例析网络流构图方法

康望程

南京大学 2012级拔尖班

October 14, 2015

Outline

Outline

Definition

- 流网络

Definition

- 流网络
  - 容量限制
  - 反对称性
  - 流守恒性

Definition

- 流网络
  - 容量限制
  - 反对称性
  - 流守恒性
- 残量网络与增广路径

Definition

- 流网络
  - 容量限制
  - 反对称性
  - 流守恒性
- 残量网络与增广路径
- 反向弧

Definition

- 流网络
  - 容量限制
  - 反对称性
  - 流守恒性
- 残量网络与增广路径
- 反向弧
- (最小/最大)割

最大流最小割定理

最大流最小割定理

引理

对于任一可行流F和任一割K，均有

$$F(S)=\sum_{e\in K}F(e)\leq\sum_{e\in K}C(e)=Cap(K)$$

当所有割边满流时等号

最大流最小割定理

引理

对于任一可行流F和任一割K，均有

$$F(S) = \sum_{e \in K} F(e) \le \sum_{e \in K} C(e) = Cap(K)$$

当所有割边满流时等号

设F^*为最大流,K^*为最小割

此时的割集$P = \{u \in V|\text{存在}S \sim u\text{的增广路}\} \bigcup \{S\}$

最大流最小割定理

引理

对于任一可行流F和任一割K，均有

$$F(S) = \sum_{e \in K} F(e) \leq \sum_{e \in K} C(e) = Cap(K)$$

当所有割边满流时等号

设F^*为最大流,K^*为最小割

此时的割集$P = \{u \in V | 存在S \sim u的增广路\} \bigcup \{S\}$

由引理得$F^*(S) \leq Cap(K^*)$

最大流最小割定理

引理

对于任一可行流F和任一割K，均有

$$F(S) = \sum_{e \in K} F(e) \leq \sum_{e \in K} C(e) = Cap(K)$$

当所有割边满流时等号

设F^*为最大流,K^*为最小割

此时的割集$P = \{u \in V|$存在$S \sim u$的增广路$\}\bigcup\{S\}$

由引理得$F^*(S) \leq Cap(K^*)$

由于$(P, \overline{P})$之间的边必定满流

且由于割与最小割关系$F^*(S) = Cap(P) \geq Cap(K^*)$

最大流最小割定理

引理

对于任一可行流F和任一割K，均有

$$F(S) = \sum_{e \in K} F(e) \leq \sum_{e \in K} C(e) = Cap(K)$$

当所有割边满流时等号

设F^*为最大流,K^*为最小割

此时的割集$P = \{u \in V|存在S \sim u的增广路\} \bigcup \{S\}$

由引理得$F^*(S) \leq Cap(K^*)$

由于$(P, \overline{P})$之间的边必定满流

且由于割与最小割关系$F^*(S) = Cap(P) \geq Cap(K^*)$

所以$F^*(S) = Cap(K^*)$

Outline

网络流算法

网络流算法

- 最大流算法

网络流算法

- 最大流算法
  - 基于增广路寻找
    - Edmonds Karp—$O(NM^2)$
    - Dinic,SAP—$O(N^2M)$

网络流算法

- 最大流算法
  - 基于增广路寻找
    - Edmonds Karp—$O(NM^2)$
    - Dinic,SAP—$O(N^2M)$
  - 基于预流推进
    - 一般预流推进—$O(N^2M)$
    - 高标推进—$O(N^2\sqrt{N})$

网络流算法

- 最大流算法
  - 基于增广路寻找
    - Edmonds Karp—$O(NM^2)$
    - Dinic,SAP—$O(N^2M)$
  - 基于预流推进
    - 一般预流推进—$O(N^2M)$
    - 高标推进—$O(N^2\sqrt{N})$
- 费用流算法
  - 消圈算法
  - SPFA最小费用路增广
  - ZKW费用流
- 线性规划
- The new $O(NM)$ algorithm! ...

