

# 基于遗传算法的 Kiewitt 型索穹顶结构 索力优化分析

姜正荣<sup>1,2</sup> 张子健<sup>1</sup> 石开荣<sup>1,2</sup> 王仕统<sup>1</sup>

(1. 华南理工大学土木与交通学院, 广州 510640; 2. 华南理工大学亚热带建筑科学国家重点实验室, 广州 510640)

**摘 要:** Kiewitt 型索穹顶结构是一种具有多整体自应力模态的形效结构, 在体系整体自应力模态确定后, 须予以合适的组合系数, 才能够得到其预应力态的结构内力。为找到使 Kiewitt 型索穹顶结构具有最小预应力水平的结构内力, 以预应力施加后结构的总应变能变化量作为目标函数, 以多整体自应力模态的组合系数为自变量, 通过基于遗传算法的单目标优化, 得到了最佳的预应力组合方案。在此基础上, 对跨度 120m 的 Kiewitt 型索穹顶结构进行了计算分析, 验证了本文优化分析方法的适用性。

**关键词:** Kiewitt 型索穹顶结构, 索力优化, 遗传算法, 最小初始预应力水平

## 一、引言

索穹顶结构是二十世纪八十年代以来一种高效的柔性张力结构体系, 其得益于“连续拉、间断压”理念的实现。索穹顶结构按整体自应力模态的数量可分为单整体自应力索穹顶结构(如 Geiger 型和 Levy 型)和多整体自应力索穹顶结构(如 Kiewitt 型)。与传统的刚性结构不同, 索穹顶结构无自然刚度, 必须施加预应力才能获取刚度以维持其设计外形, 故预应力分布的确定是该结构设计的首要问题。

索穹顶的可行预应力概念即结构中的杆受压、索受拉, 而整体可行预应力还应满足同类杆件初始内力相等且整体自应力平衡的条件<sup>[1]</sup>。对于单整体自应力模态, 可通过奇异值分解法<sup>[2]</sup>、力密度法<sup>[3]</sup>、能量法<sup>[4]</sup>及比值更新法<sup>[5]</sup>等确定唯一的一组整体自应力模态, 随后确定任意一组预应力水平即可得到整个结构的初始预应力分布。而对于多整体自应力索穹顶结构的预应力确定, 其分析步骤是先应用前述方法得到其无重力的自应力模态, 再通过组合系数叠加各自应力模态得到其初始预应力分布。后者自变量的个数较多, 优化较为复杂。

对此, 文献[6]以初始预应力水平下的结构应变能最小化为目标函数, 针对该函数所具有的二次型的特点, 用二次规划法优化了 Kiewitt 型索穹顶结构的初始内力。所得的初始内力较为经济, 但结构的安全储备相对不足, 且未考虑重力的影响。但大部分目标函数并不具备二次规划法的使用条件, 多数与索力组合系数呈高度隐性非线性关系, 传统的数学优化并不容易得到很好的推广。

在工程应用中, 优化算法的机制主要分为: 经典算法、构造型算法、领域搜索算法、基于动态演化的算法和混合型算法<sup>[7]</sup>。

遗传算法 (Genetic Algorithms, GA) 是一种高效的随机全局搜索的优化算法, 它是模拟达尔文的遗传和自然界优胜劣汰的计算模型, 在 1975 年由 Michigan 大学的 J.Holland 提出。该算法的主要操作是选择、交叉和变异。其中, 交叉算子是产生子代新个体的主要运算, 它控制遗传算法的全局搜索能力; 变异算子是产生子代新个体的辅助运算, 它控制遗传算法的局部搜索能力。二者的相互配合共同完成了对搜索空间的全局和局部搜索。遗传算法并不需要函数梯度信息, 仅需要目标函数的值即可通过选择算子进行个体的“择优”选择, 因此广泛适用于大型复杂的数学模型, 具有很强的通用性。

本文为以跨度 120m 的 Kiewitt 型索穹顶结构为研究对象, 以应变能最小为目标函数, 在不考虑自重和考虑自重两种情况下分别研究了遗传算法对此类具有多整体自应力模态的索穹顶结构在初始预应力优化问题的适用性。

