Lector:
Heidi Tans

Data Advanced

Kansrekenen

PXL - IT

1. Inleiding

In het voorgaande leerden we het aantal elementen in een verzameling te tellen. Deze kennis kunnen we gebruiken om in dit hoofdstuk kansen van bepaalde gebeurtenissen te berekenen.

2. Experimenten en hun uitkomsten

Veel situaties uit ons dagelijks leven zijn onderhevig aan het toeval: we kunnen niet met zekerheid voorspellen wat er zal gebeuren.

Voorbeeld 1

Je gooit een dobbelsteen op. Hoeveel je gooit, is onderhevig aan het toeval.

Je trekt een kaart uit een kaartspel. Welke kaart je trekt is onderhevig aan het toeval.

Je gooit een muntstuk op. Kop of munt is onderhevig aan het toeval.

Het opgooien van een dobbelsteen noemt men in de kansrekening een **(kans)experiment** = experiment waarvan het verloop door toeval bepaald wordt.

In veel gevallen kunnen we wel **alle** verschillende mogelijkheden (**uitkomsten**) opsommen. **De verzameling van alle mogelijke uitkomsten** van een kansexperiment noemen we het **universum** en stellen we voor door **U**.

Voorbeeld dobbelsteen: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Hoewel je niet altijd zekerheid hebt over het eindresultaat kan je, zeker voor eenvoudige experimenten, vooraf het universum opschrijven.

Voorbeeld 2

Experiment	**Universum**
Een munt opwerpen	U = { kop, munt }
Een voetbalwedstrijd spelen	U = { winnen, verliezen, gelijk }

Bij bovenstaande experimenten bevat het universum steeds een eindig aantal elementen. Er zijn uiteraard ook experimenten waarbij het aantal uitkomsten ∞ is.

Voorbeeld 3

Experiment	**Universum**
De productietijd in min van een bepaald product	$U = \{1, 2, 3, \dots\}$
Een reëel getal tussen 0 en 1 kiezen	$U = \{0 \leq x \leq 1\} = [0\ ,\ 1]$

Soms vermoeden we dat bepaalde uitkomsten meer waarschijnlijk zijn dan andere. Dit vermoeden wordt binnen kansberekening beschreven door de kans op een bepaalde uitkomst te berekenen en genoteerd door **P**.

Een **kans** is een numerieke maatstaf voor de waarschijnlijkheid dat een uitkomst zal plaatsvinden:

Voorbeeld dobbelsteen: $P(3) = \dfrac{1}{6}$

3. Gebeurtenissen

Voor kansexperimenten is het vaak ook interessant naast de individuele uitkomsten, ook bepaalde **deelverzamelingen** van het universum U te beschouwen; we spreken van een gebeurtenis.

Definitie

Een **gebeurtenis** is een deelverzameling van het universum U.

Voorbeeld 4

Experiment	**Universum**	**Gebeurtenis**
Een dobbelsteen gooien	$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	A = Een even getal gooien $A = \{ 2, 4, 6 \}$

Indien een deelverzameling A van U correspondeert met het bezitten van een bepaalde eigenschap E, dan is het ook logisch de deelverzameling te beschouwen waarbij E niet opgaat.

Dit stemt overeen met het complement van gebeurtenis A : A^c

Definitie

Het complement van een gebeurtenis A zijn de uitkomsten die niet tot A behoren.

$A^c = U \setminus A$

Opmerking

Het complement van het universum U, is de verzameling die geen enkel element van U omvat = de lege verzameling (notatie: ϕ).

Voorbeeld 5

Als A de gebeurtenis is die zegt: een even getal gooien met een dobbelsteen

$A = \{ 2, 4, 6 \} \subset U$

Dan is A^c: een oneven getal gooien

$A^c = \{ 1, 3, 5 \} \subset U$

Definitie

Indien A en B twee deelverzamelingen zijn van het universum U, die corresponderen met het bezitten van de eigenschappen E_1 resp. E_2, dan bevat de **unie** van A en B alle uitkomsten die tot ***A* en/of *B*** behoren.