Outline

网络流变种

网络流变种

- 上下界网络流
    - 最小可行流
    - 最大流

网络流变种

- 上下界网络流
  - 最小可行流
  - 最大流
- 无源汇网络流

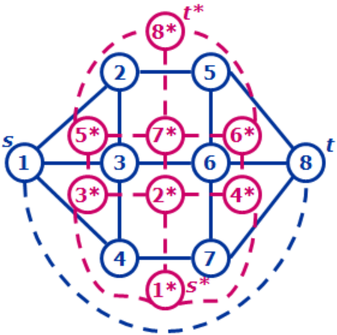
网络流变种

- 上下界网络流
  - 最小可行流
  - 最大流
- 无源汇网络流
- 平面图网络流
  - 平面图的对偶图求最小割

网络流变种

- 上下界网络流
  - 最小可行流
  - 最大流
- 无源汇网络流
- 平面图网络流
  - 平面图的对偶图求最小割
- 费用流
  - 负费用反向弧

Maximum st-flow in planar graphs via shortest paths



http://arxiv.org/abs/1305.5823

Outline

经典例题

经典例题

- 二分图最大匹配

经典例题

- 二分图最大匹配
  - Hopcroft-Karp—$O(\sqrt{N}M)$

经典例题

- 二分图最大匹配
  - Hopcroft-Karp—$O(\sqrt{N}M)$
- 二分图最大权匹配

经典例题

- 二分图最大匹配
  - Hopcroft-Karp—$O(\sqrt{N}M)$
- 二分图最大权匹配
- 有向无环图的最小路径覆盖

经典例题

- 二分图最大匹配
  - Hopcroft-Karp—$O(\sqrt{N}M)$
- 二分图最大权匹配
- 有向无环图的最小路径覆盖
- 二分图最大点权独立(覆盖)集

经典例题

- 二分图最大匹配
  - Hopcroft-Karp—$O(\sqrt{N}M)$
- 二分图最大权匹配
- 有向无环图的最小路径覆盖
- 二分图最大点权独立(覆盖)集
- 混合图的欧拉回路

二分图最小点覆盖集

点覆盖集：对于图中任一条边，至少有一端点在集合中

二分图最小点覆盖集

点覆盖集：对于图中任一条边，至少有一端点在集合中

Konig定理(1931)

对二分图G有|最小点覆盖集|=|最大匹配|

证明：

- 存在一条边, 两点均不在覆盖集(最大匹配)中. 那这条边可以加入最大匹配,矛盾. 故所以匹配一定是一个覆盖
- 对于匹配的的M 条边，必须要至少M个点去覆盖. 故最小覆盖点数不可能小于最大匹配的边数

二分图中最大独立集与最小覆盖集互补

Outline

混合图的欧拉回路

Prob. Description

给定一个N个点，M条边的混合连通图，判断是否存在欧拉回路。

Solution

由于每条边只经过一次，所以不能将无向边拆成两条有向边。考虑将无向边任意定向转化成有向图做,统计好度数后不再管原图的有向边。

有向图存在欧拉回路的充要条件是所有顶点的出度等于入度且连通。

令$D[i]$为点i的入度数−出度数,因为每修改一条边的方向，不影响两个点D值的奇偶性，所以如果有$D_i\&1$ 就无解了。

建立网路流模型，对于图中边(i,j)我们连接$(i,j,1)$，然后连接

$$\begin{cases} (S,i,-D[i]/2) & D[i] < 0 \\ (i,T,D[i]/2) & D[i] > 0 \end{cases}$$

Cont’d

至此，如果最大流等于$\sum_{D_i<0} -D_i/2$则有解(即满流)，否则无解。

在这个模型中，每个点的入流量表示需要更改出边的次数(用S强制灌至$-D_i/2$，其余入流量为其他相邻点改变出边使得此点D 值减少)

出流量表示更改出边(或流向T，表示不更改出边增加自己的度数)。

每个点流量平衡使得在满流情况下,每个点的度数都变为了0(也可以这样理解，每条流量经过的边都更改了方向，除开起点和终点度数分别+2，-2之外其他点度数不变).

ACM training Candy

Prob. Description

Oliver有N颗糖要发给M个孩纸。他已经知道第i个孩纸是不是喜欢吃第J颗糖，如果喜欢则L[i,j] = 1否则为0.

