



# Formules et constantes pour le calcul pour la projection cylindrique conforme à axe oblique et pour la transformation entre des systèmes de référence

Octobre 2008

<b>1</b>	<b>Éléments de base .....</b>	<b>2</b>
1.1	Résumé des systèmes et cadres de référence utilisés en Suisse .....	2
1.2	Systèmes altimétriques utilisés en Suisse.....	3
1.3	Ellipsoïdes de référence utilisés en Suisse .....	4
1.4	Paramètres de transformation CHTRS95/ETRS89 $\Leftrightarrow$ CH1903+ .....	4
1.5	Paramètres Granit87 .....	4
<b>2</b>	<b>Conversion entre coordonnées ellipsoïdales et coordonnées cartésiennes géocentriques.....</b>	<b>5</b>
2.1	Coordonnées ellipsoïdales (longitude $\lambda$ , latitude $\varphi$ , hauteur $h$ ) $\Rightarrow$ coordonnées cartésiennes géocentriques $X, Y, Z$ .....	5
2.2	Coordonnées cartésiennes géocentriques $X, Y, Z$ $\Rightarrow$ coordonnées ellipsoïdiques (longitude $\lambda$ , latitude $\varphi$ , hauteur $h$ ) .....	5
<b>3</b>	<b>Formules de la projection suisse.....</b>	<b>6</b>
3.1	Dénominations, constantes, grandeurs auxiliaires.....	6
3.2	Coordonnées ellipsoïdales ( $\lambda, \varphi$ ) $\Rightarrow$ coord. suisses en projection ( $y, x$ ) (formules rigoureuses).....	7
3.3	Coordonnées suisses en projection ( $y, x$ ) $\Rightarrow$ coord. ellipsoïdales ( $\lambda, \varphi$ ) (formules rigoureuses).....	8
3.4	Coordonnées suisses en projection ( $y, x$ ) $\Rightarrow$ coord. ellipsoïdales ( $\varphi, \lambda$ ) (formules approchées).....	9
3.5	Coordonnées ellipsoïdales ( $\lambda, \varphi$ ) $\Rightarrow$ coord. suisses en projection ( $y, x$ ) (formules approchées).....	10
3.6	Formules pour la convergence des méridiens et l'altération linéaire .....	11
<b>4</b>	<b>Formules approchées CH1903 <math>\Leftrightarrow</math> WGS84.....</b>	<b>12</b>
4.1	Formules approchées pour la transformation directe de : coordonnées ellipsoïdales WGS84 ( $\lambda, \varphi, h$ ) $\Rightarrow$ coordonnées suisses en projection ( $y, x, h'$ ).....	12
4.2	Formules approchées pour la transformation directe de : coordonnées suisses en projection ( $y, x, h'$ ) $\Rightarrow$ coordonnées ellipsoïdales WGS84 ( $\lambda, \varphi, h$ ).....	13
<b>5</b>	<b>Représentation graphique des différences entre CH1903 et ETRS89/WGS84.....</b>	<b>14</b>
<b>6</b>	<b>Récapitulatif des transformations .....</b>	<b>17</b>
6.1	De MN03/NF02 vers ETRS89 .....	17
6.2	De ETRS89 vers MN03/NF02 .....	17
<b>7</b>	<b>Exemples numériques .....</b>	<b>18</b>
7.1	Transformation de coordonnées MN03/NF02 $\Rightarrow$ ETRS89.....	18
7.2	Transformation de coordonnées ETRS89 $\Rightarrow$ MN03/MN02.....	19
<b>8</b>	<b>Littérature.....</b>	<b>19</b>

---

# 1 Éléments de base

## 1.1 Résumé des systèmes et cadres de référence utilisés en Suisse

Système	Cadres	Ellipsoïde	Projection cartographique
ETRS89	ETRF93	GRS80	(UTM)
CHTRS95	CHTRF95, CHTRF98	GRS80	(UTM, zone 32)
CH1903	MN03	Bessel 1841	proj. cylindrique conforme à axe oblique
CH1903+	MN95	Bessel 1841	proj. cylindrique conforme à axe oblique

Le système de référence 3D **CHTRS95** (Swiss Terrestrial Reference System 1995) est fortement basé sur le système européen **ETRS89** et est identique à ce système pour l'époque 1993.0. Puisque, jusqu'à maintenant, il n'y a pas de raison de changer, ces deux systèmes vont rester identiques pour quelque temps. Les cadres de référence CHTRF95, CHTRF98 et CHTRF2004 réalisés jusqu'à maintenant, se basent sur les coordonnées géocentriques de la station fondamentale de Zimmerwald dans ETRF93 à l'époque 1993.0.

**CH1903** est le système de référence classique dérivé de la triangulation. Son cadre de référence **MN03** est toujours le cadre officiel dans la plupart des cantons. A l'origine, ce système n'a été fixé localement que relativement au méridien de Berne et les coordonnées 0 / 0 ont été attribuées au centre de projection. Ces coordonnées dites civiles (MN03-C) ont ensuite été remplacées par els coordonnées militaires (MN03-M), également appelées coordonnées nationales. Dans ce système, le centre de projection a les coordonnées 600'000 m / 200'000 m, pour éviter d'avoir des valeurs négatives ainsi que des erreurs d'inversion entre les composantes Est et Nord. En outre, le système a été également rattaché au méridien de Greenwich. Au cours du vingtième siècle, tous les cantons ont adopté les coordonnées nationales. Seule la principauté du Liechtenstein utilise aujourd'hui encore des coordonnées civiles dans la mensuration officielle. Les deux systèmes MN03-C et MN03-M peuvent être techniquement atteints avec les mêmes formules et constantes, à l'exception des valeurs pour l'origine des coordonnées.

Le système de référence local **CH1903+** avec le cadre de référence **MN95** (mensuration nationale 1995) est dérivé de CHTRS95. On a fait attention à ce que CH1903+ s'approche le plus possible du système existant CH1903. Les paramètres qui définissent ce système ont été transférés du vieux point fondamental (ancien observatoire de Berne, qui n'existe plus) au nouveau point fondamental à Zimmerwald. Pour exclure des erreurs entre MN03 et MN95, le centre de projection (qui reste l'ancien observatoire de Berne) a obtenu les coordonnées 2'600'000 m / 1'200'000 m (« false easting/northing »). A part ces translations (« offset »), toutes les formules et constantes restent identiques à celles de CH1903/MN03. Dans MN95, la composante Est est généralement abrégée E, tandis que la valeur du Nord est abrégée N.

A cause des distorsions locales de MN03, les deux cadres de référence MN03 et MN95 peuvent différer de jusqu'à 1.6 mètres. Ces distorsions peuvent être modélisées par des transformations affines locales (programme FINELTRA, jeu de données CHENyx06) ou être dérivée d'une grille de transformation fournie dans divers formats pouvant être utilisé dans la plupart des systèmes GPS et SIG.

Toutes les tâches de transformation entre les différents systèmes et cadre de référence utilisés en Suisse peuvent être effectuées avec le logiciel REFRAME, qui est également disponible sous la forme d'un service de calcul de gratuit proposé sur Internet.

## 1.2 Systèmes altimétriques utilisés en Suisse

Le système altimétrique **NF02** encore officiel aujourd'hui a été défini en 1902 en fixant l'altitude sur mer du Repère de la Pierre du Niton H(RPN)=373.6 m à Genève, qui est dérivé d'une mesure de rattachement au marégraphe de Marseille. Les altitudes des repères du nivellement ont été déterminées par des simples mesures de nivellement sans considérer des valeurs gravimétriques et en conservant fixes les altitudes des points nodaux du « Nivellement de Précision » (1864 - 1891).

Le nouveau système altimétrique **RAN95** (réseau altimétrique national 1995) est également basé sur l'altitude du RPN. Mais on a défini le potentiel de la station fondamentale de Zimmerwald comme valeur de référence. Les altitudes des points de RAN95 sont déterminées dans un calcul cinématique du nivellement national en considérant des mesures gravimétriques. Les altitudes orthométriques (RAN95-o), dérivées des potentiels, sont les valeurs publiées et diffusées aux utilisateurs, mais des altitudes normales (RAN95-n) peuvent également être obtenues.

Pour l'échange de données avec les pays voisins, on le système altimétrique **CHVN95** a en outre été défini. Il est pour l'instant identique au système européen EVRS2000. Il est basé sur la définition de l'hauteur du marégraphe de Amsterdam (NAP) et sur les résultats du nivellement européen (REUN). Les informations altimétriques dans ce système sont échangées sous la forme de potentiels ou d'altitudes normales.

