_{k-1} - \sum_{j=1}^{4} x_j f_j^{\mathrm{T}} v_k \\ & \qquad\qquad k = 1,2,\cdots,n-1 \end{aligned}\right\} \tag{3.5.16}$$

证明　显然 $v_1 = x_1$. 设 $Av_k = e_k$ $(k = 1,2,\cdots,n)$，则由式(3.5.6)得

$$A(Z+Z^{\mathrm{T}})\boldsymbol{v}_k-(Z+Z^{\mathrm{T}})\boldsymbol{e}_k=\sum_{j=1}^{4}A\boldsymbol{x}_j\boldsymbol{f}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_k$$

因

$$(Z+Z^{\mathrm{T}})\boldsymbol{e}_k=\boldsymbol{e}_{k+1}+\boldsymbol{e}_{k-1}=\boldsymbol{e}_{k+1}+A\boldsymbol{v}_{k-1}$$

规定 $\boldsymbol{e}_0=\boldsymbol{0}$，于是有

$$A\left[(Z+Z^{\mathrm{T}})\boldsymbol{v}_k-\boldsymbol{v}_{k-1}-\sum_{j=1}^{4}\boldsymbol{x}_j\boldsymbol{f}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_k\right]=\boldsymbol{e}_{k+1}$$
$$k=1,2,\cdots,n-1$$

即得式(3.5.16). 证毕

推论 3.5.1 设式(3.5.8)和(3.5.9)均可解，则 T+H 阵 A 非奇异，且 $A^{-1}=[\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \cdots\ \boldsymbol{v}_n]$ 的诸列可递推求得

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{x}_1\\&\boldsymbol{v}_{k+1}=(Z+Z^{\mathrm{T}})\boldsymbol{v}_k-\boldsymbol{v}_{k-1}-\sum_{j=1}^{4}\boldsymbol{x}_j\boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_k\\&\qquad k=1,2,\cdots,n-1\end{aligned}\right\}\tag{3.5.17}$$

证明 因 $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_j=\boldsymbol{f}_j$，所以

$$\boldsymbol{x}_j\boldsymbol{f}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{x}_j\boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{x}_j\boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_k$$

代入式(3.5.16)即得式(3.5.17). 证毕

按式(3.5.16)求 A^{-1}，约需 $6n^2+O(n)$ 次乘除运算，$8n^2+O(n)$ 次加减运算。而按式(3.5.17)求 A^{-1}，约需 $4n^2+O(n)$ 次乘除运算，$6n^2+O(n)$ 次加减运算.

注 1 利用式(3.5.17)求 A^{-1} 较利用式(3.5.16)的计算稳定性更好一些.

注 2 当 T+H 阵 A 对称时，有

$$\boldsymbol{y}_1=-\boldsymbol{x}_3,\quad \boldsymbol{y}_2=-\boldsymbol{x}_4,\quad \boldsymbol{y}_3=\boldsymbol{x}_1,\quad \boldsymbol{y}_4=\boldsymbol{x}_2$$

利用式(3.5.17)计算较方便.

三、 T+H-Bezout 矩阵

定义 3.5.1 设 $p_i(\lambda),q_i(\mu)$ $(i=1,2,3,4)$ 都是次数不超过

$n+1$ 的多项式，以二元多项式

$$\frac{1}{(\lambda-\mu)(1-\lambda\mu)}\sum_{i=1}^{4}p_i(\lambda)q_i(\mu)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\lambda^{i-1}\mu^{j-1}$$

作为生成多项式确定的 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{i,j=1}^{n}$ 称为 **T+H-Bezout 矩阵**.

定理 3.5.3 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆 T+H 矩阵(3.5.2)，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是 T+H-Bezout 矩阵.

证明 设 $\boldsymbol{a}^{(i)}=(a_1^{(i)},\cdots,a_n^{(i)})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}^{(i)}=(b_1^{(i)},\cdots,b_n^{(i)})^{\mathrm{T}}$ $(i=1,2,3,4)$ 分别是线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}^{(1)}=(\xi_{-1}+\eta_0,\xi_{-2}+\eta_1,\cdots,\xi_{-n}+\eta_{n-1})^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}^{(2)}=(\xi_n+\eta_{n+1},\xi_{n-1}+\eta_{n+2},\cdots,\xi_1+\eta_{2n})^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}^{(3)}=(\xi_1+\eta_0,\xi_2+\eta_1,\cdots,\xi_n+\eta_{n-1})^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}^{(4)}=(\xi_{-n}+\eta_{n+1},\xi_{-n+1}+\eta_{n+2},\cdots,\xi_{-1}+\eta_{2n})^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}^{(3)}=\boldsymbol{e}_1\quad,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{a}^{(4)}=\boldsymbol{e}_n\quad,\quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}^{(1)}=\boldsymbol{e}_1\quad,\quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}^{(2)}=\boldsymbol{e}_n$$

的解向量．其中 $\eta_0,\eta_{2n},\xi_n,\xi_{-n}$ 任意给定，则由式(3.5.6)，得

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}})-(\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{A}^{-1}=$$
$$\boldsymbol{a}^{(1)}\boldsymbol{b}^{(1)\mathrm{T}}+\boldsymbol{a}^{(2)}\boldsymbol{b}^{(2)\mathrm{T}}-\boldsymbol{a}^{(3)}\boldsymbol{b}^{(3)\mathrm{T}}-\boldsymbol{a}^{(4)}\boldsymbol{b}^{(4)\mathrm{T}}$$

从而由式(1.9.3)，得

$$\nabla_{\mathrm{W}_{\mathrm{T+H}}}\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1} & 0\\ \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}})-(\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{e}_n\\ 0 & -\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1} & 0\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}-1\\ \boldsymbol{a}^{(1)}\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{b}^{(1)\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{a}^{(2)}\\ -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{b}^{(2)\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{a}^{(3)}\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\boldsymbol{b}^{(3)\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{a}^{(4)}\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -\boldsymbol{b}^{(4)\mathrm{T}} & 1\end{bmatrix}$$

利用定理 1.9.1、定理 1.9.2 及例 1.9.1 的结果知

$$A^{-1}(\lambda,\mu)=\frac{1}{(\lambda-\mu)(1-\lambda\mu)}\sum_{i=1}^{4}p_i(\lambda)q_i(\mu)$$

其中

$$p_1(\lambda)=-1+\sum_{j=1}^{n}a_j^{(1)}\lambda^j,\quad p_2(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}a_j^{(2)}\lambda^j-\lambda^{n+1}$$

$$p_3(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}a_j^{(3)}\lambda^j,\quad p_4(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}a_j^{(4)}\lambda^j$$

$$q_1(\mu)=\sum_{j=1}^{n}b_j^{(1)}\mu^j,\quad q_2(\mu)=\sum_{j=1}^{n}b_j^{(2)}\mu^j$$

$$q_3(\mu)=1-\sum_{j=1}^{n}b_j^{(3)}\mu^j,\quad q_4(\mu)=-\sum_{j=1}^{n}b_j^{(4)}\mu^j+\mu^{n+1}$$

故 A^{-1} 是 T+H-Bezout 矩阵. 证毕

利用 T+H-Bezout 矩阵可以给出 T+H 矩阵(3.5.2)的逆矩阵 A^{-1} 的矩阵表示[116].

第四章　中心对称矩阵

§4.1　中心对称矩阵的定义及性质

定义 4.1.1　若 n 阶方阵 $\boldsymbol{R}_n=(r_{ij})_{i,j=1}^n$ 满足

$$r_{ij}=r_{n+1-i,n+1-j},\quad i,j=1,2,\cdots,n$$

则称之为**中心对称矩阵**；若 n 阶方阵 $\boldsymbol{W}_n=(w_{ij})_{i,j=1}^n$ 满足

$$w_{ij}=-w_{n+1-i,n+1-j},\quad i,j=1,2,\cdots,n$$

则称之为**反中心对称矩阵**.

4 阶中心对称矩阵与 5 阶反中心对称矩阵分别为

$$\boldsymbol{R}_4=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{24} & r_{23} & r_{22} & r_{21} \\ r_{14} & r_{13} & r_{12} & r_{11} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{W}_5=\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} & w_{15} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} & w_{25} \\ w_{31} & w_{32} & 0 & -w_{32} & -w_{31} \\ -w_{25} & -w_{24} & -w_{23} & -w_{22} & -w_{21} \\ -w_{15} & -w_{14} & -w_{13} & -w_{12} & -w_{11} \end{bmatrix}$$

由定义易知，矩阵 $\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{W}$ 为中心对称矩阵或反中心对称矩阵的充要条件是

$$\boldsymbol{JRJ}=\boldsymbol{R},\quad \boldsymbol{JWJ}=-\boldsymbol{W}\tag{4.1.1}$$

其中 $\boldsymbol{J}$ 是次单位矩阵.

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 既是对称矩阵，也是次对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 必是中心对

称矩阵. 这是因为 $A^{\mathrm{T}} = A$ 且 $JA^{\mathrm{T}}J = A$，于是式(4.1.1)成立. 特别地，对称 Toeplitz 矩阵就是中心对称矩阵. 在信息论、线性系统理论、线性估计理论及数值分析等领域中，经常用到中心与反中心对称矩阵.

容易验证，$2m$ 阶中心与反中心对称矩阵可写为如下的分块形式：

$$\boldsymbol{R}_{2m} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{BJ} \\ \boldsymbol{JB} & \boldsymbol{JAJ} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{W}_{2m} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{BJ} \\ -\boldsymbol{JB} & -\boldsymbol{JAJ} \end{bmatrix} \tag{4.1.2}$$

而 $2m+1$ 阶中心与反中心对称矩阵可表为

$$\boldsymbol{R}_{2m+1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{u} & \boldsymbol{BJ} \\ \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} & \alpha & \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J} \\ \boldsymbol{JB} & \boldsymbol{Ju} & \boldsymbol{JAJ} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{W}_{2m+1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{u} & \boldsymbol{BJ} \\ -\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} & 0 & \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J} \\ -\boldsymbol{JB} & -\boldsymbol{Ju} & -\boldsymbol{JAJ} \end{bmatrix} \tag{4.1.3}$$

其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 m 阶方阵；$\boldsymbol{J}$ 是 m 阶次单位矩阵；$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 是 m 维列向量；α 是数.

定义 4.1.2 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 m 阶方阵；$\boldsymbol{J}$ 是 m 阶次单位矩阵；$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 是 m 维列向量；α 是数，$\boldsymbol{P}$ 是 m 阶可逆方阵. 分块矩阵为

$$\boldsymbol{R}_{2m} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{BP} \\ \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{W}_{2m} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{BP} \\ -\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B} & -\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} \end{bmatrix} \tag{4.1.4}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{R}_{2m+1} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{u} & \boldsymbol{BP} \\ \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} & \alpha & \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{W}_{2m+1} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{u} & \boldsymbol{BP} \\ -\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} & \alpha & \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} \\ -\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B} & -\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{u} & -\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{4.1.5}$$

称 $\boldsymbol{R}_{2m}$ 和 $\boldsymbol{R}_{2m+1}$ 为**广义中心对称矩阵**，而称 $\boldsymbol{W}_{2m}$ 和 $\boldsymbol{W}_{2m+1}$ 为**广义反中心对称矩阵**.

若取 $P=J$，则 R 即为中心对称矩阵；若取 $P=J$ 且 $\alpha=0$，则 W 即为反中心对称矩阵.

对于广义中心与广义反中心对称矩阵，可以利用相似变换进行化简.

取 $2m$ 阶矩阵 $Q_{2m}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I & I \\ -P^{-1} & P^{-1} \end{bmatrix}$，可求得 $Q_{2m}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I & -P \\ I & P \end{bmatrix}$，且有

$$\left.\begin{aligned} Q_{2m}^{-1}R_{2m}Q_{2m} &= \begin{bmatrix} A-B & O \\ O & A+B \end{bmatrix} \\ Q_{2m}^{-1}W_{2m}Q_{2m} &= \begin{bmatrix} O & A+B \\ A-B & O \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{4.1.6}$$

若取 $2m+1$ 阶矩阵 $Q_{2m+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I & 0 & I \\ 0^{\mathrm{T}} & \sqrt{2} & 0^{\mathrm{T}} \\ -P^{-1} & 0 & P^{-1} \end{bmatrix}$，可求得

$Q_{2m+1}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I & 0 & -P \\ 0^{\mathrm{T}} & \sqrt{2} & 0^{\mathrm{T}} \\ I & 0 & P \end{bmatrix}$，且有

$$\left.\begin{aligned} Q_{2m+1}^{-1}R_{2m+1}Q_{2m+1} &= \begin{bmatrix} A-B & 0 & O \\ 0^{\mathrm{T}} & \alpha & \sqrt{2}v^{\mathrm{T}} \\ O & \sqrt{2}u & A+B \end{bmatrix} \\ Q_{2m+1}^{-1}W_{2m+1}Q_{2m+1} &= \begin{bmatrix} O & \sqrt{2}u & A+B \\ -\sqrt{2}v^{\mathrm{T}} & \alpha & 0^{\mathrm{T}} \\ A-B & 0 & O \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{4.1.7}$$

特别地，当取 P 为正交矩阵时（如次单位矩阵 J，单位矩阵 I 等），Q_{2m} 与 Q_{2m+1} 均为正交矩阵.

定理 4.1.1 广义中心与广义反中心对称矩阵(4.1.4)和(4.1.5)的行列式分别为：

1) $\det \boldsymbol{R}_{2m}=\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$;

2) $\det \boldsymbol{W}_{2m}=(-1)^m\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$;

3) $\det \boldsymbol{W}_{2m+1}=(-1)^m\alpha\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$;

4) $\det \boldsymbol{R}_{2m+1}=\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\det\begin{bmatrix}\alpha & \sqrt{2}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\\ \sqrt{2}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$;

5) 若 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆，则

$$\det \boldsymbol{R}_{2m+1}=\delta\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$$

其中 $\delta=\alpha-2\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{u}$;

6) 若 $\alpha\neq 0$，则

$$\det \boldsymbol{R}_{2m+1}=\alpha\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\det\boldsymbol{M},\quad \boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\frac{2}{\alpha}\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$$

7) 若 $\alpha=0$，而矩阵 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$ 可逆，则

$$\det \boldsymbol{R}_{2m+1}=\gamma\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\det\boldsymbol{N},\quad \gamma=-2\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{u}$$

证明 1)～4)直接由式(4.1.6)和式(4.1.7)取行列式得到.记$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$.若矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可逆，则

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 & -\sqrt{2}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & \alpha & \sqrt{2}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{O} & \sqrt{2}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{C}\end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{O} & -\sqrt{2}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & \delta & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}\end{bmatrix}\qquad(4.1.8)$$

而当 $\alpha\neq 0$ 时，有

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{O} & -\frac{\sqrt{2}}{\alpha}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & \alpha & \sqrt{2}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{O} & \sqrt{2}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{\alpha}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & \alpha & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M} \end{bmatrix} \tag{4.1.9}$$

当 $\alpha = 0$，而矩阵 $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$ 可逆时，有

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 & -\sqrt{2}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{O} & -\sqrt{2}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 0 & \sqrt{2}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{O} & \sqrt{2}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{O} & -\sqrt{2}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & \gamma & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N} \end{bmatrix} \tag{4.1.10}$$

结合式(4.1.7)～(4.1.10)即可得 5)～7)．　　证毕

§4.2　求逆矩阵及线性方程组

求广义中心与广义反中心对称矩阵的逆矩阵可转化为低阶矩阵的求逆问题．

定理 4.2.1　1) $2m$ 阶广义中心对称矩阵 $\boldsymbol{R}_{2m}$ 与广义反中心对称矩阵 $\boldsymbol{W}_{2m}$ 可逆的充要条件是，矩阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 均可逆，且

$$R_{2m}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} C^{-1}+D^{-1} & (C^{-1}-D^{-1})P \\ P^{-1}(C^{-1}-D^{-1}) & P^{-1}(C^{-1}+D^{-1})P \end{bmatrix}$$

$$W_{2m}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} C^{-1}+D^{-1} & -(C^{-1}-D^{-1})P \\ P^{-1}(C^{-1}-D^{-1}) & -P^{-1}(C^{-1}+D^{-1})P \end{bmatrix}$$

2) $2m+1$ 阶广义反中心对称矩阵 W_{2m+1} 可逆的充要条件是矩阵 $C=A+B$ ，$D=A-B$ 均可逆和 $\alpha\neq 0$，且

$$W_{2m+1}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} X-\frac{2}{\alpha}V & -\frac{2}{\alpha}C^{-1}u & -(Y+\frac{2}{\alpha}V)P \\ \frac{2}{\alpha}v^{\mathrm{T}}D^{-1} & \frac{2}{\alpha} & \frac{2}{\alpha}v^{\mathrm{T}}D^{-1}P \\ P^{-1}(Y-\frac{2}{\alpha}V) & -\frac{2}{\alpha}P^{-1}C^{-1}u & -P^{-1}(X+\frac{2}{\alpha}V)P \end{bmatrix}$$

式中

$$X=C^{-1}+D^{-1},\quad Y=C^{-1}-D^{-1},\quad V=C^{-1}uv^{\mathrm{T}}D^{-1}$$

3) $2m+1$ 阶广义中心对称矩阵 R_{2m+1} 可逆的充要条件是矩阵 $D=A-B$ 与 $\begin{bmatrix} \alpha & \sqrt{2}\,v^{\mathrm{T}} \\ \sqrt{2}\,u & C \end{bmatrix}$ 均可逆，且

$$R_{2m+1}^{-1} = Q_{2m+1}\begin{bmatrix} D^{-1} & O \\ O & \begin{bmatrix} \alpha & \sqrt{2}\,v^{\mathrm{T}} \\ \sqrt{2}\,u & C \end{bmatrix}^{-1} \end{bmatrix}Q_{2m+1}^{-1}$$

进一步，有

情形 1： 若 $C=A+B$ 可逆，且 $\delta=\alpha-2v^{\mathrm{T}}C^{-1}u\neq 0$，则

$$R_{2m+1}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} X+\frac{2}{\delta}V & -\frac{2}{\delta}C^{-1}u & (Y+\frac{2}{\delta}V)P \\ -\frac{2}{\delta}v^{\mathrm{T}}C^{-1} & \frac{2}{\delta} & -\frac{2}{\delta}v^{\mathrm{T}}C^{-1}P \\ P^{-1}(Y+\frac{2}{\delta}V) & -\frac{2}{\delta}P^{-1}C^{-1}u & P^{-1}(X+\frac{2}{\delta}V)P \end{bmatrix}$$

式中

$$X = C^{-1} + D^{-1},\quad Y = C^{-1} - D^{-1},\quad V = C^{-1}uv^{\mathrm T}C^{-1}$$

情形 2：　若 $\alpha \neq 0$，且矩阵 $M = A + B - \dfrac{2}{\alpha}uv^{\mathrm T}$ 可逆，则

$$R_{2m+1}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} M^{-1} + D^{-1} & -\dfrac{2}{\alpha}M^{-1}u & (M^{-1} - D^{-1})P \\ -\dfrac{2}{\alpha}v^{\mathrm T}M^{-1} & \dfrac{2}{\alpha} + \dfrac{4}{\alpha^2}v^{\mathrm T}M^{-1}u & -\dfrac{2}{\alpha}v^{\mathrm T}M^{-1}P \\ P^{-1}(M^{-1} - D^{-1}) & -\dfrac{2}{\alpha}P^{-1}M^{-1}u & P^{-1}(M^{-1} + D^{-1})P \end{bmatrix}$$

情形 3：　若 $\alpha = 0$，且矩阵 $N = A + B - 2uv^{\mathrm T}$ 可逆，又有 $\gamma = -2v^{\mathrm T}N^{-1}u \neq 0$，则

$$R_{2m+1}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} X + \dfrac{2}{\gamma}V & -\dfrac{2}{\gamma}N^{-1}u & (Y + \dfrac{2}{\gamma}V)P \\ -\dfrac{2}{\gamma}v^{\mathrm T}N^{-1} & 2\left(\dfrac{1}{\gamma} - 1\right) & -\dfrac{2}{\gamma}v^{\mathrm T}N^{-1}P \\ P^{-1}(Y + \dfrac{2}{\gamma}V) & -\dfrac{2}{\gamma}P^{-1}N^{-1}u & P^{-1}(X + \dfrac{2}{\gamma}V)P \end{bmatrix}$$

式中

$$X = N^{-1} + D^{-1},\quad Y = N^{-1} - D^{-1},\quad V = N^{-1}uv^{\mathrm T}N^{-1}$$

证明　由定理 4.1.1 中 1)和 2)知，R_{2m} 与 W_{2m} 可逆的充要条件是矩阵 C 与 D 均可逆，且由式(4.1.6)

$$R_{2m}^{-1} = Q_{2m}\begin{bmatrix} D^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}Q_{2m}^{-1},\quad W_{2m}^{-1} = Q_{2m}\begin{bmatrix} O & D^{-1} \\ C^{-1} & O \end{bmatrix}Q_{2m}^{-1}$$

整理之即得 1). 利用

$$\begin{bmatrix} I & \mathbf{0} & O \\ \mathbf{0}^{\mathrm T} & 1 & \sqrt{2}\,v^{\mathrm T}D^{-1} \\ O & \mathbf{0} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & \sqrt{2}\,u & C \\ -\sqrt{2}\,v^{\mathrm T} & \alpha & \mathbf{0}^{\mathrm T} \\ D & \mathbf{0} & O \end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 & O \\ 0^{\mathrm{T}} & 1 & 0^{\mathrm{T}} \\ O & -\sqrt{2}C^{-1}u & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & 0 & C \\ 0^{\mathrm{T}} & \alpha & 0^{\mathrm{T}} \\ D & 0 & O \end{bmatrix}$$

结合式(4.1.7),得

$$W_{2m+1}^{-1} = Q_{2m+1}\begin{bmatrix} I & 0 & O \\ 0^{\mathrm{T}} & 1 & 0^{\mathrm{T}} \\ O & -\sqrt{2}C^{-1}u & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & 0 & D^{-1} \\ 0^{\mathrm{T}} & \alpha^{-1} & 0^{\mathrm{T}} \\ C^{-1} & 0 & O \end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 & O \\ 0^{\mathrm{T}} & 1 & \sqrt{2}v^{\mathrm{T}}D^{-1} \\ O & 0 & I \end{bmatrix} Q_{2m+1}^{-1}$$

整理之,即得 2). 同样,利用定理 4.1.1 的 3),5)~7)及式(4.1.8)~(4.1.10)可得 3). 证毕

由该定理可看出,广义中心对称矩阵与 $2m$ 阶广义反中心对称矩阵的逆仍是广义中心与广义反中心对称矩阵,但 W_{2m+1}^{-1} 则不是广义反中心对称矩阵.

对于以广义中心与广义反中心对称矩阵为系数矩阵的线性方程组,可转化为低阶线性方程组求解问题. 在以下定理中,假定相应线性方程组的系数矩阵是非奇异的.

定理 4.2.2 设 $R_{2m}, W_{2m}, R_{2m+1}, W_{2m+1}$ 是广义中心与广义反中心对称矩阵, x, y, b, c, s, t, p, q 是 m 维列向量,则

1) 线性方程组 $R_{2m}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}$ 的解为 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} s+t \\ P^{-1}(s-t) \end{bmatrix}$,其中 s 和 t 分别是线性方程组 $(A+B)s = b+Pc$ 和 $(A-B)t = b-Pc$ 的解;

2) 线性方程组 $W_{2m}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}$ 的解为 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$

$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} s+t \\ P^{-1}(s-t) \end{bmatrix}$，其中 s 和 t 分别是线性方程组 $(A+B)s=b-Pc$ 和 $(A-B)t=b+Pc$ 的解；

3） 线性方程组 $W_{2m+1}\begin{bmatrix} x \\ \xi \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ \beta \\ c \end{bmatrix}$ 的解为

$$\begin{bmatrix} x \\ \xi \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} s+t \\ 2\eta \\ P^{-1}(s-t) \end{bmatrix}$$

其中 s 和 t 和 η 由线性方程组

$$(A-B)t = b+Pc, \quad \eta = \frac{1}{\alpha}(\beta + v^{\mathrm{T}}t)$$

$$(A+B)s = b - Pc - 2\eta u$$

求得；

4） 线性方程组 $R_{2m+1}\begin{bmatrix} x \\ \xi \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ \beta \\ c \end{bmatrix}$ 的解为

$$\begin{bmatrix} x \\ \xi \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} s+t \\ 2\eta \\ P^{-1}(s-t) \end{bmatrix}$$

其中 s,t 和 η 分三种情形确定如下：

情形 1： 若 $A+B$ 可逆，则

$$(A-B)t = b - Pc$$

$$(A+B)w = u$$

$$(A+B)z = b + Pc$$

$$\eta = \frac{\beta - v^{\mathrm{T}}z}{\alpha - 2v^{\mathrm{T}}w}, \quad s = z - 2\eta w$$

情形 2： 若 $\alpha \neq 0$，则

$$(A-B)t = b - Pc$$

$$(A+B-\frac{2}{\alpha}uv^{\mathrm{T}})s=b+Pc-\frac{2\beta}{\alpha}u$$

$$\eta=\frac{1}{\alpha}(\beta-v^{\mathrm{T}}s)$$

情形 3： 若 $\alpha=0$，则

$$(A-B)t=b-Pc,\quad (A+B-2uv^{\mathrm{T}})p=b+Pc$$

$$(A+B-2uv^{\mathrm{T}})q=u$$

$$\eta=\frac{v^{\mathrm{T}}(p-2\beta q)-\beta}{2v^{\mathrm{T}}q},\quad s=p-2(\beta+\eta)q$$

证明 由定理 4.2.1 的 1)知，$R_{2m}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b\\c\end{bmatrix}$ 的解为

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=R_{2m}^{-1}\begin{bmatrix}b\\c\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}C^{-1}(b+Pc)+D^{-1}(b-Pc)\\P^{-1}[C^{-1}(b+Pc)-D^{-1}(b-Pc)]\end{bmatrix}$$

整理之，即得 1). 2)的证明类似.