## 二、优化数学模型

### (一) 优化变量的选取

对于 Kiewitt 型索穹顶结构而言, 首先利用已有方法确定整体自应力模态, 限于篇幅, 在此不再论述。 $s$  组模态的组合系数确定后叠加即可得初始预应力, 本文选取  $s$  维组合系数向量  $\beta$  作为优化变量。

$$T = [t_1 \ t_2 \ \cdots \ t_s] \cdot \beta + t^* \quad (1)$$

$$\beta = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_s]^T \quad (2)$$

式中,  $t_1, t_2, \dots, t_s$  为索穹顶结构的  $s$  组无重力的整体自应力模态向量;  $t^*$  为索穹顶结构考虑自重的一个模态;  $\beta$  为结构各个整体自应力模态的组合系数向量;  $T$  为索穹顶最终的内力分布向量。

## (二) 目标函数的选取

欲使初始预应力水平最低, 本文采用的目标函数为初始应变能最小, 即:

$$\min U(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \frac{T_i^2}{E_i A_i} l_i \cdot n_i \quad (3)$$

式中,  $U$  为索穹顶结构的应变能; 自应力模态的组合系数取  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ ;  $m$  为索穹顶的杆件分组数;  $T_i$  为在预应力态第  $i$  组的内力;  $n_i$  为第  $i$  组杆件数量;  $E_i$  为第  $i$  组索杆的弹性模量;  $A_i$  为第  $i$  组索杆的截面面积;  $l_i$  为第  $i$  组索杆的几何长度。

## (三) 约束条件及处理

1) 结构应满足位移限值条件:

$$u_{z, \max} \leq [u_z] \quad (4)$$

文献[8]指出, 对于整体张拉式结构, 最大节点位移在荷载标准组合下不应大于跨度  $1/250$ 。

2) 拉索应力应满足限制:

$$\sigma_s \leq f_d \quad (5)$$

式中,  $\sigma_s$  为索的拉应力,  $f_d$  为拉索强度设计值。

压杆应满足稳定性的要求:

$$\sigma_c \leq \varphi f \quad (6)$$

式中,  $\sigma_c$  为压杆的压应力,  $f$  为钢材的抗压强度设计值,  $\varphi$  为轴心受压构件稳定系数。

上述约束条件高度非线性, 本文采用罚函数法将目标函数转化为简单约束问题予以考虑。对于前述的目标函数而言, 其值越小的个体 (自变量) 的适应度越大, 个体的基因被保留的概率越大。而对不满足约束条件 1)、2) 的个体, 则将其目标函数放大, 降低个体的适应度。

现将目标函数设置为:

$$U^* = U + \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \alpha_3 U_3$$

其中

$$U_1 = U \cdot \left( \max \left( \left| \frac{u_i}{[u]} \right| - 1, 0 \right) \right) \quad (7)$$

$$U_2 = U \cdot \left( \max \left( \left| \frac{F_i}{[F_i]} \right| - 1, 0 \right) \right) \quad (8)$$

$$U_3 = U \cdot \left( \max \left( \left| \frac{T_i}{[T_i]} \right| - 1, 0 \right) \right) \quad (9)$$

式中,  $U^*$  为进行了约束修正的目标函数;  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  为惩罚系数, 文献[9]推荐均取 1.0;  $T_i$  为第  $i$  组索杆的初始预应力;  $F_i$  为第  $i$  组索杆在索穹顶受外荷载的内力;  $[T_i]$ 、 $[F_i]$  为对应于约束条件 2) 第  $i$  组索杆的限制范围。

## (四) 结果预测

在索穹顶结构受到静力荷载作用时, 上部脊索拉力减小, 下部斜索、环索拉力增大。因此可预测, 在上述约束条件的优化结果中, 上部脊索应在荷载作用下接近松弛的极限状态。

## 三、计算流程

索穹顶结构的预应力优化流程如图 1 所示。在遗传算法的基础上, 采取 Matlab 和 ANSYS 的联合优化。首先以 Matlab 为主程序创建模态组合系数种群, 确定预应力水平。将对应的预应力水平以命令流的形式导入 ANSYS 进行结构计算后, 返回目标函数所需要的结果数据。根据返回的数据经过遗传算法的处理后, 重

