离散时间系统的时域分析（Python 教程）

2019 年 6 月 16 日

1 离散时间系统的时域分析

在时域中，离散时间系统对输入信号或者延迟信号进行简单运算处理，生成具有所需特性的输出信号。本节的目的就是通过 Python 仿真一些简单的离散时间系统，并研究它们的时域性质。## 离散时间系统仿真本书中，我们主要研究的线性时不变离散时间系统，形式如下的线性常系数差分方程来描述。

$$\sum_{k=0}^{N} d_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} p_k x[n-k]$$

其中，$x[n]$ 和 $y[n]$ 分别是系统的输入和输出，$d[k]p[k]$ 为常数，离散时间系统的阶数为 $\max(N, M)$，表示系统差分方程的阶数。

若系统是因果的，还可以进一步将上述形式化简

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} \frac{d_k}{d_0} y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} \frac{p_k}{d_0} x[n-k]$$

已知 $x[n]$ 和初始条件 $y[n_0-1], y[n_0-2], \cdots, y[n_0-N]$，那么可以计算出 $y[n]$。

> 利用 Scipy 中的 Signal Processing 包来对系统进行仿真，调用格式为 scipy.signal.lfilter(b, a, x, axis=-1, zi=None) 其中，b 和 a 分别表示系统差分方程的系数，例如

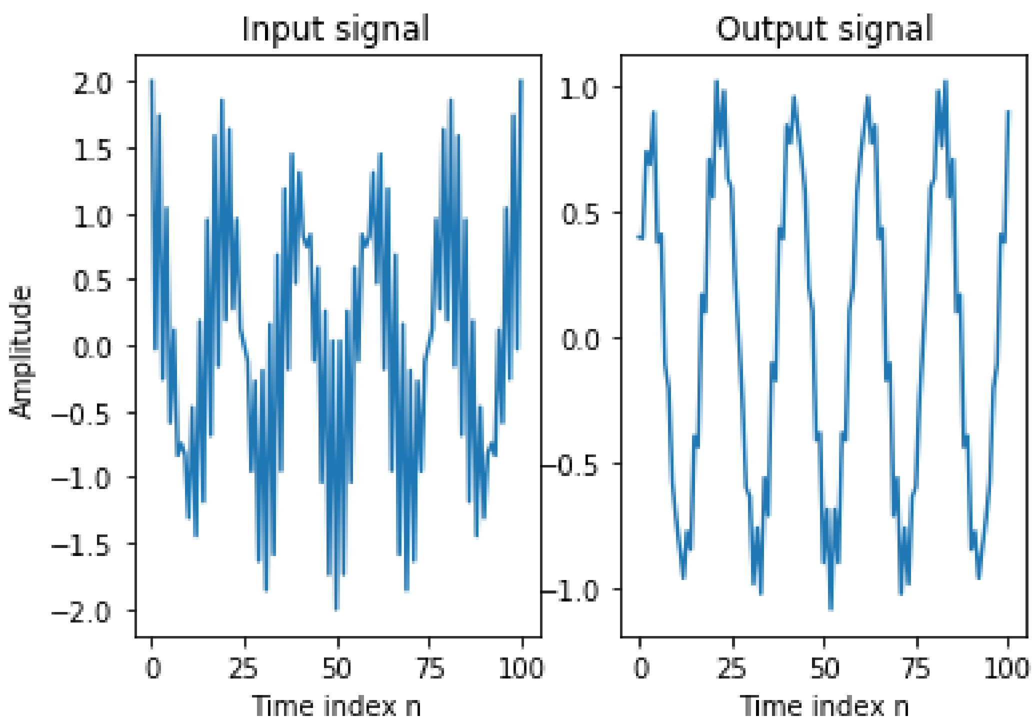
$$a[0]*y[n] = b[0]*x[n] + b[1]*x[n-1] + ... + b[M]*x[n-M] - a[1]*y[n-1] - ... - a[N]*y[n-N]$$

1.0.1 例：滑动平均系统

$$y[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n-k]$$

通过若干个正弦信号之和所组成的信号中滤除高频分量

In [9]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import signal
import numpy as np

n = np.linspace(0,100,101)
s1 = np.cos(2*np.pi*0.05*n)
s2 = np.cos(2*np.pi*0.47*n)
x = s1+s2