又由定理 4.2.1 的 2)知

$$\begin{bmatrix}x\\\xi\\y\end{bmatrix}=W_{2m+1}^{-1}\begin{bmatrix}b\\\beta\\c\end{bmatrix}=$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}C^{-1}(b-Pc-2\eta u)+D^{-1}(b+Pc)\\2\eta\\P^{-1}[C^{-1}(b-Pc-2\eta u)-D^{-1}(b+Pc)]\end{bmatrix}$$

其中 $\eta=\frac{1}{\alpha}[\beta+v^{\mathrm{T}}D^{-1}(b+Pc)]$．令

$$s=C^{-1}(b-Pc-2\eta u),\quad t=D^{-1}(b+Pc)$$

即得 3). 类似地可得 4). 证毕

§4.3 求广义逆矩阵

当 P 是正交矩阵时，式(4.1.6)和式(4.1.7)是广义中心与广

义反中心对称矩阵的正交相似变换，利用之可求解其广义逆矩阵．

定理 4.3.1　设 P 是正交矩阵，且记 $C=A+B$ ，$D=A-B$，则

1）　$2m$ 阶广义中心与广义反中心对称矩阵 R_{2m} 和 W_{2m} 的 Moore-Penrose 逆为

$$R_{2m}^{+}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}C^{+}+D^{+} & (C^{+}-D^{+})P\\ P^{\mathrm{T}}(C^{+}-D^{+}) & P^{\mathrm{T}}(C^{+}+D^{+})P\end{bmatrix}$$

$$W_{2m}^{+}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}C^{+}+D^{+} & -(C^{+}-D^{+})P\\ P^{\mathrm{T}}(C^{+}-D^{+}) & -P^{\mathrm{T}}(C^{+}+D^{+})P\end{bmatrix}$$

2）　$2m+1$ 阶广义中心对称矩阵 R_{2m+1} 的 Moore-Penrose 逆为

$$R_{2m+1}^{+}=Q_{2m+1}\begin{bmatrix}D^{+} & O\\ O & \begin{bmatrix}\alpha & \sqrt{2}\,v^{\mathrm{T}}P\\ \sqrt{2}\,P^{\mathrm{T}}u & P^{\mathrm{T}}CP\end{bmatrix}^{+}\end{bmatrix}Q_{2m+1}^{\mathrm{T}}$$

3）　若矩阵 C 和 D 均可逆，且 R_{2m+1} 奇异（即 $\alpha=2v^{\mathrm{T}}C^{-1}u$），记 $x=C^{-1}u$ ，$y^{\mathrm{T}}=v^{\mathrm{T}}C^{-1}$ ，$\sigma=1+2x^{\mathrm{T}}x$ ，$\tau=1+2y^{\mathrm{T}}y$ ，则

$$R_{2m+1}^{+}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}C^{-1}+D^{-1} & \mathbf{0} & (C^{-1}-D^{-1})P\\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 0 & \mathbf{0}^{\mathrm{T}}\\ P^{\mathrm{T}}(C^{-1}-D^{-1}) & \mathbf{0} & P^{\mathrm{T}}(C^{-1}+D^{-1})P\end{bmatrix}-$$

$$\frac{1}{\sigma}\begin{bmatrix}x\\ -1\\ P^{\mathrm{T}}x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^{\mathrm{T}}C^{-1} & 0 & x^{\mathrm{T}}C^{-1}P\end{bmatrix}-$$

$$\frac{1}{\tau}\begin{bmatrix}C^{-1}y\\ 0\\ P^{\mathrm{T}}C^{-1}y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y^{\mathrm{T}} & -1 & y^{\mathrm{T}}P\end{bmatrix}+$$

$$\frac{2x^{\mathrm{T}}C^{-1}y}{\sigma\tau}\begin{bmatrix}x\\ -1\\ P^{\mathrm{T}}x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y^{\mathrm{T}} & -1 & y^{\mathrm{T}}P\end{bmatrix}$$

而 $\boldsymbol{R}_{2m+1}$ 的群逆存在的充要条件是 $\omega = 1 + 2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \neq 0$，且

$$\boldsymbol{R}_{2m+1}^{\#} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}^{-1} + \boldsymbol{D}^{-1} & \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{C}^{-1} - \boldsymbol{D}^{-1})\boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 0 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{-1} - \boldsymbol{D}^{-1}) & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{-1} + \boldsymbol{D}^{-1})\boldsymbol{P} \end{bmatrix} -$$

$$\frac{1}{\omega}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ -1 \\ \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1} & 0 & \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{P} \end{bmatrix} -$$

$$\frac{1}{\omega}\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x} \\ 0 \\ \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} & -1 & \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} \end{bmatrix} +$$

$$\frac{2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}}{\omega^2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ -1 \\ \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} & -1 & \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} \end{bmatrix}$$

4) 若矩阵 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 均可逆，又记 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{-1}$，$\sigma = 1 + 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$，$\tau_1 = 1 + 2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}$，则 $\boldsymbol{W}_{2m+1}$ 的 Moore-Penrose 逆为

$$\boldsymbol{W}_{2m+1}^{+} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}^{-1} + \boldsymbol{D}^{-1} & \boldsymbol{0} & -(\boldsymbol{C}^{-1} - \boldsymbol{D}^{-1})\boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 0 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{-1} - \boldsymbol{D}^{-1}) & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{-1} + \boldsymbol{D}^{-1})\boldsymbol{P} \end{bmatrix} +$$

$$\frac{1}{\sigma}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ -1 \\ \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1} & 0 & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{P} \end{bmatrix} +$$

$$\frac{1}{\tau_1}\begin{bmatrix} -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{w} \\ 0 \\ \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{w} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} & 1 & \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} \end{bmatrix}$$

而 $\boldsymbol{W}_{2m+1}$ 的群逆存在的充要条件是 $\omega_1 = 1 - 2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \neq 0$，且

$$\boldsymbol{W}_{2m+1}^{\#} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}^{-1} + \boldsymbol{D}^{-1} & \boldsymbol{0} & -(\boldsymbol{C}^{-1} - \boldsymbol{D}^{-1})\boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 0 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{-1} - \boldsymbol{D}^{-1}) & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{-1} + \boldsymbol{D}^{-1})\boldsymbol{P} \end{bmatrix} +$$

$$\frac{1}{\omega_1}\begin{bmatrix} x \\ -1 \\ P^{\mathrm{T}}x \end{bmatrix}[w^{\mathrm{T}}C^{-1} \quad 0 \quad -w^{\mathrm{T}}C^{-1}P]+$$

$$\frac{1}{\omega_1}\begin{bmatrix} D^{-1}x \\ 0 \\ -P^{\mathrm{T}}D^{-1}x \end{bmatrix}[w^{\mathrm{T}} \quad 1 \quad w^{\mathrm{T}}P]$$

证明　由式(4.1.6)，例 1.5.3 和例 1.5.4 知

$$R_{2m}^{+}=Q_{2m}\begin{bmatrix} D^{+} & O \\ O & C^{+} \end{bmatrix}Q_{2m}^{\mathrm{T}},\quad W_{2m}^{+}=Q_{2m}\begin{bmatrix} O & D^{+} \\ C^{+} & O \end{bmatrix}Q_{2m}^{\mathrm{T}}$$

整理之，即得 1)．类似可得 2)．当矩阵 C 和 D 均可逆，且 R_{2m+1} 奇异时，有

$$M=\begin{bmatrix} D & 0 & O \\ 0^{\mathrm{T}} & \alpha & \sqrt{2}v^{\mathrm{T}} \\ O & \sqrt{2}u & C \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} I & O \\ 0^{\mathrm{T}} & \sqrt{2}y^{\mathrm{T}} \\ O & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D & O \\ O & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 & O \\ O & \sqrt{2}x & I \end{bmatrix}$$

令 $F=\begin{bmatrix} I & O \\ 0^{\mathrm{T}} & \sqrt{2}y^{\mathrm{T}} \\ O & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D & O \\ O & C \end{bmatrix}$，$G=\begin{bmatrix} I & 0 & O \\ O & \sqrt{2}x & I \end{bmatrix}$，得矩阵 M 的一种满秩分解 $M=FG$，于是 M 的 Moore-Penrose 逆为

$$M^{+}=G^{\mathrm{T}}(GG^{\mathrm{T}})^{-1}(F^{\mathrm{T}}F)^{-1}F^{\mathrm{T}}=$$

$$\begin{bmatrix} I & O \\ 0^{\mathrm{T}} & \sqrt{2}x^{\mathrm{T}} \\ O & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & O \\ O & (I+2xx^{\mathrm{T}})^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix} I & O \\ O & (I+2yy^{\mathrm{T}})^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 & O \\ O & \sqrt{2}y & I \end{bmatrix}$$

代入 $R_{2m+1}^{+} = Q_{2m+1}M^{+}Q_{2m+1}^{\mathrm{T}}$,并利用 Sherman 公式,经整理即得所需结果. 又因为,M 的群逆存在的充要条件是 $GF = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I+2xy^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D & O \\ O & C \end{bmatrix}$ 非奇异,即 $I+2xy^{\mathrm{T}}$ 非奇异. 由 Sherman 公式知,后者非奇异的充要条件是 $\omega = 1 + 2y^{\mathrm{T}}x \neq 0$,且

$$M^{\#} = F(GF)^{-2}G =$$

$$\begin{bmatrix} I & O \\ 0^{\mathrm{T}} & \sqrt{2}\,y^{\mathrm{T}} \\ O & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & O \\ O & (I+2xy^{\mathrm{T}})^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix} I & O \\ O & (I+2xy^{\mathrm{T}})^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 & O \\ O & \sqrt{2}\,x & I \end{bmatrix}$$

代入 $R_{2m+1}^{\#} = Q_{2m+1}M^{\#}Q_{2m+1}^{\mathrm{T}}$,并利用 Sherman 公式,经整理即得所需结果. 当矩阵 C 和 D 可逆时,注意到

$$\begin{bmatrix} O & \sqrt{2}\,u & C \\ -\sqrt{2}\,v^{\mathrm{T}} & 0 & 0^{\mathrm{T}} \\ D & 0 & O \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} I & O \\ 0^{\mathrm{T}} & -\sqrt{2}\,w^{\mathrm{T}} \\ O & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & O \\ O & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & \sqrt{2}\,x & I \\ I & 0 & O \end{bmatrix}$$

仿 3)的推导可得 4). 证毕

由该定理可看出,广义中心与反中心对称矩阵的广义逆仍是广义中心与广义反中心对称矩阵.

§4.4 求特征值与特征向量

广义中心与广义反中心对称矩阵的特征问题,可转化为低阶矩阵或较简单矩阵的特征问题.

定理 4.4.1　设 R_{2m}，W_{2m}，R_{2m+1}，W_{2m+1} 是广义中心与广义反中心对称矩阵，x，y，s，t 是 m 维列向量，则

1）特征问题 $R_{2m}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 可转化为

$$\begin{bmatrix}A-B & O\\ O & A+B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\s\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}t\\s\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}s+t\\ P^{-1}(s-t)\end{bmatrix}$$

2）特征问题 $W_{2m}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 可转化为

$$\begin{bmatrix}O & A+B\\ A-B & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\s\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}t\\s\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}s+t\\ P^{-1}(s-t)\end{bmatrix}$$

3）特征问题 $R_{2m+1}\begin{bmatrix}x\\ \xi\\ y\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x\\ \xi\\ y\end{bmatrix}$ 可转化为

$$\begin{bmatrix}A-B & \mathbf{0} & O\\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \alpha & v^{\mathrm{T}}\\ O & 2u & A+B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\ \eta\\ s\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}t\\ \eta\\ s\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x\\ \xi\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}s+t\\ 2\eta\\ P^{-1}(s-t)\end{bmatrix}$$

4）特征问题 $W_{2m+1}\begin{bmatrix}x\\ \xi\\ y\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x\\ \xi\\ y\end{bmatrix}$ 可转化为

$$\begin{bmatrix}O & 2u & A+B\\ -v^{\mathrm{T}} & \alpha & \mathbf{0}^{\mathrm{T}}\\ A-B & \mathbf{0} & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\ \eta\\ s\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}t\\ \eta\\ s\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x\\ \xi\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}s+t\\ 2\eta\\ P^{-1}(s-t)\end{bmatrix}$$

证明　利用式(4.1.6)可将特征问题 $R_{2m}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 转化为

$$\begin{bmatrix}A-B & O\\ O & A+B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\s\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}t\\s\end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{bmatrix}t\\s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I & -P\\ I & P\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

整理之，即得 1)．其余推导类似． 证毕

设 $\boldsymbol{P}$ 是 m 阶正交矩阵，又设式(4.1.4)及式(4.1.5)所给出的广义中心对称矩阵 $\boldsymbol{R}_{2m}$ 和 $\boldsymbol{R}_{2m+1}$ 是实对称的，则易知它们具有如下形式：

$$\boldsymbol{R}_{2m}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{BP}\\ \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{R}_{2m+1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{u} & \boldsymbol{BP}\\ \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} & \alpha & \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}\end{bmatrix} \tag{4.4.1}$$

其中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$ ，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$ ．

定义 4.4.1 设 $\boldsymbol{J}$ 是 m 阶次单位矩阵，$\boldsymbol{x}$ 是 m 维列向量，则称 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{Jx}\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \xi\\ \boldsymbol{Jx}\end{bmatrix}$ 为 $2m$ 维和 $2m+1$ 维**对称向量**，而称 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ -\boldsymbol{Jx}\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ 0\\ -\boldsymbol{Jx}\end{bmatrix}$ 为 $2m$ 维和 $2m+1$ 维**反对称向量**．若设 $\boldsymbol{P}$ 是 m 阶正交矩阵，则称 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \xi\\ \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\end{bmatrix}$ 为 $2m$ 维和 $2m+1$ 维**广义对称向量**，而称 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ -\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ 0\\ -\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\end{bmatrix}$ 为 $2m$ 维和 $2m+1$ 维**广义反对称向量**．

定理 4.4.2 设 $\boldsymbol{P}$ 是 m 阶正交矩阵，$\boldsymbol{R}_{2m}$ 和 $\boldsymbol{R}_{2m+1}$ 是对称广义中心对称矩阵(4.4.1)，则

1) $\boldsymbol{R}_{2m}$ 对应特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 有 m 个正交的广义反对称单位特征向量 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_j\\ -\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j\end{bmatrix}$ $(j=1,2,\cdots,m)$ ；对应特征值 $\mu_1,\cdots,\mu_m$ 有 m 个正交的广义对称单位特征向量 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_j\\ \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j\end{bmatrix}$ $(j=1,2,\cdots,$

m），其中特征值 λ_j 和单位正交特征向量 $\boldsymbol{u}_j$（$j=1,2,\cdots,m$）由 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{u}_j=\lambda_j\boldsymbol{u}_j$ 确定；而特征值 μ_j 和单位正交特征向量 $\boldsymbol{v}_j$（$j=1,2,\cdots,m$）由 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{v}_j=\mu_j\boldsymbol{v}_j$ 确定. 此外，$\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_j\\ \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_j\\ \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j\end{bmatrix}$（$j=1,2,\cdots,m$）构成 $2m$ 个正交的向量.

2）　$\boldsymbol{R}_{2m+1}$ 对应特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 有 m 个正交的广义反对称单位特征向量 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_j\\ 0\\ -\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j\end{bmatrix}$（$j=1,2,\cdots,m$）；对应特征值 $\mu_1,\cdots,\mu_{m+1}$ 有 $m+1$ 个正交的广义对称单位特征向量 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_j\\ \sqrt{2}\xi_j\\ \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j\end{bmatrix}$（$j=1,2,\cdots,m$），其中特征值 λ_j 和单位正交特征向量 $\boldsymbol{u}_j$（$j=1,2,\cdots,m$）由 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{u}_j=\lambda_j\boldsymbol{u}_j$ 确定；而特征值 μ_j 和单位正交特征向量 $\begin{bmatrix}\xi_j\\ \boldsymbol{v}_j\end{bmatrix}$（$j=1,2,\cdots,m+1$）由 $\begin{bmatrix}\alpha & \sqrt{2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\\ \sqrt{2}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_j\\ \boldsymbol{v}_j\end{bmatrix}=\mu_j\begin{bmatrix}\xi_j\\ \boldsymbol{v}_j\end{bmatrix}$ 确定. 此外，这 $2m+1$ 个向量两两正交.

证明　注意到 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 均是实对称矩阵，因此存在 m 阶正交矩阵 $\boldsymbol{U}=[\boldsymbol{u}_1\ \cdots\ \boldsymbol{u}_m]$ 和 $\boldsymbol{V}=[\boldsymbol{v}_1\ \cdots\ \boldsymbol{v}_m]$，使得

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{U}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$$

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{V}=\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_m)$$

令 $\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{U} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{V}\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{W}$ 是 $2m$ 阶正交矩阵，且由式(4.1.6)，有

$$\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{2m}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{2m}\boldsymbol{Q}_{2m}\boldsymbol{W}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_m,\mu_1,\cdots,\mu_m)$$

即 λ_j，μ_j（$j=1,2,\cdots,m$）是 $\boldsymbol{R}_{2m}$ 的特征值，而 $\boldsymbol{Q}_{2m}\boldsymbol{W}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{U} & \boldsymbol{V}\\ -\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U} & \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\end{bmatrix}$ 的列向量是对应的正交单位特征向量. 同理

可证 2). 证毕

注 当对称广义中心对称矩阵的特征值两两互异时，它们对应的特征向量就是广义对称或广义反对称的. 但当特征值的重数大于 1 时，与其对应的特征向量可选择是广义对称或广义反对称的，也可以是非对称的，其解有无穷多.

推论 4.4.1 $2m$ 阶对称 Toeplitz 矩阵有 m 个正交的对称特征向量和 m 个正交的反对称特征向量；$2m+1$ 阶对称 Toeplitz 矩阵有 $m+1$ 个正交的对称特征向量和 m 个正交的反对称特征向量.

例 4.4.1 讨论 3 阶对称 Toeplitz 矩阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & \xi_1 & \xi_2\\ \xi_1 & 1 & \xi_1\\ \xi_2 & \xi_1 & 1\end{bmatrix}$$

的特征值与特征向量.

解 由推论 4.4.1 知，$\boldsymbol{T}$ 有 1 个反对称特征向量和 2 个对称特征向量. 将反对称特征向量 $\boldsymbol{x}_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$ 代入 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}_1=\lambda_1\boldsymbol{x}_1$ 得与 $\boldsymbol{x}_1$ 对应的特征值

$$\lambda_1=1-\xi_2$$

设对称特征向量为 $\boldsymbol{x}=(1,\eta,1)^{\mathrm{T}}$，代入 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，得

$$1+\eta\xi_1+\xi_2=\lambda,\quad 2\xi_1+\eta=\lambda\eta$$

整理之可得 $(\lambda-1)^2-\xi_2(\lambda-1)-2\xi_1^2=0$

于是两个特征值为

$$\begin{cases}\lambda_2=1+\dfrac{\xi_2}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{8\xi_1^2+\xi_2^2}\\[2ex] \lambda_3=1+\dfrac{\xi_2}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{8\xi_1^2+\xi_2^2}\end{cases}$$

对应特征向量为

$$\boldsymbol{x}_j=(1,\eta_j,1)^{\mathrm{T}},\quad j=2,3$$

式中 $\eta_j = \dfrac{2\xi_1}{\lambda_j - 1} = \dfrac{\lambda_j - 1 - \xi_2}{\xi_1}$ $(j = 2,3)$.

本例也可采用定理 4.4.2 的结果求 $\boldsymbol{T}$ 的特征值和特征向量.

在上例中,取 $\xi_1 = \xi_2 = \rho > 0$,则 $\boldsymbol{T}$ 的特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_3 = 1 - \rho,\quad \lambda_2 = 1 + 2\rho$$

对应特征值 λ_1 和 λ_3 的特征向量可选择为

$$\boldsymbol{x}_1 = (1,0,-1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{x}_3 = (1,-2,1)^{\mathrm{T}}$$

它们是对称的和反对称的,但易验证

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_1 = (1,-1,0)^{\mathrm{T}},\quad \tilde{\boldsymbol{x}}_3 = (1,1,-2)^{\mathrm{T}}$$

也是对应的特征向量,它们既非对称,也非反对称.

§4.5 中心对称 Toeplitz 矩阵

考虑如下特殊的中心对称矩阵

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T} & \boldsymbol{HJ} \\ \boldsymbol{JH} & \boldsymbol{JTJ} \end{bmatrix} \tag{4.5.1}$$

其中 $\boldsymbol{T} = (\xi_{j-i})_{i,j=1}^{n}$, $\boldsymbol{H} = (\eta_{i+j-1})_{i,j=1}^{n}$ 分别是 n 阶 Toeplitz 矩阵和 Hankel 矩阵. 由于 $\boldsymbol{HJ}$, $\boldsymbol{JH}$ 和 $\boldsymbol{JTJ}$ 均是 Toeplitz 矩阵. 不妨称 $\boldsymbol{B}$ **为中心对称 Toeplitz 矩阵**.

如果取式(3.5.4)的 $2n$ 阶正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,则有

$$\boldsymbol{QBQ}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{\Gamma}_{j-i})_{i,j=1}^{n}$$

其中

$$\boldsymbol{\Gamma}_k = \begin{bmatrix} \xi_k & \eta_{n-k} \\ \eta_{n+k} & \xi_{-k} \end{bmatrix},\quad k = -n+1,\cdots,-1,0,1,\cdots,n-1$$

于是可利用 §2.3 和 §2.4 的结果计算分块 Toeplitz 矩阵的逆矩阵或求解相应的线性方程组. 又因

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{J} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{J} \end{bmatrix}\boldsymbol{B}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{J} & \boldsymbol{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}-\boldsymbol{H} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{T}+\boldsymbol{H} \end{bmatrix}$$

且 $\boldsymbol{T}-\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{T}+\boldsymbol{H}$ 均是 Toeplitz+Hankel 矩阵，故可利用 § 3.5 的结果求解有关问题.

本节讨论直接求中心对称 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 之逆矩阵的快速算法.

利用式(2.1.4)，(2.1.5)，(3.1.2)，(3.1.3)，直接验证知

$$\boldsymbol{B}\begin{bmatrix} Z_n & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & Z_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_n & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & Z_n \end{bmatrix}\boldsymbol{B} = \sum_{j=1}^{4} \tilde{\boldsymbol{g}}_j \tilde{\boldsymbol{f}}_j^{\mathrm{T}} \tag{4.5.2}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{\boldsymbol{g}}_1 = \boldsymbol{e}_1^{(2n)}, \quad \tilde{\boldsymbol{g}}_2 = \boldsymbol{e}_{n+1}^{(2n)} \\ &\tilde{\boldsymbol{f}}_3 = \boldsymbol{e}_n^{(2n)}, \quad \tilde{\boldsymbol{f}}_4 = \boldsymbol{e}_{2n}^{(2n)} \\ &\tilde{\boldsymbol{f}}_1 = (\xi_1, \cdots, \xi_n, \eta_{n-1}, \cdots, \eta_0)^{\mathrm{T}} \\ &\tilde{\boldsymbol{f}}_2 = (\eta_{n+1}, \cdots, \eta_{2n}, \xi_{-1}, \cdots, \xi_{-n})^{\mathrm{T}} \\ &\tilde{\boldsymbol{g}}_3 = -(\xi_n, \cdots, \xi_1, \eta_{2n}, \cdots, \eta_{n+1})^{\mathrm{T}} \\ &\tilde{\boldsymbol{g}}_4 = -(\eta_0, \cdots, \eta_{n-1}, \xi_{-n}, \cdots, \xi_{-1})^{\mathrm{T}} \end{aligned}\right\} \tag{4.5.3}$$

这里 $\eta_0, \eta_{2n}, \xi_{-n}$ 和 ξ_n 是任意取定的数. 又可验证

$$\boldsymbol{J}_{2n}\boldsymbol{B}\boldsymbol{J}_{2n} = \boldsymbol{B} \tag{4.5.4}$$

定理 4.5.1 设 $\boldsymbol{B}$ 为式(4.5.1)的中心对称 Toeplitz 矩阵. 若线性方程组

$$\boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{x}}_j = \tilde{\boldsymbol{g}}_j, \quad j = 1,2,3,4 \tag{4.5.5}$$

有解，其中 $\tilde{\boldsymbol{g}}_j$ 如式(4.5.3)，则 $\boldsymbol{B}$ 可逆，且可递推求得 $\boldsymbol{B}^{-1} = [\tilde{\boldsymbol{v}}_1 \quad \tilde{\boldsymbol{v}}_2 \quad \cdots \quad \tilde{\boldsymbol{v}}_{2n}]$ 的诸列

$$\begin{aligned} &\tilde{\boldsymbol{v}}_1 = \tilde{\boldsymbol{x}}_1 \\ &\tilde{\boldsymbol{v}}_{k+1} = \begin{bmatrix} Z_n & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & Z_n \end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{v}}_k - \sum_{j=1}^{4} \tilde{\boldsymbol{x}}_j \tilde{\boldsymbol{f}}_j^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{v}}_k, k = 1,2,\cdots,n-1 \end{aligned} \tag{4.5.6}$$

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_n = \boldsymbol{J}_{2n}\tilde{\boldsymbol{x}}_2, \tilde{\boldsymbol{v}}_{k+1} = \boldsymbol{J}_{2n}\tilde{\boldsymbol{v}}_{2n-k}, k = n, n+1, \cdots, 2n-1 \tag{4.5.7}$$

证明 显然 $\tilde{\boldsymbol{v}}_1 = \tilde{\boldsymbol{x}}_1$，$\tilde{\boldsymbol{v}}_{n+1} = \tilde{\boldsymbol{x}}_2$. 设

$$\boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{v}}_k = \boldsymbol{e}_k^{(2n)}, \quad k = 1,2,\cdots,2n$$

式(4.5.2)两边右乘 $\tilde{\boldsymbol{v}}_k$ 得

$$\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_n & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Z}_n\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{v}}_k-\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_n & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Z}_n\end{bmatrix}\boldsymbol{e}_k^{(2n)}=\sum_{j=1}^{4}\boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{x}}_j\tilde{\boldsymbol{f}}_j^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{v}}_k$$

因 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_n & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Z}_n\end{bmatrix}\boldsymbol{e}_k^{(2n)}=\boldsymbol{e}_{k+1}^{(2n)}\ (k\neq n)$，于是有

$$\boldsymbol{B}\left\{\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_n & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Z}_n\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{v}}_k-\sum_{j=1}^{4}\tilde{\boldsymbol{x}}_j\tilde{\boldsymbol{f}}_j^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{v}}_k\right\}=\boldsymbol{e}_{k+1}^{(2n)}$$

故式(4.5.6)成立. 又由式(4.5.4)得

$$\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{J}_{2n}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{J}_{2n}=\boldsymbol{J}_{2n}[\tilde{\boldsymbol{v}}_{2n}\ \ \cdots\ \ \tilde{\boldsymbol{v}}_1]$$

于是 $\tilde{\boldsymbol{v}}_{k+1}=\boldsymbol{J}_{2n}\tilde{\boldsymbol{v}}_{2n-k}\ (k=n,\cdots,2n-1)$，而 $\tilde{\boldsymbol{v}}_n=\boldsymbol{J}_{2n}\tilde{\boldsymbol{v}}_{n+1}=\boldsymbol{J}_{2n}\tilde{\boldsymbol{x}}_2$.

证毕

推论 4.5.1　设 $\boldsymbol{B}$ 为式(4.5.1)的中心对称 Toeplitz 矩阵. 若线性方程组(4.5.5)和

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}_j=\tilde{\boldsymbol{f}}_j,\quad j=1,2,3,4 \tag{4.5.8}$$

均有解，其中 $\tilde{\boldsymbol{f}}_j$ 如式(4.5.3)，则 $\boldsymbol{B}$ 可逆，且可递推求得 $\boldsymbol{B}^{-1}=[\tilde{\boldsymbol{v}}_1\ \ \tilde{\boldsymbol{v}}_2\ \ \cdots\ \ \tilde{\boldsymbol{v}}_{2n}]$ 的诸列

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_1=\tilde{\boldsymbol{x}}_1$$

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_{k+1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_n & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Z}_n\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{v}}_k-\sum_{j=1}^{4}\tilde{\boldsymbol{x}}_j\tilde{\boldsymbol{y}}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_k^{(2n)},\quad k=1,2,\cdots,n-1$$

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_n=\boldsymbol{J}_{2n}\tilde{\boldsymbol{x}}_2,\quad \tilde{\boldsymbol{v}}_{k+1}=\boldsymbol{J}_{2n}\tilde{\boldsymbol{v}}_{2n-k},\quad k=n,n+1,\cdots,2n-1$$

证明　因

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_j\tilde{\boldsymbol{f}}_j^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{v}}_k=\tilde{\boldsymbol{x}}_j\tilde{\boldsymbol{y}}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{v}}_k=\tilde{\boldsymbol{x}}_j\tilde{\boldsymbol{y}}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_k^{(2n)}$$

代入定理 4.5.1 即得.　证毕

注　当 $\boldsymbol{B}$ 对称时，有

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_1=-\boldsymbol{J}_{2n}\tilde{\boldsymbol{x}}_4,\quad \tilde{\boldsymbol{y}}_2=-\boldsymbol{J}_{2n}\tilde{\boldsymbol{x}}_3,\quad \tilde{\boldsymbol{y}}_3=\boldsymbol{J}_{2n}\tilde{\boldsymbol{x}}_2,\quad \tilde{\boldsymbol{y}}_4=\boldsymbol{J}_{2n}\tilde{\boldsymbol{x}}_1$$

此时用推论 4.5.1 的结果计算较方便.

以下讨论求解线性方程组(4.5.5)和(4.5.8)的快速算法. 由于 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 仍是中心对称 Toeplitz 矩阵，因此，只对前者给出两种解法.