如果第i个孩纸每拿到一颗喜欢吃的糖则会得到K的高兴度，否则只能得到1的的高兴度。

如果第i个孩纸的高兴值不小于Bi,那么他将非常高兴！你能告诉Oliver是否存在一种分配方案使每个孩纸都非常高兴吗？

$N, M \leq 13, K \leq 10$

HNOI 2011 training

Prob. Description

给定一个非负整数矩阵$A[N*M]$, 求一个矩阵$B[N*M]$,
满足$\forall 1 \le i \le N, 1 \le j \le M, B_{i,j} \in [L,R]$,且使下式最小：

$$Minimize\ Ans = max \begin{cases} \max\limits_{1 \le j \le M} & \left| \sum\limits_{i=1}^{N} A_{i,j} - B_{i,j} \right| \\ \max\limits_{1 \le i \le N} & \left| \sum\limits_{j=1}^{M} A_{i,j} - B_{i,j} \right| \end{cases}$$

$N, M \le 200, 0 \le L, R, A_{i,j} \le 10^3$

Solution

本题直接做不好下手，由于是最大值最小的问题，可以考虑二分Ans,那么本题转化为判定问题

$$\begin{cases} \forall 1 \le j \le M & \left|\sum_{i=1}^{N} A_{i,j} - \sum_{i=1}^{N} B_{i,j}\right| \le Ans \\ \forall 1 \le i \le N & \left|\sum_{j=1}^{M} A_{i,j} - \sum_{j=1}^{M} B_{i,j}\right| \le Ans \end{cases} \tag{1}$$

约束条件只与A的行列之和和Ans有关，令U_i, V_j分别为一个矩阵的第i行,第j列的和。改写上式

Solution Cont'd

$$\begin{cases} \forall 1 \le i \le N & max(A_{U_i} - Ans, 0) \le B_{U_i} \le A_{U_i} + Ans \\ \forall 1 \le j \le M & max(A_{V_j} - Ans, 0) \le B_{V_j} \le A_{V_j} + Ans \end{cases} \tag{2}$$

那么我们构建一个网络流模型，以U_i, V_j为点，每个U_i连向V_j，S连向U_i，V_j连向T。

那么根据(2)和L, R，以上三类边均有容量上下限，至此对这个网络求解是否有可行流即可。

形象的理解就是用流量分配每行每列的和,用行列间的边的流量表示每个点,用流量平衡保证行列之和，用容量上下限满足题目约束。

Outline

拦截运输车

Prob. Description

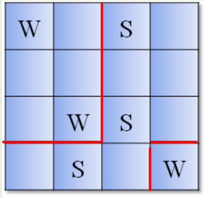
给定一个网络，求最小割.

在最小割前提下最少化割边数.

ZJOI 2009

Prob. Description

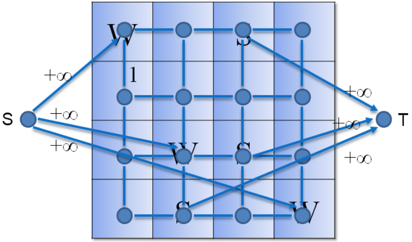
$N*M$的网格中，每个格子可以是狼，羊或空地。要求你沿网格间边界建造篱笆将狼和羊隔开。问最少需要多少篱笆。



$N, M \leq 100$

Solution

本题实际上是将两类点分开,很类似于割的定义，我们如下图建立网络流



由于与源汇相连的边不会成为割边，可将其看成平面图，不难发现每一个割与一种篱笆的建法一一对应，所以求其最小割即可。

HNOI 2013

Prob. Description

给定三维矩阵$V_{n,m,k}$.找出函数$z = f(x,y) \in \{1..k\}$ 使得

- $|f(x,y) - f(x',y')| \le D$, (x,y)和(x',y') 有相邻公共点
- 最小化$\sum_x \sum_y V[x][y][f(x,y)]$

牧场规划

Prob. Description

给定二维矩阵$V_{n,m}$.找出函数$f(x,y) \in \{0,1\}$使得

- $f(x,y) \& f(x',y') \neq 1$, (x,y)和(x',y') 有相邻公共边
- 最大化$\sum_x \sum_y V[x][y] * f(x,y)$

ZOJ 2676:Network Wars

Prob. Description

给定一个带权无向图，每条边e 有一个权W_e。求一个将点S和T分开的一个边割集$\mathbf{C}$，是的该割集的平均边权最小，即：

$$Minimize \quad \frac{\sum_{e \in \mathbf{C}} W_e}{|\mathbf{C}|}$$

令

$$h(y) = Min\sum W_e - |\mathbf{C}| * y \qquad (W_e \in \mathbf{C})$$

$$h(y) = Min\sum (W_e - y) \qquad (W_e \in \mathbf{C})$$

我们要求选出来的边组成一个割集，那么我们将边权重赋权为$W_e - y$，然后求最小割。

对于猜测值y和最优值Y，我们可以推出以下结论

$$\begin{cases} h(y) = 0 \Leftrightarrow y = Y \\ h(y) < 0 \Leftrightarrow y > Y \\ h(y) > 0 \Leftrightarrow y < Y \end{cases}$$