M = 5
b = np.ones([M,])
y = signal.lfilter(b,np.array([1,0,0]),x)/M



plt.subplot(121)
plt.plot(n,x)
plt.ylabel('Amplitude')
plt.title('Input signal')
plt.xlabel('Time index n')

plt.subplot(122)
plt.plot(n,y)
plt.title('Output signal')
plt.xlabel('Time index n')
plt.show()
```



1.1 线性系统和非线性系统

对于线性离散时间系统，若 $y_1[n]$ 和 $y_2[n]$ 分别是输入序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的响应，则输入为

$$x[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$$

的输出响应为

$$y[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$$

上式的叠加性质对于任意常量 α 和 β 以及任意输入 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 都成立。

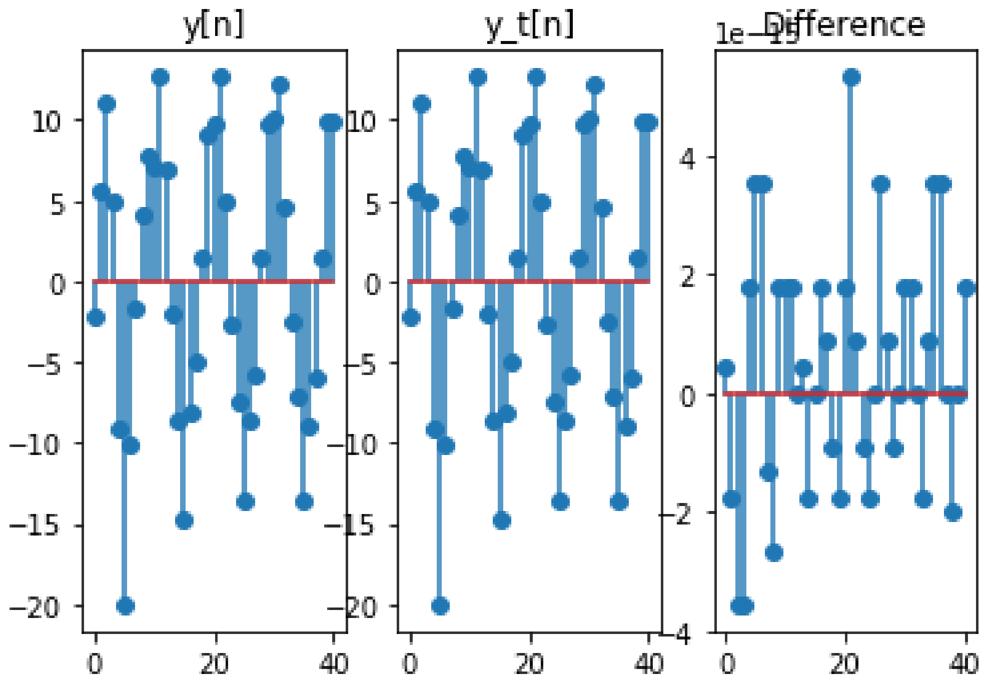
若存在一组非零的 α 和 β，或者一组非零的输入序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$，上述叠加性质不成立，则系统为非线性系统。

现在我们来研究下面这个系统的线性性质，

$$y[n] - 0.4y[n-1] + 0.75y[n-2] = 2.2403x[n] + 2.4908x[n-1] + 2.2403x[n-2)$$

In [2]:
```
# 产生混合信号: 高频正弦 + 低频正弦
n = np.linspace(0,40,41)
s1 = np.cos(2*np.pi*0.1*n)
s2 = np.cos(2*np.pi*0.4*n)
```

```python
a = 2
b = -3
x = a*s1+b*s2

# 定义系统的系数
num = np.array([2.2403,2.4908,2.2403])
den = np.array([1,-0.4,0.75])

# 系统处理（滤波）
ic = np.array([0,0]) # set initial
zi = signal.lfilter_zi(num, den)
y1,_ = signal.lfilter(num,den,s1,zi=zi*ic) # y1[n]
y2,_ = signal.lfilter(num,den,s2,zi=zi*ic) # y2[n]
y,_ = signal.lfilter(num,den,x,zi=zi*ic)   # y[n]
yt = a*y1 + b * y2