方法一

设中心对称 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的各阶顺序主子阵 $\boldsymbol{B}_k$ $(k=1,2,\cdots,2n)$ 均非奇异. 注意到 $\boldsymbol{B}_k=\boldsymbol{T}_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 是 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的顺序主子阵,因此,可利用 § 2.4 的方法求解线性方程组

$$\boldsymbol{T}\tilde{\boldsymbol{x}}_j^{(n)}=\tilde{\boldsymbol{g}}_j^{(n)},\quad j=1,2,3,4$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{g}}_1^{(n)}=\boldsymbol{e}_1,\quad \tilde{\boldsymbol{g}}_2^{(n)}=\boldsymbol{0}$$

$$\tilde{\boldsymbol{g}}_3^{(n)}=-(\xi_n,\cdots,\xi_1)^{\mathrm{T}},\quad \tilde{\boldsymbol{g}}_4^{(n)}=-(\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_{n-1})^{\mathrm{T}}$$

得到 $\tilde{\boldsymbol{x}}_2^{(n)}=\boldsymbol{0}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{x}}_j^{(n)}$ $(j=1,3,4)$ 作为下一步计算的起始值. 又由式(4.5.2)有

$$\boldsymbol{B}_k\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_n & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Z}_{k-n}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_n & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Z}_{k-n}\end{bmatrix}\boldsymbol{B}_k=\sum_{j=1}^{4}\tilde{\boldsymbol{g}}_j^{(k)}\tilde{\boldsymbol{f}}_j^{(k)\mathrm{T}}$$

$$k=n+1,\cdots,2n \qquad (4.5.9)$$

其中

$$\begin{cases}\tilde{\boldsymbol{g}}_1^{(k)}=\boldsymbol{e}_1^{(k)},\quad \tilde{\boldsymbol{g}}_2^{(k)}=\boldsymbol{e}_{n+1}^{(k)}\\ \tilde{\boldsymbol{f}}_3^{(k)}=\boldsymbol{e}_n^{(k)},\quad \tilde{\boldsymbol{f}}_4^{(k)}=\boldsymbol{e}_k^{(k)}\\ \tilde{\boldsymbol{g}}_3^{(k)}=-(\xi_n,\cdots,\xi_1,\eta_{2n},\cdots,\eta_{3n-k+1})^{\mathrm{T}}\\ \tilde{\boldsymbol{g}}_4^{(k)}=-(\eta_{2n-k},\cdots,\eta_{3n-k-1},\xi_{-k+n},\cdots,\xi_{-1})^{\mathrm{T}}\\ \tilde{\boldsymbol{f}}_1^{(k)}=(\xi_1,\cdots,\xi_n,\eta_{n-1},\cdots,\eta_{2n-k})^{\mathrm{T}}\\ \tilde{\boldsymbol{f}}_2^{(k)}=(\eta_{n+1},\cdots,\eta_{2n},\xi_{-1},\cdots,\xi_{-k+n})^{\mathrm{T}}\end{cases}$$

注意到

$$\boldsymbol{B}_{k+1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_k & -\tilde{\boldsymbol{g}}_4^{(k)}\\ \tilde{\boldsymbol{f}}^{(k)\mathrm{T}} & \xi_0\end{bmatrix}$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{f}}^{(k)}=(\eta_{2n-k},\cdots,\eta_{3n-k-1},\xi_{k-n},\cdots,\xi_1)^{\mathrm{T}}$,令

$$\left.\begin{aligned}\sigma^{(k)}&=\tilde{\boldsymbol{f}}^{(k)\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}_4^{(k)}+\xi_0\\ \sigma_j^{(k)}&=\tilde{\boldsymbol{f}}^{(k)\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}_j^{(k)}-\boldsymbol{e}_{k+1}^{(k+1)\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{g}}_j^{(k+1)},\quad j=1,2,3\end{aligned}\right\}\qquad (4.5.10)$$

则有

$$\begin{cases} \boldsymbol{B}_{k+1}\begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{x}}_4^{(k)}\\ 1\end{bmatrix} = \sigma^{(k)}\boldsymbol{e}_{k+1}^{(k+1)} \\ \boldsymbol{B}_{k+1}\begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{x}}_j^{(k)}\\ 0\end{bmatrix} = \widetilde{\boldsymbol{g}}_j^{(k+1)} + \sigma_j^{(k)}\boldsymbol{e}_{k+1}^{(k+1)}, \quad j=1,2,3 \end{cases}$$

可知 $\sigma^{(k)} \neq 0$，否则与 $\boldsymbol{B}_{k+1}$ 非奇异矛盾. 从而有

$$\boldsymbol{B}_{k+1}\left\{\begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{x}}_j^{(k)}\\ 0\end{bmatrix} - \frac{\sigma_j^{(k)}}{\sigma^{(k)}}\begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{x}}_4^{(k)}\\ 1\end{bmatrix}\right\} = \widetilde{\boldsymbol{g}}_j^{(k+1)}, \quad j=1,2,3$$

又由式(4.5.9)，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_{k+1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_n & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Z}_{k+1-n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{x}}_4^{(k)}\\ 1\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_n & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Z}_{k+1-n}\end{bmatrix}\boldsymbol{B}_{k+1}\begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{x}}_4^{(k)}\\ 1\end{bmatrix} + \\ &\sum_{j=1}^{4}\widetilde{\boldsymbol{g}}_j^{(k+1)}\widetilde{\boldsymbol{f}}_j^{(k+1)\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{x}}_4^{(k)}\\ 1\end{bmatrix} = \\ &\sum_{j=1}^{3}\boldsymbol{B}_{k+1}\widetilde{\boldsymbol{x}}_j^{(k+1)}\widetilde{\boldsymbol{f}}_j^{(k+1)\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{x}}_4^{(k)}\\ 1\end{bmatrix} + \widetilde{\boldsymbol{g}}_4^{(k+1)}\end{aligned}$$

由上两式即得

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{\boldsymbol{x}}_j^{(k+1)} &= \begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{x}}_j^{(k)}\\ 0\end{bmatrix} - \frac{\sigma_j^{(k)}}{\sigma^{(k)}}\begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{x}}_4^{(k)}\\ 1\end{bmatrix}, \quad j=1,2,3 \\ \widetilde{\boldsymbol{x}}_4^{(k+1)} &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_n & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Z}_{k+1-n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{x}}_4^{(k)}\\ 1\end{bmatrix} - \sum_{j=1}^{3}\widetilde{\boldsymbol{x}}_j^{(k+1)}\widetilde{\boldsymbol{f}}_j^{(k+1)\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{x}}_4^{(k)}\\ 1\end{bmatrix} \\ & k = n,\cdots,2n-1\end{aligned}\right\} \quad (4.5.11)$$

方法二

设中心对称 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的 $2k$ 阶主子阵

$$\hat{\boldsymbol{B}}_{2k} = \begin{bmatrix}\xi_0 & \cdots & \xi_{k-1} & \eta_{2n-k} & \cdots & \eta_{2n-2k+1}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \xi_{-k+1} & \cdots & \xi_0 & \eta_{2n-1} & \cdots & \eta_{2n-k}\\ \eta_{2n-k} & \cdots & \eta_{2n-1} & \xi_0 & \cdots & \xi_{-k+1}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \eta_{2n-2k+1} & \cdots & \eta_{2n-k} & \xi_{k-1} & \cdots & \xi_0\end{bmatrix}, \quad k=1,2,\cdots,n$$

均非奇异,则由式(4.5.2)得

$$\hat{B}_{2k}\begin{bmatrix} Z_k & O \\ O & Z_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_k & O \\ O & Z_k \end{bmatrix}\hat{B}_{2k} = \sum_{j=1}^{4} \hat{g}_j^{(2k)} \hat{f}_j^{(2k)\mathrm{T}} \quad (4.5.12)$$

其中

$$\begin{cases} \hat{g}_1^{(2k)} = e_1^{(2k)}, \quad \hat{g}_2^{(2k)} = e_{k+1}^{(2k)} \\ \hat{f}_3^{(2k)} = e_k^{(2k)}, \quad \hat{f}_4^{(2k)} = e_{2k}^{(2k)} \\ \hat{g}_3^{(2k)} = -\ (\xi_k, \cdots, \xi_1, \eta_{2n}, \cdots, \eta_{2n-k+1})^{\mathrm{T}} \\ \hat{g}_4^{(2k)} = -\ (\eta_{2n-2k}, \cdots, \eta_{2n-k-1}, \xi_{-k}, \cdots, \xi_{-1})^{\mathrm{T}} \\ \hat{f}_1^{(2k)} = (\xi_1, \cdots, \xi_k, \eta_{2n-k-1}, \cdots, \eta_{2n-2k})^{\mathrm{T}} \\ \hat{f}_2^{(2k)} = (\eta_{2n-k+1}, \cdots, \eta_{2n}, \xi_1, \cdots, \xi_{-k})^{\mathrm{T}} \end{cases}$$

又由式(4.5.4)

$$J_{2k}\hat{B}_{2k}J_{2k} = \hat{B}_{2k} \quad (4.5.13)$$

设 $x_j^{(2k)}$ 是线性方程组

$$\hat{B}_{2k}x_j^{(2k)} = \hat{g}_j^{(2k)}, \quad j = 1,2,3,4;\ k = 1,2,\cdots,n$$

的解向量.注意到

$$\hat{B}_{2k+2} = \begin{bmatrix} \xi_0 & \hat{f}_1^{(2k)\mathrm{T}} & \eta_{2n-2k-1} \\ -J_{2k}\hat{g}_4^{(2k)} & \hat{B}_{2k} & -\hat{g}_4^{(2k)} \\ \eta_{2n-2k-1} & \hat{f}_1^{(2k)\mathrm{T}}J_{2k} & \xi_0 \end{bmatrix}$$

则有

$$\hat{B}_{2k+2}\begin{bmatrix} 0 \\ x_4^{(2k)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_k \\ \mathbf{0} \\ \mu_k \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_{2k+2}\begin{bmatrix} 1 \\ J_{2k}x_4^{(2k)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_k \\ \mathbf{0} \\ \lambda_k \end{bmatrix}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \lambda_k &= \hat{f}_1^{(2k)\mathrm{T}}x_4^{(2k)} + \eta_{2n-2k-1} \\ \mu_k &= \hat{f}_1^{(2k)\mathrm{T}}J_{2k}x_4^{(2k)} + \xi_0 \end{aligned}\right\} \quad (4.5.14)$$

由于 $\begin{bmatrix} 0 \\ x_4^{(2k)} \\ 1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 1 \\ J_{2k}x_4^{(2k)} \\ 0 \end{bmatrix}$ 线性无关,且 $\hat{B}_{2k+2}$ 非奇异,从而 $\begin{bmatrix} \lambda_k \\ \mathbf{0} \\ \mu_k \end{bmatrix}$ 与

$\begin{bmatrix}\mu_k\\ \mathbf{0}\\ \lambda_k\end{bmatrix}$ 也线性无关，故 $\lambda_k^2-\mu_k^2\neq 0$，于是有

$$\hat{\boldsymbol{B}}_{2k+2}\left\{\frac{\lambda_k}{\lambda_k^2-\mu_k^2}\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{x}_4^{(2k)}\\ 1\end{bmatrix}-\frac{\mu_k}{\lambda_k^2-\mu_k^2}\begin{bmatrix}1\\ \boldsymbol{J}_{2k}\boldsymbol{x}_4^{(2k)}\\ 0\end{bmatrix}\right\}=\boldsymbol{e}_1^{(2k+2)}$$

故有

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{x}_1^{(2k+2)}=\sigma_k\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{x}_4^{(2k)}\\ 1\end{bmatrix}-\tau_k\begin{bmatrix}1\\ \boldsymbol{J}_{2k}\boldsymbol{x}_4^{(2k)}\\ 0\end{bmatrix}\\ &\sigma_k=\frac{\lambda_k}{\lambda_k^2-\mu_k^2},\quad \tau_k=\frac{\mu_k}{\lambda_k^2-\mu_k^2}\end{aligned}\right\}\tag{4.5.15}$$

若令

$$\begin{cases}\alpha_{kj}=\hat{\boldsymbol{f}}_1^{(2k)\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_j^{(2k)}-\boldsymbol{e}_1^{(2k+2)\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_j^{(2k+2)}\\ \beta_{kj}=\hat{\boldsymbol{f}}_1^{(2k)\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{2k}\boldsymbol{x}_j^{(2k)}-\boldsymbol{e}_{2k+2}^{(2k+2)\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_j^{(2k+2)}\end{cases},\quad j=2,3$$

则

$$\hat{\boldsymbol{B}}_{2k+2}\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{x}_j^{(2k)}\\ 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{g}_j^{(2k+2)}+\alpha_{kj}\boldsymbol{e}_1^{(2k+2)}+\beta_{kj}\boldsymbol{e}_{2k+2}^{(2k+2)}$$

从而

$$\boldsymbol{x}_j^{(2k+2)}=\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{x}_j^{(2k)}\\ 0\end{bmatrix}-\alpha_{kj}\boldsymbol{x}_1^{(2k+2)}-\beta_{kj}\boldsymbol{J}_{2k+2}\boldsymbol{x}_1^{(2k+2)},\quad j=2,3\tag{4.5.16}$$

还须确定 $\boldsymbol{x}_4^{(2k+2)}$. 设 $\boldsymbol{u}^{(2k+2)}$ 是线性方程组 $\hat{\boldsymbol{B}}_{2k+2}\boldsymbol{u}^{(2k+2)}=\boldsymbol{e}_2^{(2k+2)}$ $(k=1,2,\cdots,n-1)$ 的解向量. 因为

$$\hat{\boldsymbol{B}}_{2k+2}\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{x}_1^{(2k)}\\ 0\end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_2^{(2k+2)} + \alpha_{k1}\boldsymbol{e}_1^{(2k+2)} + \beta_{k1}\boldsymbol{e}_{2k+2}^{(2k+2)}$$

其中 $\alpha_{k1} = \hat{\boldsymbol{f}}_1^{(2k)\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1^{(2k)}$, $\beta_{k1} = \hat{\boldsymbol{f}}_1^{(2k)\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{2k}\boldsymbol{x}_1^{(2k)}$ ，故有

$$\boldsymbol{u}^{(2k+2)} = \begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{x}_1^{(2k)}\\ 0\end{bmatrix} - \alpha_{k1}\boldsymbol{x}_1^{(2k+2)} - \beta_{k1}\boldsymbol{J}_{2k+2}\boldsymbol{x}_1^{(2k+2)} \quad (4.5.17)$$

利用式(4.5.12)得

$$\hat{\boldsymbol{B}}_{2k+2}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_{k+1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Z}_{k+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{x}_4^{(2k)}\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_{k+1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Z}_{k+1}\end{bmatrix}\hat{\boldsymbol{B}}_{2k+2}\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{x}_4^{(2k)}\\ 1\end{bmatrix} +$$

$$\sum_{j=1}^{4}\hat{\boldsymbol{g}}_j^{(2k+2)}\hat{\boldsymbol{f}}_j^{(2k+2)\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{x}_4^{(2k)}\\ 1\end{bmatrix} = \lambda_k\boldsymbol{e}_2^{(2k+2)} +$$

$$\sum_{j=1}^{3}\hat{\boldsymbol{B}}_{2k+2}\boldsymbol{x}_j^{(2k+2)}\hat{\boldsymbol{f}}_j^{(2k+2)\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{x}_4^{(2k)}\\ 1\end{bmatrix} + \hat{\boldsymbol{g}}_4^{(2k+2)}$$

从而

$$\boldsymbol{x}_4^{(2k+2)} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_{k+1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Z}_{k+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{x}_4^{(2k)}\\ 1\end{bmatrix} -$$

$$\lambda_k\boldsymbol{u}^{(2k+2)} - \sum_{j=1}^{3}\boldsymbol{x}_j^{(2k+2)}\hat{\boldsymbol{f}}_j^{(2k+2)\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{x}_4^{(2k)}\\ 1\end{bmatrix} \quad (4.5.18)$$

取初始值 $\boldsymbol{x}_j^{(2)} = \hat{\boldsymbol{B}}_2^{-1}\hat{\boldsymbol{g}}_j^{(2)}$ $(j = 1,2,3,4)$ ，分别由式(4.5.14)～(4.5.18)递推计算，即可求得式(4.5.5)的线性方程组的解.

第五章　Loewner 矩阵

§5.1　Cauchy 型与 Loewner 型矩阵的定义及性质

定义 5.1.1　给定两组数 α_j，β_j $(j=1,2,\cdots,n)$，且 $\alpha_i \neq \beta_j$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$，称矩阵

$$C=\left(\frac{1}{\alpha_i-\beta_j}\right)_{i,j=1}^{n} \tag{5.1.1}$$

为 **Cauchy 矩阵**.

当 $\alpha_j=j$，$\beta_j=1-j$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 时，$\boldsymbol{C}$ 就是通常的 Hilbert 矩阵.

Cauchy 矩阵的行列式可直接计算得到.

定理 5.1.1　设 $\boldsymbol{C}$ 是式(5.1.1)的 Cauchy 矩阵，则

$$\det C=\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i-\beta_i)}\prod_{i=2}^{n}\left[\prod_{j=1}^{i-1}\frac{(\alpha_i-\alpha_j)(\beta_j-\beta_i)}{(\alpha_i-\beta_j)(\alpha_j-\beta_i)}\right]=$$

$$\frac{\left[\prod\limits_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(\alpha_i-\alpha_j)\right]\left[\prod\limits_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(\beta_j-\beta_i)\right]}{\prod\limits_{i=1}^{n}\left[\prod\limits_{j=1}^{n}(\alpha_i-\beta_j)\right]}$$

证明　记 $D_n=\det C$. 将 D_n 的第 $1,2,\cdots,n-1$ 行分别减去第 n 行，再将第 $1,2,\cdots,n-1$ 列分别减去第 n 列，可得

$$D_n=\frac{1}{\alpha_n-\beta_n}\left[\prod_{j=1}^{n-1}\frac{(\alpha_n-\alpha_j)(\beta_j-\beta_n)}{(\alpha_n-\beta_j)(\alpha_j-\beta_n)}\right]D_{n-1}$$

递推之可得第一式，经整理可得第二式.　　　　证毕

由定理 5.1.1 可求得 n 阶 Hilbert 矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的行列式为

$$\det\boldsymbol{H} = \frac{[1!2!\cdots(n-1)!]^3}{n!(n+1)!\cdots(2n-1)!}$$

定义 5.1.2 给定四组数 α_j ，β_j ，ξ_j ，η_j $(j=1,2,\cdots,n)$ ，且 $\alpha_i \neq \beta_j$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$ ，称矩阵

$$\boldsymbol{L} = \left(\frac{\xi_i - \eta_j}{\alpha_i - \beta_j}\right)_{i,j=1}^{n} \tag{5.1.2}$$

为 **Loewner 矩阵**. 若 $\alpha_i \neq \alpha_j$ $(i \neq j)$ ，则矩阵 $\boldsymbol{L} = (l_{ij})_{i,j=1}^{n}$ ，其中

$$l_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\xi_i - \xi_j}{\alpha_i - \alpha_j}, & i \neq j \\ \text{任意}, & i = j \end{cases} \tag{5.1.3}$$

称为**对称 Loewner 矩阵**.

若取 $\xi_j = 1$ ，$\eta_j = 0$ $(j=1,2,\cdots,n)$ ，则 Loewner 矩阵即转化为 Cauchy 矩阵.

容易验证，Cauchy 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 满足

$$\operatorname{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}\operatorname{diag}(\beta_1,\cdots,\beta_n) = (1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}(1,\cdots,1)$$

Loewner 矩阵 $\boldsymbol{L}$ 满足

$$\operatorname{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}\operatorname{diag}(\beta_1,\cdots,\beta_n) = (\xi_1,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}(1,\cdots,1) - (1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}(\eta_1,\cdots,\eta_n)$$

而对称 Loewner 矩阵 $\boldsymbol{L}$ 满足

$$\operatorname{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}\operatorname{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n) = (\xi_1,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}(1,\cdots,1) - (1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}(\xi_1,\cdots,\xi_n)$$

定义 5.1.3 给定两组数 α_j ，β_j $(j=1,2,\cdots,n)$ 和 n 维列向量 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{p}^{(i)}$，$\boldsymbol{q}^{(i)}$ $(i=1,\cdots,l)$. 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{C}$ 满足

$$\operatorname{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}\operatorname{diag}(\beta_1,\cdots,\beta_n) = \boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} \tag{5.1.4}$$

则称 $\boldsymbol{C}$ 为 **Cauchy 型矩阵**. 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{L}$ 满足

$$\operatorname{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}\operatorname{diag}(\beta_1,\cdots,\beta_n) = \sum_{i=1}^{l}\boldsymbol{p}^{(i)}\boldsymbol{q}^{(i)\mathrm{T}} \tag{5.1.5}$$

则称 L 为 Loewner 型矩阵. 若 n 阶对称矩阵 L 满足

$$\operatorname{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}\operatorname{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{q}\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}} \quad (5.1.6)$$

则称 L 为对称 Loewner 型矩阵.

可见,Cauchy 型矩阵是 Loewner 型矩阵的特殊情形.当 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{q}=(1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 且 $\alpha_i\neq\beta_j$ 时,由式(5.1.4)定义的矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为 Cauchy 矩阵;当 $l=2$,$\boldsymbol{p}^{(1)}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{p}^{(2)}=\boldsymbol{q}^{(1)}=(1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{q}^{(2)}=-(\eta_1,\cdots,\eta_n)^{\mathrm{T}}$,且 $\alpha_i\neq\beta_j$ 时,由式(5.1.5)定义的矩阵 $\boldsymbol{L}$ 即为 Loewner 矩阵;当 $\boldsymbol{p}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{q}=(1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$,且 $\alpha_i\neq\alpha_j$ $(i\neq j)$ 时,由式(5.1.6)定义的矩阵 $\boldsymbol{L}$ 为对称 Loewner 矩阵.

§5.2 求解 Loewner 型线性方程组

考虑求解线性方程组

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f},\quad \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{g} \quad (5.2.1)$$

其中 $\boldsymbol{L}=(l_{ij})_{i,j=1}^{n}$ 为 Loewner 型矩阵,$\boldsymbol{x}=(x(1),\cdots,x(n))^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{y}=(y(1),\cdots,y(n))^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{f}=(f(1),\cdots,f(n))^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{g}=(g(1),\cdots,g(n))^{\mathrm{T}}$. 设 $\boldsymbol{L}_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 是矩阵 $\boldsymbol{L}$ 的 k 阶顺序主子阵,且均是非奇异的,而 $\boldsymbol{f}_k=(f(1),\cdots,f(k))^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{g}_k=(g(1),\cdots,g(k))^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{p}_k^{(i)}=(p^{(i)}(1),\cdots,p^{(i)}(k))^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{q}_k^{(i)}=(q^{(i)}(1),\cdots,q^{(i)}(k))^{\mathrm{T}}$ 是分别取 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g},\boldsymbol{p}^{(i)},\boldsymbol{q}^{(i)}$ 的前 k 个分量构成的 k 维列向量.由式(5.1.5)易得

$$\operatorname{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)\boldsymbol{L}_k-\boldsymbol{L}_k\operatorname{diag}(\beta_1,\cdots,\beta_k)=\sum_{i=1}^{l}\boldsymbol{p}_k^{(i)}\boldsymbol{q}_k^{(i)\mathrm{T}} \quad (5.2.2)$$

又设 $\boldsymbol{u}_k=(u_k(1),\cdots,u_k(k))^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{v}_k=(v_k(1),\cdots,v_k(k))^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{w}_k^{(i)}=(w_k^{(i)}(1),\cdots w_k^{(i)}(k))^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{z}_k^{(i)}=(z_k^{(i)}(1),\cdots,z_k^{(i)}(k))^{\mathrm{T}}$ 分别是线性方程组

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{L}_k\boldsymbol{u}_k=\boldsymbol{e}_k^{(k)}, \qquad \boldsymbol{L}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{e}_k^{(k)}\\&\boldsymbol{L}_k\boldsymbol{w}_k^{(i)}=\boldsymbol{p}_k^{(i)}, \quad \boldsymbol{L}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_k^{(i)}=\boldsymbol{q}_k^{(i)}, \quad i=1,\cdots,l\end{aligned}\right\} \tag{5.2.3}$$

的解向量.式(5.2.2)分别左乘及右乘 $\boldsymbol{L}_k^{-1}$ 得

$$\boldsymbol{L}_k^{-1}\mathrm{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)-\mathrm{diag}(\beta_1,\cdots,\beta_k)\boldsymbol{L}_k^{-1}=\sum_{i=1}^{l}\boldsymbol{w}_k^{(i)}\boldsymbol{z}_k^{(i)\mathrm{T}}$$

上式及其转置分别右乘 $\boldsymbol{e}_k^{(k)}$，有

$$\left.\begin{aligned}\alpha_k\boldsymbol{u}_k-\mathrm{diag}(\beta_1,\cdots,\beta_k)\boldsymbol{u}_k&=\sum_{i=1}^{l}z_k^{(i)}(k)\boldsymbol{w}_k^{(i)}\\\mathrm{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)\boldsymbol{v}_k-\beta_k\boldsymbol{v}_k&=\sum_{i=1}^{l}w_k^{(i)}(k)\boldsymbol{z}_k^{(i)}\end{aligned}\right\} \tag{5.2.4}$$

对方程组(5.2.3)利用定理 1.3.3，得

$$\boldsymbol{w}_k^{(i)}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}_{k-1}^{(i)}\\0\end{bmatrix}+\mu_{k-1}^{(i)}\boldsymbol{u}_k, \quad \boldsymbol{z}_k^{(i)}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{z}_{k-1}^{(i)}\\0\end{bmatrix}+\nu_{k-1}^{(i)}\boldsymbol{v}_k \tag{5.2.5}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\mu_{k-1}^{(i)}&=p^{(i)}(k)-\sum_{j=1}^{k-1}l_{kj}w_{k-1}^{(i)}(j)\\\nu_{k-1}^{(i)}&=q^{(i)}(k)-\sum_{j=1}^{k-1}l_{jk}z_{k-1}^{(i)}(j)\end{aligned}\right\} \tag{5.2.6}$$

将式(5.2.5)代入式(5.2.4)，有

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{diag}(\alpha_k-\beta_1,\cdots,\alpha_k-\beta_k)\boldsymbol{u}_k&=\sum_{i=1}^{l}z_k^{(i)}(k)\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}_{k-1}^{(i)}\\0\end{bmatrix}+\\&\quad\left(\sum_{i=1}^{l}z_k^{(i)}(k)\mu_{k-1}^{(i)}\right)\boldsymbol{u}_k\\\mathrm{diag}(\alpha_1-\beta_k,\cdots,\alpha_k-\beta_k)\boldsymbol{v}_k&=\sum_{i=1}^{l}w_k^{(i)}(k)\begin{bmatrix}\boldsymbol{z}_{k-1}^{(i)}\\0\end{bmatrix}+\\&\quad\left(\sum_{i=1}^{l}w_k^{(i)}(k)\nu_{k-1}^{(i)}\right)\boldsymbol{v}_k\end{aligned}\right\} \tag{5.2.7}$$

由式(5.2.4)，得

$$(\alpha_k-\beta_k)u_k(k)=\sum_{i=1}^{l}z_k^{(i)}(k)w_k^{(i)}(k)=(\alpha_k-\beta_k)v_k(k)$$

即

$$u_k(k)=v_k(k) \tag{5.2.8}$$

而由式(5.2.5)，得

$$w_k^{(i)}(k)=\mu_{k-1}^{(i)}u_k(k),\quad z_k^{(i)}(k)=\nu_{k-1}^{(i)}v_k(k) \tag{5.2.9}$$

将式(5.2.8)和(5.2.9)代入式(5.2.7)，有

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{diag}(\alpha_k-\beta_1,\cdots,\alpha_k-\beta_k)\boldsymbol{u}_k=\\&\qquad u_k(k)\left(\sum_{i=1}^{l}\nu_{k-1}^{(i)}\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}_{k-1}^{(i)}\\0\end{bmatrix}+\left(\sum_{i=1}^{l}\mu_{k-1}^{(i)}\nu_{k-1}^{(i)}\right)\boldsymbol{u}_k\right)\\&\operatorname{diag}(\alpha_1-\beta_k,\cdots,\alpha_k-\beta_k)\boldsymbol{v}_k=\\&\qquad v_k(k)\left(\sum_{i=1}^{l}\mu_{k-1}^{(i)}\begin{bmatrix}\boldsymbol{z}_{k-1}^{(i)}\\0\end{bmatrix}+\left(\sum_{i=1}^{l}\mu_{k-1}^{(i)}\nu_{k-1}^{(i)}\right)\boldsymbol{v}_k\right)\end{aligned}\right\} \tag{5.2.10}$$

比较式(5.2.10)的最后一个分量，得

$$u_k(k)=v_k(k)=\frac{\alpha_k-\beta_k}{\sum_{i=1}^{l}\mu_{k-1}^{(i)}\nu_{k-1}^{(i)}} \tag{5.2.11}$$

比较式(5.2.10)的第 j 个分量，得

$$\begin{cases}(\alpha_k-\beta_j)u_k(j)=\\\qquad u_k(k)\left[\sum_{i=1}^{l}\nu_{k-1}^{(i)}w_{k-1}^{(i)}(j)+\left(\sum_{i=1}^{l}\mu_{k-1}^{(i)}\nu_{k-1}^{(i)}\right)u_k(j)\right]\\(\alpha_j-\beta_k)v_k(j)=\\\qquad v_k(k)\left[\sum_{i=1}^{l}\mu_{k-1}^{(i)}z_{k-1}^{(i)}(j)+\left(\sum_{i=1}^{l}\mu_{k-1}^{(i)}\nu_{k-1}^{(i)}\right)v_k(j)\right]\end{cases}$$

利用式(5.2.11)整理得

$$\left.\begin{aligned} u_k(j) &= \frac{u_k(k)}{\beta_k-\beta_j}\sum_{i=1}^{l}\nu_{k-1}^{(i)}w_{k-1}^{(i)}(j) \\ v_k(j) &= \frac{v_k(k)}{\alpha_j-\alpha_k}\sum_{i=1}^{l}\mu_{k-1}^{(i)}z_{k-1}^{(i)}(j) \end{aligned}\right\} \tag{5.2.12}$$

最后，由定理 1.3.3 知，对线性方程组 $\boldsymbol{L}_k\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{f}_k$ 和 $\boldsymbol{L}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{g}_k$ 有

$$\boldsymbol{x}_k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_{k-1}\\0\end{bmatrix}+\sigma_{k-1}\boldsymbol{u}_k,\quad \boldsymbol{y}_k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_{k-1}\\0\end{bmatrix}+\tau_{k-1}\boldsymbol{v}_k \tag{5.2.13}$$

其中

$$\sigma_{k-1}=f(k)-\sum_{j=1}^{k-1}l_{kj}x_{k-1}(j),\quad \tau_{k-1}=g(k)-\sum_{j=1}^{k-1}l_{jk}y_{k-1}(j)$$

结合式(5.2.5)，(5.2.6)，(5.2.11)～(5.2.13)，得

算法 1 （求解 Loewner 型线性方程组 $\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}$ 或 $\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}$）

$u_1(1)=v_1(1)=1/l_{11}$

$w_1^{(i)}(1)=p^{(i)}(1)/l_{11}$

$(\ z_1^{(i)}(1)=q^{(i)}(1)/l_{11}\ ),\quad i=1,2,\cdots,l$

$x_1(1)=f(1)/l_{11}$

$(\ y_1(1)=g(1)/l_{11}\ )$

对 $k=2,3,\cdots,n$

$$\mu_{k-1}^{(i)}=p^{(i)}(k)-\sum_{j=1}^{k-1}l_{kj}w_{k-1}^{(i)}(j)$$

$$\nu_{k-1}^{(i)}=q^{(i)}(k)-\sum_{j=1}^{k-1}l_{jk}z_{k-1}^{(i)}(j),\quad i=1,2,\cdots,l$$

$$\sigma_{k-1}=f(k)-\sum_{j=1}^{k-1}l_{kj}x_{k-1}(j)$$

$$(\ \tau_{k-1}=g(k)-\sum_{j=1}^{k-1}l_{jk}y_{k-1}(j)\ )$$

$$u_k(k)=\frac{\alpha_k-\beta_k}{\sum_{i=1}^{l}\mu_{k-1}^{(i)}\nu_{k-1}^{(i)}}=v_k(k)$$

$$u_k(j) = \frac{u_k(k)}{\beta_k - \beta_j}\sum_{i=1}^{l}\nu_{k-1}^{(i)} w_{k-1}^{(i)}(j)$$

$$\left(v_k(j) = \frac{v_k(k)}{\alpha_j - \alpha_k}\sum_{i=1}^{l}\mu_{k-1}^{(i)} z_{k-1}^{(i)}(j) \right)$$

$$j = 1,2,\cdots,k-1$$

$$\boldsymbol{w}_k^{(i)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_{k-1}^{(i)} \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_{k-1}^{(i)}\boldsymbol{u}_k, \quad \boldsymbol{z}_k^{(i)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_{k-1}^{(i)} \\ 0 \end{bmatrix} + \nu_{k-1}^{(i)}\boldsymbol{v}_k$$

$$i = 1,2,\cdots,l$$

$$\boldsymbol{x}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{k-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \sigma_{k-1}\boldsymbol{u}_k$$

$$\left(\boldsymbol{y}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_{k-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \tau_{k-1}\boldsymbol{v}_k \right)$$

该算法需 $\frac{5l+6}{2}n^2 - \frac{l-2}{2}n$ 次乘除运算，$\frac{5l+2}{2}n^2 - \frac{3l+2}{2}n - l$ 次加减运算.