Notatie: $A \cup B$

Voorbeeld 6

Als A = een even getal gooien met een dobbelsteen, dan $A = \{ 2, 4, 6 \} \subset U$

En B = een 3 – voud gooien, dan $B = \{ 3, 6 \} \subset U$

Dan $A \cup B = \{ 2, 3, 4, 6 \} \subset U$

Definitie

Indien A en B twee deelverzamelingen zijn van het universum U, die corresponderen met het bezitten van de eigenschappen E_1 en E_2, dan bevat de **doorsnede** van A en B alle uitkomsten die tot ***A* en *B*** behoren.

Notatie: $A \cap B$

Voorbeeld (analoog aan voorbeeld 6)

$A \cap B = \{ 6 \} \subset U$

Definitie

Twee **elkaar uitsluitende (of disjuncte)** gebeurtenissen zijn gebeurtenissen die geen gemeenschappelijke uitkomsten hebben. Ze kunnen dus niet samen optreden.

Voorbeeld 7

A = een even getal gooien met een dobbelsteen, dan $A = \{ 2, 4, 6 \}$

B = een 3 – voud gooien, dan $B = \{ 3, 6 \}$

De gebeurtenissen A en B zijn niet disjunct, want A en B bevatten een gemeenschappelijk element, nl 6.

4. Kansen toekennen aan gebeurtenissen

Bij kansexperimenten zullen sommige gebeurtenissen meer optreden dan andere. We zeggen dat de kans op die gebeurtenis groter is. Voor gebeurtenis *A* wordt deze kans gedefinieerd door het getal *P(A)* (= kans op gebeurtenis *A*).

Hoe bepalen we deze kans?

Eerste methode

Experiment:	Een correcte dobbelsteen (= elk van de 6 uitkomsten zijn even waarschijnlijk) opgooien *U* = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Gebeurtenis:	Een 3 – voud gooien : *A* = {3, 6}

Er zijn 6 verschillende mogelijke uitkomsten en die zijn allen even waarschijnlijk. Van deze 6 uitkomsten behoren er 2 tot gebeurtenis *A* (nl. 3 en 6); dit zijn de voor ons gunstige uitkomsten.

Vandaar dat *P(A)* = $\frac{2}{6} = \frac{\text{aantal gunstige gevallen voor } A}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}}$

Merk op dat deze definitie alleen gebruikt kan worden als het universum eindig is en als alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn.

De vraag naar *P(A)* bij een getrukeerde dobbelsteen kan hiermee niet opgelost worden.

Voorbeeld 8:

We trekken gelijktijdig 3 kaarten uit een kaartspel (52 kaarten). Wat is de kans dat deze 3 kaarten alle drie azen zijn?

c3/4 / c3/52 = 4/22103

Voorbeeld 9:

We vragen aan twee personen hun verjaardag. Bereken de kans dat twee personen op een verschillende dag verjaren.

v2/365
/
-
v2/365===132860/133225

Tweede methode

Experiment: Een getrukeerde dobbelsteen : $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ opgooien

Gebeurtenis: Een 3 – voud gooien : $A = \{3, 6\}$

Om dit probleem op te lossen gaan we als volgt te werk:

- we gooien de dobbelsteen 10 keer en noteren het aantal keer dat *A* zich voordoet
- we gooien de dobbelsteen 100 keer en noteren het aantal keer dat *A* zich voordoet
- …

We maken elke keer de verhouding $\frac{\text{aantal}(A)}{n}$ (met *n* het aantal keer dat het experiment uitgevoerd werd).

Experimenteel kunnen we dan vaststellen dat $\frac{\text{aantal}(A)}{n}$ naar een welbepaalde waarde streeft als *n* toeneemt. Deze waarde is $\frac{2}{6}$ bij een correcte dobbelsteen.