# 计算叠加输入的响应和输出直接叠加的差异
d = y-yt


plt.subplot(131)
plt.stem(n,y)
plt.title('y[n]')
plt.subplot(132)
plt.stem(n,yt)
plt.title('y_t[n]')
plt.subplot(133)
plt.stem(n,d)
plt.title('Difference')
plt.show()
```



1.2 时不变系统和时变系统

对于离散时不变系统，若 $y_1[n]$ 是 $x_1[n]$ 的响应，则输入

$$x[n] = x_1[n - n_0]$$

的输出为

$$y[n] = y_1[n - n_0]$$

其中 n_0 是任意整数。上面的输入输出关系，对任意输入序列及相应的输出成立。

若对至少一个输入序列及其相应的输出序列不成立，则称系统为时变的。

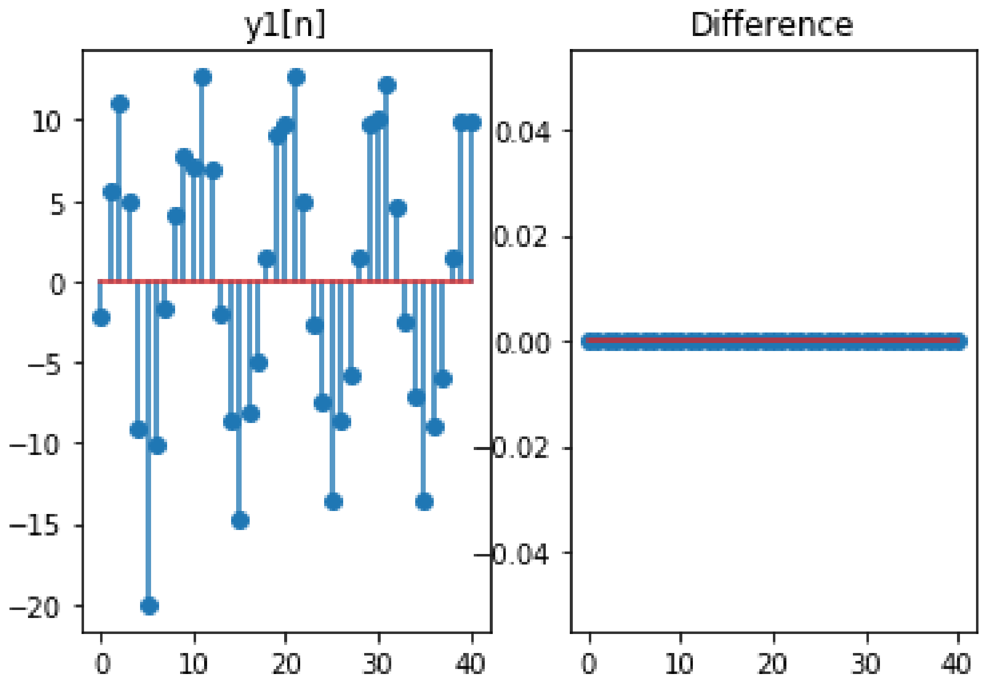
1.2.1 例子

验证如下系统是否为时不变：

$$y[n] - 0.4y[n-1] + 0.75y[n-2] = 2.2403x[n] + 2.4908x[n-1] + 2.2403x[n-2)$$

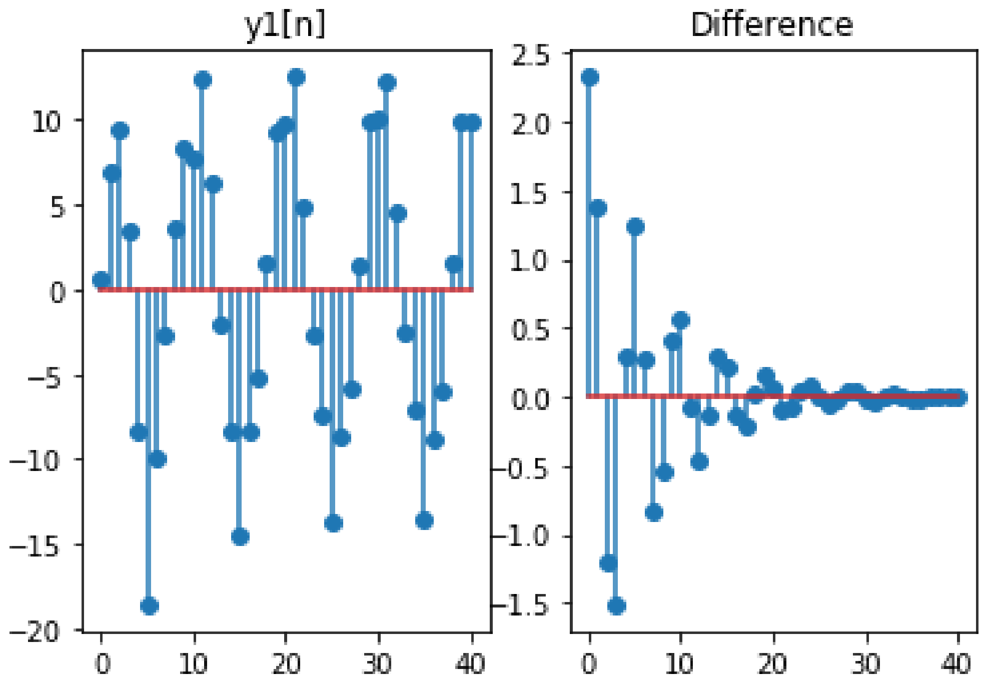
我们产生两个不同的输入序列 $x[n]$ 和 $x[n-D]$，计算出相应的输出序列 $y_1[n]$ 和 $y_2[n]$，以及二者的差 $d[n] = y1[n] - y2[n+D]$，若 $d[n]$ 为 0，则系统是时不变的。

In [3]:
```
# 产生混合信号: 高频正弦 + 低频正弦
n = np.linspace(0,40,41)
a = 2
b = -3
D = 10
x = a*np.cos(2*np.pi*0.1*n)+b*np.cos(2*np.pi*0.4*n)
xd = np.concatenate((np.zeros([D,]),x),axis=0)