对于对称 Loewner 型矩阵 $\boldsymbol{L}$，求解相应的线性方程组

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$$

的快速算法推导如下. 同样，设 $\boldsymbol{L}_k$ $(k = 1,2,\cdots,n)$ 是矩阵 $\boldsymbol{L}$ 的 k 阶顺序主子阵，且均是非奇异的. 又设 $\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{w}_k,\boldsymbol{z}_k,\boldsymbol{x}_k$ 分别是线性方程组

$$\boldsymbol{L}_k\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{e}_k^{(k)}, \quad \boldsymbol{L}_k\boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{p}_k, \quad \boldsymbol{L}_k\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{q}_k, \quad \boldsymbol{L}_k\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{f}_k$$

的解向量，其中 $\boldsymbol{f}_k,\boldsymbol{p}_k,\boldsymbol{q}_k$ 是分别取 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ 的前 k 个分量构成的 k 维列向量. 由式(5.1.6)得

$$\mathrm{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)\boldsymbol{L}_k - \boldsymbol{L}_k\mathrm{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_k) = \boldsymbol{p}_k\boldsymbol{q}_k^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{q}_k\boldsymbol{p}_k^{\mathrm{T}}$$

上式左乘及右乘 $\boldsymbol{L}_k^{-1}$ 得

$$\boldsymbol{L}_k^{-1}\mathrm{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_k) - \mathrm{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)\boldsymbol{L}_k^{-1} = \boldsymbol{w}_k\boldsymbol{z}_k^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{z}_k\boldsymbol{w}_k^{\mathrm{T}}$$

右乘 $\boldsymbol{e}_k^{(k)}$，有

$$\alpha_k\boldsymbol{u}_k - \mathrm{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)\boldsymbol{u}_k = z_k(k)\boldsymbol{w}_k - w_k(k)\boldsymbol{z}_k \tag{5.2.14}$$

由定理 1.3.3,得

$$w_k = \begin{bmatrix} w_{k-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_{k-1} u_k, \quad z_k = \begin{bmatrix} z_{k-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \nu_{k-1} u_k \tag{5.2.15}$$

其中

$$\begin{cases} \mu_{k-1} = p(k) - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj} w_{k-1}(j) \\ \nu_{k-1} = q(k) - \sum_{j=1}^{k-1} l_{jk} z_{k-1}(j) \end{cases}$$

代入式(5.2.14),注意 $w_k(k) = \mu_{k-1} u_k(k)$,$z_k(k) = \nu_{k-1} u_k(k)$,有

$$\mathrm{diag}(\alpha_k - \alpha_1, \cdots, \alpha_k - \alpha_{k-1}, 0) u_k = u_k(k) \left(\nu_{k-1} \begin{bmatrix} w_{k-1} \\ 0 \end{bmatrix} - \mu_{k-1} \begin{bmatrix} z_{k-1} \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

于是

$$u_k(j) = \frac{u_k(k)}{\alpha_k - \alpha_j} [\nu_{k-1} w_{k-1}(j) - \mu_{k-1} z_{k-1}(j)]$$

$$j = 1, 2, \cdots, k-1 \tag{5.2.16}$$

由 $L_k u_k = e_k^{(k)}$ 得

$$\sum_{j=1}^{k} l_{kj} u_k(j) = 1$$

将式(5.2.16)代入上式解得

$$u_k(k) = \frac{1}{l_{kk} + \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{l_{kj} w_{k-1}(j)}{\alpha_k - \alpha_j} \right) \nu_{k-1} - \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{l_{kj} z_{k-1}(j)}{\alpha_k - \alpha_j} \right) \mu_{k-1}} \tag{5.2.17}$$

结合式(5.2.15)~(5.2.17)得

算法 2 (求解对称 Loewner 型线性方程组 $Lx = f$)

$u_1(1) = 1/l_{11}$

$w_1(1) = p(1)/l_{11}$, $z_1(1) = q(1)/l_{11}$

$$x_1(1) = f(1)/l_{11}$$

对 $k = 2,3,\cdots,n$

$$\mu_{k-1} = p(k) - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj} w_{k-1}(j)$$

$$\nu_{k-1} = q(k) - \sum_{j=1}^{k-1} l_{jk} z_{k-1}(j)$$

$$\sigma_{k-1} = f(k) - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj} x_{k-1}(j)$$

$$\omega_{k-1} = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{l_{kj} w_{k-1}(j)}{\alpha_k - \alpha_j}, \quad \rho_{k-1} = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{l_{kj} z_{k-1}(j)}{\alpha_k - \alpha_j}$$

$$u_k(k) = (l_{kk} + \omega_{k-1}\nu_{k-1} - \rho_{k-1}\mu_{k-1})^{-1}$$

$$u_k(j) = \frac{u_k(k)}{\alpha_k - \alpha_j}[\nu_{k-1} w_{k-1}(j) - \mu_{k-1} z_{k-1}(j)]$$

$$j = 1,2,\cdots,k-1$$

$$\boldsymbol{w}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_{k-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_{k-1}\boldsymbol{u}_k, \quad \boldsymbol{z}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_{k-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \nu_{k-1}\boldsymbol{u}_k$$

$$\boldsymbol{x}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{k-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \sigma_{k-1}\boldsymbol{u}_k$$

该算法需 $6n^2 - 2n - 4$ 次乘除运算，$5n^2 - 3n - 2$ 次加减运算.

§5.3　Cauchy 型及对称 Loewner 型矩阵的三角分解

本节假定满足式(5.1.4)和(5.1.6)的 Cauchy 型矩阵 $\boldsymbol{C}$ 及对称 Loewner 型矩阵 $\boldsymbol{L}$ 的各阶顺序主子阵均非奇异，从而相应的三角分解总是存在的.

对矩阵 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 应用定理 1.4.1，有

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{C} = [\boldsymbol{l}_1 \cdots \boldsymbol{l}_n]\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)[\boldsymbol{u}_1 \cdots \boldsymbol{u}_n]^{\mathrm{T}} \\ (\text{或 } \boldsymbol{L} = [\boldsymbol{l}_1 \cdots \boldsymbol{l}_n]\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)[\boldsymbol{l}_1 \cdots \boldsymbol{l}_n]^{\mathrm{T}}\ ) \end{array}\right\} \quad (5.3.1)$$

其中 $\boldsymbol{l}_i=(0,\cdots,0,l_i(i),\cdots,l_i(n))^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{u}_i=(0,\cdots,0,u_i(i),\cdots,u_i(n))^{\mathrm{T}}$ 满足

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{l}_i=\boldsymbol{C}^{(i-1)}\boldsymbol{e}_i,\quad \boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{C}^{(i-1)\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_i\\ (\text{或 } \boldsymbol{l}_i=\boldsymbol{L}^{(i-1)}\boldsymbol{e}_i),\quad d_i=\dfrac{1}{l_i(i)}=\dfrac{1}{u_i(i)}\end{array}\right\}\tag{5.3.2}$$

而

$$\boldsymbol{C}^{(0)}=\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{C},\quad \boldsymbol{C}^{(i)}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}_i\end{bmatrix},\quad i=1,2,\cdots,n$$

$$\left(\text{或 } \boldsymbol{L}^{(0)}=\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{L},\quad \boldsymbol{L}^{(i)}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}_i\end{bmatrix},\quad i=1,2,\cdots,n\right)\tag{5.3.3}$$

满足

$$\boldsymbol{C}^{(i-1)}=\boldsymbol{l}_id_i\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{C}^{(i)}(\text{或 } \boldsymbol{L}^{(i-1)}=\boldsymbol{l}_id_i\boldsymbol{l}_i^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{L}^{(i)})\tag{5.3.4}$$

其中 $\boldsymbol{B}_i$ 是 $n-i$ 阶方阵.

以下利用 Cauchy 型及对称 Loewner 型矩阵的特殊结构导出 $\boldsymbol{l}_i$ 与 $\boldsymbol{u}_i$ 的递推算法. 这样由式(5.3.1)即可得 $\boldsymbol{C}$(或 $\boldsymbol{L}$)的三角分解. 记

$$\left.\begin{array}{l}\Delta\boldsymbol{C}^{(i)}=\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{C}^{(i)}-\boldsymbol{C}^{(i)}\boldsymbol{D}_2\\ (\text{或 } \Delta\boldsymbol{L}^{(i)}=\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{L}^{(i)}-\boldsymbol{L}^{(i)}\boldsymbol{D}_1)\end{array}\right\},\quad i=0,1,\cdots,n-1\tag{5.3.5}$$

其中　$\boldsymbol{D}_1=\mathrm{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，　$\boldsymbol{D}_2=\mathrm{diag}(\beta_1,\cdots,\beta_n)$

由定理 1.4.2，知

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{rank}(\Delta\boldsymbol{C}^{(i)})\leqslant\mathrm{rank}(\Delta\boldsymbol{C}^{(i-1)})\\ (\text{或 } \mathrm{rank}(\Delta\boldsymbol{L}^{(i)})\leqslant\mathrm{rank}(\Delta\boldsymbol{L}^{(i-1)})\ )\end{array}\right.,\quad i=1,2,\cdots,n$$

对于 Cauchy 型矩阵 $\boldsymbol{C}$，由式(1.4)知 $\mathrm{rank}(\Delta\boldsymbol{C}^{(0)})\leqslant 1$，于是 $\mathrm{rank}(\Delta\boldsymbol{C}^{(i)})\leqslant 1\quad(i=0,1,\cdots,n-1)$. 故存在 n 维列向量

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{x}_{i-1}=(0,\cdots,0,x_{i-1}(i),\cdots,x_{i-1}(n))^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{y}_{i-1}=(0,\cdots,0,y_{i-1}(i),\cdots,y_{i-1}(n))^{\mathrm{T}}\end{array}\right\}\tag{5.3.6}$$

使得

$$\Delta C^{(i-1)} = \boldsymbol{x}_{i-1}\boldsymbol{y}_{i-1}^{\mathrm{T}}, \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{5.3.7}$$

式(5.3.7)及其转置分别右乘 $\boldsymbol{e}_i$，并利用式(5.3.5)和(5.3.2)得

$$\boldsymbol{x}_{i-1}y_{i-1}(i) = \Delta \boldsymbol{C}^{(i-1)}\boldsymbol{e}_i = (\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{C}^{(i-1)} - \boldsymbol{C}^{(i-1)}\boldsymbol{D}_2)\boldsymbol{e}_i = (\boldsymbol{D}_1 - \beta_i\boldsymbol{I})\boldsymbol{l}_i$$

$$\boldsymbol{y}_{i-1}x_{i-1}(i) = (\Delta \boldsymbol{C}^{(i-1)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_i = (\boldsymbol{C}^{(i-1)\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{C}^{(i-1)\mathrm{T}})\boldsymbol{e}_i = (\alpha_i\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}_2)\boldsymbol{u}_i$$

从而

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{l}_i &= y_{i-1}(i)(\boldsymbol{D}_1 - \beta_i\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{x}_{i-1} \\ \boldsymbol{u}_i &= x_{i-1}(i)(\alpha_i\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}_2)^{-1}\boldsymbol{y}_{i-1} \end{aligned}\right\} \tag{5.3.8}$$

又由式(5.3.4)和(5.3.5)，有

$$\begin{aligned}\Delta \boldsymbol{C}^{(i-1)} &= \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{C}^{(i-1)} - \boldsymbol{C}^{(i-1)}\boldsymbol{D}_2 = \\ &\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{C}^{(i)} + \boldsymbol{l}_i d_i \boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}) - (\boldsymbol{C}^{(i)} + \boldsymbol{l}_i d_i \boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}})\boldsymbol{D}_2 = \\ &\Delta \boldsymbol{C}^{(i)} + \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{l}_i d_i \boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{l}_i d_i \boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2\end{aligned}$$

结合式(5.3.7)，有

$$\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{y}_i^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{x}_{i-1}\boldsymbol{y}_{i-1}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{l}_i d_i \boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{l}_i d_i \boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2 \tag{5.3.9}$$

式(5.3.9)及其转置分别右乘 $\boldsymbol{e}_{i+1}$ 得

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{x}_i y_i(i+1) = \\ &\quad \boldsymbol{x}_{i-1}y_{i-1}(i+1) - d_i u_i(i+1)(\boldsymbol{D}_1 - \beta_{i+1}\boldsymbol{I})\boldsymbol{l}_i \\ &\boldsymbol{y}_i x_i(i+1) = \\ &\quad \boldsymbol{y}_{i-1}x_{i-1}(i+1) - d_i l_i(i+1)(\alpha_{i+1}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}_2)\boldsymbol{u}_i \end{aligned}\right\} \tag{5.3.10}$$

综合式(5.3.8)和(5.3.10)得 Cauchy 型矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的快速三角分解算法.

算法 1 （求 Cauchy 型矩阵的三角分解）

$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{p}$ ， $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{q}$

对 $i = 1,2,\cdots,n$

$$l_i(k) = \frac{y_{i-1}(i)x_{i-1}(k)}{\alpha_k - \beta_i}$$

$$u_i(k) = \frac{x_{i-1}(i)y_{i-1}(k)}{\alpha_i - \beta_k}, \quad k = i,\cdots,n$$

$$d_i = \frac{1}{l_i(i)} = \frac{1}{u_i(i)}$$

$$x_i(k) = x_{i-1}(k)y_{i-1}(i+1) - d_iu_i(i+1)(\alpha_k - \beta_{i+1})l_i(k)$$
$$k = i+1,\cdots,n$$

$$y_i(i+1) = 1$$

$$y_i(k) = \frac{1}{x_i(i+1)}[y_{i-1}(k)x_{i-1}(i+1) - d_il_i(i+1)(\alpha_{i+1} - \beta_k)u_i(k)]$$
$$k = i+2,\cdots,n$$

最后由式(5.3.1)得 C 的三角分解.

算法 1 需 $\frac{13}{2}n(n+1)$ 次乘除运算，$n(3n-4)$ 次加减运算.

对于对称 Loewner 型矩阵 $\boldsymbol{L}$，由式(5.1.6)知 $\text{rank}(\Delta \boldsymbol{L}^{(0)}) \leqslant 2$. 于是

$$\text{rank}(\Delta \boldsymbol{L}^{(i)}) \leqslant 2, \quad i = 0,1,\cdots,n-1$$

注意到 $\Delta \boldsymbol{L}^{(i)}$ 是反对称矩阵，故存在 n 维列向量 $\boldsymbol{x}_{i-1}$ 和 $\boldsymbol{y}_{i-1}$ 如同式(5.3.6)，使得

$$\Delta \boldsymbol{L}^{(i-1)} = \boldsymbol{x}_{i-1}\boldsymbol{y}_{i-1}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{y}_{i-1}\boldsymbol{x}_{i-1}^{\mathrm{T}}, \quad i = 1,2,\cdots,n \qquad (5.3.11)$$

式(5.3.11)右乘 $\boldsymbol{e}_i$，并利用式(5.3.5)和(5.3.2)，得

$$(\boldsymbol{D}_1 - \alpha_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{l}_i = \boldsymbol{x}_{i-1}y_{i-1}(i) - \boldsymbol{y}_{i-1}x_{i-1}(i) \qquad (5.3.12)$$

又由式(5.3.4)，(5.3.5)，(5.3.11)和(5.3.12)，有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{y}_i^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{y}_i\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}} = \Delta \boldsymbol{L}^{(i)} = \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{L}^{(i)} - \boldsymbol{L}^{(i)}\boldsymbol{D}_1 = \\
\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{L}^{(i-1)} - \boldsymbol{l}_id_i\boldsymbol{l}_i^{\mathrm{T}}) - (\boldsymbol{L}^{(i-1)} - \boldsymbol{l}_id_i\boldsymbol{l}_i^{\mathrm{T}})\boldsymbol{D}_1 = \\
\Delta \boldsymbol{L}^{(i-1)} - \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{l}_id_i\boldsymbol{l}_i^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{l}_id_i\boldsymbol{l}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_1 = \\
\boldsymbol{x}_{i-1}\boldsymbol{y}_{i-1}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{y}_{i-1}\boldsymbol{x}_{i-1}^{\mathrm{T}} - d_iy_{i-1}(i)\boldsymbol{x}_{i-1}\boldsymbol{l}_i^{\mathrm{T}} + \\
d_ix_{i-1}(i)\boldsymbol{y}_{i-1}\boldsymbol{l}_i^{\mathrm{T}} + d_iy_{i-1}(i)\boldsymbol{l}_i\boldsymbol{x}_{i-1}^{\mathrm{T}} - d_ix_{i-1}(i)\boldsymbol{l}_i\boldsymbol{y}_{i-1}^{\mathrm{T}}
\end{aligned}$$

于是可取

$$\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_{i-1} - d_i x_{i-1}(i)\boldsymbol{l}_i, \quad \boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{y}_{i-1} - d_i y_{i-1}(i)\boldsymbol{l}_i \tag{5.3.13}$$

比较式(5.3.1)的对角元素，有

$$l_{ii} = \sum_{j=1}^{i} d_j l_j^2(i), \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{5.3.14}$$

综合式(5.3.12)～(5.3.14)，得对称 Loewner 型矩阵 $\boldsymbol{L}$ 的快速三角分解算法.

算法 2 （求对称 Loewner 型矩阵的三角分解）

$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{q}$

对 $i = 1,2,\cdots,n$

$$l_i(i) = l_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} d_j l_j^2(i)$$

$$l_i(k) = \frac{y_{i-1}(i)x_{i-1}(k) - x_{i-1}(i)y_{i-1}(k)}{\alpha_k - \alpha_i}, \quad k = i+1,\cdots,n$$

$$d_i = \frac{1}{l_i(i)}$$

$$x_i(k) = x_{i-1}(k) - d_i x_{i-1}(i) l_i(k), \quad k = i+1,\cdots,n$$

$$y_i(k) = y_{i-1}(k) - d_i y_{i-1}(i) l_i(k), \quad k = i+1,\cdots,n$$

最后由式(5.3.1)得 $\boldsymbol{L}$ 的三角分解.

算法 2 需 $n(5n-1)$ 次乘除运算，$\frac{5}{2}n(n-1)$ 次加减运算.

以下推导 Cauchy 型矩阵 $\boldsymbol{C}$ 及对称 Loewner 型矩阵 $\boldsymbol{L}$ 之逆矩阵的三角分解算法.

构造 $2n$ 阶矩阵

$$\boldsymbol{M}_C = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \quad \left(或\ \boldsymbol{M}_L = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \right)$$

对矩阵 $\boldsymbol{M}_C$ 和 $\boldsymbol{M}_L$ 应用定理 1.4.1，但只进行 n 步，得部分三角分解

$$M_C = [\tilde{l}_1 \quad \cdots \quad \tilde{l}_n]\mathrm{diag}(\tilde{d}_1,\cdots,\tilde{d}_n)[\tilde{u}_1 \quad \cdots \quad \tilde{u}_n]^{\mathrm{T}} + \begin{bmatrix} O & O \\ O & \tilde{B}_n \end{bmatrix}$$

$$M_L = [\tilde{l}_1 \quad \cdots \quad \tilde{l}_n]\mathrm{diag}(\tilde{d}_1 \cdots \tilde{d}_n)[\tilde{l}_1 \quad \cdots \quad \tilde{l}_n]^{\mathrm{T}} + \begin{bmatrix} O & O \\ O & \tilde{B}_n \end{bmatrix}$$

(5.3.15)

其中 $\tilde{B}_n$ 是 n 阶方阵，$\tilde{l}_i$ 和 $\tilde{u}_i$ 是 $2n$ 维列向量，且满足

$$\tilde{l}_i = M_C^{(i-1)}e_i^{(2n)}, \quad \tilde{u}_i = M_C^{(i-1)\mathrm{T}}e_i^{(2n)}$$

$$(\text{或 } \tilde{l}_i = M_L^{(i-1)}e_i^{(2n)}), \quad \tilde{d}_i = \frac{1}{\tilde{l}_i(i)} = \frac{1}{\tilde{u}_i(i)}$$

而

$$M_C^{(i-1)} = \tilde{l}_i\tilde{d}_i\tilde{u}_i^{\mathrm{T}} + M_C^{(i)} \quad (\text{或 } M_L^{(i-1)} = \tilde{l}_i\tilde{d}_i\tilde{l}_i^{\mathrm{T}} + M_L^{(i)})$$

这里

$$M^{(0)} = \tilde{B}_0 = M, \quad M^{(i)} = \begin{bmatrix} O & O \\ O & \tilde{B}_i \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

$\tilde{B}_i$ 是 $2n-i$ 阶方阵. 令

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ U_1 \end{bmatrix} = [\tilde{l}_1 \quad \cdots \quad \tilde{l}_n], \quad \begin{bmatrix} L_2 \\ U_2 \end{bmatrix} = [\tilde{u}_1 \quad \cdots \quad \tilde{u}_n]$$

$$\tilde{D} = \mathrm{diag}(\tilde{d}_1,\cdots,\tilde{d}_n)$$

代入式(5.3.15)并比较两边元素，得

$$C = L_1\tilde{D}L_2^{\mathrm{T}}, \quad L_1\tilde{D}U_2^{\mathrm{T}} = U_1\tilde{D}L_2^{\mathrm{T}} = I$$

$$(\text{或 } L = L_1\tilde{D}L_1^{\mathrm{T}}, \quad L_1\tilde{D}U_1^{\mathrm{T}} = I)$$

从而有

$$C^{-1} = U_1\tilde{D}U_2^{\mathrm{T}} \quad (\text{或 } L^{-1} = U_1\tilde{D}U_1^{\mathrm{T}}) \qquad (5.3.16)$$

注意到 M_C 和 M_L 是带状矩阵，于是 $2n$ 维列向量 $\tilde{l}_i,\tilde{u}_i$ 具有如下形式：

$$\tilde{l}_i = (0,\cdots,0,\tilde{l}_i(i),\cdots,\tilde{l}_i(n+i),0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

$$\tilde{u}_i = (0,\cdots,0,\tilde{u}_i(i),\cdots,\tilde{u}_i(n+i),0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

即 $\boldsymbol{U}_1$ 和 $\boldsymbol{U}_2$ 是上三角矩阵，故式(5.3.16)是 $\boldsymbol{C}^{-1}$（或 $\boldsymbol{L}^{-1}$）的一种三角分解. 易验证

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{M}_C - \boldsymbol{M}_C \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_2 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{D}_2 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} \\ 0 \end{bmatrix} [\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} \quad 0] \tag{5.3.17}$$

或

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}_1 \end{bmatrix} \boldsymbol{M}_L - \boldsymbol{M}_L \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} \\ 0 \end{bmatrix} [\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} \quad 0] - \begin{bmatrix} \boldsymbol{q} \\ 0 \end{bmatrix} [\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}} \quad 0]$$

其中 $\boldsymbol{D}_1 = \mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ ，$\boldsymbol{D}_2 = \mathrm{diag}(\beta_1, \cdots, \beta_n)$. 记

$$\widetilde{\Delta}\boldsymbol{M}_C^{(i)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{M}_C^{(i)} - \boldsymbol{M}_C^{(i)} \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_2 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}_1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\text{或 } \widetilde{\Delta}\boldsymbol{M}_L^{(i)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}_1 \end{bmatrix} \boldsymbol{M}_L^{(i)} - \boldsymbol{M}_L^{(i)} \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}_1 \end{bmatrix}\right)$$

由式(5.3.17)知 $\mathrm{rank}(\widetilde{\Delta}\boldsymbol{M}_C^{(0)}) \leqslant 1$（或 $\mathrm{rank}(\widetilde{\Delta}\boldsymbol{M}_L^{(0)}) \leqslant 2$）. 从而根据定理 1.4.2，有

$$\mathrm{rank}(\widetilde{\Delta}\boldsymbol{M}_C^{(i)}) \leqslant \mathrm{rank}(\widetilde{\Delta}\boldsymbol{M}_C^{(i-1)}) \leqslant 1$$

$$\left(\text{或 } \mathrm{rank}(\widetilde{\Delta}\boldsymbol{M}_L^{(i)}) \leqslant \mathrm{rank}(\widetilde{\Delta}\boldsymbol{M}_L^{(i-1)}) \leqslant 2\right)$$

故存在 $2n$ 维列向量

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}_{i-1} = (0, \cdots, 0, \widetilde{x}_{i-1}(i), \cdots, \widetilde{x}_{i-1}(n+i-1), 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$$

$$\left(\text{或 } \widetilde{\boldsymbol{y}}_{i-1} = (0, \cdots, 0, \widetilde{y}_{i-1}(i), \cdots, \widetilde{y}_{i-1}(n+i-1), 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}\right)$$

使得

$$\begin{cases} \widetilde{\Delta}\boldsymbol{M}_C^{(i-1)} = \widetilde{\boldsymbol{x}}_{i-1}\widetilde{\boldsymbol{y}}_{i-1}^{\mathrm{T}} \\ \widetilde{\Delta}\boldsymbol{M}_L^{(i-1)} = \widetilde{\boldsymbol{x}}_{i-1}\widetilde{\boldsymbol{y}}_{i-1}^{\mathrm{T}} - \widetilde{\boldsymbol{y}}_{i-1}\widetilde{\boldsymbol{x}}_{i-1}^{\mathrm{T}} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

(注意 $M_L^{(i-1)}$ 是对称的,从而 $\widetilde{\Delta} M_L^{(i-1)}$ 是反对称的.)仿式(5.3.8)和(5.3.10)的推导,有

$$\begin{cases} \widetilde{\boldsymbol{x}}_{i-1}\widetilde{y}_{i-1}(i) = \widetilde{\Delta} \boldsymbol{M}_C^{(i-1)}\boldsymbol{e}_i^{(2n)} = \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}_2 \end{bmatrix} - \beta_i \boldsymbol{I}_{2n}\right)\widetilde{\boldsymbol{l}}_i \\ \widetilde{\boldsymbol{y}}_{i-1}\widetilde{x}_{i-1}(i) = (\widetilde{\Delta} \boldsymbol{M}_C^{(i-1)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_i^{(2n)} = \left(\alpha_i \boldsymbol{I}_{2n} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_2 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}_1 \end{bmatrix}\right)\widetilde{\boldsymbol{u}}_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widetilde{\boldsymbol{x}}_i\widetilde{y}_i(i+1) = \widetilde{\boldsymbol{x}}_{i-1}\widetilde{y}_{i-1}(i+1) - \\ \qquad\qquad \widetilde{d}_i\widetilde{u}_i(i+1)\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}_2 \end{bmatrix} - \beta_{i+1}\boldsymbol{I}_{2n}\right)\widetilde{\boldsymbol{l}}_i \\ \widetilde{\boldsymbol{y}}_i\widetilde{x}_i(i+1) = \widetilde{\boldsymbol{y}}_{i-1}\widetilde{x}_{i-1}(i+1) - \\ \qquad\qquad \widetilde{d}_i\widetilde{l}_i(i+1)\left(\alpha_{i+1}\boldsymbol{I}_{2n} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_2 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}_1 \end{bmatrix}\right)\widetilde{\boldsymbol{u}}_i \end{cases}$$

于是得到求 Cauchy 型矩阵 C 之逆矩阵的快速三角分解算法.