La relation entre les altitudes physiques de RAN95 et CHVN95 et les hauteurs ellipsoïdales de CH1903+ et CHTRS95 est établie grâce au modèle de géoïde **CHGeo2004**, qui a été déterminé sur la base de mesures gravimétriques, déviations de la verticale et nivellement GPS.

Les différences entre les hauteurs normales de LRA95-n et celles de CHVN95 (~EVRS) sont modélisées provisoirement par une simple translation altimétrique de 10.3cm (hauteur RAN95 – EVRS). Cette valeur provient d'une comparaison entre RAN95 et les résultats de UELN95/98.

Les différences entre les altitudes orthométriques RAN95 et NF02 varient de -20 cm au nord du pays à +50 cm sur les plus hauts sommets des Alpes et montrent une forte corrélation avec l'élévation au-dessus du niveau de la mer. Elles ne peuvent pas être modélisées par une simple translation, en raison de la prise en considération différente du champ de pesanteur, des mouvements verticaux (soulèvement du massif alpin) ainsi que des distorsions de NF02. Pour une transformation entre les deux systèmes, les différences sont séparées en deux parties : la première est composée des différences entre NF02 et les altitudes normales, alors que la seconde décrit une échelle verticale locale, modélisée à partir des différences entre les altitudes normales et les altitudes orthométriques. Ces deux composantes ont été calculées et stockées sous la forme d'une grille d'une résolution de 1 km.

Toutes les transformations altimétriques en Suisse peuvent être effectuées avec le programme HTRANS, qui est également partie intégrante du logiciel de transformation REFRAME.

### 1.3 Ellipsoïdes de référence utilisés en Suisse

ellipsoïde	demi-grd axe a [m]	demi-petit axe b [m]	aplatissem. 1/f	1 <sup>ère</sup> excent. num. e <sup>2</sup>
Bessel 1841	6377397.155	6356078.962822	299.15281285	0.006674372230614
GRS 80	6378137.000	6356752.314140	298.257222101	0.006694380023011
WGS 84	6378137.000	6356752.314245	298.257223563	0.006694379990197

Aplatissement :

$$f = \frac{a-b}{a}$$

Carré de la première excentricité numérique :

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

### 1.4 Paramètres de transformation CHTRS95/ETRS89 ↔ CH1903+

Ces paramètres pour la transformation entre CHTRS95 et CH1903+ sont utilisés depuis 1997. Mais ils sont également utilisables sans restriction pour les systèmes ETRS89 et dans de nombreux cas également dans CH1903. Dans le cas de CH1903, il convient toutefois d'être conscient que, à cause des distorsions locales de ce réseau, les coordonnées transformées peuvent différer des coordonnées officielles de jusqu'à 1.6 mètre.

$$X_{CH1903+} = X_{CHTRS95} - 674.374 \text{ m}$$

$$Y_{CH1903+} = Y_{CHTRS95} - 15.056 \text{ m}$$

$$Z_{CH1903+} = Z_{CHTRS95} - 405.346 \text{ m}$$

### 1.5 Paramètres Granit87

Ces paramètres étaient utilisés entre 1987 et 1997 pour la transformation entre CH1903 et WGS84. Nous ne recommandons plus leur utilisation.

$$dX = 660.077 \text{ m}$$

$$dY = 13.551 \text{ m}$$

$$dZ = 369.344 \text{ m}$$

$$s = 1.00000566 \text{ (m = 5.66 ppm)}$$

$$\alpha = r_x = 2.484 \text{ cc (secondes centésimales)}$$

$$\beta = r_y = 1.783 \text{ cc (secondes centésimales)}$$

$$\gamma = r_z = 2.939 \text{ cc (secondes centésimales)}$$

Les formules de calcul sont les suivantes :

$$\begin{pmatrix} X_{WGS84} \\ Y_{WGS84} \\ Z_{WGS84} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} + s \cdot D \cdot \begin{pmatrix} X_{CH1903} \\ Y_{CH1903} \\ Z_{CH1903} \end{pmatrix} \quad \text{avec la matrice de rotation } D = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \text{ et ses éléments}$$

$$r_{11} = \cos \beta \cos \gamma$$

$$r_{21} = -\cos \beta \sin \gamma$$

$$r_{31} = \sin \beta$$

$$r_{12} = \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$$

$$r_{22} = \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

$$r_{32} = -\sin \alpha \cos \beta$$

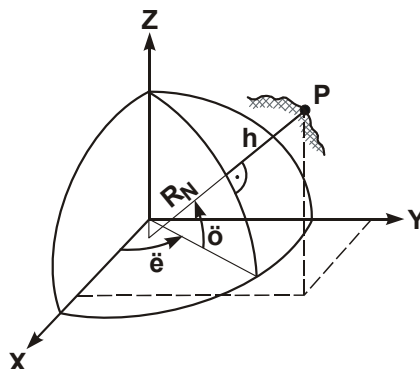
$$r_{13} = \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma$$

$$r_{23} = \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

$$r_{33} = \cos \alpha \cos \beta$$

## 2 Conversion entre coordonnées ellipsoïdales et coordonnées cartésiennes géocentriques

### 2.1 Coordonnées ellipsoïdales (longitude $\lambda$ , latitude $\varphi$ , hauteur $h$ ) $\Rightarrow$ coordonnées cartésiennes géocentriques $X, Y, Z$



$$\begin{aligned} X &= (R_N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ Y &= (R_N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ Z &= (R_N \cdot (1 - e^2) + h) \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

avec rayon de courbure normal :  $R_N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$

Les paramètres  $a$  et  $e$  sont dépendants de l'ellipsoïde de référence utilisé :

$a$  = demi grand axe de l'ellipsoïde

$b$  = demi petit axe de l'ellipsoïde

$e$  = première excentricité numérique de l'ellipsoïde =  $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

### 2.2 Coordonnées cartésiennes géocentriques $X, Y, Z$ $\Rightarrow$ coordonnées ellipsoïdiques (longitude $\lambda$ , latitude $\varphi$ , hauteur $h$ )

$$\lambda = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) \quad \varphi = \arctan\left(\frac{\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}}{1 - \frac{R_N \cdot e^2}{R_N + h}}\right) \quad h = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos \varphi} - R_N$$

avec  $R_N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$

**Avertissement :** Les grandeurs  $\varphi$ ,  $R_N$  et  $h$  sont dépendantes les unes des autres, raison pour laquelle elles doivent être déterminées par l'intermédiaire d'un **processus itératif** (à partir d'une valeur approchée  $\varphi_0$ ):

Proposition de valeur approchée pour  $\varphi_0$ :  $\varphi_0 = \arctan \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$

### 3 Formules de la projection suisse

#### 3.1 Dénominations, constantes, grandeurs auxiliaires

##### Dénominations

$\varphi, \lambda$  : latitude et longitude géographiques dans le référentiel CH1903/1903+ par rapport à Greenwich  
 $b, l$  : coordonnées sphériques par rapport à l'origine à Berne  
 $\bar{b}, \bar{l}$  : coordonnées sphériques par rapport au système pseudo-équatorial à Berne  
 $Y, X$  : coordonnées civiles  
 $y, x$  : coordonnées nationales (coordonnées militaires) dans MN03  
 $E, N$  : coordonnées MN95

Sauf indication contraire, on supposera que les unités utilisées dans les formules sont le radian [rad] pour les angles et le mètre [m] pour les longueurs.

##### Constantes

$a$  = 6377397.155 m demi grand axe de l'ellipsoïde de Bessel  
 $E^2$  = 0.006674372230614 carré de la première excentricité numérique de l'ellipsoïde de Bessel (\*)  
 $\varphi_0$  = 46° 57' 08.66" latitude géographique de l'origine à Berne (\*\*)  
 $\lambda_0$  = 7° 26' 22.50" longitude géographique de l'origine à Berne (\*\*)

(\*) La première excentricité numérique est désignée par E dans les formules présentées dans ces annexes afin de la distinguer de la constante d'Euler e.

(\*\*) Il s'agit ici des « anciennes valeurs » dont la validité s'étend encore à toutes les applications géodésiques. Les « nouvelles valeurs » (issues d'une nouvelle détermination des coordonnées astronomiques de l'ancien observatoire astronomique de Berne en 1938 :  $\varphi_0 = 46^\circ 57' 07.89''$ ,  $\lambda_0 = 7^\circ 26' 22.335''$ ) n'ont été utilisées qu'à des fins cartographiques (indications des latitudes et des longitudes sur les cartes nationales). Nous ne conseillons pas l'emploi de ces valeurs.