所以我们二分y然后用最小割来求出$h(y)$，直到满足精度要求。
要注意的是重赋权后边权可能为负，加入这条边进割集$h(y)$值一定更小，所以将这类边权直接加入$h(y)$即可。

SPOJ 839

Prob. Description

给定一个无向图，其边权为两端点点权的异或值，给定一部分点权，要求确定剩下的点权使得边权和最小,并在边权和最小的前提小最小化点权和。

Solution

由于异或运算相当于不带进位的加法，那么各位互不影响，我们按每一位来考虑。

考虑二进制表示的第i位，每个点有两种选择$0, 1$，如果存在边(u, v)，且u, v标号不同，那么答案就要加上"1"。

不难发现所有的费用均产生于$0, 1$之间的边，我们分别将标号为$0, 1$的点看成两个集合，问题转化为如何划分使得两集合之间的边数最少。

可以看出这与最小割问题等价，我们将S连向所有标号确定为1的点，容量为$+\infty$，将所有标号确定为0的点连向T，容量为$+\infty$。

然后按照原图的边(u, v)，连接(u, v)，容量为1。那么我们对其求最小割，即可最优化原问题。

Solution Cont'd

最后一个问题是最小化点权和，假设V只涉及一条增广路$S->V0->V->V1->T$，那么V既可以在S集合也可以在T集合，由于这个网络中间边容量都是1，所以最后在残量网络中从S找属于S集合的点的点数一定是最少的，这也是我们为什么将点权为1的点放在S集合的原因。

09集训队人员雇佣

Prob. Description

作为一个富有经营头脑的富翁，小L决定从本国最优秀的经理中雇佣一些来经营自己的公司。这些经理相互之间合作有一个贡献指数,（我们用Ei,j表示i经理对j经理的了解程度），即当经理i和经理j同时被雇佣时，经理i会对经理j做出贡献，使得所赚得的利润增加Ei,j。当然，雇佣每一个经理都需要花费一定的金钱Ai，对于一些经理可能他做出的贡献不值得他的花费，那么作为一个聪明的人，小L 当然不会雇佣他。然而，那些没有被雇佣的人会被竞争对手所雇佣，这个时候那些人会对你雇佣的经理的工作造成影响，使得所赚得的利润减少Ei,j（注意：这里的Ei,j 与上面的Ei,j 是同一个）。作为一个效率优先的人，小L想雇佣一些人使得净利润最大。你可以帮助小L解决这个问题吗？

10集训队部落战争

Prob. Description

lanzerb的部落在A国的上部，于是准备向A国的下部征战来获得更大的领土。A国是一个M*N的矩阵，其中某些地方是城镇，某些地方是高山深涧无人居住。lanzerb 把自己的部落分成若干支军队，他们约定：1. 每支军队可以从任意一个城镇出发，并只能从上往向下征战，不能回头。途中只能经过城镇，不能经过高山深涧。2. 如果某个城镇被某支军队到过，则其他军队不能再去那个城镇了。3. 每支军队都可以在任意一个城镇停止征战。4. 所有军队都很奇怪，他们走的方法有点像国际象棋中的马。不过马每次只能走1*2的路线，而他们只能走R*C的路线。。假设他们每支军队都能顺利占领这支军队经过的所有城镇，请你帮lanzerb算算至少要多少支军队才能完成统一全国的大业。

Outline

最大权闭合子图

最大权闭合子图可以说是最小割模型的最经典应用

闭合子图V是图G的一个点集，如果V被选入点集中，那么V'也要选入（存在$V->V'$的边）。闭合子图可以是不连通的。

最大权闭合子图即最大化点权和 $\sum_{v \in V \& W_v > 0} W_v^+ + \sum_{v \in V \& W_v < 0} W_v^-$的闭合子图.

类似的题目有NOI 2006最大获利，NOI2009 植物大战僵尸,CEOI 2008 order，Hard Life等最大权闭合子图的或其变种.