算法 3 (求 Cauchy 型矩阵之逆矩阵的三角分解)

$\widetilde{x}_0(k) = p(k)$, $\widetilde{y}_0(k) = q(k)$, $k = 1,2,\cdots,n$

对 $i = 1,2,\cdots,n$

$$\widetilde{l}_i(k) = \frac{\widetilde{y}_{i-1}(i)\widetilde{x}_{i-1}(k)}{\alpha_k - \beta_i}$$

$$\widetilde{u}_i(k) = \frac{\widetilde{x}_{i-1}(i)\widetilde{y}_{i-1}(k)}{\alpha_i - \beta_k}, \quad k = i,\cdots,n$$

$$\widetilde{l}_i(k) = \frac{\widetilde{y}_{i-1}(i)\widetilde{x}_{i-1}(k)}{\beta_{k-n} - \beta_i}$$

$$\widetilde{u}_i(k) = \frac{\widetilde{x}_{i-1}(i)\widetilde{y}_{i-1}(k)}{\alpha_i - \alpha_{k-n}}, \quad k = n+1,\cdots,n+i-1$$

$$\widetilde{l}_i(n+i) = \widetilde{u}_i(n+i) = 1$$

$$\widetilde{d}_i = \frac{1}{\widetilde{l}_i(i)} = \frac{1}{\widetilde{u}_i(i)}$$

$$\widetilde{x}_i(k) = \widetilde{x}_{i-1}(k)\widetilde{y}_{i-1}(i+1) - \\ \qquad \widetilde{d}_i\widetilde{u}_i(i+1)(\alpha_k - \beta_{i+1})\widetilde{l}_i(k)$$

$$k = i+1,\cdots,n$$

$$\tilde{x}_i(k) = \tilde{x}_{i-1}(k)\tilde{y}_{i-1}(i+1) - \tilde{d}_i\tilde{u}_i(i+1)(\beta_{k-n} - \beta_{i+1})\tilde{l}_i(k)$$

$$k = n+1,\cdots,n+i-1$$

$$\tilde{x}_i(n+i) = -\tilde{d}_i\tilde{u}_i(i+1)(\beta_i - \beta_{i+1})$$

$$\tilde{y}_i(i+1) = 1$$

$$\tilde{y}_i(k) = \frac{1}{\tilde{x}_i(i+1)}[\tilde{x}_{i-1}(i+1)\tilde{y}_{i-1}(k) - \tilde{d}_i\tilde{l}_i(i+1)(\alpha_{i+1} - \beta_k)\tilde{u}_i(k)]$$

$$k = i+2,\cdots,n$$

$$\tilde{y}_i(k) = \frac{1}{\tilde{x}_i(i+1)}[\tilde{x}_{i-1}(i+1)\tilde{y}_{i-1}(k) - \tilde{d}_i\tilde{l}_i(i+1)(\alpha_{i+1} - \alpha_{k-n})\tilde{u}_i(k)]$$

$$k = n+1,\cdots,n+i-1$$

$$\tilde{y}_i(n+i) = -\frac{1}{\tilde{x}_i(i+1)}\tilde{d}_i\tilde{l}_i(i+1)(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$$

最后得到

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \tilde{l}_2(n+1) & \cdots & \tilde{l}_n(n+1) \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \tilde{l}_n(2n-1) \\ & & & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{d}_1 & & & \\ & \tilde{d}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{d}_n \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ \tilde{u}_2(n+1) & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \tilde{u}_n(n+1) & \cdots & \tilde{u}_n(2n-1) & 1 \end{bmatrix}$$

算法 3 需 $13n^2-14n$ 次乘除运算，$6n^2-5n$ 次加减运算.

同样，仿式(5.3.12)～(5.3.14)的推导，有

$$\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}_1 \end{bmatrix} - \alpha_i \boldsymbol{I}_{2n}\right)\tilde{\boldsymbol{l}}_i = \tilde{y}_{i-1}(i)\tilde{\boldsymbol{x}}_{i-1} - \tilde{x}_{i-1}(i)\tilde{\boldsymbol{y}}_{i-1}$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_i = \tilde{\boldsymbol{x}}_{i-1} - \tilde{d}_i\tilde{x}_{i-1}(i)\tilde{\boldsymbol{l}}_i,\quad \tilde{\boldsymbol{y}}_i = \tilde{\boldsymbol{y}}_{i-1} - \tilde{d}_i\tilde{y}_{i-1}(i)\tilde{\boldsymbol{l}}_i$$

$$l_{ii} = \sum_{j=1}^{i}\tilde{d}_j\tilde{l}_j^2(i)$$

于是得到求对称 Loewner 型矩阵 $\boldsymbol{L}$ 之逆矩阵的快速三角分解算法.

算法 4 （求对称 Loewner 型矩阵之逆矩阵的三角分解）

$$\tilde{x}_0(k) = p(k),\quad \tilde{y}_0(k) = q(k),\quad k = 1,2,\cdots,n$$

对 $i = 1,2,\cdots,n$

$$\tilde{l}_i(i) = l_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1}\tilde{d}_j\tilde{l}_j^2(i)$$

$$\tilde{l}_i(k) = \frac{\tilde{x}_{i-1}(k)\tilde{y}_{i-1}(i) - \tilde{x}_{i-1}(i)\tilde{y}_{i-1}(k)}{\alpha_k - \alpha_i}$$

$$k = i+1,\cdots,n$$

$$\tilde{l}_i(k) = \frac{\tilde{x}_{i-1}(k)\tilde{y}_{i-1}(i) - \tilde{x}_{i-1}(i)\tilde{y}_{i-1}(k)}{\alpha_{k-n} - \alpha_i}$$

$$k = n+1,\cdots,n+i-1$$

$$\tilde{l}_i(n+i) = 1$$

$$\tilde{d}_i = \frac{1}{\tilde{l}_i(i)}$$

$$\tilde{x}_i(k) = \tilde{x}_{i-1}(k) - \tilde{d}_i\tilde{x}_{i-1}(i)\tilde{l}_i(k)$$

$$\tilde{y}_i(k) = \tilde{y}_{i-1}(k) - \tilde{d}_i\tilde{y}_{i-1}(i)\tilde{l}_i(k)$$

$$k = i+1,\cdots,n+i-1$$

$$\tilde{x}_i(n+i) = -\tilde{d}_i\tilde{x}_{i-1}(i)$$

$$\tilde{y}_i(n+i) = -\tilde{d}_i\tilde{y}_{i-1}(i)$$

最后得到

$$L^{-1}=\begin{bmatrix}1 & \tilde{l}_2(n+1) & \cdots & \tilde{l}_n(n+1)\\ & 1 & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & \tilde{l}_n(2n-1)\\ & & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{d}_1 & & & \\ & \tilde{d}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{d}_n\end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix}1 & & & \\ \tilde{l}_2(n+1) & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \tilde{l}_n(n+1) & \cdots & \tilde{l}_n(2n-1) & 1\end{bmatrix}$$

算法 4 需 $3n(2n-1)$ 次乘除运算，$\frac{9}{2}n(n-1)$ 次加减运算.

§5.4 Loewner 矩阵与 Hankel 矩阵的关系

首先引入一些记号. 设 α_i,β_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 是给定的两组数，记

$$f(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-\alpha_k)$$

$$g(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-\beta_k)$$

$$f_i(x)=\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(x-\alpha_k)=$$

$$w_{i1}+w_{i2}x+\cdots+w_{in}x^{n-1}\tag{5.4.1}$$

$$g_i(x)=\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(x-\beta_k)=$$

$$\tilde{w}_{i1}+\tilde{w}_{i2}x+\cdots+\tilde{w}_{in}x^{n-1}$$

$$i=1,2,\cdots,n$$

又记

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{W}_f=\begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n1} & \cdots & w_{nn}\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{W}_g=\begin{bmatrix} \tilde{w}_{11} & \cdots & \tilde{w}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{w}_{n1} & \cdots & \tilde{w}_{nn}\end{bmatrix} \\
&\boldsymbol{V}_\alpha=\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1}\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{V}_\beta=\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \beta_1 & \cdots & \beta_n \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_1^{n-1} & \cdots & \beta_n^{n-1}\end{bmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{5.4.2}$$

其中 $\boldsymbol{V}_\alpha$ 和 $\boldsymbol{V}_\beta$ 是范德蒙矩阵.

引理 5.4.1 引入记号同上,则

$$\boldsymbol{W}_f\boldsymbol{V}_\alpha = \operatorname{diag}(f_1(\alpha_1),\cdots,f_n(\alpha_n))$$
$$\boldsymbol{W}_g\boldsymbol{V}_\beta = \operatorname{diag}(g_1(\beta_1),\cdots,g_n(\beta_n))$$

证明 注意到 $f_i(\alpha_j)=0\ (i\neq j)$,于是

$$\boldsymbol{W}_f\boldsymbol{V}_\alpha=(f_i(\alpha_j))_{i,j=1}^n=\operatorname{diag}(f_1(\alpha_1),\cdots,f_n(\alpha_n))$$

同理可证另一式. 证毕

引理 5.4.2 设 $\alpha_i\neq\beta_j\ (i,j=1,\cdots,n)$,对于 n 阶 Cauchy 矩阵 $\boldsymbol{C}=\left(\dfrac{1}{\alpha_i-\beta_j}\right)_{i,j=1}^n$ 有

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{W}_g\boldsymbol{V}_\alpha\operatorname{diag}(1/g(\alpha_1),\cdots,1/g(\alpha_n))$$
$$\boldsymbol{C}=-\boldsymbol{W}_f\boldsymbol{V}_\beta\operatorname{diag}(1/f(\beta_1),\cdots,1/f(\beta_n))$$

证明 直接验证得

$$\boldsymbol{W}_g\boldsymbol{V}_\alpha\operatorname{diag}(1/g(\alpha_1),\cdots,1/g(\alpha_n))=$$

$$\begin{bmatrix} g_1(\alpha_1) & \cdots & g_1(\alpha_n) \\ \vdots & & \vdots \\ g_n(\alpha_1) & \cdots & g_n(\alpha_n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/g(\alpha_1) & & \\ & \ddots & \\ & & 1/g(\alpha_n)\end{bmatrix}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$$

同理可证另一等式. 证毕

定义 5.4.1 设 n 次多项式

$$p(x)=p_0+p_1x+\cdots+p_nx^n,\quad p_n\neq 0$$

称 n 阶方阵

$$M_p = \begin{bmatrix} 0 & p_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_n \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \cdots & -p_{n-1} \end{bmatrix}$$

为 $p(x)$ 的**相伴矩阵**. 又设 $H = (\eta_{i+j-1})_{i,j=1}^n$ 为 n 阶 Hankel 矩阵，若

$$\begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_{n+1} \\ \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \eta_{n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \eta_{n-1} & \eta_n & \cdots & \eta_{2n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

则称矩阵 H 与多项式 $p(x)$ **兼容**.

显然，与 H 兼容的任意两个多项式的线性组合仍与 H 兼容.

引理 5.4.3 设 $p(x)$ 的最高次项系数 $p_n \neq 0$，其 n 个根为 γ_k $(k = 1,2,\cdots,n)$，而 M_p 是 $p(x)$ 的相伴矩阵，则

1) $M_p V_\gamma = p_n V_\gamma \mathrm{diag}(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$；

2) $HM_p^{\mathrm{T}} = M_p H$ 的充要条件是，H 是与 $p(x)$ 兼容的 Hankel 矩阵.

证明 利用 $-p_0 - p_1\gamma_k - \cdots - p_{n-1}\gamma_k^{n-1} = p_n\gamma_k^n$ $(k = 1,2,\cdots,n)$，易得 1).

若 Hankel 矩阵 H 与 $p(x)$ 兼容，则

$$\eta_k p_0 + \eta_{k+1}p_1 + \cdots + \eta_{n+k}p_n = 0, \quad k = 1,2,\cdots,n-1$$

于是

$$HM_p^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \eta_2 p_n & \cdots & \eta_n p_n & \eta_{n+1}p_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \eta_n p_n & \cdots & \eta_{2n-2}p_n & \eta_{2n-1}p_n \\ \eta_{n+1}p_n & \cdots & \eta_{2n-1}p_n & -\eta_n p_0 - \cdots - \eta_{2n-1}p_{n-1} \end{bmatrix} =$$

M_pH

反之，设 $H = (h_{ij})_{i,j=1}^{n}$ 满足 $HM_p^{\mathrm{T}} = M_pH$，比较两边的元素可得 $h_{12} = h_{21}$，$h_{13} = h_{22} = h_{31}$，…，$h_{1n} = h_{2,n-1} = \cdots = h_{n1}$，…，即 H 是 Hankel 阵，且它与 $p(x)$ 兼容. 证毕

引理 5.4.4 设 H 是 n 阶 Hankel 矩阵，$h_1(x)$ 和 $h_2(x)$ 是互质多项式，其最高次项至少有一个为 n 次，且它们均与 H 兼容. 又设多项式 $p(x) = k_1h_1(x) + k_2h_2(x)$ 的 n 个根 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 两两互异，而多项式 $q(x) = l_1h_1(x) + l_2h_2(x)$ 满足 $k_1l_2 - k_2l_1 \neq 0$，则

$$H = V_\gamma DV_\gamma^{\mathrm{T}}$$

其中 $D = \mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)$，而 $d_i = \left[q(\gamma_i)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(\gamma_i - \gamma_k)\right]^{-1}$.

证明 由于 $p(x)$ 与 H 兼容，利用引理 5.4.3 有

$$\mathrm{diag}(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)V_\gamma^{-1}HV_\gamma^{-\mathrm{T}} = \frac{1}{p_n}V_\gamma^{-1}M_pHV_\gamma^{-\mathrm{T}} =$$

$$\frac{1}{p_n}V_\gamma^{-1}HM_p^{\mathrm{T}}V_\gamma^{-\mathrm{T}} = \frac{1}{p_n}V_\gamma^{-1}H(V_\gamma^{-1}M_p)^{\mathrm{T}} =$$

$$V_\gamma^{-1}HV_\gamma^{-\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$$

由于对角矩阵 $\mathrm{diag}(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$ 的对角元互异，与之相乘可交换的矩阵只能是对角阵，令

$$V_\gamma^{-1}HV_\gamma^{-\mathrm{T}} = D$$

其中 D 是对角矩阵. 于是 $H = V_\gamma DV_\gamma^{\mathrm{T}}$，比较两边元素得

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{n} d_k\gamma_k^{j-1}, \quad j = 1,2,\cdots,2n-1$$

写成矩阵形式为

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{2n-1}) = (d_1,\cdots,d_n)\begin{bmatrix}1 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_1^{2n-2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \gamma_n & \cdots & \gamma_n^{2n-2}\end{bmatrix} \tag{5.4.3}$$

设 $q(x)=q_0+q_1x+\cdots+q_nx^n$，由假设知 $q(x)$ 与 $p(x)$ 互质，从而 $q(\gamma_i)\neq 0\quad(i=1,2,\cdots,n)$. 又 $q(x)$ 与 $\boldsymbol{H}$ 兼容，从而

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{2n-1})\underbrace{\begin{bmatrix} q_0 & & & \\ \vdots & q_0 & & \\ q_n & \vdots & \ddots & \\ & q_n & & q_0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & q_n \end{bmatrix}}_{(n-1\text{ 列})}=(0,\cdots,0)$$

将式(5.4.3)代入并整理得

$$(d_1,\cdots,d_n)\begin{bmatrix} q(\gamma_1) & \gamma_1 q(\gamma_1) & \cdots & \gamma_1^{n-2}q(\gamma_1) \\ q(\gamma_2) & \gamma_2 q(\gamma_2) & \cdots & \gamma_2^{n-2}q(\gamma_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q(\gamma_n) & \gamma_n q(\gamma_n) & \cdots & \gamma_n^{n-2}q(\gamma_n) \end{bmatrix}=(0,\cdots,0)$$

即 $$(d_1q(\gamma_1),\cdots,d_nq(\gamma_n))\begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_1^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \gamma_n & \cdots & \gamma_n^{n-2} \end{bmatrix}=(0,\cdots,0)$$

也即 $$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_1^{n-2} & \cdots & \gamma_{n-1}^{n-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1q(\gamma_1) \\ d_2q(\gamma_2) \\ \vdots \\ d_{n-1}q(\gamma_{n-1}) \end{bmatrix}=-d_nq(\gamma_n)\begin{bmatrix} 1 \\ \gamma_n \\ \vdots \\ \gamma_n^{n-2} \end{bmatrix}$$

利用 Cramer 法则及范德蒙行列式的有关结果得

$$d_iq(\gamma_i)=\frac{d_nq(\gamma_n)\prod\limits_{k=1}^{n-1}(\gamma_n-\gamma_k)}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(\gamma_i-\gamma_k)},\quad i=1,2,\cdots,n-1$$

取 $d_n = \left[q(\gamma_n)\prod_{k=1}^{n-1}(\gamma_n - \gamma_k)\right]^{-1}$，即得所需结果. 证毕

定理 5.4.1 条件同引理 5.4.4，又设 $f(x)$，$g(x)$，$\boldsymbol{W}_f$，$\boldsymbol{W}_g$ 如同式(5.4.1)和(5.4.2)，且 $\alpha_i \neq \beta_j$ ，$\alpha_i \neq \gamma_j$ ，$\beta_i \neq \gamma_j$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ ，则

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{W}_f \boldsymbol{H} \boldsymbol{W}_g^{\mathrm{T}}$$

其中 $\boldsymbol{L} = \left(\dfrac{\xi_i - \eta_j}{\alpha_i - \beta_j}\right)_{i,j=1}^n$ 是 Loewner 矩阵.

证明 由引理 5.4.4 及引理 5.4.2 有

$\boldsymbol{W}_f \boldsymbol{H} \boldsymbol{W}_g^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{W}_f \boldsymbol{V}_\gamma \boldsymbol{D} \boldsymbol{V}_\gamma^{\mathrm{T}} \boldsymbol{W}_g^{\mathrm{T}} =$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\gamma_1 - \alpha_1} & \cdots & \dfrac{1}{\gamma_n - \alpha_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{\gamma_1 - \alpha_n} & \cdots & \dfrac{1}{\gamma_n - \alpha_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(\gamma_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\gamma_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} g(\gamma_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(\gamma_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\gamma_1 - \beta_1} & \cdots & \dfrac{1}{\gamma_1 - \beta_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{\gamma_n - \beta_1} & \cdots & \dfrac{1}{\gamma_n - \beta_n} \end{bmatrix} =$$

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{f(\gamma_k) d_k g(\gamma_k)}{(\gamma_k - \alpha_i)(\gamma_k - \beta_j)}\right)_{i,j=1}^n =$$

$$\left(\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{f(\gamma_k) d_k g(\gamma_k)}{\gamma_k - \alpha_i} - \sum_{k=1}^n \frac{f(\gamma_k) d_k g(\gamma_k)}{\gamma_k - \beta_j}}{\alpha_i - \beta_j}\right)_{i,j=1}^n = \left(\frac{\xi_i - \eta_j}{\alpha_i - \beta_j}\right)_{i,j=1}^n$$

其中 $\xi_i = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{f(\gamma_k) d_k g(\gamma_k)}{\gamma_k - \alpha_i}$，$\eta_j = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{f(\gamma_k) d_k g(\gamma_k)}{\gamma_k - \beta_j}$.

证毕

以下讨论对称 Loewner 矩阵与 Hankel 矩阵的关系.

定义 5.4.2 设 $\boldsymbol{L} = (l_{ij})_{i,j=1}^n$ 是对称 Loewner 阵(5.1.3)，又

设多项式 $p(x)$ 满足 $p(\alpha_j)\neq 0$ $(j=1,2,\cdots,n)$，并(惟一)表为

$$p(x)=(x-\alpha_n)\sum_{i=1}^{n}\tilde{p}_{i-1}f_i(x)+\tilde{p}_nf_n(x) \qquad (5.4.4)$$

其中 $f_i(x)$ 如式(5.4.1). 若

$$\begin{bmatrix} l_{11} & \frac{\xi_1-\xi_2}{\alpha_1-\alpha_2} & \cdots & \frac{\xi_1-\xi_n}{\alpha_1-\alpha_n} & \frac{\xi_1-\xi_n}{(\alpha_1-\alpha_n)^2}-\frac{l_{nn}}{\alpha_1-\alpha_n} \\ \frac{\xi_2-\xi_1}{\alpha_2-\alpha_1} & l_{22} & \cdots & \frac{\xi_2-\xi_n}{\alpha_2-\alpha_n} & \frac{\xi_2-\xi_n}{(\alpha_2-\alpha_n)^2}-\frac{l_{nn}}{\alpha_2-\alpha_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\xi_{n-1}-\xi_1}{\alpha_{n-1}-\alpha_1} & \frac{\xi_{n-1}-\xi_2}{\alpha_{n-1}-\alpha_2} & \cdots & \frac{\xi_{n-1}-\xi_n}{\alpha_{n-1}-\alpha_n} & \frac{\xi_{n-1}-\xi_n}{(\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2}-\frac{l_{nn}}{\alpha_{n-1}-\alpha_n} \end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{p}_0 \\ \tilde{p}_1 \\ \vdots \\ \tilde{p}_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (5.4.5)$$

则称矩阵 $\boldsymbol{L}$ 与多项式 $p(x)$ 兼容.

引理 5.4.5 对称 Loewner 矩阵 $\boldsymbol{L}$ 与多项式 $p(x)$ 兼容的充要条件是，存在次数不超过 n 的多项式 $q(x)$，使得有理多项式 $r(x)=\dfrac{q(x)}{p(x)}$ 满足

$$r(\alpha_i)=\xi_i,\quad r'(\alpha_i)=l_{ii},\quad i=1,2,\cdots,n \qquad (5.4.6)$$

证明 充分性. 由式(5.4.4)知

$$0\neq p(\alpha_j)=(\alpha_j-\alpha_n)\tilde{p}_{j-1}f_j(\alpha_j),\quad j=1,2,\cdots,n-1$$

$$0\neq p(\alpha_n)=\tilde{p}_nf_n(\alpha_n)$$

于是 $\tilde{p}_j\neq 0$ $(j=0,1,\cdots,n-2,n)$. 设

$$q(x)=(x-\alpha_n)\sum_{i=1}^{n}\tilde{q}_{i-1}f_i(x)+\tilde{q}_nf_n(x)$$

由 $r(\alpha_n)=\dfrac{q(\alpha_n)}{p(\alpha_n)}=\dfrac{\tilde{q}_nf_n(\alpha_n)}{\tilde{p}_nf_n(\alpha_n)}=\xi_n$ 和 $r(\alpha_j)=\dfrac{q(\alpha_j)}{p(\alpha_j)}=\dfrac{(\alpha_j-\alpha_n)\tilde{q}_{j-1}f_j(\alpha_j)}{(\alpha_j-\alpha_n)\tilde{p}_{j-1}f_j(\alpha_j)}=\xi_j$ $(j=1,2,\cdots,n-1)$，得

$$\tilde{q}_j = \tilde{p}_j \xi_{j+1}, \quad j = 0,1,\cdots,n-2, \quad \tilde{q}_n = \tilde{p}_n \xi_n$$

为求出 $\tilde{q}_{n-1}$，将条件 $r'(\alpha_n) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{q(x)}{p(x)}\right)\Big|_{x=\alpha_n} = l_{nn}$ 改写为

$$\frac{q'(\alpha_n)p(\alpha_n) - q(\alpha_n)p'(\alpha_n)}{p^2(\alpha_n)} = l_{nn} \tag{5.4.7}$$

由于

$$p(\alpha_n) = \tilde{p}_n f_n(\alpha_n), \quad q(\alpha_n) = \tilde{q}_n f_n(\alpha_n) = \tilde{p}_n \xi_n f_n(\alpha_n)$$

$$p'(\alpha_n) = \Big[\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_{i-1} f_i(x) + (x - \alpha_n)\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_{i-1} f_i'(x) + \tilde{p}_n f_n'(x)\Big]\Big|_{x=\alpha_n} = \tilde{p}_{n-1} f_n(\alpha_n) + \tilde{p}_n f_n'(\alpha_n)$$

$$q'(\alpha_n) = \tilde{q}_{n-1} f_n(\alpha_n) + \tilde{q}_n f_n'(\alpha_n) = \tilde{q}_{n-1} f_n(\alpha_n) + \xi_n \tilde{p}_n f_n'(\alpha_n)$$

代入式(5.4.7)解得

$$\tilde{q}_{n-1} = \tilde{p}_n l_{nn} + \tilde{p}_{n-1}\xi_n$$

从而有理多项式 $r(x)$ 具有形式

$$r(x) = \frac{(x - \alpha_n)\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_{i-1}\xi_i f_i(x) + \tilde{p}_n[\xi_n + l_{nn}(x - \alpha_n)]f_n(x)}{(x - \alpha_n)\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_{i-1} f_i(x) + \tilde{p}_n f_n(x)} \tag{5.4.8}$$

将式(5.4.8)改写为

$$(x - \alpha_n)\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_{i-1} f_i(x)(r(x) - \xi_i) + \tilde{p}_n f_n(x)[r(x) - \xi_n - l_{nn}(x - \alpha_n)] = 0$$

两边同除以 $(x - \alpha_n)\prod_{k=1}^{n}(x - \alpha_k)$，得

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_{i-1}\frac{r(x) - \xi_i}{x - \alpha_i} + \tilde{p}_n\Big[\frac{r(x) - \xi_n}{(x - \alpha_n)^2} - \frac{l_{nn}}{x - \alpha_n}\Big] = 0 \tag{5.4.9}$$

取 $x = \alpha_j$ $(j = 1,2,\cdots,n-1)$，并注意 $r(\alpha_j) = \xi_j$，$\lim\limits_{x\to\alpha_j}\dfrac{r(x)-\xi_j}{x-\alpha_j} = r'(\alpha_j) = l_{jj}$，得

$$\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\bar{p}_{i-1}\frac{\xi_j-\xi_i}{\alpha_j-\alpha_i}+\bar{p}_{j-1}l_{jj}+\bar{p}_n\left(\frac{\xi_j-\xi_n}{(\alpha_j-\alpha_n)^2}-\frac{l_{nn}}{\alpha_j-\alpha_n}\right)=0$$

$$j = 1,2,\cdots,n-1 \quad (5.4.10)$$

故式(5.4.5)成立，即 $\boldsymbol{L}$ 与 $p(x)$ 兼容.