##### Calcul de valeurs auxiliaires

Rayon de la sphère de projection : 
$$R = \frac{a \cdot \sqrt{1-E^2}}{1-E^2 \sin^2 \varphi_0} = 6378815.90365 \text{ m}$$

Rapport des longitudes (de la sphère à l'ellipsoïde) : 
$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{E^2}{1-E^2} \cdot \cos^4 \varphi_0} = 1.00072913843038$$

Latitude de l'origine sur la sphère : 
$$b_0 = \arcsin\left(\frac{\sin \varphi_0}{\alpha}\right) = 46^\circ 54' 27.83324844''$$

Constante de la formule des latitudes :

$$K = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{b_0}{2}\right)\right) - \alpha \cdot \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right)\right) + \frac{\alpha \cdot E}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+E \cdot \sin \varphi_0}{1-E \cdot \sin \varphi_0}\right) = 0.0030667323772751$$

### 3.2 Coordonnées ellipsoïdales ( $\lambda, \varphi$ ) $\Rightarrow$ coordonnées suisses en projection ( $y, x$ ) (formules rigoureuses)

Les résultats intermédiaires sont relatifs à l'exemple Rigi avec les valeurs suivantes :

$$\varphi = 47^\circ 03' 28.95659233''$$

$$= 0.821317799 \text{ rad}$$

$$\lambda = 8^\circ 29' 11.1127154''$$

$$= 0.148115967 \text{ rad}$$

#### a) Ellipsoïde ( $\varphi, \lambda$ ) $\Rightarrow$ Sphère ( $b, l$ ) (projection de Gauss)

Valeur auxiliaire :

$$S = \alpha \cdot \ln \left( \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right) - \frac{\alpha \cdot E}{2} \cdot \ln \left( \frac{1 + E \cdot \sin \varphi}{1 - E \cdot \sin \varphi} \right) + K = 0.931969601072417$$

Latitude sphérique :

$$b = 2 \cdot \left( \arctan(e^S) - \frac{\pi}{4} \right) = 0.820535226 \text{ rad}$$

(=  $47^\circ 00' 47.539422864''$ )

Longitude sphérique :

$$l = \alpha \cdot (\lambda - \lambda_0) = 0.0182840649 \text{ rad}$$

(=  $1^\circ 02' 51.3591108468''$ )

#### b) Système équatorial ( $b, l$ ) $\Rightarrow$ système pseudo-équatorial ( $\bar{b}, \bar{l}$ ) (rotation)

$$\bar{l} = \arctan \left( \frac{\sin l}{\sin b_0 \cdot \tan b + \cos b_0 \cdot \cos l} \right) = 0.0124662714 \text{ rad}$$

(=  $0^\circ 42' 51.3530463924''$ )

$$\bar{b} = \arcsin(\cos b_0 \cdot \sin b - \sin b_0 \cdot \cos b \cdot \cos l) = 0.00192409259 \text{ rad}$$

(=  $0^\circ 06' 36.8725855284''$ )

#### c) Sphère ( $\bar{b}, \bar{l}$ ) $\Rightarrow$ plan de projection ( $y, x$ ) (projection de Mercator)

$$Y = R \cdot \bar{l} = 79520.05$$

$$y_{LV03} = Y + 600000 = 679520.05$$

$$y_{LV95} = Y + 2600000 = 2679520.05$$

$$X = \frac{R}{2} \cdot \ln \left( \frac{1 + \sin \bar{b}}{1 - \sin \bar{b}} \right) = 12273.44$$

$$x_{LV03} = X + 200000 = 212273.44$$

$$x_{LV95} = X + 1200000 = 1212273.44$$

### 3.3 Coordonnées suisses en projection (y, x) ⇒ coordonnées ellipsoïdales (λ, φ) (formules rigoureuses)

Le point Rigi (MN03) a été utilisé à titre d'exemple :

$$\begin{aligned} y &= 679520.05 \\ x &= 212273.44 \end{aligned}$$

#### a) Plan de projection (y, x) ⇒ sphère ( $\bar{b}$ , $\bar{l}$ )

$$\begin{aligned} Y &= y_{MN03} - 600'000 \\ X &= x_{MN03} - 200'000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= E_{MN95} - 2'600'000 \\ X &= N_{MN95} - 1'200'000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 79520.05 \\ &= 12273.44 \end{aligned}$$

$$\bar{l} = \frac{Y}{R} \quad 0.01246627136 \text{ rad}$$

$$\bar{b} = 2 \cdot \left[ \arctan \left( e^{\frac{X}{R}} \right) - \frac{\pi}{4} \right] \quad 0.00192409259 \text{ rad}$$

#### b) Système pseudo-équatorial ( $\bar{b}$ , $\bar{l}$ ) ⇒ système équatorial (b, l)

$$b = \arcsin(\cos b_0 \cdot \sin \bar{b} + \sin b_0 \cdot \cos \bar{b} \cdot \cos \bar{l}) \quad = 0.820535226 \text{ rad}$$

$$l = \arctan \left( \frac{\sin \bar{l}}{\cos b_0 \cdot \cos \bar{l} - \sin b_0 \cdot \tan \bar{b}} \right) \quad = 0.0182840649 \text{ rad}$$

#### c) Sphère (b, l) ⇒ ellipsoïde (φ, λ)

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + \frac{l}{\alpha} \\ &= 0.148115967 \text{ rad} \\ &= 8^\circ 29' 11.111272'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{1}{\alpha} \left[ \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{b}{2} \right) - K \right] + E \cdot \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\arcsin(E \cdot \sin \varphi)}{2} \right) \\ \varphi &= 2 \arctan(e^S) - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Les équations pour φ et S doivent être résolues de manière **itérative**. Il est recommandé d'utiliser φ = b comme valeur initiale.

Les itérations successives fournissent les résultats suivants :

Itération 0 :	S = 0	φ = 0.820535226
Itération 1 :	S = 0.933114264192610	φ = 0.821315364725524
Itération 2 :	S = 0.933117825679560	φ = 0.821317791017021
Itération 3 :	S = 0.933117836751434	φ = 0.821317798559814
Itération 4 :	S = 0.933117836785854	φ = 0.821317798583263
Itération 5 :	S = 0.933117836785961	φ = 0.821317798583336
Itération 6 :	S = 0.933117836785961	φ = 0.821317798583336
		φ = 47° 03' 28.956592"



### 3.4 Coordonnées suisses en projection (y, x) $\Rightarrow$ coordonnées ellipsoïdales ( $\varphi$ , $\lambda$ ) (formules approchées)

Simplifications tirées de : [Bolliger 1967]

#### Dénominations et unités de mesure

$\varphi$ ,  $\lambda$  = latitude et longitude géographiques par rapport à Greenwich en [10000 "]  
 $Y$ ,  $X$  = coordonnées civiles dans le système de projection suisse en [1000 km]  
 $y$ ,  $x$  = coordonnées nationales ou coordonnées militaires MN03 en [1000 km]  
 $E$ ,  $N$  = coordonnées MN95 en [1000 km]

#### Calcul

$$\begin{aligned} Y &= y_{MN03} - 0.6 & X &= x_{MN03} - 0.2 \text{ resp.} \\ Y &= E_{MN95} - 2.6 & X &= N_{MN95} - 1.2 \end{aligned}$$

$$\lambda = 2.67825 + a_1 \cdot Y + a_3 \cdot Y^3 + a_5 \cdot Y^5 \text{ avec}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= + 4.729\,730\,56 & a_3 &= - 0.044\,270 & a_5 &= + 0.000\,96 \\ &+ 0.792\,571\,4 \cdot X & &- 0.025\,50 \cdot X & & \\ &+ 0.132\,812 \cdot X^2 & &- 0.009\,6 \cdot X^2 & & \\ &+ 0.025\,50 \cdot X^3 & & & & \\ &+ 0.004\,8 \cdot X^4 & & & & \end{aligned}$$

$$\varphi = 16.902866 + p_0 + p_2 \cdot Y^2 + p_4 \cdot Y^4 \text{ avec}$$

$$\begin{aligned} p_0 &= 0 & p_2 &= - 0.271\,353\,79 & p_4 &= + 0.002\,442 \\ &+ 3.238\,648\,77 \cdot X & &- 0.045\,044\,2 \cdot X & &+ 0.001\,32 \cdot X \\ &- 0.002\,548\,6 \cdot X^2 & &- 0.007\,553 \cdot X^2 & & \\ &- 0.013\,245 \cdot X^3 & &- 0.001\,46 \cdot X^3 & & \\ &+ 0.000\,048 \cdot X^4 & & & & \end{aligned}$$

#### Erreur d'approximation (pour $|Y| < 0.2$ et $|X| < 0.1$ ):

pour une approximation limitée au 3<sup>ème</sup> ordre :  $\Delta\lambda < 0.16''$  et  $\Delta\varphi < 0.04''$   
 pour une approximation limitée au 5<sup>ème</sup> ordre :  $\Delta\lambda < 0.00014''$  et  $\Delta\varphi < 0.00004''$

L'exemple numérique précédent (le point Rigi) peut être utilisé à des fins de contrôle du calcul. D'autres formules approchées et des exemples numériques peuvent être trouvés dans [Bolliger 1967].