# 定义系统的系数
num = np.array([2.2403,2.4908,2.2403])
den = np.array([1,-0.4,0.75])

# 系统处理（滤波）
ic = np.array([0,0]) # set initial
zi = signal.lfilter_zi(num, den)
y1,_ = signal.lfilter(num,den,x,zi=zi*ic) # y1[n]
y2,_ = signal.lfilter(num,den,xd,zi=zi*ic) # y2[n]

y2D = y2[D:] # 计算输入为 x[n-D] 的响应的 D 个单位超前

# 计算输入为 x[n] 的响应与输入为 x[n-D] 的响应的 D 个单位超前之间的差
d = y1-y2D



plt.subplot(121)
plt.stem(n,y1)
plt.title('y1[n]')
plt.subplot(122)
plt.stem(n,d)
plt.title('Difference')
plt.show()
```



若上述系统的初始条件不等于 0，系统还是时不变系统吗?

In [4]:
```
ic = np.array([1,0]) # set initial
zi = signal.lfilter_zi(num, den)
y1,_ = signal.lfilter(num,den,x,zi=zi*ic) # y1[n]
y2,_ = signal.lfilter(num,den,xd,zi=zi*ic) # y2[n]

y2D = y2[D:] # 计算输入为 x[n-D] 的响应的 D 个单位超前

# 计算输入为 x[n] 的响应与输入为 x[n-D] 的响应的 D 个单位超前之间的差
d = y1-y2D

plt.subplot(121)
plt.stem(n,y1)
plt.title('y1[n]')