Alhoewel deze tweede methode veel algemener is dan de eerste, is deze methode praktisch gezien niet uitvoerbaar. (om zeker te zijn van je antwoord, moet je het experiment een ∞ aantal keer uitvoeren).

De enige manier om hieraan te ontkomen is het definiëren van een aantal basisvoorwaarden waaraan kansen moeten voldoen.

5. Basiseigenschappen uit de kansrekening

Eigenschap (basisvoorwaarden)

Veronderstel dat $U = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ het universum is van een bepaald (kans)experiment, dan moeten de volgende basisvoorwaarden gelden:

- $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$ kans tussen 0 en 1
- $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots = 1$ alle kansen opgeteld is 1
- P(U) = *1 en* P(ϕ) = *0* universum is 1 en niks is 0

Eigenschap

De kans van een willekeurige gebeurtenis $A \subset U$ is de som van de kansen van alle uitkomsten die tot gebeurtenis *A* behoren:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i) \qquad\qquad 0 \leq P(A) \leq 1$$

Voorbeeld 10

Veronderstel dat we één kant van een dobbelsteen lichtjes verzwaard hebben zodat de kansen er als volgt uitzien:

P(1) = 0.12; *P(2)* = *P(3)* = *P(4)* = *P(5)* = 0.17; *P(6)* = 0.2

Stel dat *A* = minstens een 4 gooien en *B* = hoogstens een 2 gooien.

Bereken *P(A)* en *P(B)*.

Oplossing:

P*(A)* = P({4, 5, 6}) = P(4) +P(5) + P(6) = 0.17 + 0.17 + 0.20 = 0.54

P*(B)* = P({1, 2}) = P(1) +P(2) = 0.12 + 0.17 = 0.29

Eigenschap: Somregel voor disjuncte gebeurtenissen

Als A en B disjunctie gebeurtenissen zijn (dwz $A \cap B = \phi$)

dan is $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Als $A_1, \dots, A_n$ gebeurtenissen zijn die twee aan twee disjunct zijn

($A_i \cap A_j = \phi \quad \forall\, i, j$ *met* $i \neq j$)

dan is $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$

Voorbeeld 11

Drie renners A, B en C nemen deel aan een wedstrijd op de piste. De kansen van A en B worden gelijk geacht en zij hebben dubbel zoveel kans als C.

Bereken de kans dat

a. A wint 2/5

b. C wint 1/5

c. B of C wint 3/5

Oplossing

Eigenschap: Algemene somregel

Zijn A en B twee willekeurige gebeurtenissen

dan is $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Eigenschap: Complementregel

$P(A^c) = 1 - P(A)$

Eigenschap

Als $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Eigenschap

De kans op het verschil van twee gebeurtenissen A en B is de kans op A min kans op de doorsnede van A en B

$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

Voorbeeld 12

Uit een spel van tweeënvijftig kaarten wordt aselect een kaart getrokken. Bereken de kans op de volgende gebeurtenissen:

a. Een boer of een schoppen trekken 16/52

b. Een 7 of een 9 trekken 8/52

Oplossing

Voorbeeld 13

Binnen PXL - IT moet elk van de 475 studenten minstens 1 van de cursussen Python, SQL of data adv volgen.

1. 320 studenten volgen Python
2. 190 studenten volgen SQL
3. 280 studenten volgen data adv
4. 80 studenten volgen Python en SQL
5. 200 studenten volgen Python en data adv
6. 60 studenten volgen SQL en data adv
7. 25 studenten volgen SQL, data adv en Python

Bereken de kans dat een willekeurige gekozen student

1. Python volgt maar geen data adv 320 - 200 = 120
2. data adv volgt maar geen SQL 280 - 60 = 220
3. Python of data adv volgt, maar geen SQL 475 - 190 =
4. Python volgt, maar geen SQL en geen data adv. 320 - 80 -200

Oplossing

1: 120/475

6. Voorwaardelijke kans

De kans van een gebeurtenis wordt dikwijls beïnvloed door een gerelateerde gebeurtenis.