### 3.5 Coordonnées ellipsoïdales ( $\lambda, \varphi$ ) $\Rightarrow$ coordonnées suisses en projection (y, x) (formules approchées)

Simplifications tirées de : [Bolliger 1967]

#### Dénominations et unités de mesure

$\varphi, \lambda$  = Latitude et longitude géographiques par rapport à Greenwich en [10'000 "]  
 $Y, X$  = coordonnées civiles dans le système de projection suisse en [1000 km]  
 $y, x$  = coordonnées nationales (ou militaires) MN03 en [1000 km]  
 $E, N$  = coordonnées MN95 en [1000 km]

#### Valeurs auxiliaires:

$$\Phi = \varphi - 16.902866''$$

$$\Lambda = \lambda - 2.67825''$$

#### Calcul

$$Y = y_1 \cdot \Lambda + y_3 \cdot \Lambda^3 + y_5 \cdot \Lambda^5 \text{ avec}$$

$$y_1 = \begin{aligned} &+ 0.211\,428\,533\,9 \\ &- 0.010\,939\,608 \quad * \Phi \\ &- 0.000\,002\,658 \quad * \Phi^2 \\ &- 0.000\,008\,53 \quad * \Phi^3 \end{aligned}$$

$$y_3 = \begin{aligned} &- 0.000\,044\,232\,7 \\ &+ 0.000\,004\,291 \quad * \Phi \\ &- 0.000\,000\,309 \quad * \Phi^2 \end{aligned}$$

$$y_5 = + 0.000\,000\,019\,7$$

$$X = x_0 + x_2 \cdot \Lambda^2 + x_4 \cdot \Lambda^4 \text{ avec}$$

$$x_0 = \begin{aligned} &0 \\ &+ 0.308\,770\,746\,3 \quad * \Phi \\ &+ 0.000\,075\,028 \quad * \Phi^2 \\ &+ 0.000\,120\,435 \quad * \Phi^3 \\ &+ 0 \quad * \Phi^4 \\ &+ 0.000\,000\,07 \quad * \Phi^5 \end{aligned}$$

$$x_2 = \begin{aligned} &+ 0.003\,745\,408\,9 \\ &- 0.000\,193\,792\,7 \quad * \Phi \\ &+ 0.000\,004\,340 \quad * \Phi^2 \\ &- 0.000\,000\,376 \quad * \Phi^3 \end{aligned}$$

$$x_4 = \begin{aligned} &- 0.000\,000\,734\,6 \\ &+ 0.000\,000\,144\,4 \quad * \Phi \end{aligned}$$

$$Y_{MN03} = Y + 0.6$$

$$x_{MN03} = X + 0.2 \text{ resp.}$$

$$E_{MN95} = Y + 2.6$$

$$N_{MNV95} = X + 1.2$$

#### Erreur d'approximation (pour $|\Lambda| < 1.0$ et $|\Phi| < 0.316$ ):

pour une approximation limitée au 3<sup>ème</sup> ordre :  $\Delta Y < 1.2 \text{ m}$  et  $\Delta X < 0.75 \text{ m}$   
 pour une approximation limitée au 5<sup>ème</sup> ordre :  $\Delta Y < 0.001 \text{ m}$  et  $\Delta X < 0.0007 \text{ m}$

L'exemple numérique précédent (le point Rigi) peut être utilisé à des fins de contrôle du calcul. D'autres formules approchées et des exemples numériques peuvent être trouvés dans [Bolliger 1967].

### 3.6 Formules pour la convergence des méridiens et l'altération linéaire

Les altérations dues à la projection peuvent être décrites en totalité par la **convergence des méridiens  $\mu$**  (angle entre la direction du nord ellipsoïdique et la direction du nord de la projection) et l'**altération linéaire  $m$**  (rapport entre deux distances infinitésimales, en projection et sur l'ellipsoïde) :

Convergence des méridiens : 
$$\mu = \arctan \frac{\sin b_0 \cdot \sin l}{\cos b_0 \cdot \cos b + \sin b_0 \cdot \sin b \cdot \cos l}$$

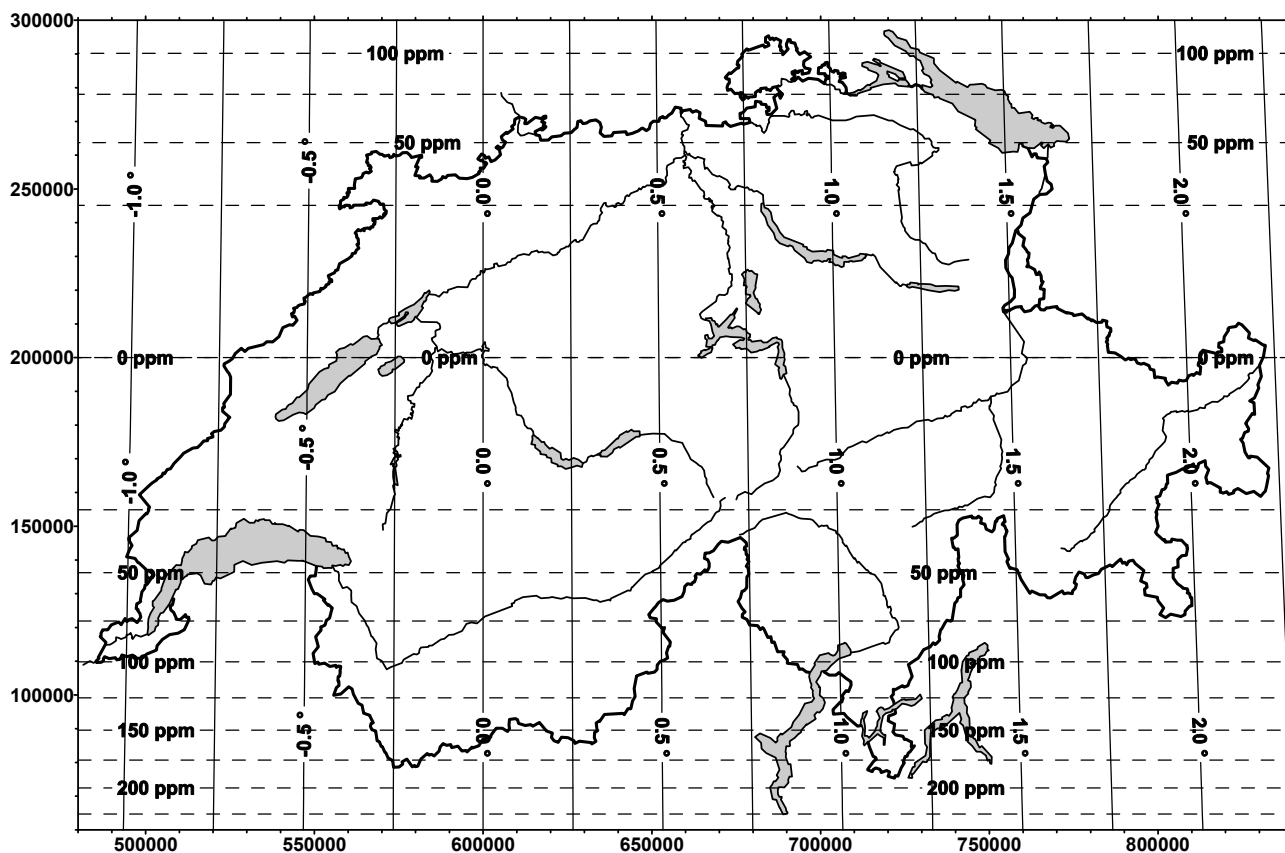
Formule approchée : 
$$\mu = 10.668 \cdot 10^{-6} \cdot Y + 1.788 \cdot 10^{-12} \cdot Y \cdot X - 0.14 \cdot 10^{-18} \cdot Y^3$$

Y et X désignent les coordonnées en projection dans le système civil en [m]. La convergence des méridiens  $\mu$  est exprimée en grades (gons).