plt.subplot(122)
plt.stem(n,d)
plt.title('Difference')
plt.show()
```



1.3 线性时不变系统、冲激响应和阶跃响应、卷积

线性时不变（LTI）系统既满足线性性质又满足时不变性质。

离散时间系统对单位样本序列 $\delta[n]$ 的响应称为单位样本响应，或者冲激响应，用 $h[n]$ 来表示。

> 有限冲激和无限冲激响应系统: 冲激响应序列 $h[n]$ 的长度无限长时，称系统为无限冲激响应系统；冲激响应序列 $h[n]$ 的长度有限长时，称系统为有限冲激响应系统。

离散时间系统对单位阶跃序列 $\mu[n]$ 的响应称为单位阶跃响应，或者阶跃响应，用 $s[n]$ 来表示。

离散时间系统输入信号 $x[n]$ 时的输出响应 $y[n]$，可以表示为冲激响应 $h[n]$ 和输入信号 $x[n]$ 的加权累加和

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

通过简单的变量代换，也可表示为

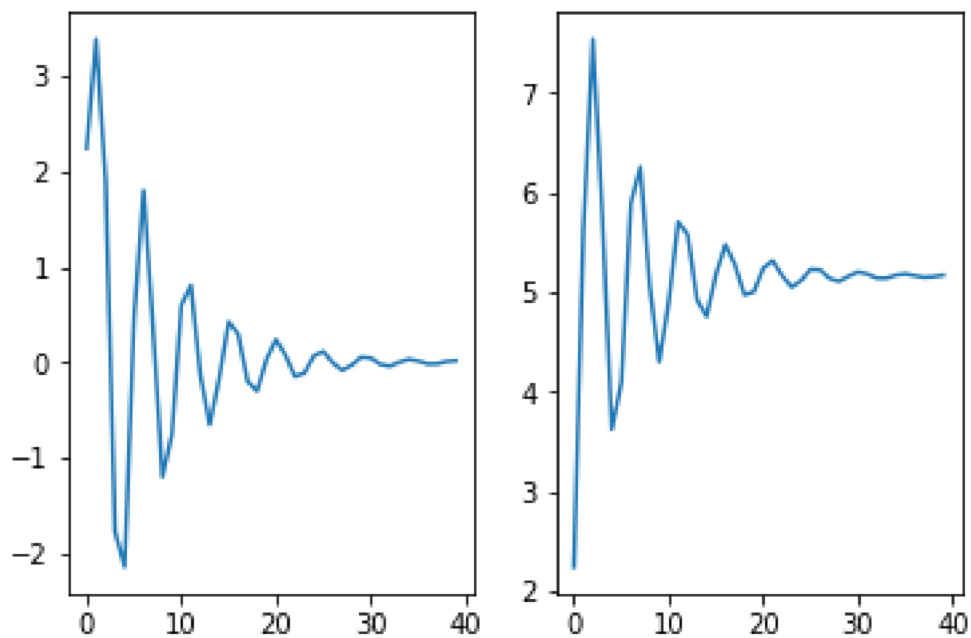
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k]x[k]$$

上述两个式子称为序列 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的卷积和

$$y[n] = h[n] \circledast x[n]$$

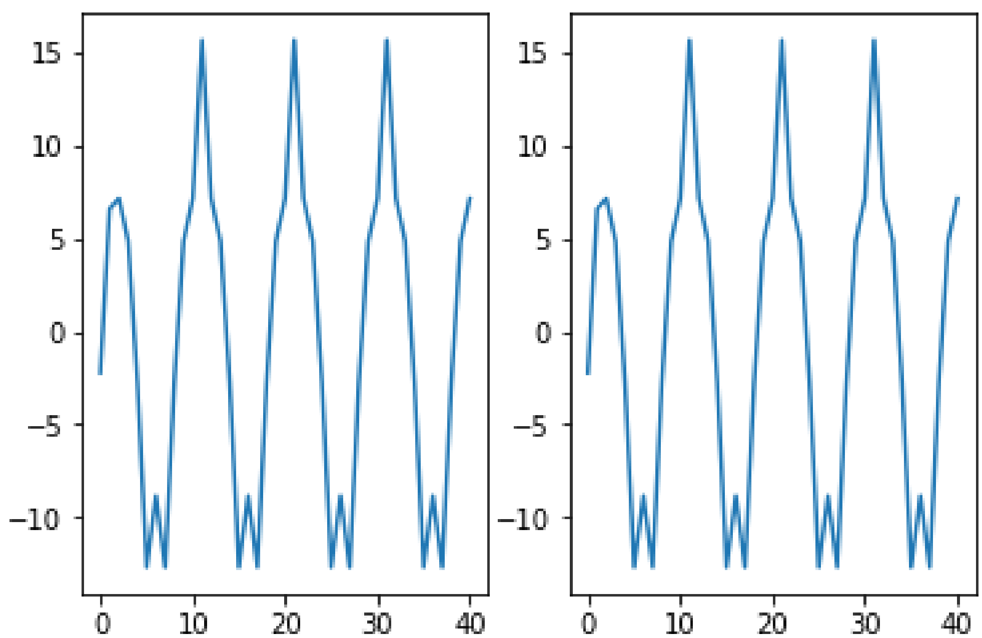
其中符号 $\circledast$ 表示卷积和。

In [5]:
```
N = 40
# 定义系统的系数
num = np.array([2.2403,2.4908,2.2403])
den = np.array([1,-0.4,0.75])
dt = 1