必要性. 若 $\boldsymbol{L}$ 与 $p(x)$ 兼容，则式(5.4.10)成立. 选取有理多项式(5.4.8)，直接验算知 $r(\alpha_j) = \xi_j$ $(j = 1,2,\cdots,n)$，又经简单计算可得 $r'(\alpha_n) = l_{nn}$. 在式(5.4.9)中取 $x = \alpha_j$ $(j = 1,2,\cdots,n)$，得

$$\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\bar{p}_{i-1}\frac{\xi_j-\xi_i}{\alpha_j-\alpha_i}+\bar{p}_{j-1}r'(\alpha_j)+\bar{p}_n\left(\frac{\xi_j-\xi_n}{(\alpha_j-\alpha_n)^2}-\frac{l_{nn}}{\alpha_j-\alpha_n}\right)=0$$

$$j = 1,2,\cdots,n-1$$

与式(5.4.10)比较得 $r'(\alpha_j) = l_{jj}$ $(j = 1,2,\cdots,n-1)$.　　证毕

引理 5.4.6　设 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$ 是式(5.4.4)的多项式 $p(x)$ 的 n 个根，$\boldsymbol{C} = \left(\dfrac{1}{\alpha_i-\gamma_j}\right)_{i,j=1}^{n}$ 是 Cauchy 矩阵，则对称 Loewner 矩阵 $\boldsymbol{L}$ 可表为

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{CDC}^{\mathrm{T}} \quad (\boldsymbol{D}\text{ 是某个对角矩阵})$$

的充要条件是 $\boldsymbol{L}$ 与 $p(x)$ 兼容.

证明　若 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{CDC}^{\mathrm{T}}$，则当 $i\neq j$ 时，有

$$(\boldsymbol{CDC}^{\mathrm{T}})_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i-\gamma_k}d_k\frac{1}{\alpha_j-\gamma_k} = \frac{-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{\alpha_i-\gamma_k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{\alpha_j-\gamma_k}}{\alpha_i-\alpha_j} \quad (5.4.11)$$

于是 $\xi_i = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{\alpha_i-\gamma_k}$ $(i = 1,2,\cdots,n)$. 取 $r(x) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{x-\gamma_k}$，

则 $r(x)$ 可表为 $r(x)=\dfrac{q(x)}{p(x)}$ 的形式，且

$$r(\alpha_i)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{\alpha_i-\gamma_k}=\xi_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

而 $$(\boldsymbol{CDC}^{\mathrm{T}})_{ii}=\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{(\alpha_i-\gamma_k)^2}=r'(\alpha_i),\quad i=1,2,\cdots,n$$

由引理 5.4.5 知 $\boldsymbol{L}$ 与 $p(x)$ 兼容.

反之，若 $\boldsymbol{L}=(l_{ij})_{i,j=1}^{n}$ 与 $p(x)$ 兼容，由引理 5.4.5 知，存在有理多项式 $r(x)=\dfrac{q(x)}{p(x)}$，使得

$$\left.\begin{aligned} l_{ij}&=\frac{\dfrac{q(\alpha_i)}{p(\alpha_i)}-\dfrac{q(\alpha_j)}{p(\alpha_j)}}{\alpha_i-\alpha_j},\quad i\neq j\\ l_{ii}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{q(x)}{f(x)}\right)\Bigg|_{x=\alpha_i}\end{aligned}\right\}\tag{5.4.12}$$

可以要求 $q(x)$ 的次数最多为 $n-1$，因为 $q(x)$ 减去 $p(x)$ 的适当倍数，式(5.4.12)仍成立. 于是可将 $\dfrac{q(x)}{p(x)}$ 表为

$$\frac{q(x)}{p(x)}=\frac{q(x)}{p_n\prod\limits_{k=1}^{n}(x-\gamma_k)}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{x-\gamma_k}$$

式中 p_n 是 $p(x)$ 的最高次项系数. 仿式(5.4.11)的推导过程可知 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{CDC}^{\mathrm{T}}$.　　证毕

定理 5.4.2　设 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 是式(5.4.4)的多项式 $p(x)$ 的 n 个互异的根，$\boldsymbol{C}=\left(\dfrac{1}{\alpha_i-\gamma_j}\right)_{i,j=1}^{n}$ 是 Cauchy 矩阵，则对称 Loewner 矩阵 $\boldsymbol{L}$ 可表为

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{CDC}^{\mathrm{T}}\quad(\boldsymbol{D}\text{ 为某个对角矩阵})$$

的充要条件是，$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{W}_f^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{W}_f^{-\mathrm{T}}$ 为 Hankel 矩阵，且它与多项式 $p(x)$ 兼容，其中 $\boldsymbol{W}_f$ 如式(5.4.2).

证明　若 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{CDC}^{\mathrm{T}}$，则由引理 5.4.3 和引理 5.4.2（其中

$\boldsymbol{M}_p$ 是 $p(x)$ 的相伴矩阵)得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}\boldsymbol{M}_p^{\mathrm{T}} =& \boldsymbol{W}_f^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_f^{-\mathrm{T}}p_n\boldsymbol{V}_\gamma^{-\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)\boldsymbol{V}_\gamma^{\mathrm{T}} = \\ &[-\boldsymbol{V}_\gamma\mathrm{diag}(1/f(\gamma_1),\cdots,1/f(\gamma_n))]\boldsymbol{D}\times \\ &[-\boldsymbol{V}_\gamma\mathrm{diag}(1/f(\gamma_1),\cdots,1/f(\gamma_n))]^{\mathrm{T}}p_n\boldsymbol{V}_\gamma^{-\mathrm{T}}\times \\ &\mathrm{diag}(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)\boldsymbol{V}_\gamma^{\mathrm{T}} = \\ &p_n\boldsymbol{V}_\gamma\mathrm{diag}(1/f(\gamma_1),\cdots,1/f(\gamma_n))\boldsymbol{D}\times \\ &\mathrm{diag}(1/f(\gamma_1),\cdots,1/f(\gamma_n))\mathrm{diag}(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)\boldsymbol{V}_\gamma^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

其中 p_n 是 $p(x)$ 的最高次项系数. 上式后一矩阵是对称矩阵，从而

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{M}_p^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{H}\boldsymbol{M}_p^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{M}_p\boldsymbol{H}$$

由引理 5.4.3 知，$\boldsymbol{H}$ 是与 $p(x)$ 兼容的 Hankel 矩阵.

反之，若 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{W}_f^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{W}_f^{-\mathrm{T}}$ 是与 $p(x)$ 兼容的 Hankel 矩阵，则 $\boldsymbol{H}\boldsymbol{M}_p^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{M}_p\boldsymbol{H}$. 从而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}_f^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{W}_f^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_\gamma^{-\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)\boldsymbol{V}_\gamma^{\mathrm{T}} =& \boldsymbol{H}(\frac{1}{p_n}\boldsymbol{M}_p^{\mathrm{T}}) = \\ &\frac{1}{p_n}\boldsymbol{M}_p\boldsymbol{H} = \boldsymbol{V}_\gamma\mathrm{diag}(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)\boldsymbol{V}_\gamma^{-1}\boldsymbol{W}_f^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{W}_f^{-\mathrm{T}}\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_\gamma^{-1}\boldsymbol{W}_f^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{W}_f^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_\gamma^{-\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\gamma_1,\cdots,\gamma_n) =& \\ \mathrm{diag}(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)\boldsymbol{V}_\gamma^{-1}\boldsymbol{W}_f^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{W}_f^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_\gamma^{-\mathrm{T}}&\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{diag}(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$ 的对角元互异，与之相乘可交换的矩阵只能是对角矩阵，令

$$\boldsymbol{V}_\gamma^{-1}\boldsymbol{W}_f^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{W}_f^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_\gamma^{-\mathrm{T}} = \boldsymbol{D}_1$$

其中 $\boldsymbol{D}_1$ 是对角矩阵. 故由引理 5.4.2 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L} =& \boldsymbol{W}_f\boldsymbol{V}_\gamma\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{V}_\gamma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_f^{\mathrm{T}} = \\ &(-\boldsymbol{C})\mathrm{diag}(f(\gamma_1),\cdots,f(\gamma_n))\boldsymbol{D}_1\times \\ &\mathrm{diag}(f(\gamma_1),\cdots,f(\gamma_n))(-\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(f(\gamma_1),\cdots,f(\gamma_n)\boldsymbol{D}_1\mathrm{diag}(f(\gamma_1),\cdots,f(\gamma_n))$ 是对角矩阵.　　证毕

第六章 Toeplitz 矩阵类的应用

Toeplitz 矩阵及与之密切相关的 Hankel 矩阵、中心对称矩阵、Loewner 矩阵等在数值分析、优化理论、概率统计、自动控制、数字信号处理、系统辨识、通讯等众多领域中都有广泛的应用. 这里仅介绍 Toeplitz 矩阵类在数值分析、数字信号处理、系统辨识、工程计算中的一些应用. 本章各节独立成篇, 所涉及的有关知识也给以必要的介绍, 读者可根据具体情况阅读其中的一部分或全部.

§6.1 求微分方程数值解

许多数学物理问题可归结为常微分方程或偏微分方程的求解问题. 但除了简单的方程外, 要找出解的解析表达式是非常困难的, 甚至是不可能的. 因此, 须要求其数值解, 即解在一些点上的近似值.

先考虑常微分方程边值问题

$$\begin{cases} y''(x) + py'(x) + qy(x) = f(x), & a < x < b \\ y(a) = c_1, \quad y(b) = c_2 \end{cases} \tag{6.1.1}$$

其中 $f(x)$ 为已知函数, p, q, c_1, c_2 为已知数.

用点集

$$x_0 = a,\ x_1 = a + h,\ x_2 = a + 2h,\ \cdots,\ x_n = a + nh = b$$

把区间 $[a, b]$ 分成 n 等份, $h = \dfrac{b-a}{n}$ 是步长, x_i 称为结点. 在 $[a, b]$ 的每个内部结点 x_i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ 上用数值微商公式

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} + O(h^2)$$

$$y''(x_i)=\frac{y(x_{i+1})-2y(x_i)+y(x_{i-1})}{h^2}+O(h^2)$$

替代微分方程(6.1.1)的 $y'(x_i)$ 和 $y''(x_i)$ 得

$$\frac{y(x_{i+1})-2y(x_i)+y(x_{i-1})}{h^2}+p\frac{y(x_{i+1})-y(x_{i-1})}{2h}+$$
$$qy(x_i)=f(x_i)+O(h^2),\quad i=1,2,\cdots,n-1$$

当 h 充分小时，略去上式中 $O(h^2)$ 项，经整理得微分方程(6.1.1)的近似方程

$$\left(1-\frac{h}{2}p\right)y_{i-1}+(-2+h^2q)y_i+\left(1+\frac{h}{2}p\right)y_{i+1}=h^2f_i$$
$$i=1,2,\cdots,n-1$$

其中 $f_i=f(x_i)$，而 y_i 是 $y(x_i)$ 的近似值. 利用边界条件 $y_0=c_1$ 和 $y_n=c_2$ 得

$$\begin{bmatrix}(-2+h^2q) & 1+\frac{h}{2}p & & \\ 1-\frac{h}{2}p & -2+h^2q & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1+\frac{h}{2}p \\ & & 1-\frac{h}{2}p & -2+h^2q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_{n-1}\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}h^2f_1-\left(1-\frac{h}{2}p\right)c_1\\ h^2f_2\\ \vdots\\ h^2f_{n-2}\\ h^2f_{n-1}-\left(1+\frac{h}{2}p\right)c_2\end{bmatrix}$$

这是以三对角 Toeplitz 矩阵为系数阵的线性方程组.

再考虑泊松(Poisson)方程边值问题

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+qu=f(x,y)\quad ,0<x<1;0<y<1\\ u_L=\varphi(x,y)\end{array}\right\} \tag{6.1.2}$$

其中 L 是区域 G：$0\leqslant x,y\leqslant 1$ 的边界，$\varphi(x,y)$ 为定义在 L 上的已知函数.

取步长 $h=\dfrac{1}{n}$，用两族平行直线

$$x=ih,\quad y=jh,\quad i,j=0,1,\cdots,n$$

将区域 G 划分为有限个正方形单元，两族直线的交点称为网点，求 $u(x,y)$ 在网点的近似值. 采用下列记号：

$$x_i=ih,\quad y_j=jh,\quad u_{ij}=u(x_i,y_j)$$
$$f_{ij}=f(x_i,y_j),\quad \varphi_{ij}=\varphi(x_i,y_j)$$

为了能求出解 $u(x,y)$ 在网点 (x_i,y_j) 的值 u_{ij}，用差商代替偏导数

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij}\approx\frac{u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j}}{h^2}$$
$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ij}\approx\frac{u_{i,j+1}-2u_{ij}+u_{i,j-1}}{h^2}$$

于是就得到 u_{ij} 的近似值 $v(x_i,y_j)=v_{ij}$ 所满足的差分方程

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{v_{i+1,j}+v_{i-1,j}+v_{i,j+1}+v_{i,j-1}-4v_{ij}}{h^2}+qv_{ij}=f_{ij}\\ v_{0j}=\varphi_{0j},\quad v_{nj}=\varphi_{nj},\quad v_{i0}=\varphi_{i0},\quad v_{in}=\varphi_{in}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad 1\leqslant i,j\leqslant n-1\end{array}\right\} \tag{6.1.3}$$

引入向量与矩阵记号

$$\boldsymbol{v}=(v_{11},v_{21},\cdots,v_{n-1,1},v_{12},\cdots,v_{n-1,2},\cdots,v_{1,n-1},\cdots,v_{n-1,n-1})^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma} & \boldsymbol{I} & & \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{\Gamma} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \boldsymbol{I} \\ & & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{\Gamma} \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

式中 $\boldsymbol{I}$ 是 $n-1$ 阶单位矩阵，而

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} -1+h^2q & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -1+h^2q \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

于是差分方程(6.1.3)可写成

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$$

此处，$\boldsymbol{b}$ 为列向量，它是由 f 和 φ 来确定的，系数矩阵 $\boldsymbol{T}$ 是分块三对角 Toeplitz 矩阵.

§6.2　三次样条插值

给定 $[a,b]$ 区间的分划

$$\Delta:\ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

及相应的数值

$$y_0\ ,\ y_1\ ,\ y_2\ ,\cdots,\ y_{n-1}\ ,\ y_n$$

要找一个函数 $s(x)$，使其满足条件

1）　$s(x_j) = y_j\ (j = 1,2,\cdots,n-1)$；

2）　在 $[a,b]$ 上 $s(x)$ 具有二阶连续导数；

3）　在每个小区间 $[x_{j-1},x_j]$ 上，$s(x)$ 是 x 的三次多项式，

则称 $s(x)$ 为对应分划 Δ 的三次样条插值函数，或三次样条插值多项式.

为完全确定三次样条插值函数，还必须补充两个条件，这样的条件通常在边界点 x_0 及 x_n 处给出. 常见的有以下两种：

(A) $s(x_0) = y_0,\ s(x_n) = y_n,\ s''(x_0) = y_0'',\ s''(x_n) = y_n''$

其中 y_0''、y_n'' 也是给定的数值；

(B) $s(x_0) = s(x_n) = y_0,\ s'(x_0) = s''(x_n),\ s''(x_0) = s''(x_n)$

称(B)为周期边界条件.

假设分划 Δ 是等距的，即

$$x_i = a + ih,\quad i = 0,1,\cdots,n,\quad h = \frac{b-a}{n}$$

下面来构造三次样条插值函数.

设在 $[x_{i-1},x_i]$ 上 $s(x) = s_i(x)$ $(i = 1,2,\cdots,n)$. 由条件 1)有

$$s_i(x_{i-1}) = y_{i-1},\quad s_i(x_i) = y_i \tag{6.2.1}$$

假定 $s(x)$ 在 x_i 处的二阶导数为 M_i $(i = 0,1,\cdots,n)$，则有

$$s_i''(x_{i-1}) = M_{i-1},\quad s_i''(x_i) = M_i$$

由于 $s_i(x)$ 是 x 的三次多项式，于是

$$s_i''(x) = M_{i-1}\frac{x_i - x}{h} + M_i\frac{x - x_{i-1}}{h}$$

积分两次得

$$s_i(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h} + c_1x + c_2$$

利用式(6.2.1)解出 c_1,c_2，并加以整理得

$$\begin{aligned} s_i(x) = {} & M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h} + \\ & (y_{i-1} - \frac{M_{i-1}}{6}h^2)\frac{x_i - x}{h} + (y_i - \frac{M_i}{6}h^2)\frac{x - x_{i-1}}{h} \\ & i = 1,2,\cdots,n \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

只要求出 M_i $(i = 0,1,\cdots,n)$，三次样条函数 $s(x)$ 在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的表达式就是式(6.2.2). 为了求 M_i，可利用一阶导数连续的条件. 因

$$s_i'(x) = -M_{i-1}\frac{(x_i - x)^2}{2h} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^2}{2h} +$$

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h} - \frac{h}{6}(M_i - M_{i-1}) \tag{6.2.3}$$

由 $s_i'(x_i) = s_{i+1}'(x_i)$ 可得

$$\frac{1}{2}hM_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h} - \frac{h}{6}(M_i - M_{i-1}) =$$

$$-\frac{1}{2}hM_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{h}{6}(M_{i+1} - M_i)$$

从而有

$$M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} = \frac{6}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})$$

$$i = 1, 2, \cdots, n-1 \tag{6.2.4}$$

如果附加边界条件(A)，则 $M_0 = y_0''$ ，$M_n = y_n''$，此时 $M_1, \cdots, M_{n-1}$ 所满足的线性方程组为

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

其中

$$b_1 = \frac{6}{h^2}(y_2 - 2y_1 + y_0) - y_0''$$

$$b_{n-1} = \frac{6}{h^2}(y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}) - y_n''$$

$$b_i = \frac{6}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}), \quad i = 1, 2, \cdots, n-2$$

该方程组的系数矩阵是三对角 Toeplitz 矩阵.

如果附加周期边界条件(B)，则

$$M_n = s''(x_n) = s''(x_0) = M_0 \tag{6.2.5}$$

又由式(6.2.3)，有

$$s_1'(x_0) = -\frac{1}{2}hM_0 + \frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{h}{6}(M_1 - M_0)$$

$$s_n'(x_n) = \frac{1}{2}hM_n + \frac{y_n - y_{n-1}}{h} - \frac{h}{6}(M_n - M_{n-1})$$

根据 $s_n'(x_n) = s_1'(x_0)$，并利用式(6.2.5)整理得

$$M_1 + M_{n-1} + 4M_n = \frac{6}{h^2}[(y_1 - y_0) - (y_n - y_{n-1})] \quad (6.2.6)$$

结合式(6.2.4)～(6.2.6)得 $M_1,\cdots,M_n$ 所满足的线性方程组为

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{bmatrix}$$

式中

$$\begin{cases} d_i = \dfrac{6}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}), & i = 1,2,\cdots,n-1 \\ d_n = \dfrac{6}{h^2}[(y_1 - y_0) - (y_n - y_{n-1})] \end{cases}$$

该方程组的系数矩阵是周期三对角 Toeplitz 矩阵.

§6.3 多项式拟合与逼近

考虑用最小二乘法求数据的多项式拟合曲线问题.

设 (x_i, y_i) $(i = 1,2,\cdots,m)$ 为一组观测数据，寻找一个 $n-1$ 次多项式

$$\varphi(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}, \quad n \ll m$$

使得

$$S(a_1,a_2,\cdots,a_n) = \sum_{j=1}^{m}[y_j - \varphi(x_j)]^2 = \sum_{j=1}^{m}[y_j - \sum_{l=1}^{n} a_l x_j^{l-1}]^2$$

达到最小. $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是极值点的必要条件为

$$\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial a_i} = \sum_{j=1}^{m} x_j^{i-1}[y_j - \sum_{l=1}^{n} a_l x_j^{l-1}] = 0, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

(6.3.1)

引入内积 $[f(x),g(x)] = \sum_{j=1}^{m} f(x_j)g(x_j)$，由式(6.3.1)得

$$a_1[x^{i-1},1] + a_2[x^{i-1},x] + \cdots + a_n[x^{i-1},x^{n-1}] = [x^{i-1},y]$$

$$i = 1,2,\cdots,n \qquad (6.3.2)$$

令

$$\eta_{i+j-1} = [x^{i-1},x^{j-1}], \quad i,j = 1,2,\cdots,n$$

$$b_i = [x^{i-1},y], \quad i = 1,2,\cdots,n$$

则(6.3.2)即为以 Hankel 矩阵 $\boldsymbol{H}$ 为系数矩阵的线性方程组

$$\boldsymbol{Ha} = \boldsymbol{b}$$

其中 $\boldsymbol{a} = (a_1,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b} = (b_1,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$．可见，用最小二乘法求数据的多项式拟合曲线问题可转化为求解以 Hankel 矩阵为系数矩阵的线性方程组问题．

假如在区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上给定连续函数 $f(x)$，要求用 x 的 $n-1$ 次多项式 $\sum_{j=1}^{n} a_j x^{j-1}$ 逼近 $f(x)$，即使得误差 $\varepsilon = \int_0^1 \left[\sum_{j=1}^{n} a_j x^{j-1} - f(x)\right]^2 \mathrm{d}x$ 达到极小．由

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_i} = 2\int_0^1 \left[\sum_{j=1}^{n} a_j x^{j-1} - f(x)\right] x^{i-1} \mathrm{d}x = 0, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

得

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 x^{i+j-2} \mathrm{d}x\right) a_j = \int_0^1 f(x) x^{i-1} \mathrm{d}x, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

$$(6.3.3)$$

如果令

$$h_{ij} = \int_0^1 x^{i+j-2} \mathrm{d}x = \frac{1}{i+j-1}, \quad f_i = \int_0^1 f(x) x^{i-1} \mathrm{d}x$$

$$i,j = 1,\cdots,n$$

则式(6.3.3)可写成线性方程组

$$\boldsymbol{Ha} = \boldsymbol{f}$$

其中 $a=(a_1,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$f=(f_1,\cdots,f_n)^{\mathrm{T}}$，而 $H=\left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{i,j=1}^{n}$ 是 Hilbert 矩阵. 可见，用多项式按最佳平方逼近函数的问题可转化为，求解以 Hilbert 矩阵为系数矩阵的线性方程组问题.

§6.4 有理多项式插值问题

已知四组数

$$\alpha_j\ ,\beta_j\ ,\xi_j\ ,\eta_j,\quad j=1,2,\cdots,n \tag{6.4.1}$$

设 $\alpha_i\neq\beta_j$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 选择 $n-1$ 次多项式

$$p(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}a_j\frac{\pi(\lambda)}{\lambda-\beta_j},\quad q(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}a_j\eta_j\frac{\pi(\lambda)}{\lambda-\beta_j}$$

式中

$$\pi(\lambda)=\prod_{k=1}^{n}(\lambda-\beta_k) \tag{6.4.2}$$

使满足插值条件

$$\frac{\xi_i p(\alpha_i)-q(\alpha_i)}{\pi(\alpha_i)}=f_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

该问题等价于求解线性方程组

$$\boldsymbol{La}=\boldsymbol{f}$$

其中 $\boldsymbol{L}=\left(\frac{\xi_i-\eta_j}{\alpha_i-\beta_j}\right)_{i,j}^{n}$ 是 Loewner 矩阵，$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_n)^{\mathrm{T}}$.

又设式(6.4.1)的四组数满足

$$\alpha_i\neq\beta_j\ ,\alpha_i\neq\alpha_j\ ,\beta_i\neq\beta_j,\quad i,j=1,2,\cdots,n$$

考虑是否存在有理多项式

$$\varphi(x)=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}}{b_0+b_1x+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}+x^n} \tag{6.4.3}$$

使得满足插值条件

$$\varphi(\alpha_i)=\xi_i,\quad \varphi(\beta_i)=\eta_i,\quad i=1,2,\cdots,n \qquad (6.4.4)$$

由式(6.4.3)和(6.4.4)得

$$\begin{cases} a_0+a_1\alpha_i+\cdots+a_{n-1}\alpha_i^{n-1}-b_0\xi_i- \\ \qquad b_1\xi_i\alpha_i-\cdots-b_{n-1}\xi_i\alpha_i^{n-1}=\xi_i\alpha_i^{n-1},\quad i=1,2,\cdots,n \\ a_0+a_1\beta_j+\cdots+a_{n-1}\beta_j^{n-1}-b_0\eta_j- \\ \qquad b_1\eta_j\beta_j-\cdots-b_{n-1}\eta_j\beta_j^{n-1}=\eta_j\beta_j^{n-1},\quad j=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

于是，这一有理插值问题的存在等价于下列 $2n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_1 & \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{V}_1 \\ \boldsymbol{V}_2 & \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{V}_2 \end{bmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{V}_1=\begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{V}_2=\begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & \cdots & \beta_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \beta_n & \cdots & \beta_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

它们是 n 阶 Vandermonde 矩阵，而

$$\boldsymbol{D}_1=\mathrm{diag}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),\quad \boldsymbol{D}_2=\mathrm{diag}(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$$

由于 $\boldsymbol{V}_1$ 非奇异，根据定理 1.3.2 知，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异的充要条件是矩阵

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{V}_2-\boldsymbol{V}_2\boldsymbol{V}_1^{-1}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{V}_1 \qquad (6.4.5)$$

非奇异. 记

$$\pi_i(x)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x-\beta_j)=w_{i1}+w_{i2}x+\cdots+w_{in}x^{n-1}$$

$$i=1,2,\cdots,n$$

引入矩阵 $\boldsymbol{W}=(w_{ij})_{i,j=1}^{n}$，则易验证

$$\boldsymbol{W}\boldsymbol{V}_2^{\mathrm{T}}=\mathrm{diag}(\pi_1(\beta_1),\pi_2(\beta_2),\cdots,\pi_n(\beta_n))$$

于是　$$\boldsymbol{V}_2=\mathrm{diag}(\pi_1(\beta_1),\pi_2(\beta_2),\cdots,\pi_n(\beta_n))\boldsymbol{W}^{-\mathrm{T}}$$

代入式(6.4.5)得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B} = & -\boldsymbol{V}_2\boldsymbol{V}_1^{-1}[\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{V}_2^{-1} - \boldsymbol{V}_1\boldsymbol{V}_2^{-1}\boldsymbol{D}_2]\boldsymbol{V}_2 = \\
& -\boldsymbol{V}_2\boldsymbol{V}_1^{-1}\left\{\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\pi_1(\beta_1)},\frac{1}{\pi_2(\beta_2)},\cdots,\frac{1}{\pi_n(\beta_n)}\right) - \right. \\
& \left.\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\pi_1(\beta_1)},\frac{1}{\pi_2(\beta_2)},\cdots,\frac{1}{\pi_n(\beta_n)}\right)\boldsymbol{D}_2\right\}\times \\
& \mathrm{diag}(\pi_1(\beta_1),\pi_2(\beta_2),\cdots,\pi_n(\beta_n))\boldsymbol{W}^{-\mathrm{T}} = \\
& -\boldsymbol{V}_2\boldsymbol{V}_1^{-1}[\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{V}_1\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2]\boldsymbol{W}^{-\mathrm{T}}
\end{aligned}
\tag{6.4.6}
$$

注意到

$$
\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{W}\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \pi_1(\alpha_1) & \cdots & \pi_1(\alpha_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \pi_n(\alpha_1) & \cdots & \pi_n(\alpha_n) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} =
$$

$$
\begin{bmatrix} \pi(\alpha_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \pi(\alpha_n) \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\alpha_1-\beta_1} & \cdots & \dfrac{1}{\alpha_1-\beta_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{\alpha_n-\beta_1} & \cdots & \dfrac{1}{\alpha_n-\beta_n} \end{bmatrix}
$$

式中 $\pi(x)$ 如式(6.4.2),于是

$$
\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{V}_1\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2 = \mathrm{diag}(\pi(\alpha_1),\pi(\alpha_2),\cdots,\pi(\alpha_n))\boldsymbol{L}
$$

其中 $\boldsymbol{L} = \left(\dfrac{\xi_i-\eta_j}{\alpha_i-\beta_j}\right)_{i,j=1}^{n}$ 是 Loewner 矩阵,代入式(6.4.6)即得

$$
\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{V}_2\boldsymbol{V}_1^{-1}\mathrm{diag}(\pi(\alpha_1),\pi(\alpha_2),\cdots,\pi(\alpha_n))\boldsymbol{L}\boldsymbol{W}^{-\mathrm{T}}
$$

可见 $\boldsymbol{B}$ 非奇异的充要条件是 $\boldsymbol{L}$ 非奇异.故 $\boldsymbol{L}$ 非奇异是满足插值条件(6.4.4)的有理多项式(6.4.3)存在的充要条件.