Altération linéaire (terme principal) : 
$$m = \frac{s_{\text{proj}}}{s_{\text{ell}}} = \alpha \cdot \frac{R}{R_N} \cdot \frac{\cos b}{\cos \varphi \cdot \cos b}$$

Formule approchée : 
$$m = 1 + \frac{X^2}{2R^2}$$

Exemple: Point Rigi (y = 679520.05, x = 212273.44)  
 Des coord. géographiques:  $\mu = 0.8499955$  gon,  $m = 1.000001852$   
 Des formules approximatives :  $\mu = 0.8499946$  gon,  $m = 1.000001851$



Représentation de la convergence des méridiens (en degrés) et de l'altération linéaire (pointillés, en ppm)

## 4 Formules approchées CH1903 $\Leftrightarrow$ WGS84

### 4.1 Formules approchées pour la transformation directe de : coordonnées ellipsoïdales WGS84 ( $\lambda$ , $\varphi$ , $h$ ) $\Rightarrow$ coordonnées suisses en projection ( $y$ , $x$ , $h'$ )

#### (Précision de l'ordre du mètre)

D'après : [H. Dupraz, Transformation approchée de coordonnées WGS84 en coordonnées nationales suisses, IGEO-TOPO, EPFL, 1992]

Les paramètres ont été redéterminés par U. Marti (en mai 1999). Les unités ont par ailleurs été adaptées de façon à permettre la comparaison avec les formules de [Bolliger 1967].

1. Les latitudes  $\varphi$  et les longitudes  $\lambda$  doivent être converties en secondes sexagésimales ["]
2. Les valeurs auxiliaires suivantes sont à calculer (les écarts en latitude et en longitude par rapport à Berne sont exprimés dans l'unité [10000"]):

$$\begin{aligned}\varphi' &= (\varphi - 169028.66'')/10000 \\ \lambda' &= (\lambda - 26782.5'')/10000\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y \text{ [m]} &= 600072.37 \\ &+ 211455.93 \quad * \lambda' \\ &- 10938.51 \quad * \lambda' \quad * \varphi' \\ &- 0.36 \quad * \lambda' \quad * \varphi'^2 \\ &- 44.54 \quad * \lambda'^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x \text{ [m]} &= 200147.07 \\ &+ 308807.95 \quad * \varphi' \\ &+ 3745.25 \quad * \lambda'^2 \quad * \varphi' \\ &+ 76.63 \quad * \varphi'^2 \\ &- 194.56 \quad * \lambda'^2 \quad * \varphi' \\ &+ 119.79 \quad * \varphi'^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h' \text{ [m]} &= h - 49.55 \\ &+ 2.73 \quad * \lambda' \\ &+ 6.94 \quad * \varphi'\end{aligned}$$

#### 4. Exemple numérique :

Données :  $\varphi = 46^\circ 2' 38.87''$   $\lambda = 8^\circ 43' 49.79''$   $h = 650.60 \text{ m}$

$\Rightarrow \varphi' = -0.326979$   $\lambda' = 0.464729$

$\Rightarrow y = 699\,999.76 \text{ m}$   $x = 99\,999.97 \text{ m}$   $h' = 600.05 \text{ m}$

Résultat NAVREF:  $y = 700\,000.0 \text{ m}$   $x = 100\,000.0 \text{ m}$   $h' = 600 \text{ m}$

La précision de ces solutions approchées est supérieure à 1 mètre en planimétrie et à 0.5 mètre en altimétrie sur l'ensemble du territoire suisse.

**Remarque sur les hauteurs :** Dans ces formules, il est supposé qu'on travaille avec des hauteurs ellipsoïdales, par ex. provenant de mesures GPS. Si l'on travaille avec des « altitudes au-dessus du niveau de la mer », il est inutile de les transformer, car les altitudes sont équivalentes dans les deux systèmes avec une précision de l'ordre du mètre.

## 4.2 Formules approchées pour la transformation directe de : coordonnées suisses en projection (y, x, h') ⇒ coordonnées ellipsoïdales WGS84 (λ, φ, h)

(Précision de l'ordre de 0.1")

Il s'agit ici d'une dérivation effectuée par U. Marti en mai 1999, sur la base des formules de [Bolliger, 1967]

1. Les coordonnées en projection y (coordonnée Est) et x (coordonnée Nord) doivent être converties dans le système civil (Berne = 0 / 0) et à exprimer dans l'unité [1000 km] :

$$y' = (y - 600000 \text{ m}) / 1000000$$

$$x' = (x - 200000 \text{ m}) / 1000000$$

2. La longitude et la latitude sont à calculer dans l'unité [10000"] :

$$\begin{aligned} \lambda' = & 2.6779094 \\ & + 4.728982 * y' \\ & + 0.791484 * y' * x' \\ & + 0.1306 * y' * x'^2 \\ & - 0.0436 * y'^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi' = & 16.9023892 \\ & + 3.238272 * x' \\ & - 0.270978 * y'^2 * x' \\ & - 0.002528 * x'^2 \\ & - 0.0447 * y'^2 * x' \\ & - 0.0140 * x'^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h [\text{m}] = & h' + 49.55 \\ & - 12.60 * y' \\ & - 22.64 * x' \end{aligned}$$