# 系统的冲激响应
t, h = signal.dimpulse((num,den,dt),n=N)
t, s = signal.dstep((num,den,dt),n=N)
plt.subplot(121)
plt.plot(t,np.squeeze(h))
plt.subplot(122)
plt.plot(t,np.squeeze(s))
plt.show()
```



In [6]:
```
# 系统的输出等于冲激响应序列和输入序列的卷积
n = np.linspace(0,40,41)
a = 2
b = -3
x = a*np.cos(2*np.pi*0.1*n)+b*np.cos(2*np.pi*0.4*n)
```

```
# 定义系统参数
num = np.array([2.2403,2.4908,2.2403])
den = np.array([1,0,0])#np.array([1,-0.4,0.75])

# 利用 lfilter 计算
ic = np.array([0,0]) # set initial
y1,_ = signal.lfilter(num,den,x,zi=ic) # y1[n]

# 利用卷积计算
t, h = signal.dimpulse((num,den,dt),n=41)

y2 = signal.convolve(x,np.squeeze(h))

plt.subplot(121)
plt.plot(n,y1)
plt.subplot(122)
plt.plot(y2[:41])
plt.show()
```



1.4 BIBO 稳定

若对于任意有界输入序列 $x[n]$，其输出 $y[n]$ 也是一个有界序列，则该离散时间系统是有界输入有界输出（BIBO）稳定的，也就是说，若

$$|x[n]| < B_x, \forall n$$

则响应的输出 $y[n]$ 也有界，即

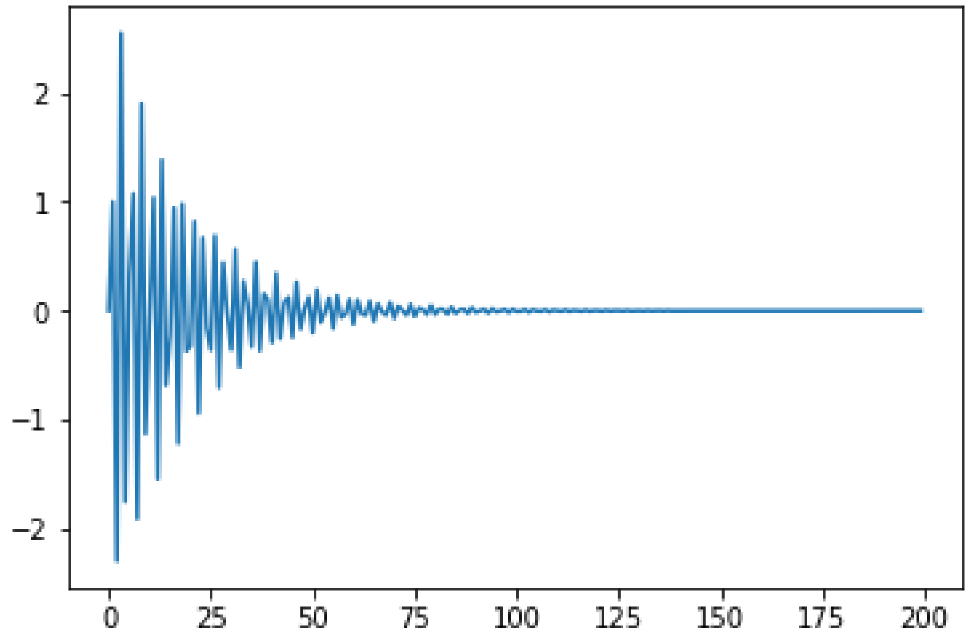
$$|y[n]| < B_y, \forall n$$

当且仅当线性时不变离散时间系统的冲激响应序列 $h[n]$ 绝对可和时，改线性时不变系统是 BIBO 稳定的，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

In [7]:
```
# 定义系统参数
num = np.array([1,-0.8])
den = np.array([1,1.5,0.9])
# 冲激响应序列
t, h = signal.dimpulse((num,den,1),n=200)
h = np.squeeze(h)
N = 200
parsum = 0
for k in range(N):
    parsum = parsum + np.abs(h[k])
print(parsum)