Voorbeeld 14

Bij een loterij zijn 1000 loten verkocht met de nummers 000, 001, … , 999. Je hebt nummers 345, 367, 381 en 324.

De kans dat je de hoofdprijs wint (gebeurtenis A) is P(A) = 4/1000.

De trekking gebeurt niet eerlijk en je weet dat het eerste cijfer van het winnende nummer een 3 is. Door deze nieuwe informatie kunnen we de uitkomstenverzameling U : {000, …, 999} beperken tot B = {300, …, 399}.

We zien dus dat je kansen toenemen tot 4/100.

Dit noemen we een voorwaardelijke kans: Gegeven gebeurtenis B, wat is de kans op gebeurtenis A en noteren we als: $P(A|B)$

Definitie

De voorwaardelijke kans van een gebeurtenis A, gegeven dat een gebeurtenis B zich voorgedaan heeft, wordt genoteerd als $P(A|B)$ en wordt berekend als volgt:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{met} \quad P(B) > 0$$

analoog $$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{met} \quad P(A) > 0$$

Definitie: Uit voorgaande definitie kunnen we de kans op een doorsnede bepalen:

$$P(A \cap B) = P(A|B) * P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(B|A) * P(A)$$

Op voorwaarde dat de voorwaardelijke kansen gemakkelijk berekend kunnen worden.

Voorbeeld 15

Een vaas bevat 4 witte, 3 rode en 2 groene knikkers waaruit je er twee trekt **zonder** terugleggen.

a) Wat is de kans dat de tweede knikker rood is gegeven dat de eerste groen was? 3/8

b) Wat is de kans dat je twee witte knikkers trekt? 1/6

c) Wat is de kans dat je een witte en een rode knikker trekt?
3/8 * 4/9 + 4/8 *3/9

Oplossing

Stel W = je trekt een witte knikker en R = je trekt een rode knikker.

Gebruik de notatie W_1 = de eerste knikker is wit,

R_2 = de tweede knikker is rood, …

7. Onafhankelijke gebeurtenissen

Als gebeurtenis *A* gebeurtenis *B* niet beïnvloedt, dan spreken we van onafhankelijke gebeurtenissen.

Definitie

Een gebeurtenis *A* heet **onafhankelijk** van een gebeurtenis *B* indien $P(A|B) = P(A)$

De voorwaardelijke kans is gelijk aan de onvoorwaardelijke kans.

Onafhankelijkheid is een symmetrische eigenschap, zodoende kunnen we kortweg spreken over onafhankelijke gebeurtenissen.

Eigenschap (Productregel voor onafhankelijke gebeurtenissen)

Twee gebeurtenissen A en B zijn onafhankelijk $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

Voorbeeld 16

Een vaas bevat 4 witte, 3 rode en 2 groene knikkers waaruit je er twee trekt met teruglegging.

a) Wat is de kans dat de tweede knikker rood is gegeven dat de eerste groen was?

b) Wat is de kans dat je twee witte knikkers trekt?

c) Wat is de kans dat je een witte en een rode knikker trekt?

8. De wet van de totale kans

Eigenschap

Als $U = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ met $A_i \cap A_j = \phi \quad \forall\, i, j \quad (i \neq j)$

Dan geldt voor elke gebeurtenis B:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) * P(A_i)$$

Voorbeeld 17

Je hebt een vaas met 3 rode en 2 groene knikkers. Achtereenvolgens trek je twee knikkers uit deze vaas (zonder terugleggen). Bereken de kans dat de tweede knikker een rode is.

P(R2) = 2/4 * 3/5 +3/4 *2/5

Voorbeeld 18

Een fabriek ontvangt onderdelen van twee verschillende leveranciers.

65% van de onderdelen wordt bij leverancier 1 gekocht, 35% bij leverancier 2.