3. La longitude et la latitude sont à convertir dans l'unité [°] :

$$\lambda = \lambda' * 100 / 36$$

$$\varphi = \varphi' * 100 / 36$$

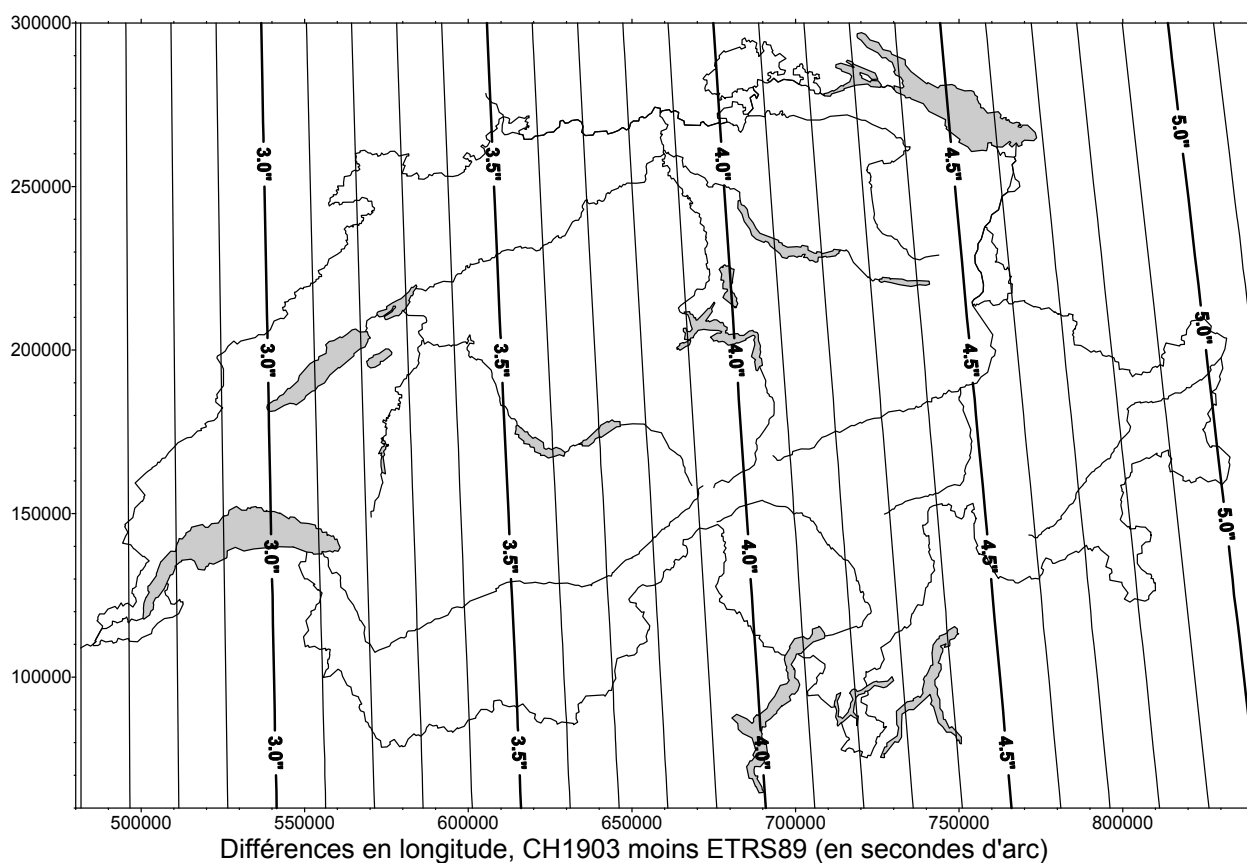
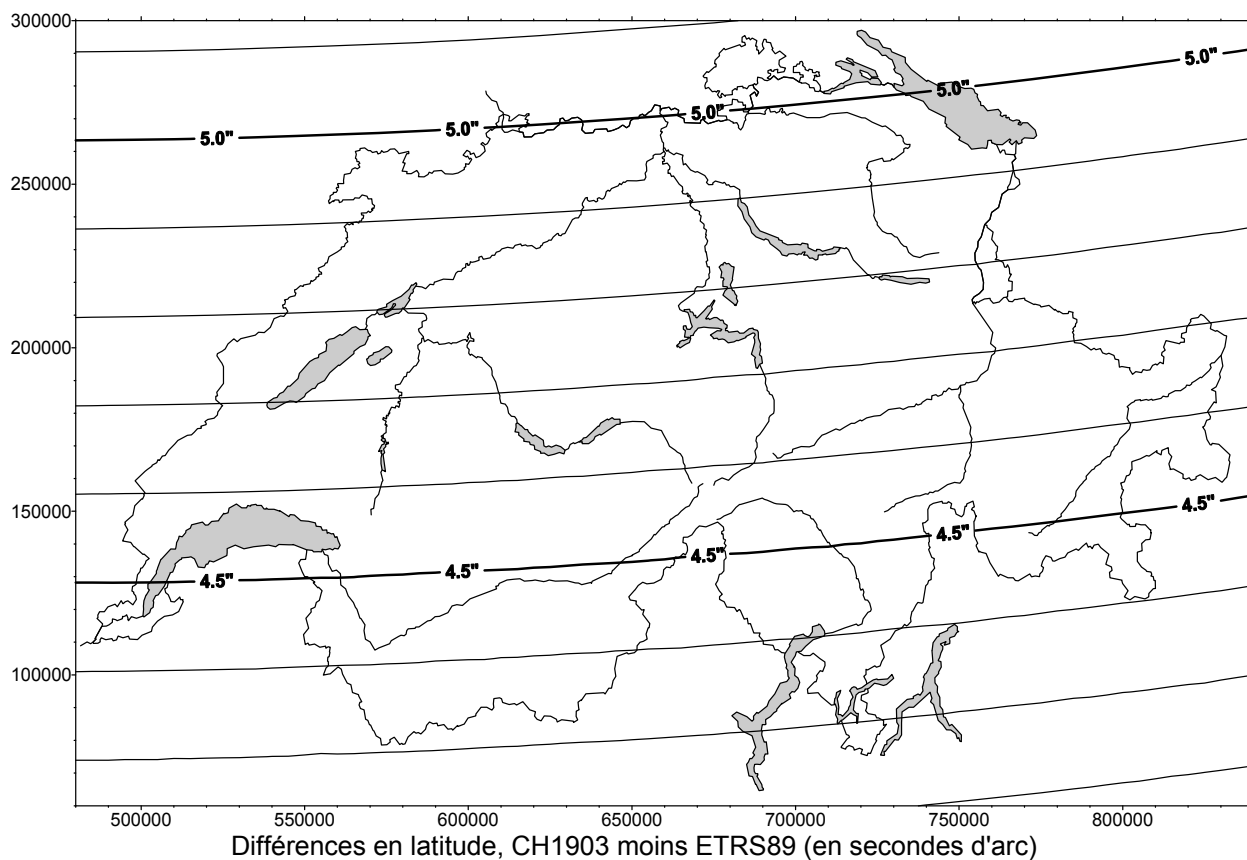
4. Exemple numérique :

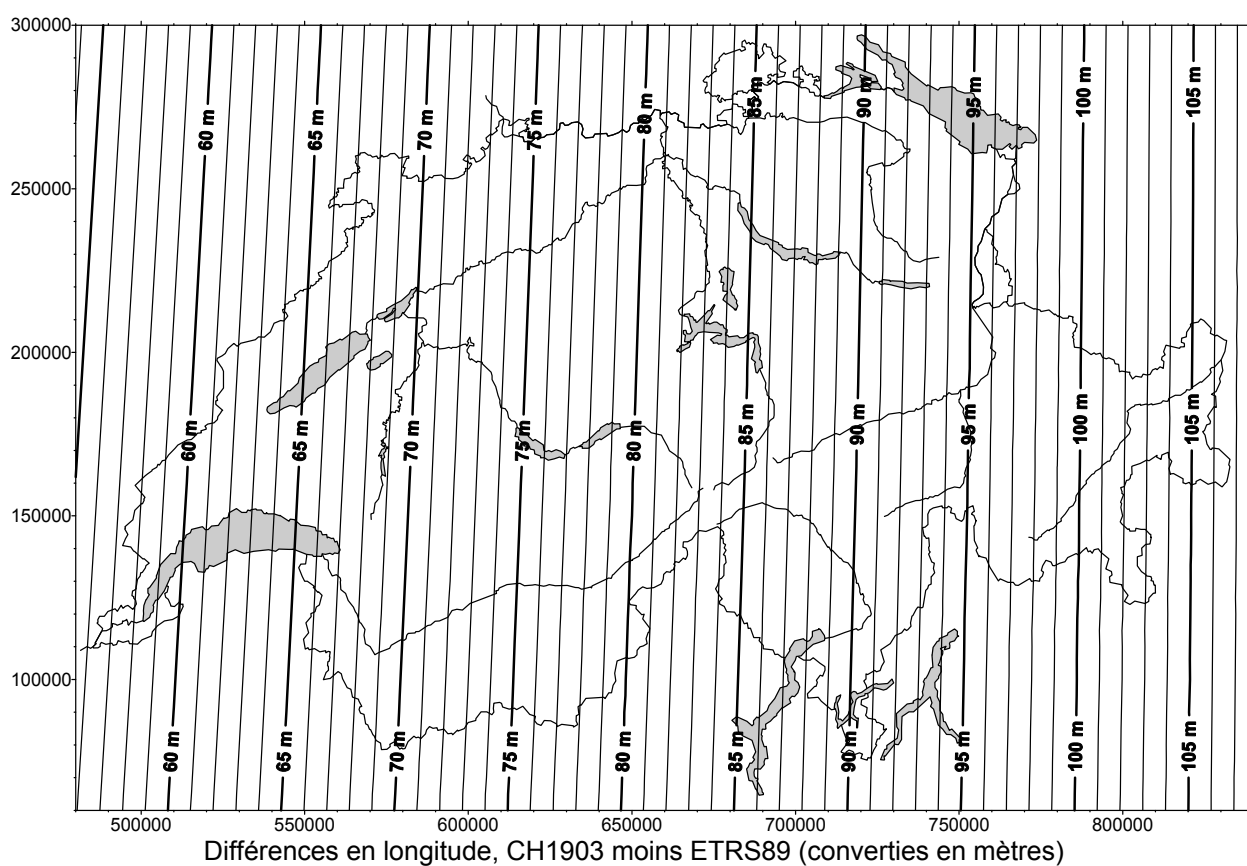
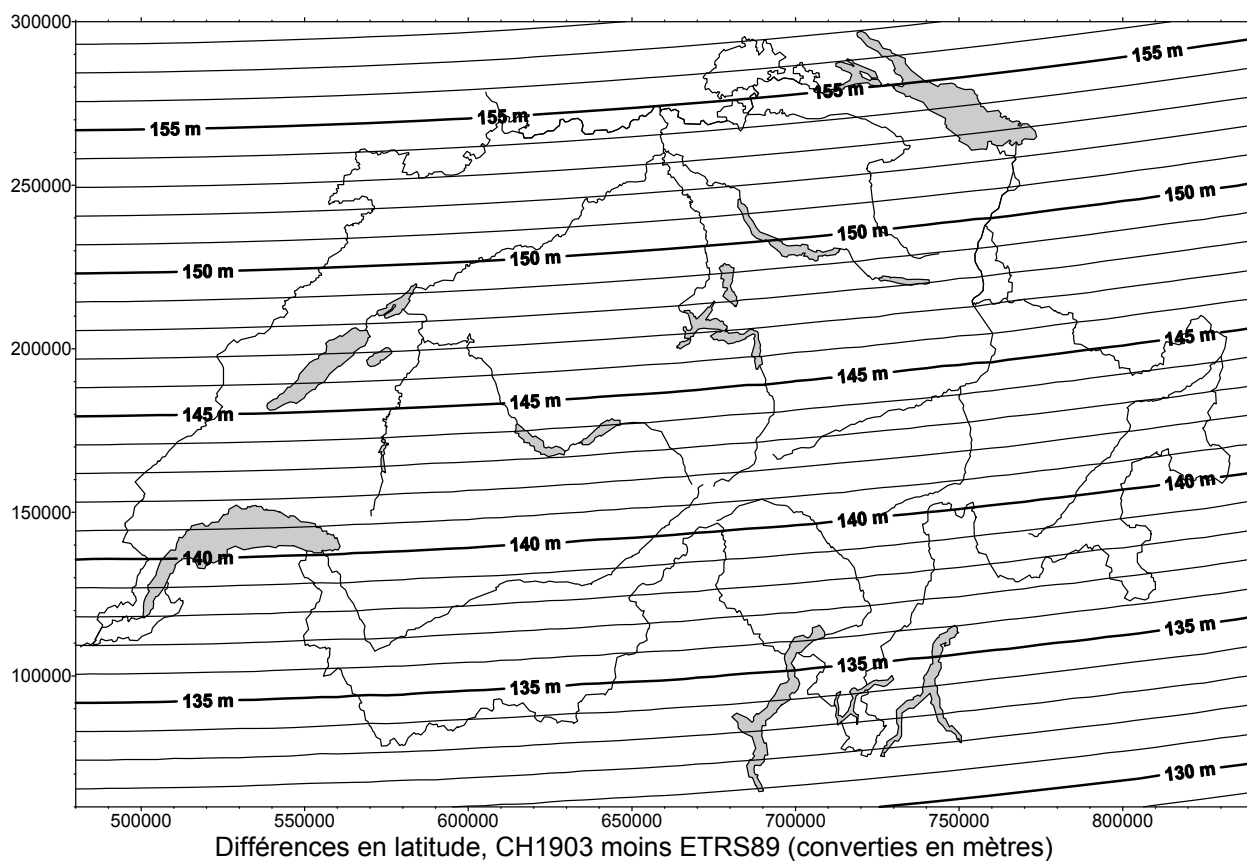
Données :	y = 700 000 m	x = 100 000 m	h' = 600 m
⇒	y' = 0.1	x' = -0.1	
⇒	λ' = 3.14297976	φ' = 16.57588564	h = 650.55 m
⇒	λ = 8° 43' 49.80"	φ = 46° 02' 38.86"	
Résultat NAVREF:	λ = 8° 43' 49.79"	φ = 46° 02' 38.87"	h = 650.60 m