§6.5 Toeplitz 矩阵与多项式计算的联系

给定两个 n 次多项式

$$
\left.\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \\ g(x) &= b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \end{aligned}\right\}
\tag{6.5.1}
$$

则

$$\begin{aligned} f(x)g(x) = & a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots + \\ & (a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_nb_0)x^n + \\ & (a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_2 + a_nb_1)x^{n+1} + \\ & \cdots + (a_{n-1}b_n + a_nb_{n-1})x^{2n-1} + a_nb_nx^{2n} \end{aligned}$$

而

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ & a_0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_1 \\ & & & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0b_n + \cdots + a_nb_0 \\ a_0b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_0 \\ \vdots \\ a_0b_0 \end{bmatrix} \tag{6.5.2}$$

$$\begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 \\ & a_n & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1} \\ & & & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_nb_0 + \cdots + a_0b_n \\ a_nb_1 + \cdots + a_1b_n \\ \vdots \\ a_nb_n \end{bmatrix} \tag{6.5.3}$$

可见式(6.5.2)中的上三角 Toeplitz 矩阵与一列向量乘积的分量恰为乘积 $f(x)g(x)$ 中 $x^n, x^{n-1}, \cdots, x, 1$ 的系数，而式(6.5.3)中的上三角 Toeplitz 矩阵与列向量乘积的分量恰为乘积 $f(x)g(x)$ 中 $x^n, x^{n+1}, \cdots, x^{2n}$ 的系数. 于是，两个多项式相乘的快速算法与三角 Toeplitz 矩阵乘向量的快速算法可以互相利用. 由于两个 n 次多项式相乘有计算量为 $O(n\log_2 n)$ 的快速算法，故三角 Toeplitz 矩阵乘向量也有计算量为 $O(n\log_2 n)$ 的快速算法.

注意到两个上三角 Toeplitz 矩阵的乘积仍是上三角 Toeplitz 矩阵

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ & a_0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_1 \\ & & & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ & b_0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & b_1 \\ & & & b_0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_0b_0 & a_0b_1+a_1b_0 & \cdots & a_0b_n+\cdots+a_nb_0 \\ & a_0b_0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_0b_1+a_1b_0 \\ & & & a_0b_0 \end{bmatrix}$$

且所得矩阵的第 1 行和式(6.5.2)所得向量有相同的元素，仅排列次序相反，故两个上三角 Toeplitz 矩阵的乘积也有计算量为 $O(n\log_2 n)$ 的快速算法.

对于循环矩阵与一列向量的乘法

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_n & a_0 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_0b_n+a_1b_{n-1}\cdots+a_nb_0 \\ a_nb_n+(a_0b_{n-1}+a_1b_{n-2}\cdots+a_{n-1}b_0) \\ (a_{n-1}b_n+a_nb_{n-1})+(a_0b_{n-2}+\cdots+a_{n-2}b_0) \\ \vdots \\ (a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1)+a_0b_0 \end{bmatrix}$$

所得向量除第 1 行的元素是 $f(x)g(x)$ 展开式中 x^n 的系数外、其它各元素是式(6.5.2)与(6.5.3)所得向量中某两项之和，或 $f(x)g(x)$ 展开式中某两项的系数之和，故可引用多项式快速乘法作循环矩阵与向量的乘法运算，计算量为 $O(n\log_2 n)$.

再看多项式除法与三角 Toeplitz 矩阵之逆矩阵的关系.

由于三角 Toeplitz 矩阵的逆矩阵仍为三角 Toeplitz 矩阵，设 $n+1$ 阶可逆上三角 Toeplitz 矩阵及其逆矩阵为

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 \\ & a_n & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1} \\ & & & a_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 \\ & b_n & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & b_{n-1} \\ & & & b_n \end{bmatrix}$$

则由 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{I}$ 知

$$\left.\begin{aligned}&a_nb_n=1\\&a_nb_{n-1}+a_{n-1}b_n=0\\&\quad\vdots\\&a_nb_0+a_{n-1}b_1+\cdots+a_0b_n=0\end{aligned}\right\}\tag{6.5.4}$$

利用这些等式可求出 $b_n,b_{n-1},\cdots,b_0$. 考虑用 n 次多项式 $f(x)$ 除 x^{2n}，设商及余式分别为 $g(x)$ 和 $r(x)$，即

$$x^{2n}=f(x)g(x)+r(x)$$

其中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 如式(6.5.1)，$r(x)$ 的次数小于 n. 比较上式两边 $x^{2n},x^{2n-1},\cdots,x^n$ 的系数，即得式(6.5.4). 这表明上三角 Toeplitz 矩阵的逆矩阵的第 1 行元素是

$$x^{2n}\div(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0)$$

所得商式中 $x^n,x^{n-1},\cdots,1$ 的系数，故求上三角 Toeplitz 矩阵的逆矩阵快速算法与求 x^{2n} 除以 n 次多项式的快速算法可以互相引用.

类似地，x^{2n-1} 除以 n 次多项式 $f(x)$ 所得的商式是 $n-1$ 次多项式，其 $x^{n-1},\cdots,x,1$ 的系数恰等于 n 阶上三角 Toeplitz 矩阵

$$\begin{bmatrix}a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1\\ & a_n & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & a_{n-1}\\ & & & a_n\end{bmatrix}$$

的逆矩阵第 1 行的元素.

如果已知 $2n-1$ 次多项式

$$d_{2n-1}x^{2n-1}+d_{2n-2}x^{2n-2}+\cdots+d_1x+d_0$$

求其除以 n 次多项式 $f(x)$ 所得的商式 $h(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_{n-1}x^{n-1}$ 可看成，求解系数阵为上三角 Toeplitz 矩阵的线性方程组

$$\begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ & a_n & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1} \\ & & & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_n \\ d_{n+1} \\ \vdots \\ d_{2n-1} \end{bmatrix}$$

§6.6 Toeplitz 矩阵与卷积计算的联系

卷积是数字信号处理中最常见的计算问题.数字滤波、相关甚至离散 Fourier 变换(DFT)都可以变成卷积的计算.

在数字信号处理及其它学科中,由于用途不同,卷积有多种形式.常见的有循环卷积、斜循环卷积、线性卷积等.在此讨论这些卷积的实际背景及其用途,只给出其形式上的定义.

设有两个 n 元序列

$$a_k,\quad b_k,\quad k = 0,1,\cdots,n-1$$

如果按周期 n 扩充这两个序列,即

$$a_{k+ln} = a_k,\quad b_{k+ln} = b_k,\quad k = 0,1,\cdots,n-1;\ l \text{ 为任意整数}$$

则称

$$c_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_{j-k} b_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{j-k},\quad j = 0,1,\cdots,n-1 \tag{6.6.1}$$

为序列 a_k 与 b_k 的循环卷积.若 c_j 的下标不局限于 0 到 $n-1$,则同样有周期为 n 的性质.

序列 a_k ,b_k ,c_j 的关系用矩阵向量表示为

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

上式右边的矩阵是循环矩阵.如果不按周期 n 扩充序列 a_k 与 b_k,而按

$$a_k = b_k = 0, \quad 当 k < 0 或 k > n-1$$

扩充之，则卷积(6.6.1)可用矩阵向量表示为

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & & & \\ a_1 & a_0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

上式右边的矩阵是下三角 Toeplitz 矩阵. 这种卷积能化成两个 $2n$ 元序列的循环卷积来计算. 定义 $2n$ 元序列

$$\tilde{a}_k = \begin{cases} a_k, & k = 0,1,\cdots,n-1 \\ 0, & k = n,\cdots,2n-1 \end{cases}$$

$$\tilde{b}_k = \begin{cases} b_k, & k = 0,1,\cdots,n-1 \\ 0, & k = n,\cdots,2n-1 \end{cases}$$

又 $\tilde{a}_k$ 与 $\tilde{b}_k$ 都按周期 $2n$ 扩充，则有

$$c_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_{j-k} b_k = \sum_{k=0}^{2n-1} \tilde{a}_{j-k} \tilde{b}_k, \quad j = 0,1,\cdots,n-1$$

另一种卷积是对 $a_{-1}, a_{-2}, \cdots, a_{-(n-1)}$ 等都不加以限制. 定义 c_j 为

$$c_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_{j-k} b_k, \quad j = 0,1,\cdots,n-1$$

(但此时 c_j 不一定等于 $\sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{j-k}$). 用矩阵向量表示为

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & \cdots & a_{-(n-1)} \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_{-(n-2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

上式右边的矩阵是一般的 Toeplitz 矩阵. 这种卷积(称为“恒定对角卷积”)也能化成两个 $2n$ 元序列的循环卷积来计算. 定义 $2n$ 元序列

$$\hat{a}_k = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ a_{-n+k}, & k = 1,2,\cdots,2n-1 \end{cases}$$

$$\hat{b}_k = \begin{cases} b_k, & k = 0,1,\cdots,n-1 \\ 0, & k = n,\cdots,2n-1 \end{cases}$$

又 $\hat{a}_k$ 与 $\hat{b}_k$ 都按周期 $2n$ 扩充,则有

$$c_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_{j-k} b_k = \sum_{k=0}^{2n-1} \hat{a}_{n+j-k} \hat{b}_k$$

§6.7 系统状态空间方程的化简

一个单输入-单输出线性定常系统的状态空间描述为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + u(t)\boldsymbol{b} \\ y(t) &= \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(t) \end{aligned}\right\} \tag{6.7.1}$$

式中 $\boldsymbol{x}(t)$ 是 n 维状态向量,$\boldsymbol{b}$ 是 n 维输入(或控制)向量,$\boldsymbol{c}$ 是 n 维输出(或观测)向量,n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 为系统矩阵,$u(t)$ 与 $y(t)$ 是输入和输出变量.

设系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \tag{6.7.2}$$

当系统完全能控,即能控性矩阵

$$\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}] \tag{6.7.3}$$

的秩为 n,则经过线性变换

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{P}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) \tag{6.7.4}$$

可以将状态空间方程(6.7.1)化为如下的能控规范 I 型:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)}{\mathrm{d}t} &= \tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + u(t)\tilde{\boldsymbol{b}} \\ y(t) &= \tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) \end{aligned}\right\} \tag{6.7.5}$$

其中

$$\tilde{A} = P^{-1}AP = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \\ \hline -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{array}\right] \tag{6.7.6}$$

$$\tilde{b} = P^{-1}b = e_n, \quad \tilde{c}^{\mathrm{T}} = c^{\mathrm{T}}P$$

当原系统完全能观，即能观矩阵

$$T = \begin{bmatrix} c^{\mathrm{T}} \\ c^{\mathrm{T}}A \\ \vdots \\ c^{\mathrm{T}}A^{n-1} \end{bmatrix} \tag{6.7.7}$$

的秩为 n，则经过线性变换

$$x(t) = Q^{-1}\hat{x}(t) \tag{6.7.8}$$

可以将状态空间方程(6.7.1)化为如下的能观规范Ⅱ型：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\hat{x}(t)}{\mathrm{d}t} &= \hat{A}\hat{x}(t) + u(t)\hat{b} \\ y(t) &= \hat{c}^{\mathrm{T}}\hat{x}(t) \end{aligned}\right\} \tag{6.7.9}$$

其中

$$\hat{A} = QAQ^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ \hline & & & -a_1 \\ & I_{n-1} & & \vdots \\ & & & -a_{n-1} \end{array}\right] \tag{6.7.10}$$

$$\hat{b} = Qb, \quad \hat{c}^{\mathrm{T}} = c^{\mathrm{T}}Q^{-1} = e_n^{\mathrm{T}}$$

显然，规范型所含的参数个数远少于非规范型. 一般非规范型的参数个数可达 $n^2 + 2n$ 个，而规范型的参数个数仅为 $2n$ 个. 因此，系统辨识中规范型描述有利于减少辨识参数的数量.

下面确定线性变换(6.7.4)和(6.7.8)的矩阵 P 与 Q. 由式(6.7.6)得，系统(6.7.5)的能控性矩阵

$$\tilde{S} = [\tilde{b} \quad \tilde{A}\tilde{b} \quad \cdots \quad \tilde{A}^{n-1}\tilde{b}] =$$

$$P^{-1}[\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}] = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{S}$$

其中 $\boldsymbol{S}$ 是能控性矩阵(6.7.3). 于是

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{S}\tilde{\boldsymbol{S}}^{-1} \tag{6.7.11}$$

又由式(6.7.6)可写出

$$\tilde{\boldsymbol{S}} = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & \iddots & s_1 \\ & 1 & \iddots & \vdots \\ 1 & s_1 & \cdots & s_{n-1} \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{cases} s_1 = -a_{n-1} \\ s_2 = -a_{n-2} - a_{n-1}s_1 \\ \quad \vdots \\ s_{n-1} = -a_1 - a_2 s_1 - \cdots - a_{n-1}s_{n-2} \end{cases}$$

从而

$$\tilde{\boldsymbol{S}}^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \\ a_{n-1} & \iddots & & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \tag{6.7.12}$$

这是 Hankel 矩阵,代入式(6.7.11)即得线性变换(6.7.4)的矩阵 $\boldsymbol{P}$. 同理,由式(6.7.9)和(6.7.10)得线性变换(6.7.8)的矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为

$$\boldsymbol{Q} = \tilde{\boldsymbol{S}}^{-1}\boldsymbol{T}$$

其中 $\boldsymbol{T}$ 是能观矩阵(6.7.7),而 $\tilde{\boldsymbol{S}}^{-1}$ 是式(6.7.12)的 Hankel 矩阵.

§6.8 常用信号的自协方差矩阵

若 $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ 是均值(或数学期望)为零的实平稳随机过程或随机序列,它的自相关函数

$$\xi_i = \mathrm{E}[x_k x_{k+i}] \quad (\text{其中 } \mathrm{E}[\cdot] \text{ 是数学期望})$$

从而自协方差矩阵为

$$\boldsymbol{T}_n = \mathrm{E}[\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}] = \begin{bmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_{n-1} \\ \xi_1 & \xi_0 & \cdots & \xi_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-1} & \xi_{n-2} & \cdots & \xi_0 \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$. 这是对称 Toeplitz 矩阵. 例如,广义实平稳一阶马尔可夫信号可用下列一阶自回归信号 AR(1)来描述:

$$x_k - \rho x_{k-1} = \epsilon_k, \quad k > 1$$

其中 ϵ_k 是白噪声. 这种信号的自协方差函数有如下关系:

$$\begin{aligned} \xi_i &= E[x_k x_{k+i}] = E[x_k(\rho x_{k+i-1} + \epsilon_{k+i})] = \\ &\rho E[x_k x_{k+i-1}] + E[x_k \epsilon_{k+i}] = \rho \xi_{i-1} + E[x_k]E[\epsilon_{k+i}] = \\ &\rho \xi_{i-1} = \cdots = \rho^i \xi_0 \end{aligned}$$

其中用到 $\mathrm{E}[x_k] = 0$,而 $\xi_0 = \mathrm{E}[x_k^2] \neq 0$. 于是其自协方差矩阵为

$$\boldsymbol{T}_n = \xi_0 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \rho \\ \rho^{n-1} & \cdots & \rho & 1 \end{bmatrix}$$

若 $\{x_k\}_{k=0}^n$ 是均值为零的复平稳随机过程或随机序列,如:由 r 个复正弦加白噪声组成的信号,其表示式为

$$x_k = \sum_{j=1}^{r} f_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}(j-1)\omega_j} + \epsilon_k, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

式中 f_k 和 ω_k $(k = 1, 2, \cdots, r)$ 为正弦波的复振幅和角频率, ϵ_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 为零均值和方差 σ^2 的白噪声. 将上式写成矩阵形式,有

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

式中

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad \boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n)$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e^{i\omega_1} & e^{i\omega_2} & \cdots & e^{i\omega_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{i(n-1)\omega_1} & e^{i(n-1)\omega_2} & \cdots & e^{i(n-1)\omega_r} \end{bmatrix}$$

信号 $\boldsymbol{x}$ 的自协方差矩阵为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}_n = & \mathrm{E}[\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}] = \mathrm{E}[(\boldsymbol{W}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{W}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{\varepsilon})^{\mathrm{H}}] = \\ & \mathrm{E}[\boldsymbol{W}\boldsymbol{f}\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{W}^{\mathrm{H}} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{f}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{H}} + \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{W}^{\mathrm{H}} + \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{H}}] = \\ & \mathrm{E}[\boldsymbol{W}\boldsymbol{f}\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{W}^{\mathrm{H}}] + \mathrm{E}[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{H}}] = \\ & \boldsymbol{W}\mathrm{E}[\boldsymbol{f}\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}]\boldsymbol{W}^{\mathrm{H}} + \sigma^2\boldsymbol{I} \end{aligned}$$

若 r 个正弦分量彼此不相关，则

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{f}\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}] = \mathrm{diag}(\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_r)$$

式中 $\rho_k = \mathrm{E}[f_k\bar{f}_k]$ $(k = 1, 2, \cdots, r)$，在这种情况下，自协方差矩阵为

$$\boldsymbol{T}_n = \begin{bmatrix} \xi_0 & \bar{\xi}_1 & \cdots & \bar{\xi}_{n-1} \\ \xi_1 & \xi_0 & \cdots & \bar{\xi}_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-1} & \xi_{n-2} & \cdots & \xi_0 \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{cases} \xi_0 = \rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_r + \sigma^2 \\ \xi_k = \rho_1 e^{ik\omega_1} + \cdots + \rho_r e^{ik\omega_r}, \quad k = 1, 2, \cdots, n-1 \end{cases}$$

这是 Hermite 型 Toeplitz 矩阵.

容易证明，自协方差矩阵是半正定的. 这是因为，对任意非零向量 $\boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_n)^{\mathrm{T}}$ 有

$$\boldsymbol{p}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\bar{p}_i\mathrm{E}[x_i\bar{x}_j]p_j =$$

$$\mathrm{E}\Big[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\bar{p}_i x_i \bar{x}_j p_j\Big] = \mathrm{E}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{n}\bar{p}_i x_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}p_j\bar{x}_j\Big)\Big] =$$

$$\mathrm{E}\left[\left|\sum_{i=1}^{n}\bar{p}_i x_i\right|^2\right]\geqslant 0$$

§6.9 随机信号预测

预测就是利用信号数据前后的关联,根据其中一部分来推求其余部分. 显然,数据间关联愈密切,预测愈准确;完全不关联,则无法预测. 由于随机信号只能用统计上的特征量来描述,因此只能利用其统计规律作为预测得依据,而且不能做到预测的误差为零,只能从统计意义上使误差的均方值为最小. 实际获得的随机信号是带噪声干扰的,这就使得预测和滤波紧密相联,成为带滤波的预测或预测滤波. 不考虑噪声干扰时的预测或不带滤波的预测称为纯预测. 为了能够用有限数据来预测未知的信号序列,须要寻找一个信号模型. 设将单位取样脉冲 δ_k 加到一个传输函数 $H(z)$ 为全极型的系统,即

$$H(z)=\frac{A}{1+\sum_{j=1}^{n}b_j z^{-j}}$$

式中 A 为系统增益系数. 显然,根据定义其输出就等于系统的脉冲响应 x_k 的近似值 $\tilde{x}_k$. 为了求得模型的参数 b_j,可以按预测序列 $\tilde{x}_k$ 与真值 x_k 之间的误差最小的准则来推算. 但这样必须解复杂的非线性方程组,因此实际中为了分析方便,往往反过来进行,即如果一个传输函数为 $\dfrac{1}{H(z)}=\dfrac{1}{A}(1+\sum\limits_{j=1}^{n}b_j z^{-j})$ 的系统,当其输入为 x_k 时,其输出必是 δ_k 的近似值 $\tilde{\delta}_k$,可见预测误差为

$$e_k=\tilde{\delta}_k-\delta_k=x_k-\tilde{x}_k$$

描述系统输入、输出关系的差分方程为

$$\frac{1}{A}(x_k+\sum_{j=1}^{n}b_j x_{k-j})=\tilde{\delta}_k$$

即
$$x_k + \sum_{j=1}^{n} b_j x_{k-j} = A(e_k + \delta_k)$$
或
$$x_k = -\sum_{j=1}^{n} b_j x_{k-j} + A e_k, \quad k > 0 \tag{6.9.1}$$
预测滤波器的最佳参数 b_j $(j = 1,2,\cdots,n)$ 根据最小均方误差准则来确定. 令误差的均方值为
$$\epsilon = \mathrm{E}[(Ae_k)^2] = \mathrm{E}[(x_k + \sum_{j=1}^{n} b_j x_{k-j})^2]$$
由 $\frac{\partial \epsilon}{\partial b_i} = 0$ $(i = 1,2,\cdots,n)$ 得
$$\sum_{j=1}^{n} b_j \mathrm{E}[x_{k-j} x_{k-i}] = -\mathrm{E}[x_k x_{k-i}]$$
$$i = 1,2,\cdots,n \tag{6.9.2}$$
对于平稳随机过程，其自相关函数 $r_i = \mathrm{E}[x_{k-j} x_{k+i}]$ 满足
$$\mathrm{E}[x_k x_{k-i}] = r_i, \quad \mathrm{E}[x_{k-j} x_{k-i}] = r_{i-j}$$
故式(6.9.2)又可写为
$$\sum_{j=1}^{n} b_j r_{i-j} = -r_i \quad , \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{6.9.3}$$
写成矩阵形式
$$\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & \cdots & r_{n-1} \\ r_1 & r_0 & \cdots & r_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n-1} & r_{n-2} & \cdots & r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$
该方程组的系数矩阵是对称 Toeplitz 矩阵，称为 Yule-Walker 方程. 它表示预测滤波的参数与过程相关函数之间的密切关系.

如果在式(6.9.1)等号两边同乘以 x_{k-i}，并在所有 i 上取数学期望，即
$$\mathrm{E}[x_k x_{k-i}] + \sum_{j=1}^{n} b_j \mathrm{E}[x_{k-j} x_{k-i}] = \mathrm{E}[A e_k x_{k-i}]$$

则当系统的输入 e_k 是零均白噪声时，由于 e_k 与 x_{k-i} 互不相关，所以 $E[Ae_kx_{k-i}]=0$，可以证明，其结果与式(6.9.3)是一致的. 这说明任何一个随机过程都可以看成是由一个典型的白噪声激励所产生的. 当白噪声激励的随机信号为平稳过程时，该信号模型如式(6.9.1)所示.

§6.10 最小二乘滤波与特征滤波

在工程技术中所接收到的信号一般都包括两个成分：一个是有效信号，它是实际中需要的；另一个是干扰信号，它是实际中不需要的. 这两种成分合在一起就是实际得到的信号. 所谓滤波，就是对原始信号进行过滤，改变其频率成分，以达到削弱干扰、突出信号的目的.

最小二乘滤波是一种最佳滤波，即按照最小二乘准则来设计滤波器. 这种方法具有简单、灵活、有效的特点，因此在信号数字处理中，最小二乘滤波已成为最基本的滤波方法之一. 以下讨论最小二乘滤波的一般原理. 根据这个原理，针对不同的问题可以设计出各种最小二乘滤波.

离散输入信号 x_k 经滤波因子 $\boldsymbol{h}=(h_0,h_1,\cdots,h_{n-1})^{\mathrm{T}}$ 滤波后，就得到实际输出

$$y_k=\sum_{i=0}^{n-1}h_ix_{k-i} \tag{6.10.1}$$

作滤波最关键的是确定或设计滤波因子 $\boldsymbol{h}$. 要求确定滤波因子 $\boldsymbol{h}$，使得 x_k 经滤波之后与一个已知信号 z_k 尽可能接近，而最小二乘滤波要求输出的均方误差

$$\varepsilon=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(y_k-z_k)^2=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Big(\sum_{i=0}^{n-1}h_ix_{k-i}-z_k\Big)^2$$

为最小. 由

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial h_j} = 2\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} h_i x_{k-i} - z_k\right) x_{k-j} = 0, \quad j = 0,1,\cdots,n-1$$

得

$$\sum_{i=0}^{n-1} h_i\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_{k-i} x_{k-j}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z_k x_{k-j}, \quad j = 0,1,\cdots,n-1 \tag{6.10.2}$$

令

$$r_j = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k x_{k-j}, \quad \tilde{r}_j = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z_k x_{k-j}$$

则 r_j 是 x_k 的自相关函数，$\tilde{r}_j$ 是 z_k 和 x_k 的互相关函数，代入式(6.10.2)得

$$\sum_{i=0}^{n-1} h_i r_{|j-i|} = \tilde{r}_j, \quad j = 0,1,\cdots,n-1$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & \cdots & r_{n-1} \\ r_1 & r_0 & \cdots & r_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n-1} & r_{n-2} & \cdots & r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{r}_0 \\ \tilde{r}_1 \\ \vdots \\ \tilde{r}_{n-1} \end{bmatrix}$$

称该方程组为**最小二乘滤波方程**，其系数矩阵是对称 Toeplitz 矩阵. 由该方程组解出的 $\boldsymbol{h}$ 称为**最小二乘滤波因子**.

输入信号 x_j 经滤波后的输出能量为

$$E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} h_i x_{k-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} h_j x_{k-j}\right) =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} h_i h_j \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{k-i} x_{k-j} =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} h_i h_j r_{|j-i|} = \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{T} \boldsymbol{h}$$

其中 $\boldsymbol{T} = (r_{|j-i|})_{i,j=0}^{n-1}$ 是自相关矩阵，它是对称 Toeplitz 矩阵，$\boldsymbol{h}$ 是滤波因子. 须确定滤波因子 $\boldsymbol{h}$ 使得输出能量 E 在条件

$$\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h} = \sum_{k=0}^{n-1} h_k^2 = 1 \tag{6.10.3}$$

下达到最小. 利用拉格朗日乘数法,求 $f = \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{h} + \lambda(1 - \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h})$ 的最小值. 由

$$\frac{\partial f}{\partial h_j} = 2\sum_{j=0}^{n-1} h_j r_{|j-i|} - 2\lambda h_k = 0, \quad j = 0,1,\cdots,n-1$$

得

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{h} = \lambda\boldsymbol{h}$$

可见,解 $\boldsymbol{h}$ 是 $\boldsymbol{T}$ 的对应特征值 λ 的特征向量. 上式右乘 $\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}$ 得

$$\lambda = \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{h}$$

即 λ 是滤波器的输出能量. 从而,为使输出能量 E 在条件(6.10.3)下为最小,应取 λ 为 $\boldsymbol{T}$ 的最小特征值 λ_{min},且 $\boldsymbol{h}$ 是对应的单位特征向量.

如果考虑另一类问题,选择向量 $\boldsymbol{h} = (h_0, h_1, \cdots, h_{n-1})$ 使得

$$\lambda = \frac{\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}} \tag{6.10.4}$$

为最大. 如同上述,上式的分子是以信号 x_t 作为输入时该滤波器的输出能量,而分母为以单位功率白噪声作为输入时滤波器的输出能量,从而式(6.10.4)表示一类信噪比. 若希望信噪比为最大,该问题的解 λ 应是 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{h} = \lambda\boldsymbol{h}$ 的最大特征值 λ_{max},而 $\boldsymbol{h}$ 是对应的特征向量.

由 $\boldsymbol{T}$ 的特征向量 $\boldsymbol{h}$ 作为滤波因子所确定的滤波称为**特征滤波**.

§6.11 线性反馈移位寄存器设计

移位寄存器是由串联的存储器(双稳态触发器)和开关网络所组成,每个存储器称为一位. 当移位脉冲来到时,每位的内容移到下一位,最后一位移出的内容即为输出. 为了保持连续工作,将移

位寄存器的内容经过适当的逻辑运算后，反馈到第一位去作为输入. 如图 6.11.1 所示为一个 n 级反馈移位寄存器. 图中上面一排小方框，自左至右，分别称为第 1 级、第 2 级、…、第 $n-1$ 级及第 n 级存储器，下面一个长方框内所示的开关网络可视为具有 n 个输入端及一个输出端的组合门电路，它可表为

$$\xi_{n+1} = f(\xi_n, \xi_{n-1}, \cdots, \xi_1)$$

称之为该组合门电路的反馈逻辑函数.