新确定新的模态组合系数子代种群和对应的预应力水平。随着遗传代数的增加，在满足终止条件时，终止程序的计算。

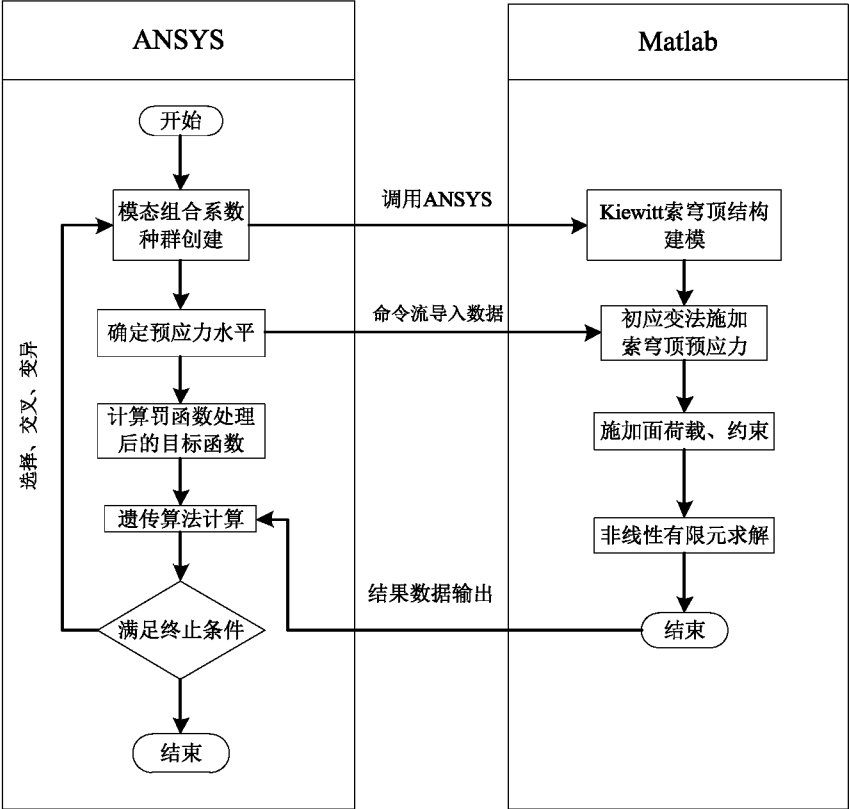
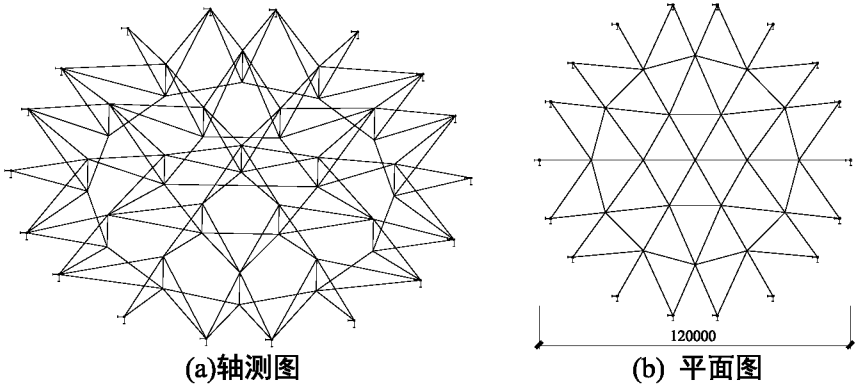