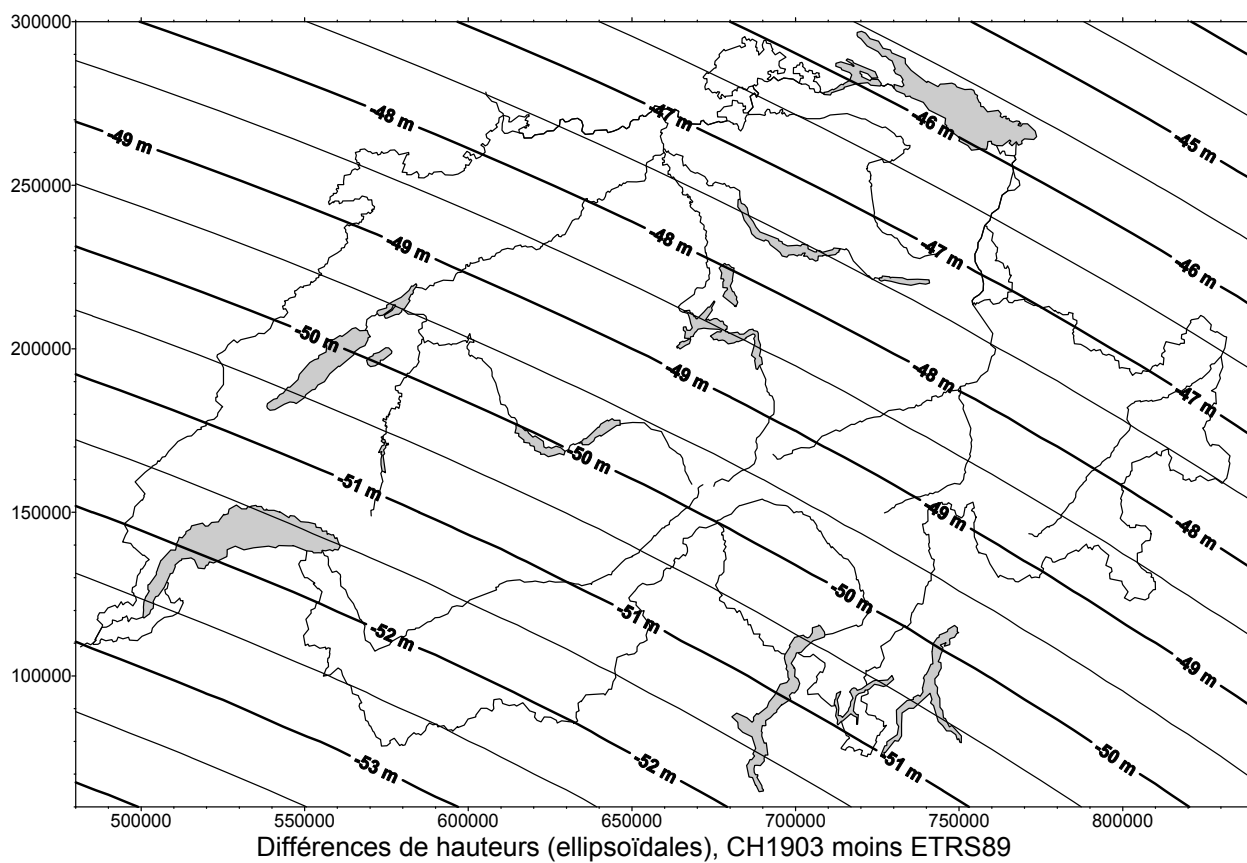
La précision de ces solutions approchées est supérieure à 1 mètre en planimétrie et à 0.5 mètre en altimétrie sur l'ensemble du territoire suisse.

**Remarque sur les hauteurs :** Dans ces formules, il est supposé qu'on travaille avec des hauteurs ellipsoïdales, par ex. provenant de mesures GPS. Si l'on travaille avec des « altitudes au-dessus du niveau de la mer », il est inutile de les transformer, car les altitudes sont équivalentes dans les deux systèmes avec une précision de l'ordre du mètre.

## 5 Représentation graphique des différences entre CH1903 et ETRS89/WGS84









## 6 Récapitulatif des transformations

### 6.1 De MN03/NF02 vers ETRS89

Pour une transformation rigoureuse de coordonnées en projection MN03 et altitudes NF02 vers ETRS89, les étapes successives suivantes sont requises :

1. Transformation des altitudes NF02 en altitudes orthométriques RAN95 avec la grille HTrans (peut être ignorée pour une précision de l'ordre du mètre ou si les altitudes ne sont pas utiles).
2. Transformation des altitudes orthométriques RAN95 en hauteurs ellipsoïdales avec le modèle du géoïde CHGeo2004 (peut être ignorée si les altitudes ne sont pas utiles ; dans une précision métrique, un autre modèle de géoïde peut être utilisé).
3. Transformation de MN03 vers MN95 avec l'algorithme FINELTRA (jeu de données CHENyx06) ou avec une grille de transformation (peut être ignorée pour une précision de l'ordre du mètre).
4. Conversion en coordonnées ellipsoïdales CH1903+ sur l'ellipsoïde de Bessel avec les formules de la projection inverse du chapitre 3.3.
5. Conversion en coordonnées cartésiennes géocentriques (datum CH1903+) avec les formules du chapitre 2.1 et les paramètres de l'ellipsoïde de Bessel. (Dans le cas où la hauteur est inconnue ou inutile, une valeur approchée peut être utilisée – ou alors définir  $H=0$ , sans que le résultat soit influence de manière significative).
6. Changement de datum de CH1903+ vers ETRS89 (CHTRS95) avec les paramètres du chapitre 1.4.
7. Calcul de coordonnées ellipsoïdales dans ETRS89 à l'aide les formules du chapitre 2.2 et des paramètres de l'ellipsoïde GRS80.
8. Les calculs à effectuer à partir des valeurs ellipsoïdales ETRS89 (projection ou transformation altimétrique) ne sont pas décrits dans ce document !