上述反馈移位寄存器的工作是受脉冲控制的. 假定在第 j 个移位脉冲到来时，移位寄存器的状态是 $(\xi_n, \xi_{n-1}, \cdots, \xi_2, \xi_1)$，于是再来一个脉冲使 j 增至 $j+1$ 时，最右边的一级在第 j 拍之状态 ξ_1 即为输出，并且每个存储器在第 $j+1$ 拍之状态恰为邻接于它的左面的存储器在第 j 拍之状态. 同时，这 n 个寄存器在第 j 拍之状态输入至开关网络后，相应的输出为 $\xi_{n+1} = f(\xi_n, \xi_{n-1}, \cdots, \xi_1)$，它反馈给最左面一级，作为第 1 级寄存器在第 $j+1$ 拍的状态. 这样，从第 j 拍过渡到第 $j+1$ 拍后，移位寄存器的状态变为 $(\xi_{n+1}, \xi_n, \cdots, \xi_3, \xi_2)$.

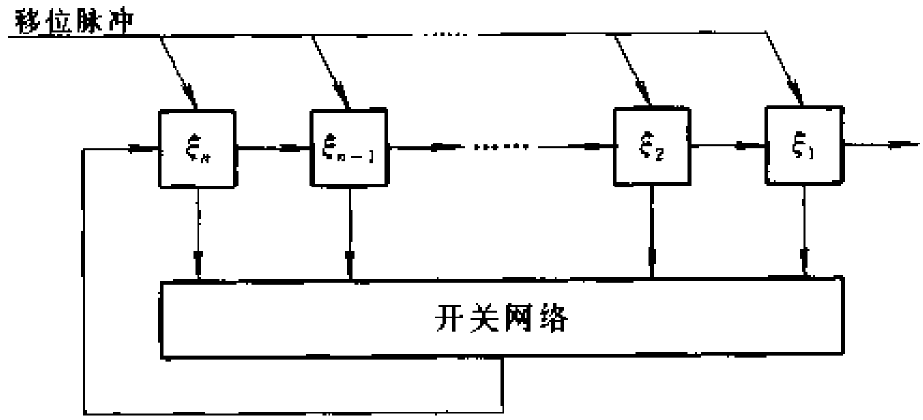

图 6.11.1

从上面分析不难看出，对于反馈移位寄存器来说，起决定性作用的是反馈逻辑函数 $f(\xi_n, \xi_{n-1}, \cdots, \xi_1)$. 当 $f(\xi_n, \xi_{n-1}, \cdots, \xi_1)$ 可表为 n 个变元 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 的齐次线性函数

$$f(\xi_n,\xi_{n-1},\cdots,\xi_1)=x_n\xi_n+x_{n-1}\xi_{n-1}+\cdots+x_1\xi_1$$

时，相应的移位寄存器就叫做**线性反馈移位寄存器**.

如果已知 n 级线性反馈移位寄存器的 $2n$ 个状态，即已知 ξ_1，$\xi_2,\cdots,\xi_{2n}$，要设计出相应的线性反馈移位寄存器，即确定线性反馈逻辑函数，则有

$$\xi_k=x_n\xi_{k-1}+x_{n-1}\xi_{k-2}+\cdots+x_1\xi_{k-n},\quad k=n+1,\cdots,2n$$

即

$$\begin{bmatrix}\xi_n & \xi_{n-1} & \cdots & \xi_1\\ \xi_{n+1} & \xi_n & \cdots & \xi_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \xi_{2n-1} & \xi_{2n-2} & \cdots & \xi_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_n\\ x_{n-1}\\ \vdots\\ x_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi_{n+1}\\ \xi_{n+2}\\ \vdots\\ \xi_{2n}\end{bmatrix}\qquad(6.11.1)$$

这是以 Toeplitz 矩阵为系数阵的线性方程组. 只要其系数阵可逆，必有一个准确地满足该方程组的线性反馈移位寄存器. 若此矩阵不可逆，则可有多个解或无解.

参考文献

1 Levinson N. Appendix. In: Wiener N. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. New York: Wiley, 1949

2 Grenander U , Szegö G. Toeplitz forms and their applications. Berkeley: University of California Press, 1958

3 Durbin J. The fitting of time-series models. Rev. Inst. Statist., 1960, 28:233~243

4 Lewis F A. Circulants and their groups. Am. Math. Mon., 1960, 67: 256~266

5 Tee G J. An application of P-cyclic matrices for solving periodic parobolic problem. Numer. Math., 1964, 6:141~159

6 Trench W F. An algorithm for the inversion of finite Toeplitz matrices. J. Soc. Indust. Appl. Math., 1964, 12:515~522

7 Trench W F. An algorithm for the inversion of finite Hankel matrices. J. Soc. Indust. Appl. Math., 1965, 13:1102~1107

8 Bareiss E H. Numerical solution of linear equations with Toeplitz and vector Toeplitz matrices. Numer. Math., 1969, 13:404~424

9 Chow T S. A class of Hessenberg matrices with known eigenvalues and inverses. SIAM Rev., 1969, 11:391~395

10 Lovass-Nagy V, Powers D L. Reduction of functions of some partitioned matrices. Math. Comp., 1969, 23:127~133

11 Zohar S. Toeplitz matrix inversion: the algorithm of W. F. Trench. J. Ass. Comput. Mach., 1969, 16:592~601

12 Good I J. The inverse of a centrosymmetric matrix. Technometrics, 1970, 12:925~928

13 Ray W D. The inverse of a finite Toeplitz matrix. Technometrics, 1970, 12:153~156

14 Fairweather G. On the eigenvalues and eigenvectors of a class of Hessenberg matrices. SIAM Rev., 1971, 13:220~221

15 Paardekooper M H C. An eigenvalue algorithm for skew-symmetric matrix. Numer. Math., 1971, 17:189~202

16 Phillips J L. The triangular decomposition of Hankel matrices. Math. Comp., 1971, 25(115):599~602

17 Gohberg I C, Krupnik N Ya. A formula for the inversion of finite Toeplitz matrices (in Russian). Mat. Issled., 1972, 7(12):272~283

18 Gohberg I C, Semencul A A. On the inversion of finite Toeplitz matrices and their continuous analogs (in Russian). Mat. Issled., 1972, 7(2):201~223

19 Huang N M, Cline R E. Inversion of persymmetric matrices having Toeplitz inverses. J. Assoc. Comput. Mach., 1972, 19:437~444

20 Justice J H. An algorithm for inverting positive definite Toeplitz matrices. SIAM J. Appl. Math., 1972, 23:289~291

21 Akaike H. Block Toeplitz matrix inversion. SIAM J. Appl. Math., 1973, 24:234~241

22 Allgower E L. Exact inverses of certain band matrices. Numer. Math., 1973, 21:279~284

23 Andrew A L. Eigenvectors of certain matrices. Linear Algebra Appl., 1973, 7:151~162

24 Pye W C, Boullion T L, Atchison T A. The pseudoinverse of a centrosymmetric matrix. Linear Algebra Appl., 1973, 6:201~204

25 Rissanen J. Algorithm for trianglar decomposition of block Hankel and Toeplitz matrices with application to factoring positive matrix polynomials. Math. Comp., 1973, 27:147~154

26 Watson G A. An algorithm for the inversion of block matrices of Toeplitz form. J. Assoc. Comput. Mach., 1973, 20:409~415

27 Ben-Israel A, Greville T N E. Generalized inverses: theory and applications. New York: Wiley, 1974

28 Cline R E, Plemmons R J, Worm G. Generalized inverses of certain Toeplitz matrices. Linear Algebra Appl., 1974, 8:25~33

29 Goldstein M J. Reduction of the eigenproblem for Hermitian

persymmetric matrix. Math. Comp., 1974, 28:237~238

30 Goldstein M J. Reduction of the pseudoinverse of a Hermitian persymmetric matrix. Math. Comp., 1974, 28:715~717

31 Justice J H. The Szegö recursion relation and inverses of positive definite Toeplitz matrices. SIAM J. Math. Anal., 1974, 5:503~508

32 Rissanen J. Solution of linear equations with Hankel and Toeplitz matrices. Numer. Math., 1974, 22:361~366

33 Trench W F. Inversion of Toeplitz band matrices. Math. Comp., 1974, 28:1089~1095

34 Zohar S. The solution of a Toeplitz set of linear equations. J. Ass. Comput. Mach., 1974, 21:272~276

35 Singh I, Poole G, Boullion T. A class of Hessenberg matrices with know pseudoinverse and Drazin inverse. Math. Comp., 1975, 29:615~619

36 Cantoni A, Butler P. Eigenvalues and eigenvectors of symmetric centrosymmetric matrices. Linear Algebra Appl., 1976, 13:275~288

37 Mentz R P. On the inverse of some covariance matrices of Toeplitz type. SIAM J. Appl. Math., 1976, 31:426~437

38 Ronald L S. Moore-Penrose inverses of block circulant and block k-circulant matrices. Linear Algebra Appl., 1977, 16:237~245

39 Bunch J R, Nielsen C P, Sorensen D C. Rank-one modification of the symmetric eigenproblem. Numer. Math., 1978, 31:31~48

40 Roebuck P A, Barnett S. A survey of Toeplitz and related matrices. INT. J. Systems Sci., 1978, 9:921~934

41 Smith R L. The Moore-Penrose inverse of a retrocirculant. Linear Algebra Appl., 1978, 22:1~8

42 Davis P J. Circulant matrices. New York: Wiley, 1979

43 Dickinson B W. Efficient solution of linear equations with banded Toeplitz matrices. IEEE ASSP, 1979, 27:421~423

44 Frielander B, Morf M, Kailath T, Ljung L. New inversion formulas for matrices classified in terms of their distance from Toeplitz matrices.

Linear Algebra Appl., 1979, 27:31~60

45 Jain J R. An efficient algorithm for a large Toeplitz set of linear equations. IEEE ASSP, 1979, 27:612~615

46 Kailath T, Sun-Yuan Kung, Morf M. Displacement ranks of matrices and linear equations. J. Math. Anal. Appl., 1979, 68:395~407

47 Searle S R. On inverting circulant matrices. Linear Algebra Appl., 1979, 25:77~89

48 武际可，邵秀明. 循环矩阵及其在结构计算中的应用. 计算数学，1979, 2:144~154

49 Bitmead R R, Anderson B D O. Asymptotically fast solution of Toeplitz and related systems of linear equations. Linear Algebra Appl., 1980, 34:103~116

50 Cybenko G. The numerical stability of the Levinson-Durbin algorithm for Toeplitz systems of equations. SIAM J. Sci. Statist. Comput., 1980, 1:303~319

51 Evans D J. On the solution of certain Toeplitz tridiagonal linear systems. SIAM J. Numer. Anal., 1980, 17:675~680

52 Bell C L. Generalized inverses of circulant and generalized circulant matrices. Linear Algebra Appl., 1981, 39:133~142

53 Makhoul J. On the eigenvectors of symmetric Toeplitz matrices. IEEE ASSP, 1981, 29:868~872

54 李炯生. 轮回矩阵的逆矩阵. 数学的实践与认识，1981, 2:32~37

55 Carayannis G, Kalouptsidis N, Manolakis D G. Fast recursive algorithms for a class of linear equations. IEEE ASSP, 1982, 30:227~239

56 Iohvidov I S. Hankel and Toeplitz matrices and form. Bsel: Birkhäuser, 1982.

57 Merchant G A, Parks T W. Efficient solution of a Toeplitz-plus-Hankel coefficient matrix system of equations. IEEE ASSP, 1982, 30:40~44

58 陈明逵. 解特殊三对角线性方程组的修正追赶法. 西安交通大学学报，1982, 16:85~94

59 李天林. 循环矩阵的几个性质. 数学通报, 1982, 2:30～33

60 Bini D, Capovani M. Spectral and computational properties of band symmetric Toeplitz matrices. Linear Algebra Appl., 1983, 52/53:99～126

61 Greville T N E. Toeplitz matrices with Toeplitz inverses revisited. Linear Algebra Appl., 1983, 55:87～92

62 Meek D S. The inverses of Toeplitz band matrices. Linear Algebra Appl., 1983, 49:117～129

63 李天林. 循环矩阵的逆矩阵与分解定理. 北京师范大学学报, 1983, 2:19～28

64 游兆永. 线性代数与多项式的快速算法. 上海科学技术出版社, 1983

65 Bini D. Parallel solution of certain Toeplitz linear systems. SIAM J. Comput., 1984, 13:268～276

66 Cybenko G. On the eigenstructure of Toeplitz matrices. IEEE ASSP, 1984, 32:918～921

67 Fiedler M. Hankel and Loewner matrices. Linear Algebra Appl., 1984, 58:75～95

68 Gover M J C, Barnett S. Inversion of certain extensions of Toeplitz matrices. J. Math. Anal. Appl., 1984, 100:339～353

69 Gover M J C, Barnett S. Generating polynomials for matrices with Toeplitz or conjugate-Toeplitz inverses. Linear Algebra Appl., 1984, 61:253～275

70 Heinig G, Rost K. Algebra methods for Toeplitz-like matrices and operators. Berlin: Akademie-Verlag, and Boston: Birkhauser-Verlag, 1984

71 Sweet D R. Fast Toeplitz orthogonalization. Numer. Math., 1984, 43:1～21

72 Vavrín Z. Inverses of Löwner matrices. Linear Algebra Appl., 1984, 63:227～236

73 张垚. r-循环阵的逆阵或广义逆阵. 数学的实践与认识, 1984, 2:18～26

74 Delsarte P, Genin Y V, Kamp Y G. A generalization of the Levinson algorithm for Hermitian Toeplitz matrices with any rank profile. IEEE ASSP, 1985, 33:964～971

75 Gover M J C, Barnett S. Inversion of Toeplitz matrices which are not strongly non-singular . IMA J. Numer. Anal. 1985, 5:101～110

76 Horn R A, Johnson C R. Matrix analysis. Cambridge University Press, 1985

77 Hu Y H, Kung S Y. Toeplitz eigensystem solver. IEEE ASSP, 1985, 33:1264～1271

78 Kumar R. A fast algorithm for solving a Toeplitz system of equations. IEEE ASSP, 1985, 33:254～267

79 Percus J K. Finite sections of Toeplitz-like matrices. Comm. Pure Applied Math. , 1985, XXXVIII:835～844

80 Trench W F. On the eigenvalue problem for Toeplitz band matrices. Linear Algebra Appl. , 1985, 64:199～214

81 Trench W F. On the eigenvalue problem for Toeplitz matrices generated by rational functions. Linear and Multilinear Algebra, 1985, 17:337～353

82 庄瓦金. 具有回复循环子块的块 k-循环矩阵的某些性质. 工程数学学报, 1985, 2:117～121

83 Ben-Artzi A, Shalom T. On inversion of Toeplitz and close to Toeplitz matrices. Linear Algebra Appl. , 1986, 75:173～192

84 Bojanczyk A W, Brent R P, de Hoog F R. QR factorization of Toeplitz matrices. Numer. Math. , 1986, 49:81～94

85 Cybenko G, Loan C V. Computing the minimum eigenvalue of a symmetric positive definite Toeplitz matrix. SIAM J. Sci. Stat. Comput. , 1986, 7:123～131

86 Gohberg I, Kailath T, Koltracht I. Efficient solution of linear systems of equations with recursive structure. Linear Algebra Appl. , 1986, 80:81～113

87 游兆永, 李磊. 求 Toeplitz 矩阵各阶主子式和特征值的 $O(n^2)$ 算法. 数

学研究与评论，1986，6:94

88 Cybenko G. Fast Toeplitz orthogonation using inner products. SIAM J. Sci. Stat. Comput.，1987，8(5):734~740

89 Gohberg I，Kailath T，Koltracht I，Lancaster P. Linear complexity parallel algorithms for linear systems of equations with recursive structure. Linear Algebra Appl.，1987，88/89:271~315

90 Mingkui Chen. On the solution of circulant linear systems. SIAM J. Numer. Anal.，1987，24:668~683

91 Shalom T. On algebras of Toeplitz matrices. Linear Algebra Appl.，1987，96:211~226

92 Tismenetsky M. Determinant of block-Toeplitz band matrices. Linear Algebra Appl.，1987，85:165~184

93 Trench W F. A note on solving nearly triangular Toeplitz systems. Linear Algebra Appl.，1987，93:57~65

94 Wilkes D M，Hayes M H. An eigenvalue recursion for Toeplitz matrices. IEEE ASSP，1987，35:907~909

95 陈明逵. Toeplitz 三对角线性方程组的快速并行算法. 工程数学学报，1987，4:59~63

96 屠伯埙. 对称循环阵的特征值与非异性. 工程数学学报，1987，3:47~52

97 游兆永，李磊. 关于三角形 Toeplitz 系统的复杂性. 计算数学，1987，3:262~265

98 游兆永，李磊. 多重循环矩阵的特征形式及有关算法的复杂性. 工程数学学报，1987，1:16~20

99 Bini D，Pan V. Efficient algorithm for the evaluation of the eigenvalues of (block) banded Toeplitz matrices. Math. Comp.，1988，50:431~448

100 Bistritz Y，Kailath T. Inversion and factorization of non-Hermitian quasi-Toeplitz matrices. Linear Algebra Appl.，1988，98:77~121

101 Fiedler M，Pták V. Loewner and Bézout matrices. Linear Algebra Appl.，1988，101:187~220

102 Heinig G, Jankowski P, Rost K. Fast inversion algorithm of Toeplitz-plus-Hankel matrices. Numer. Math., 1988, 52:665～682

103 Heinig G, Rost K. On the inverses of Toeplitz-plus-Hankel matrices. Linear Algebra Appl., 1988, 106:39～52

104 Heinig G, Tewordos A. On the inverse of Hankel and Toeplitz mosaic matrices. In: Seminar analysis: operator equations and numerical Analysis. Berlin: Karl-Weierstra-Institut, 1988. 53～65

105 Laurie D P. A numerical approach to the inverse Toeplitz eigenproblem. SIAM J. Sci. Stat. Comput., 1988, 9:401～405

106 Trench W F. Toeplitz systems associated with the product of a formal Laurent series and a Laurent polynomial. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 1988, 9:181～193

107 Vavrín Z. Multiplication of diagonal transform Loewner matrices. Linear Algebra Appl., 1988, 99:1～40

108 Xu Zhong. On inverses and generalized inverses of Hessenberg matrices. Linear Algebra Appl., 1988, 101:167～180

109 李磊. Toeplitz 矩阵乘 Vandermonde 矩阵的快速算法. 数学的实践与认识, 1988, 2:29～31

110 游兆永, 路浩. 多重 Toeplitz 矩阵与多重 Hankel 矩阵相乘的复杂度. 计算数学, 1988, 3:311～318

111 游兆永, 李磊. 一些多维问题的快速算法. 西安交通大学学报, 1988, 22:125～126

112 余品能. 块循环矩阵求逆的一种快速富里叶变换(FFT)算法. 数学的实践与认识, 1988, 3:25～30

113 Chun J, Kailath T. A constructive proof of the Gohberg-Semencul formula. Linear Algebra Appl., 1989, 121:475～489

114 Gover M J C. The determination of companion matrices characterizing Toeplitz and r-Toeplitz matrices. Linear Algebra Appl., 1989, 117: 81～92

115 Heinig G, Hoppe W, Rost K. Structured matrices in interpolation and approximation problems . Wissenschaftl. *Zeitschrift der* TU

Karl-Marx-Stadt, 1989, 31(2):196～202

116 Heinig G, Rost K. Matrix representation of Toeplitz-plus-Hankel matrix inverses. Linear Algebra Appl., 1989, 113:65～78

117 Trench W F. Numerical solution of the eigenvalue problem for Hermitian Toeplitz matrices. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 1989, 10:135～146

118 Wimmer H K. Generalized Bezoutians and block Hankel matrices. Linear Algebra Appl., 1989, 117:105～113

119 杜友李. 循环分块阵特征值求法. 数学的实践与认识, 1989, 4:82～84

120 路浩. 广义 Hilbert 矩阵与向量积及一类广义 Hilbert 方程解的计算复杂性. 科学通报, 1989, 13:963～966

121 马利庄. 循环矩阵的推广. 计算数学, 1989, 1:58～63

122 游兆永, 李磊. 具有三角形 Toeplitz 矩阵的病态最小二乘问题的快速算法. 高等学校计算数学学报, 1989, 4:373～375

123 游兆永, 路浩. 块 Toeplitz 三角阵求逆及块 Toeplitz 三角线性方程组求解的复杂性. 数学研究与评论, 1989, 9:101～106

124 曾泳泓. r-循环矩阵的快速算法和并行算法. 数值计算与计算机应用, 1989, 10:36～42

125 Gohberg I, Shalom T. On Bezoutians of nonsquare matrix polynomials and inversion of matrices with nonsquare blocks. Linear Algebra Appl., 1990, 137/138: 249～323

126 Keliba N T. A note on conjugate Toeplitz matrices. Linear Algebra Appl., 1990, 139:103～109

127 Labahn G, Choi D K, Cabay S. The inverses of block Hankel and block Toeplitz matrices. SIAM J. Comput., 1990, 19:98～123

128 游兆永, 路浩. Toeplitz 矩阵, Hankel 矩阵求逆的快速算法. 西安交通大学学报, 1990, 24:131～134

129 游兆永, 路浩. 有理 g-轮换阵之性质及 g-轮换阵求逆的计算复杂性. 数学研究与评论, 1990, 10:121～125

130 游兆永, 路浩. Toeplitz 矩阵, Hankel 矩阵求逆的固有复杂度. 应用

数学学报，1990，13:216～222

131 Arbenz P. Computing eigenvalues of banded symmetric Toeplitz matrices. SIAM J. Sci. Stat. Comput.，1991，12:743～754

132 Chun J, Kailath T. Displacement structure for Hankel，Vandermonde，and related (derived) matrices. Linear Algebra Appl.，1991，151:199～227

133 Vavrín Z. A unified approach to Loewner and Hankel matrices. Linear Algebra Appl.，1991，143:171～222

134 Xu Zhong. An algorithm for the inversion of quasi-Hessenberg matrices. Linear Algebra Appl.，1991，144:40～47

135 李磊. 关于并行计算中的等价性定理与 Toeplitz 三对角方程的并行解. 应用数学学报，1991，14(3):323～330

136 沈光星. 关于某些循环矩阵的特征值. 应用数学，1991，3:76～82

137 沈光星. 块 r-循环阵和块对称 r-循环阵及有关算法的计算复杂性. 工程数学学报，1991，4:99～110

138 游兆永，路浩. 分块 TOEPLITZ 循环阵，分块 HANKEL 循环阵的性质及快速算法. 西安交通大学学报，1991，25:61～68

139 游兆永，路浩. 一类 Toeplitz 线性方程组与多项式除法的复杂性. 数学研究与评论，1991，11:455～464

140 Fiedler M，Vavrín Z. A subclass of symmetric Loewner matrices. Linear Algebra Appl.，1992，170:47～51

141 Heinig G，Jankowski P. Kernel structure of block Hankel and Toeplitz matrices and partial realization. Linear Algebra Appl.，1992，175:1～30

142 Labahn G. Inversion components of block Hankel-like matrices. Linear Algebra Appl.，1992，177:7～48

143 Xu Zhong. On Moore-Penrose inverses of Toeplitz matrices. Linear Algebra Appl.，1992，169:9～15

144 毛纲源. 等差-等比循环矩阵的逆矩阵求法. 应用数学，1992，5:95～101

145 沈光星. 关于 r-循环系统的计算复杂性. 数学研究与评论，1992，12:

595～598

146 Fiedler M, Vavrín Z. Polynomial compatible with a symmetric Loewner matrices. Linear Algebra Appl., 1993, 190:235～251

147 Freund R W, Zha H. A look-ahead algorithm for the solution of general Hankel systems. Numer. Math., 1993, 64:295～321

148 Heinig G, Hellinger F. On the Bezoutian structure of the Moore-Penrose inverses of Hankel matrices. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 1993, 14:629～645

149 Pal D, Kailath T. Fast triangular factorization and inversion of Hermitian, Toeplitz, and related matrices with arbitrary rank profile. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 1993, 14:1016～1042

150 蒋增荣，曾泳泓，余品能. 快速算法. 长沙：国防科技大学出版社，1993

151 路浩. Vandermonde 方程 Hilbert 方程及 Vandermonde 矩阵 Hilbert 矩阵逆的快速算法. 计算数学，1993，4:410～419

152 徐仲，陆全. 一类 2-Hessenberg 矩阵的广义逆. 应用数学学报，1993，16:354～365

153 Boros T, Sayed A H, Kailath T. Structured matrices and unconstrained rational interpolation problem. Linear Algebra Appl., 1994, 203/204:155～188

154 Chen G N, Zhang H P. More on Loewner matrices. Linear Algebra Appl., 1994, 203/204:265～300

155 Chu M T, Erbrecht M A. Symmetric Toeplitz matrices with two prescribed eigenpairs. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 1994, 15:623～635

156 Handy S L, Barlow J L. Numerical solution of the eigenproblem for banded, symmetric Toeplitz matrices. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 1994, 15:205～214

157 Heinig G, Hellinger F. Moore-Penrose inversion of square Toeplitz matrices. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 1994, 15:418～450

158 Kailath T, Chun J. Generalized displacement structure for block-Toeplitz, Toeplitz-block, and Toeplitz-derived matrices. SIAM J.

Matrix Anal. Appl., 1994, 15:114～128

159 Pal D, Kailath T. Fast triangular factorization and inversion of Hankel and related matrices with arbitrary rank profile. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 1994, 15:451～478

160 Trench W F. Some spectral properties of Hermitian Toeplitz matrices. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 1994, 15:938～942

161 Varah J M. Backward error estimates for Toeplitz systems. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 1994, 15:408～417

162 Gutknecht M H, Hochbruck M. The stability of inversion formulas for Toeplitz matrices. Linear Algebra Appl., 1995, 223/224:307～324

163 Graves-Morris P R, Johnson C R. Determinantal inequalities for diagonally signed matrices and an application to Gram-Cauchy matrices. Linear Algebra Appl., 1995, 225:125～140

164 Heinig G. Generalized inverses of Hankel and Toeplitz mosaic matrices. Linear Algebra Appl., 1995, 216:43～59

165 Rose K, Vavrín Z. Recursive solution of Löwner-Vandermonde systems of equation. Ⅱ. Linear Algebra Appl., 1995, 223/224:597～617

166 江兆林. 关于两类循环矩阵的非异性. 数学的实践与认识, 1995, 2:52～58

167 王宏禹. 数字信号处理专论. 北京: 国防工业出版社, 1995 年.

168 Bevilacqua R, Bozzo E. On algebras of symmetric Loewner matrices. Linear Algebra Appl., 1996, 248:241～251

169 Chandrasekaran S, Sayed A H. Stabilizing the generalized Schur algorithm. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 1996, 17:950～983

170 Chen G N, Zhao B, Zhang H P. The general rational interpolation problem in the scalar case and its Hankel vector. Linear Algebra Appl., 1996, 244:165～201

171 Ellis R L, Gohberg I, Lay D C. On a class of block Toeplitz matrices. Linear Algebra Appl., 1996, 241/243:225～245

172 Feldmann S, Heinig G. Vandermonde factorization and canonical representations of block Hankel matrices. Linear Algebra Appl., 1996, 241/243:247～278

173 Farenick D R, Krupnik M, Krupnik N, Lee W Y. Normal Toeplitz matrices. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 1996, 17:1037～1043

174 Gallivan K A, Thirumalai S, Van Dooren P, Vermaut V. High performance algorithms for Toeplitz and block Toeplitz matrices. Linear Algebra Appl., 1996, 241/243:343～388

175 Ito T. Every normal Toeplitz matrix is either of type I or of type II. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 1996, 17:998～1006

176 Rose K, Vavrín Z. Recursive solution of Löwner-Vandermonde systems of equation. I. Linear Algebra Appl., 1996, 233:51～65

177 Serra S. Preconditioning strategies for Hermition Toeplitz systems with nondefinite generating functions. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 1996, 17:1007～1019

178 邓四清. r-循环矩阵的逆. 工科数学, 1996, 12:95～97

179 徐仲. 范德蒙矩阵类的快速算法. 西安: 西北工业大学出版社, 1997.

180 徐仲, 游兆永. 范德蒙类矩阵之方程组的递进算法. 数值计算与计算机应用, 1997, 4:288～297

181 张贤达. 信号处理中的线性代数. 北京: 科学出版社, 1997.

182 Xu Zhong, You Zhaoyong. A fast algorithm for the inversion of confluent Vandermonde-like matrices involving polynomial that satisfy a three-term recurrence relation. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 1998, 19:797～806

183 徐仲, 陆全. 中心与反中心对称矩阵的逆和广义逆. 数学通报, 1998, 7:37～42