图 1 索穹顶结构预应力优化流程图

四、优化算例

本算例为一个两圈环索 Kiewitt 型索穹顶结构，跨度 120m，给出轴测图、平面图、剖面图和杆件编号图如图 2 所示。内圈环索直径分别为 20m 和 40m，外圈环索直径 60m。环索截面面积 12000mm<sup>2</sup>，其余索截面面积 7226 mm<sup>2</sup>，压杆截面面积 12200 mm<sup>2</sup>。拉索的极限强度取 1860MPa，设计强度取 30%， $f_d = 556$  MPa 弹性模量  $E_1 = 185$  kN/mm<sup>2</sup>，撑杆钢材使用 Q235，弹性模量为  $E_2 = 206$  kN/mm<sup>2</sup>。活荷载取 0.5kN/m<sup>2</sup>。



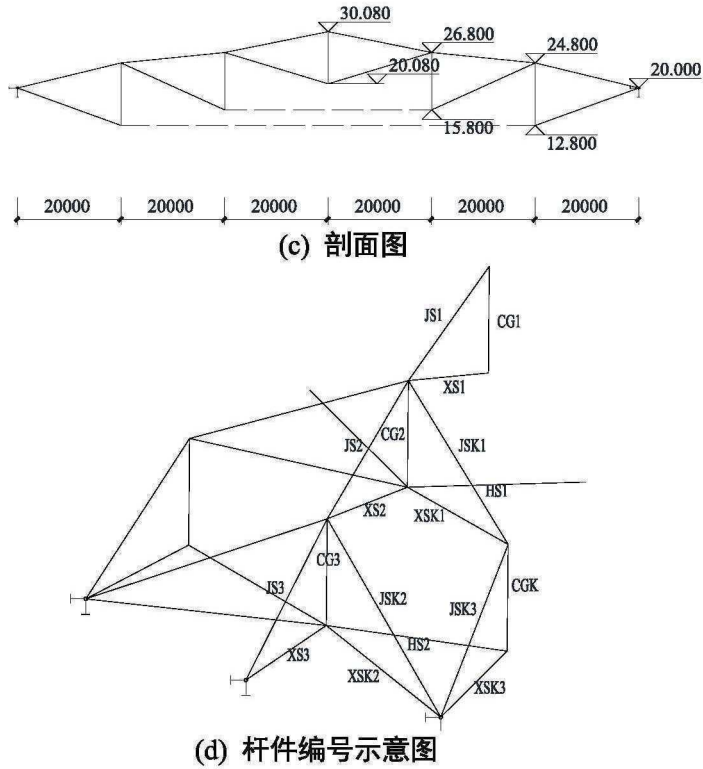


图 2 计算模型

(一) 找力计算

本算例具有  $t_1, t_2, t_3, t_4$  四个无重力整体自应力模态及一个考虑自重的整体自应力模态  $t^*$ ，见表 1。

表 1 自应力模态

杆件编号	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t^*$
JSK1	1.0000	0.0000	2.1252	0.9394	600017.0
JS2	0.1094	1.0000	0.6885	1.2261	60108.0
XS2	0.4185	0.0169	1.0000	0.4547	422949.4
XSK2	0.1242	0.2039	1.1618	1.0000	422949.4
CG1	-0.9262	-0.7164	-2.2951	-1.6749	-557451.6
CG2	-0.1717	-0.0995	-0.4104	-0.2731	-192382.8
CG3	-0.2955	-0.1681	-0.7263	-0.5106	-283655.4
CGK	-0.2907	-0.1503	-0.6179	-0.4136	-256223.3
HS1	0.3816	0.1660	0.9119	0.5554	527345.0
HS2	1.5124	0.7819	3.2141	2.1517	1374613.5
JS1	0.7871	0.6088	1.9505	1.4234	440717.7
JS3	0.2396	0.7553	1.6240	0.8400	404321.2
JSK2	0.2269	0.2433	0.0157	0.7209	47723.0
JSK3	1.0220	0.1307	2.1720	1.0823	723917.4
XSK1	0.0000	0.1356	0.0000	0.1267	121264.9
XSK3	0.4518	0.2336	0.9602	0.6428	415615.9
XS1	0.5372	0.4155	1.3312	0.9715	346343.4
XS3	0.6850	0.1888	0.3930	0.0000	316771.1