# 画出冲激响应
plt.plot(t,h)
plt.show()
```

```
35.35909090875415
```



1.5 因果系统

若 $y_1[n]y_2[n]$ 分别是因果离散时间系统输入信号 $u_1[n]u_2[n]$ 的响应，则当

$$u_1[n] = u_2[n] \qquad n < N$$

时

$$y_1[n] = y_2[n] \qquad n < N$$

> 当且仅当线性时不变离散时间系统的冲激响应序列 $h[n]$ 满足 >

$$h[k] = 0, \qquad k < 0$$

> 该 LTI 离散时间系统才是因果的。

1.6 滤波概念的解释

考虑用如下差分方程描述的两个离散时间系统：### 系统 1

$$y[n] = 0.5x[n] + 0.27x[n-1] + 0.77x[n-2]$$

系统 2

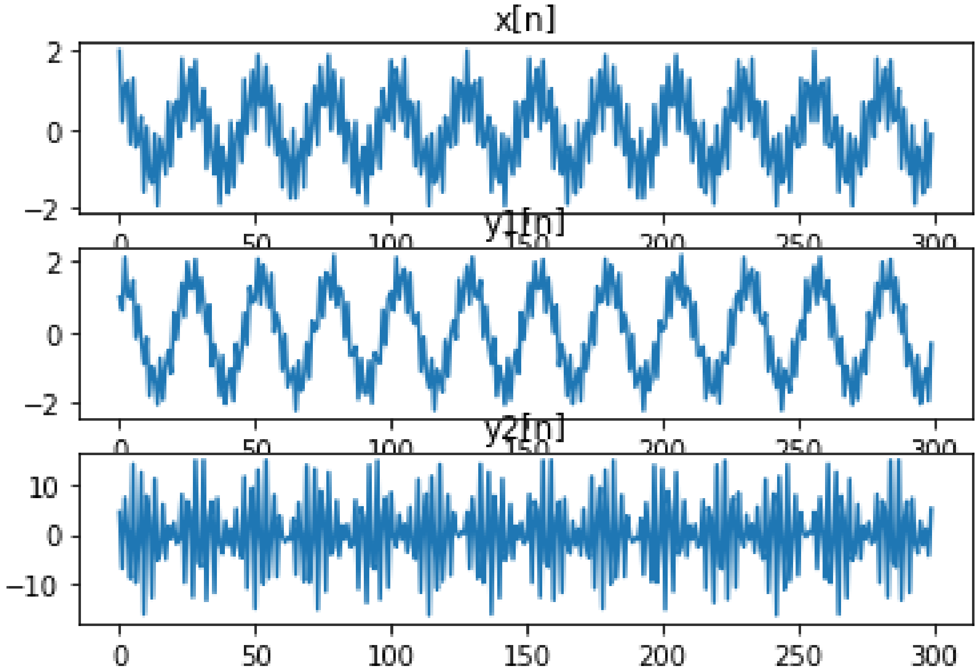
$$y[n] = 0.45x[n] + 0.5x[n-1] + 0.45x[n-2] + 0.53y[n-1] - 0.46y[n-2]$$

对输入

$$x[n] = \cos\left(\frac{20\pi n}{256}\right) + \cos\left(\frac{200\pi n}{256}\right), \qquad 0 \leqslant n < 299$$

计算上述两个系统的输出。

In [8]:
```python
# 产生混合信号：高频正弦 + 低频正弦
n = np.linspace(0,299,300)
s1 = np.cos(2*np.pi*n/256*10)
s2 = np.cos(2*np.pi*n/256*100)
x = s1+s2

# 定义两个系统的系数
num1 = np.array([0.5,0.27,0.77])
den1 = np.array([1,0,0])
num2 = np.array([1,-0.53,0.46])
den2 = np.array([0.45,0.5,0.45])
# 系统处理（滤波）
ic = np.array([0,0]) # set initial
y1,_ = signal.lfilter(num1,den1,x,zi=ic) # y1[n]
y2,_ = signal.lfilter(num2,den2,x,zi=ic) # y2[n]



plt.subplot(311)
plt.plot(n,x)
plt.title('x[n]')
plt.subplot(312)
plt.plot(n,y1)
plt.title('y1[n]')
plt.subplot(313)
plt.plot(n,y2)
plt.title('y2[n]')
plt.show()
```




```
In [ ]:
```