De kwaliteit verschilt per leverancier. Uit gegevens uit het verleden blijkt dat de eerste leverancier 98% goede onderdelen levert en de tweede leverancier 95%. De onderdelen van beide leveranciers worden gebruikt in het productieproces.

Wat is de kans dat een machine uitvalt door een slecht onderdeel?

Oplossing

$P(S|L1) * P(L1) + P(S|L2) * P(L2)$
$0.02 * 0.65 + 0.05 * 0.35 = 0.0305$

Voorbeeld 19

Gegeven zijn twee vazen: een witte, die 6 groene en 4 rode bollen bevat, en een zwarte, die 3 groene en 7 rode bollen bevat. Men trekt aselect een bol uit één van de vazen. Bereken de kans dat:

a. een groene bol getrokken wordt uit de witte vaas

b. een groene bol getrokken wordt uit om het even welke vaas

Oplossing

Witte vaas = 6/10 = 0.6
Zwarte vaas = 3/10
Even welke vaas = 6/10 * 1/2 + 3/10 *1/2
=0.3 + 0.15 = 0.45

Voorbeeld 20

Een dobbelsteen is zo geladen dat de kans waarmee een gegeven aantal ogen boven komt evenredig is met dit aantal. We beschouwen de gebeurtenissen

A: een even getal gooien 2,4,6

B: een priemgetal groter dan 1 gooien 2,3,5

C: een oneven getal gooien 1,3,6

Gevraagd:

a. Geef het universum en bereken de kans op elke uitkomst van dit universum
b. Bereken P(A), P(B) en P(C)
c. Bereken de kans dat men een even getal of een priemgetal werpt
d. Bereken de kans dat men een oneven priemgetal werpt
e. Bereken de kans dat men een even getal maar geen priemgetal werpt

Oplossing

A: U = {1,2,3,4,5,6}
1/6

p(1) = 1*x
p(2) = 2*x
p(3) = 3*x = 1 -> 21x = 1 -> x =1/21
p(4) = 4*x
p(5) = 5*x
p(6) = 6*x

B: 2/21 + 4/21 + 6/21
2/21 + 3/21 + 5/21 = 10/21
1/21 + 3/21 + 6/21

E: 4/21 + 6/21

9. De regel van Bayes

De regel van Bayes geeft een methode om een voorwaardelijke kans te berekenen. Neem voorbeeld 18 van de leveranciers op pg 33. Waarschijnlijk zal men ook geïnteresseerd zijn in de volgende kans: Veronderstel dat een machine uitvalt door een slecht onderdeel, wat is dan de kans dat dit onderdeel geleverd werd door leverancier 1 (notatie $P(A_1|S)$) of door leverancier 2 (notatie $P(A_2|S)$)? Deze voorwaardelijke kansen kan je berekenen met behulp van de regel van Bayes.

Eigenschap (De regel van Bayes)

Als $U = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ met $A_i \cap A_j = \phi \quad \forall\, i, j \quad (i \neq j)$

Dan geldt voor elke gebeurtenis B met *P*(*B*) > 0:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) * P(A_i)}{P(B|A_1) * P(A_1) + \cdots + P(B|A_n) * P(A_n)}$$

Voorbeeld 21 (zie voorbeeld 18 pg 33)

De kans dat een slecht onderdeel van leverancier 1 komt is gelijk aan:

$P(L_1|S)$ = P(S|L1)*P(L1)

P(S)

0.02*0.65
------------- = 0.4262
0.0305

Toon zelf aan dat de kans dat een slecht onderdeel van leverancier 2 komt is gelijk aan 0.5738.

1 - 0.4262

Voorbeeld 22

Een verzekeringsmaatschappij verdeelt haar klanten in twee soorten: zij die vaak een ongeval veroorzaken (groep E_1: 30%) en zij die zelden een ongeval veroorzaken (groep E_2: 70%). Een persoon uit groep E_1 heeft 25% kans om in de loop van een jaar een ongeval te veroorzaken terwijl iemand uit groep E_2 5% kans heeft.