(二) 不考虑重力的索力优化计算

不考虑重力时，结构各索杆内力为：

$$T = [t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4] \cdot \beta$$

设置最大遗传代数为 300，对该 Kiewitt 型索穹顶结构优化过程的子代最优值进行跟踪，得到变化趋势曲线如图 3 所示，从图中可见，目标函数随着遗传代数的增加而有序地减小，并在第 210 代种群中找到最优个体。优化后初始应变能为  $1.93 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}$ ，对应的组合系数为：

$$\beta^T = [202598.1 \quad 311871.2 \quad 86490.3 \quad 99328.6]$$

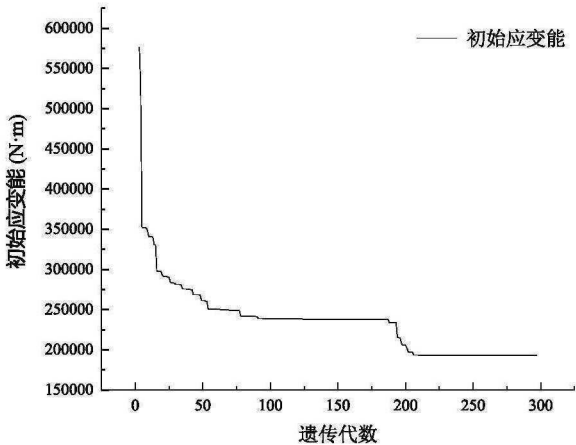


图 3 不考虑自重的索力优化进程图

表 2 优化后的索杆初始内力（无自重）

杆件编号	JSK1	JS2	XS2	XSK2	CG1	CG2	CG3	CGK	HS1
优化初始内力 (kN)	469.2	501.7	216.6	277.4	-757.3	-125.4	-220.1	-195.7	256.9
荷载态内力 (kN)	79.7	<u>5.0</u>	351.1	543.3	-177.8	-244.9	-439.2	-392.3	482.5
杆件编号	HS2	JS1	JS3	JSK2	JSK3	XSK1	XSK3	XS1	XS3
优化初始内力 (kN)	1018.0	643.5	498.6	186.8	531.1	53.5	304.1	439.2	231.7
荷载态内力 (kN)	2020.1	<u>0.0</u>	331.7	<u>2.8</u>	222.6	146.3	603.6	102.9	468.4

优化后初始预应力态的 Kiewitt 型索穹顶结构其最大位移  $u_{z,\max} = 10.96\text{cm} \leq 120 / 250 \times 100\text{cm} = 48\text{cm}$ ，满足规范限值要求。

如前述预测，受荷后脊索拉力均受到不同程度的降低，脊索接近于各自的下限值，索穹顶初始预应力水平越小，即整体的应变能就会越小。如表 2 所示，随着遗传代数的增加，优化后的索件 JS1，JSK2，JS2 均在受荷后接近于松弛，符合预期，可以判断，优化结果较为合理。

（三）考虑重力的索力优化计算

考虑重力时，结构各索杆内力为

$$T = [t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4] \cdot \beta + t^*$$

设置最大遗传代数为 200，在考虑自重的条件下，对该 Kiewitt 型索穹顶结构优化过程的子代种群最优值进行跟踪，得到变化趋势曲线如图 4 所示，本优化过程在第 35 代寻找到了最优个体，相较于不考虑自重的索力优化，收敛速度较快。优化后初始应变能因自重的作用比不考虑自重的结果大了近 1 倍，为  $3.84 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}$ ，对应的组合系数为：

$$\beta = [-416940.3 \quad 398736.2 \quad 35646.7 \quad 125492.1]^T$$

优化后初始预应力态的 Kiewitt 型索穹顶结构其最大位移  $u_{z,\max} = 10.61\text{cm} \leq 120 / 250 \times 100\text{cm} = 48\text{cm}$ ，满足规范限值要求

（1）与不考虑重力的优化结果相似，受荷后脊索拉力均受到不同程度的降低。不同的是，各索杆的初始内力与不考虑重力的优化初始内力差异较大。XSK1 不考虑自重的优化初始内力为 53.5 kN，而考虑自重时为 136.3kN，增幅最大，为 154.96%；HS2 不考虑自重的优化初始内力为 1018.0 kN，而在考虑自重时为 1790.7 kN，增量最大，为 772.7 kN。