Dans un domaine de précision de l'ordre du mètre (en Suisse et dans les régions adjacentes des pays voisins), il est possible de remplacer l'étape 4 par les formules approchées du chapitre 3.4, ou alors remplacer directement les étapes 4 et 7 par les formules approchées du chapitre 4.2.

### 6.2 De ETRS89 vers MN03/NF02

Pour une transformation rigoureuse de coordonnées ellipsoïdales ETRS89 vers MN03/NF02, les étapes successives suivantes sont requises :

1. Conversion en coordonnées cartésiennes géocentriques (datum ETRS89) avec les formules du chapitre 2.1 ainsi que les paramètres de l'ellipsoïde GRS80. Dans le cas où la hauteur est inconnue ou inutile, une valeur approchée peut être utilisée – ou alors définir  $H=0$ , sans que le résultat soit influence de manière significative).
2. Changement de datum de ETRS89 (CHTRS95) vers CH1903+ avec les paramètres du chapitre 1.4.
3. Calcul de coordonnées ellipsoïdales dans CH1903+ à l'aide des formules du chapitre 2.2 et des paramètres de l'ellipsoïde de Bessel.
4. Calcul de coordoonles MN (avec hauteurs ellipsoïdales) avec les formules de projection du chapitre 3.2.
5. Transformation de MN95 vers MN03 avec l'algorithme FINELTRA (jeu de données CHENyx06) ou avec une grille de transformation (peut être ignorée pour une précision de l'ordre du mètre).
6. Transformation de hauteurs ellipsoïdales en altitudes orthométriques RAN95 avec le modèle du géoïde CHGeo2004 (peut être ignorée si les altitudes ne sont pas utiles ; dans une précision métrique, un autre modèle de géoïde peut être utilisé).
7. Transformation des altitudes RAN95 vers NF02 avec la grille HTrans (peut être ignorée pour une précision de l'ordre du mètre ou si les altitudes ne sont pas utiles).

Dans un domaine de précision de l'ordre du mètre (en Suisse et dans les régions adjacentes des pays voisins), il est possible de remplacer l'étape 4 par les formules approchées du chapitre 3.5, ou alors remplacer directement les étapes 4 et 7 par les formules approchées du chapitre 4.1.

---

## 7 Exemples numériques

### 7.1 Transformation de coordonnées MN03/NF02 ⇒ ETRS89

Dans cet exemple, les points EUREF en Suisse ont été utilisés en tant que source. Tous les calculs ont été effectués avec les logiciels swisstopo REFRAME et GEOREF. De petites différences (<1 mm) dans les résultats peuvent apparaître en raison d'erreurs d'arrondi.

#### Coordonnées planes suisses MN03 avec altitudes usuelles NF02

Zimmerwald	602030.680	191775.030	897.915
Chrischona	617306.300	268507.300	456.064
Pfaender	776668.105	265372.681	1042.624
La Givrine	497313.292	145625.438	1207.434
Monte Generoso	722758.810	87649.670	1636.600

⇒ Transformation FINELTRA avec CHENyx06 et transformation altimétrique avec HTrans ⇒

#### Coordonnées planes suisses MN95 avec altitudes orthométriques RAN95

Zimmerwald	2602030.740	1191775.030	897.906
Chrischona	2617306.920	1268507.870	455.915
Pfaender	2776668.590	1265372.250	1042.528
La Givrine	2497312.650	1145626.140	1207.473
Monte Generoso	2722759.060	1087648.190	1636.794

⇒ Calcul et addition de la cote du géoïde (programme CHGeo2004) ⇒

#### Coordonnées planes suisses MN95 avec hauteurs ellipsoïdales et cotes du géoïde

Zimmerwald	2602030.740	1191775.030	897.361	-0.5454
Chrischona	2617306.920	1268507.870	457.138	1.2233
Pfaender	2776668.590	1265372.250	1043.616	1.0880
La Givrine	2497312.650	1145626.140	1206.367	-1.1060
Monte Generoso	2722759.060	1087648.190	1634.472	-2.3227

⇒ Conversion en coordonnées ellipsoïdales (coordonnées géographiques)

#### Coordonnées ellipsoïdales et hauteurs relatives à CH1903+

Zimmerwald	7 27 58.416328	46 52 42.269284	897.361
Chrischona	7 40 10.574820	47 34 6.404965	457.138
Pfaender	9 47 8.465989	47 31 0.092644	1043.616
La Givrine	6 6 9.983811	46 27 19.272743	1206.367
Monte Generoso	9 1 20.606368	45 55 49.707052	1634.472

⇒ Conversion en coordonnées cartésiennes géocentriques

#### Coordonnées cartésiennes géocentriques relatives à CH1903+

Zimmerwald	4330616.737	567539.766	4632721.664
Chrischona	4272473.562	575353.239	4684498.293
Pfaender	4252889.174	733507.303	4681046.757
La Givrine	4377121.142	467993.592	4600671.934
Monte Generoso	4389483.221	696984.352	4560589.600

⇒ Changement de datum de CH1903+ vers ETRS89 ⇒

#### Coordonnées cartésiennes géocentriques relatives à ETRS89 / CHTRS95

Zimmerwald	4331291.111	567554.822	4633127.010
Chrischona	4273147.936	575368.294	4684903.639
Pfaender	4253563.548	733522.359	4681452.103
La Givrine	4377795.516	468008.648	4601077.280
Monte Generoso	4390157.595	696999.408	4560994.946

⇒ Conversion en coordonnées ellipsoïdales

#### Coordonnées ellipsoïdales et hauteurs relatives à ETRS89

Zimmerwald	7 27 54.983506	46 52 37.540562	947.149
Chrischona	7 40 6.983077	47 34 1.385301	504.935
Pfaender	9 47 3.697723	47 30 55.172797	1089.372
La Givrine	6 6 7.326361	46 27 14.690021	1258.274
Monte Generoso	9 1 16.389053	45 55 45.438020	1685.027

## 7.2 Transformation de coordonnées ETRS89 $\Rightarrow$ MN03/MN02

Afin de tester ce calcul, il est possible d'utiliser les mêmes points et valeurs que l'exemples du chapitre 7.1 – simplement dans le sens inverse.

## 8 Littérature

- Bolliger J. (1967): Die Projektionen der Schweizerischen Plan- und Kartenwerke. Druckerei Winterthur AG, Winterthur.
- Dupraz H. (1992): Transformation approchée de coordonnées WGS84 en coordonnées nationales suisses, IGEO-TOPO, EPF Lausanne.
- Hilfiker J. (1902): Untersuchung der Höhenverhältnisse der Schweiz im Anschluss an den Meereshorizont. L+T, Bern.
- Marti U. (1997): Geoid der Schweiz 1997. Geodätisch-Geophysikalische Arbeiten in der Schweiz Nr. 56.
- Rosenmund M. (1903): Die Änderung des Projektionssystems der Schweizerischen Landesvermessung, L+T, Bern.
- Schlatter A. (2007): Das neue Landeshöhennetz der Schweiz LHN95. Geodätisch-Geophysikalische Arbeiten in der Schweiz Nr. 72.
- Schneider D, E. Gubler, U. Marti, W. Gurtner (2001): Aufbau der neuen Landesvermessung LV95 Teil 3: Terrestrische Bezugssysteme und Bezugsrahmen. Berichte aus der L+T Nr. 8. Wabern.
- Zölly, H. (1948): Geschichte der Geodätischen Grundlagen für Karten und Vermessungen in der Schweiz, L+T, Wabern.
-