Cont'd

令V'为V的补集，考虑图中点权和固定，我们用正权点和减去最大权闭合子图,问题转化为

$$Minimize \quad \sum_{u\in G} W_u^+ - \left(\sum_{v\in V \& W_v>0} W_v^+ + \sum_{v\in V \& W_v<0} W_v^- \right)$$

$$= Minimize \quad \sum_{u\in V'} W_u^+ + \sum_{v\in V \& W_v<0} |W_v^-|$$

Cont’d

所以我们构建网络，从S连向所有正权点，容量为点权；从所有负权点连向T，容量为点权的绝对值；再连接原图的边，容量为$+\infty$。

由于上式是最小化没选的正权点+选了的负权点，所以与最小割是对应的，因为不存在选了的正权点到没选的负权点的边，反之亦然。

所以最后答案就是$\sum W^{+} - Maxflow$

CEOI 2008 order

Prob. Description

N个任务，各有其收益,M台机器，各有其购买价格
每个任务需要租借某些机器(由于任务需要租用时间不一，故不同任务租借同一机器的费用可能不同)，或者你已购买.
求最大收益.

Outline

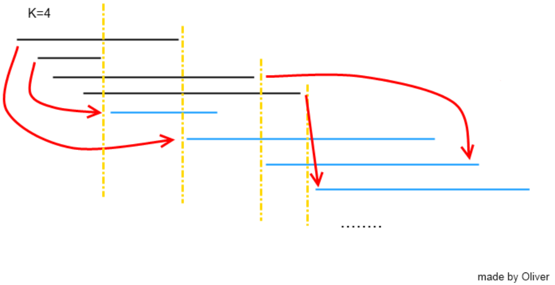
POJ 3680:Intervals

Prob. Description

给定N个开区间(a_i, b_i)，和它们的权值W_i，求选出权值和最大的区间集合，并使得覆盖任意点的次数不超过K

Solution

考虑选出的合法区间集合，我们将其按起点排序，一定形如下图：



其中蓝色线段接在黑色线段后。

Solution Cont’d

也就是说这个问题可以转化成，选取K个不相交区间集合,使得权值和最大。
所以我们考虑让K条流量来选择K个不相交区间。将区间坐标离散化，连接以下四种边:

$$
\begin{cases}
(S, 1, K) \\
(i, i+1, K) & , i < maxV \\
(maxV, T, K) \\
(a_i, b_i, 1)
\end{cases}
$$

其中第四类边还要加上相应费用，这个网络的最大费用最大流即为答案。

WC 2007:石头剪刀布

Prob. Description

有一个N个点的竞赛图G，给出一些边的方向。要求给剩下的边定向使得最大化三元环的数量。

Solution

首先分析图中三个点不是三元环的充要条件是**三点中有一点入度等于2。**

然后利用补集转化思想

三元环的个数$P=$图中所有由三个点构成的子图个数$A-$这些子图中不是三元环的个数B

Solution Cont’d

即(D_i为i点入度):

$$
\begin{aligned}
P &= A - B \quad (3)\\
&= C(n,3) - \sum C(Di,2)\\
&= n*(n-1)*(n-2)/6 - \sum Di*(Di-1)/2\\
&= n*(n-1)*(n-2)/6 - \sum Di^2/2 + \sum Di/2\\
&= n*(n-1)*(n-2)/6 + n*(n-1)/4 - \sum Di^2/2
\end{aligned}
$$

可以发现除$\sum Di^2$外，全为常数项，所以我们的问题转化为最小化入度平方和。

Solution Cont'd

先建立类似二分图的模型，左边为未定向边X，右边为原图的点Y。

Solution Cont'd

先建立类似二分图的模型，左边为未定向边X，右边为原图的点Y。

但是本题中费用不是流量的线性函数，但是易证$Cost(x) = x^2$是一个凸函数，所以其导函数也是是单调，即满足:

$$\forall 2 < i < N, 1 < i < j, \quad Cost(i) - Cost(i-1) \geq Cost(j) - Cost(j-1)$$

那么我们将边拆开，每条边容量为1，费用为$Cost(i) - Cost(i-1)$，这样每条边费用单调递增，就能保证最小费用流选出的是最小的连续的边了，也就能保证费用是流量的平方了。

此题对常数要求很高，由于只有一类边有费用所以可以加入一些特殊的优化。