

# Problem Set 02

Last update: 14/08/21

**Problem 1.** 给定  $N$  个特工, 每个特工监视另一个特工. 现要选出一批特工出国执行任务, 要求每个被选的特工至少有一个监视他的特工不被选. 求最多可以选出多少个点.

$$N \leq 10^6$$

**Problem 2.** 有  $N$  个存钱罐, 打开第  $i$  个罐子的钥匙在第  $X_i$  个罐子里. 你可以将罐子打碎拿到钥匙. 求一种取出所有钱的方法并使得打碎的罐子最少.

$$N \leq 10^6$$

**Problem 3.** 给定  $N$  个点,  $M$  条带权边, 你要选出  $N - 1$  条边, 然后从一个点开始, 访问每个点至少 1 次, 然后回到起点. 你每到一个点  $i$  将支付  $Di$  的费用, 你每经过一条边  $j$ , 将支付  $Fj$  的费用. 要求找出一种费用最小的方案.

$$N \leq 10^5, M \leq 10^6$$

**Problem 4.** 一个  $N$  个点  $M$  条边的无向图, 将  $N$  个点分成尽量多的组, 满足任意两个不在同一组的点之间都有边。

$$N \leq 100000, M \leq 2000000$$

**Problem 5.** 现有  $N$  个人, 已知  $M$  条信息  $(i, j)$ , 表示  $i$  的年龄不小于  $j$  的年龄. 现要求把  $N$  个人分成尽可能多的组, 使得每组内任意两个人的年龄无法比较 (直接或间接).

$$N, M \leq 10^6$$

**Problem 6.** 有一个大小为  $N$  的集合  $\{x_1, x_2 \dots x_n\}$ ,  $x_i \in \{0, 1\}$ , 现在给出它们之间的  $M$  个逻辑运算的结果 (比如  $x_1 \text{ and } x_2 = 1$ ), 逻辑运算有  $AND, OR, XOR$  三种, 问是否存在一种满足所有条件的取值方案。

$$N, M \leq 10^6$$

**Problem 7.** 给定一棵  $N$  个点的树, 其每条边为有向边, 要求添加最少的 *special path* 使得这棵树强连通. *special path* 的要求是 (具体解释见原题):

- 它包含连续的点和边
- 它的每条边与树边反向
- 一个节点或一条边在一个 *special path* 中只能出现一次
- 多条 *special path* 可以共享点或边

$$N \leq 10^6$$

**Problem 8 (\*).** 给定一个长为  $N$  的序列, 电脑每次读一个数, 设为  $S$ , 那么它会跳过接下来  $S$  个数. 如果刚好读完  $N$  个数就成功了.

求最小修改代价使得序列合法

$$N \leq 10^6$$