博弈论作业

1、解：

总产量$Q = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$，其中$qi$是厂商$i$的产量

价格函数为：$p(Q) = a - bQ$

由于每个厂商的生产成本为0，因此厂商i的利润πi只与它的产量qi和市场价格$p(Q)$有关，利润函数为：

$$\pi_i = p(Q) \cdot q_i = (a - bQ) \cdot q_i$$

为了求出均衡下每个厂商的利润，我们需要先确定均衡时各个厂商的产量。在古诺模型中，每个厂商会选择自己的产量以最大化自己的利润，考虑到其他厂商的产量。这是一个纳什均衡问题。

因为所有公司都是对称的，所以在均衡状态下，所有公司的产量相同，即$q_1 = q_2 = \cdots = q_n = q^*$。则总产量$Q^* = nq^*$。

将总产量$Q*$代入价格函数中，得到均衡价格：

$$p^* = a - b(nq^*)$$

厂商的利润函数变为：

$$\pi_i^* = (a - b(nq^*)) \cdot q^*$$

要最大化利润，我们对$q*$求导并令其等于0：

$$\frac{d\pi_i^*}{dq^*} = a - 2bq^* - b(n-1)q^* = a - b(n+1)q^* = 0$$

解得均衡产量：

$$q^* = \frac{a}{b(n+1)}$$

将均衡产量代入价格函数中得到均衡价格：

$$p^* = a - b(nq^*) = a - \frac{abn}{b(n+1)} = \frac{a}{n+1}$$

最终均衡下每个厂商的利润为:

$$\pi_i^* = p^* \cdot q^* = \frac{a}{n+1} \cdot \frac{a}{b(n+1)} = \frac{a^2}{b(n+1)^2}$$

当$n \to \infty$时，每个厂商的利润趋近于:

$$\lim_{n\to\infty} \pi_i^* = \lim_{n\to\infty} \frac{a^2}{b(n+1)^2} = 0$$

因此，当公司数量趋于无穷大时，每个厂商的利润趋于 0。

2、解:

（1）

当玩家 A 选择策略 a1 时，玩家 B 最佳响应是策略 b3（标黄）;

当玩家 A 选择策略 a2 时，玩家 B 最佳响应是策略 b2（标黄）;

当玩家 A 选择策略 a3 时，玩家 B 最佳响应是策略 b1（标黄）;

当玩家 B 选择策略 b1 时，玩家 A 最佳响应是策略 a1（标绿）;

当玩家 B 选择策略 b2 时，玩家 A 最佳响应是策略 a2（标绿）;

当玩家 B 选择策略 b3 时，玩家 A 最佳响应是策略 a3（标绿）。

	玩家 B			
玩家 A		策略b_1	策略b_2	策略b_3
	策略a_1	(5,3)	(0,4)	(3,5)
	策略a_2	(4,0)	(5,5)	(4,0)
	策略a_3	(3,5)	(0,4)	(5,3)

故纳什均衡点为（策略 a2,策略 b2）。

（2）

当玩家 A 选择策略 a1 时，玩家 B 最佳响应是策略 b1（标黄）；

当玩家 A 选择策略 a2 时，玩家 B 最佳响应是策略 b2（标黄）；

当玩家 A 选择策略 a3 时，玩家 B 最佳响应是策略 b2（标黄）；

当玩家 A 选择策略 a4 时，玩家 B 最佳响应是策略 b1、b3（标黄）；

当玩家 B 选择策略 b1 时，玩家 A 最佳响应是策略 a3（标绿）；

当玩家 B 选择策略 b2 时，玩家 A 最佳响应是策略 a2（标绿）；

当玩家 B 选择策略 b3 时，玩家 A 最佳响应是策略 a1、a3（标绿）；

当玩家 B 选择策略 b4 时，玩家 A 最佳响应是策略 a4（标绿）。

	策略b_1	策略b_2	策略b_3	策略b_4
策略a_1	(0,7)	(2,5)	(7,0)	(0,1)
策略a_2	(5,2)	(3,3)	(5,2)	(0,1)
策略a_3	(7,0)	(2,5)	(7,0)	(0,1)
策略a_4	(0,0)	(0,-2)	(0,0)	(10,-1)

故纳什均衡点为（策略 a2,策略 b2）。

3、解：

				min	max
-5	2	1	19	-5	
6	4	4	8	4*	4*
5	4	0	-6	-6	

max	6	4*	4*	19
min			4*	

故纳什均衡点为 $a_{2,2}=a_{2,3}=4$

4、解:

				min	max
	4	0	2	0*	
	-2	7	1	-2	0*
max	4	7	2		
min		2*			

显然该矩阵对策没有纯纳什均衡，这时可以求解其混合纳什均衡。

求解:

$$\max_{p\in\Delta_1}\min_{q\in\Delta_2} pMq^{\top}$$

等价于

$$\max v$$

$s.t.$

$$pM \le v1$$

$$p=(p1,\dots,pm)\in\Delta_1$$

$$1=(1,\dots,1)^{\top}$$

求解得纳什均衡点为 2。

5、证:

定理 1 证明:

由于 $\min_j a_{ij} \le a_{ij}^* \le \max_j a_{ij}$

所以 $v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$ (gain floor) $\leq \min_j \max_i a_{ij}$ (Loss-ceiling) $= v_2$

定理 2 证明:

由定义 2：$\max_{\mathrm{i}} a_{is} \leq a_{\mathrm{rs}} \leq \min_{\mathrm{j}} a_{\mathrm{r}j}$可知，鞍点即为博弈值$v$。

再由定义 1：$v_1 = v_2 = v$ 可知，$v_1 = a_{\mathrm{rs}} = v_2$。