（2）此外，在不考虑自重的优化结果中，JS1，JSK2，JS2 均在受荷后接近于松弛，而由表 3 可见，在考虑自重的优化结果中，仅 JSK1，JS1 在受荷后接近于松弛的极限状态。

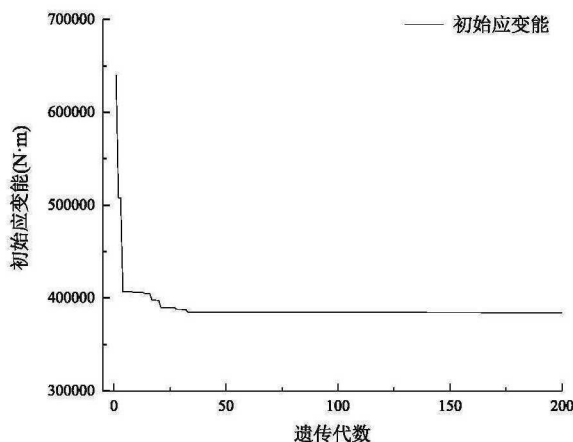


图 4 考虑自重的索力优化进程图

表 3 优化后的索杆初始内力（考虑自重）

杆件编号	JSK1	JS2	XS2	XSK2	CG1	CG2	CG3	CGK	HS1
优化初始内力 (kN)	376.7	623.9	300.6	572.1	-773.8	-171.9	-333.7	-307.0	425.5
荷载态内力 (kN)	<u>0.6</u>	142.4	447.8	781.3	-216.6	-295.1	-563.5	-504.5	659.4
杆件编号	HS2	JS1	JS3	JSK2	JSK3	XSK1	XSK3	XS1	XS3
优化初始内力 (kN)	1790.7	624.6	621.6	256.0	516.4	136.3	535.0	471.8	483.8
荷载态内力 (kN)	2790.3	<u>0.0</u>	469.0	83.5	219.1	226.3	833.6	148.4	611.0

结合上述，在索力的优化过程中，考虑重力的优化结果和不考虑重力的结果差异较大，在实际工程的优化中应考虑重力的影响。

五、结论

- (1) 二次规划法对于结构的目标函数有形式的要求，而遗传算法能够不受目标函数的形式影响，并能够在考虑自重的条件下进行优化。
- (2) 对于索穹顶结构而言，初始预应力水平最小时，部分脊索处于接近松弛的极限状态。工程实践中，应结合索的松弛判断准则，在约束条件中给予脊索充足的预应力储备。
- (3) 不考虑自重和考虑自重两种情况下，优化后的结构内力相差较大，实际工程的索力优化中应考虑自重的影响。

参考文献

[1] 袁行飞, 董石麟. 索穹顶结构整体可行预应力概念及其应用[J]. 土木工程学报, 2001, 34(2):33-37.

[2] Pellegrino S. Structural computations with the singular value decomposition of the equilibrium matrix[J]. International Journal of Solids & Structures, 1993, 30(21):3025-3035.

[3] Schek H J. The force density method for form finding and computation of general networks[J]. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 1974, 3(1):115-134.

[4] 张沛, 冯健. 一种求解索杆张力结构整体自应力模态的能量方法[J]. 土木工程学报, 2013(6):62-68.

[5] 刘小伟. 大跨度索穹顶结构的若干科学问题研究[D]. 华南理工大学, 2017.

[6] 陈联盟, 袁行飞, 董石麟. Kiewitt 型索穹顶结构自应力模态分析及优化设计[J]. 浙江大学学报工学版, 2006, 40(1):73-77.

[7] 汤荣伟. 索穹顶结构成形理论及结构优化[D]. 同济大学, 2005.

[8] 中国钢结构协会空间结构协会, 中国建筑科学研究院. CECS 158:2004 膜结构技术规程[S]. 北京:中国计划出版社, 2004.

[9] Bennage W A, Dhingra A K. Single and multiobjective structural optimization in discrete-continuous variables using simulated annealing [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1995, 38(16): 2753-2773.