- Zij A de gebeurtenis dat een verzekerde een ongeval veroorzaakt. Wat is de kans op A?
- Gegeven dat de verzekerde een ongeval veroorzaakte, wat is de kans dat hij tot groep E_1 behoort?

Oplossing

1) 30/100 * 25/100 + 70/100 * 5/100= 0.825 = 0.075 +0.035 = 0.11

2) $P(E1|A) = \frac{P(A|1) * P(E1)}{P(A)} = \frac{0.25*0.3}{0.11} = 0.6828$

Voorbeeld 23

Op PXL worden onder de middag extra lessen data advanced gegeven ter voorbereiding op het examen. Tachtig procent van de studenten die van plan zijn dit examen af te leggen volgt die lessen.

Uit de statistieken blijkt nu dat een student die de lessen gevolgd heeft 55% kans heeft om te slagen, terwijl 65% van diegenen die deze lessen links laat liggen niet slaagt.

a) Jan van PXL doet het examen mee. Wat is de kans dat hij slaagt?

b) Piet van PXL doet het examen mee en slaagt. Hoe groot is de kans dat hij die lessen volgde?

Oplossing

A) 0.35 * 0.2 + 0.55*0.8 = 0.51

B) 0.55*0.8
----------- = 0.86 <-- foutief
0.51

10. Oefeningen

Oefening 1

Je trekt een kaart uit een spel kaarten. Wat is de kans dat de kaart een

- schoppen aas is?
- aas is?
- aas of harten 10 is?
- aas of een harten is?

Oefening 2

In een zak zitten 5 witte, 8 rode en 11 blauwe knikkers. Je neemt op een willekeurige wijze 1 knikker uit de zak. Bereken de kans dat de knikker

- wit is.
- niet wit is.
- wit of blauw is.

Oefening 3

Twee ballen worden uit een urne getrokken MET terugleggen. De urne bevat oorspronkelijk 8 ballen: 5 witte en 3 zwarte. Wat is de kans dat:

- beide ballen wit zijn?
- beide ballen dezelfde kleur hebben?
- ten minste één van de ballen wit is?

Zelfde vraag maar nu wordt er getrokken ZONDER terugleggen.

Oefening 4

Urne A bevat 3 rode, 4 witte en 5 blauwe ballen. Urne B bevat 5 rode, 6 witte en 7 blauwe ballen. Men trekt uit beide urnen 1 bal. Wat is de kans dat beide wit zijn?

Wat is de kans dat beide dezelfde kleur hebben?

A) 0.11 4/12 * 6/18
B) 0.34 4/12 * 6/18 + 3/12 * 5/18 + 5/12 * 7/18

Oefening 5

Een urne bevat 3 zwarte en 5 bruine ballen. Een bal wordt blindelings gekozen. Als deze bal bruin is, wordt hij teruggeplaatst in de urne en bovendien worden twee bruine ballen toegevoegd. Is de bal echter zwart, dan wordt hij niet teruggeplaatst en wordt er niets toegevoegd. Wat is de kans dat de tweede willekeurig gekozen bal bruin is?

0.705 7/10*5/8+5/7*3/8 = 0.705

Oefening 6

Een vaas bevat 25 lotjes, genummerd van 1 tot 25. Er worden twee lotjes uit de vaas gehaald (zonder terugleggen) en we berekenen de som van de twee getallen op de lotjes. Bepaal de kans dat de som een even getal is.

0.48 O1 * O2 + E1 * E2
12/24 * 13/25 + 11/24 * 12/25 = 0.48

Oefening 7

Als A en B gebeurtenissen zijn met $P(A) = 3/5$; $P(B) = 1/10$ en $P(B \mid A) = 2/3$, dan is $P(A \cup B) =$

a. 3/5 b. 3/10 c. 7/10 d. geen van voorgaande

B

P(AuB) = P(A) + P(B) - P(AnB)
P(B|A)= (P(BnA))/P(A)
P(B|A) * P(A) = P(BnA)
2/3 * 3/5 = P(BnA)
2/5= P(BnA)
P(AuB)=3/5+1/10-2/5=3/10

KAN NIET

Oefening 8

Een vriend kiest zijn vakantieverblijf lukraak in één van de landen A, B of C. De kans op regen is 1/3 in land A, 1/4 in land B en 1/6 in land C. Hij komt terug en vertelt dat het regende op vakantie. Wat is de kans dat hij land C bezocht heeft?

Oefening 9

Bepaal de kans dat in een groep van 10 personen, minstens 2 personen op dezelfde dag verjaren (we veronderstellen dat zich geen tweelingen in de groep bevinden). Zelfde vraag maar voor een groep van 50 personen.

n = 10 --> 0.117
n = 50 --> 0.97

A = Minstens 2 personen verjaren op dezelfde dag
P(A) = #A / #U
U = {(x1,x2x3,..,x10)|x2 E {1,...,365}
#U = 365^10
#A = ?
Ac = {Alle personen hebben een verschillende verjaardag}
#Ac= 365 * 364 * ... * 356
P(A) = 1 - P(Ac) = (1 - 365*...*356) / 365^10 = 0,117

k=50 --> P(A) = 1-(365.364*...*365-50+1) / 365^50 = 0,97

Oefening 10

Een inkoopagent heeft orders voor een bepaalde grondstof geplaatst bij twee leveranciers A en B (deze orders worden gelijkmatig verdeeld over A en B). Als beide orders niet binnen vier dagen binnenkomen, moet het productieproces worden stopgezet. De kans dat leverancier A de grondstof binnen de vier dagen levert is 0.55. De kans dat leverancier B de grondstof binnen de vier dagen levert is 0.35. Hoe groot is de kans dat het productieproces moet worden stopgezet wegens gebrek aan grondstoffen?

Oefening 11

De kans dat een man tijdens een periode van één jaar een auto-ongeluk krijgt is twee keer zo groot als voor een vrouw. Meer precies is de kans voor een man 0.113 en voor een vrouw 0.057. Neem aan dat 55% van de automobilisten in een bepaalde regio mannen zijn. In een enquête naar verkeersgedrag geeft iemand aan dat hij of zij het afgelopen jaar betrokken is geweest bij een auto-ongeluk. Hoe groot is de kans dat deze persoon een vrouw is?

P(Ong|Man) = 0,113
P(Ong|VR) = 0,057
P(Man) = 0,55

0.2921

$$P(Vr|Ong) = \frac{P(Ong|VR)*P(VR)}{P(ONG)} = \frac{0.057 * 0.45}{0.057 * 0.45 + 0.113 * 0.55} = 0.2921$$

Regel van Bayes

Oefening 12

Een verdeler van auto-onderdelen heeft vier bedienden A, B, C en D. Bij het invullen van bestelbonnen maakt persoon A één fout op honderd, B vier fouten op honderd, C zes fouten op honderd en D maakt twee fouten op honderd. A zorgt voor 20%, B voor 30%, C voor 10% en D voor 40% van de bestelbonnen.

- Wat is de kans dat een fout in een bestelbon kruipt?
- Indien er een fout gemaakt is, A de schuldige is?

Oefening 13

Thomas drinkt alle dagen voor hij slapen gaat een borreltje. Hij heeft dertig flessen whisky en twintig flessen cognac geërfd van zijn overgrootvader en wil die op die manier soldaat maken. Elke avond kiest hij lukraak een fles en drinkt. Hij weet echter dat hij van een borrel whisky in tachtig procent van de gevallen de volgende dag met hoofdpijn zal wakker worden, terwijl dit van een cognacje slechts in drie gevallen op tien gebeurt. Vanmorgen had Thomas barstende hoofdpijn. Wat is de kans dat hij gisterenavond een whisky heeft gedronken?