ペア数列の停止性 (要約版)

p 進大好き bot 著　　　Naruyoko 編集

コンパイル日: 2022 年 7 月 26 日

このドキュメントはp進大好きbot氏が公開したブログ記事ペア数列の停止性を LaTeX に変換したものです[◇]。このバージョンは要約版であり、序文や証明などが省かれています。使用した版は 2022 年 7 月 26 日の版です。

目次

1　序文

停止性の証明の方針は以下の通りである：

1. （通常の意味での標準形より広い）標準形という概念を導入し、更に広い簡約という概念を導入する。
2. 簡約とは限らないペア数列に対して簡約化 Red という操作を定義する。
3. 簡約ペア数列から Buchholz の表記系への写像 Trans を定義し、Red を用いて簡約とは限らないペア数列へ定義を拡張する。
4. Trans の部分文字列の計算補助として Mark という写像を定義する。
5. Mark がペア数列の部分列の Trans で計算できることを示す。
    1. これによりペア数列の Trans の部分文字列を元のペア数列の部分列の Trans を用いて計算できる。
    2. 簡約ペア数列の部分列は簡約とは限らないため、簡約ペア数列にしか興味がない場合でも簡約でないペア数列を用いる必要があった。
    3. 標準形とは限らないペア数列を標準形に置き換える操作は不明であるので、標準形にしか興味が無い場合も標準形でないペア数列を用いる必要があった。
6. ペア数列の展開規則と Trans による像の基本列を比較する。
    1. これにより、標準形ペア数列の Trans による像が Buchholz の順序数項を定めることを示す。
    2. 更に Buchholz の順序数項が標準的な全順序に関して整礎であることと基本列がその順序に関して降下することから、標準形ペア数列システムの停止性が従う。

方針の概説も参考にすると良い。

2　参考文献

[Buc1]　W. Buchholz. “A new system of proof-theoretic ordinal functions”. In: *Annals of Pure and Applied Logic* 32 (1986), pp. 195–207.

[Buc2]　W. Buchholz. “Relating ordinals to proofs in a prespicious way”.

3　記法

$\mathbb{N}$ で非負整数全体の集合を表し、$\mathbb{N}_+$ で正整数全体の集合を表す。

クラス A に対し、集合 a が A 値配列であるとは、ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $a \in A^n$ ということである。このような n は a に対して一意であるので $\mathrm{Lng}(a)$ と表す。$\mathrm{Lng}(a) = 0$ の時、A に紛れのない限り a を $()$ と表す。$i < \mathrm{Lng}(a)$ を満たす各 $i \in \mathbb{N}$ に対し、a の第 i 成分を $a_i \in A$ と表す。

$i_0 \leq i_1$ を満たす各 $i_0, i_1 \in \mathbb{N}$ と、$\{i \in \mathbb{N} \mid i_0 \leq i \leq i_1\}$ を定義域に含む各 A 値関数 f に対し、長さが $i_1 - i_0 + 1$ であって任意の $i \in \mathbb{N}$ に対し $i \leq i_1 - i_0$ ならば第 i 成分が $f(i_0 + i)$ であるような A 値配列を $(f(i))_{i=i_0}^{i_1}$ と表す。$i_0 \leq i_1$ を満たさないかまたは $\{i \in \mathbb{N} \mid i_0 \leq i \leq i_1\}$ を f が定義域に含まないような各 $i_0, i_1 \in \mathbb{N}$ と各 A 値関数 f に対し、$(a_i)_{i=i_0}^{i_1} := ()$ と置く。

クラス A に対し、A 値配列全体のクラスを $A^{<\omega}$ と置き、$A^{<\omega}$ 上の二項演算

$$\begin{aligned}\oplus_A \colon (A^{<\omega})^2 &\to A^{<\omega} \\ (a,b) &\mapsto a \oplus_A b\end{aligned}$$

を以下のように定める：

1. $j_0 := \mathrm{Lng}(a) - 1$ と置く。
2. $j_1 := j_0 + \mathrm{Lng}(b)$ と置く。
3. $j \leq j_0$ を満たす各 $j \in \mathbb{N}$ に対し、$c_j := a_j$ と置く。
4. $j_0 < j \leq j_1$ を満たす各 $j \in \mathbb{N}$ に対し、$c_j = b_{j-j_0-1}$ と置く。
5. $a \oplus_A b := (c_j)_{j=0}^{j_1}$ である。

$\oplus_A$ は結合的であるため、$\oplus_A$ の反復的適用において省略可能なカッコは省略する。

写像

$$\begin{aligned}\bigoplus_A \colon (A^{<\omega})^{<\omega} &\to A^{<\omega} \\ a &\mapsto \bigoplus_A a\end{aligned}$$

を以下のように再帰的に定める：

1. $j_1 := \mathrm{Lng}(a) - 1$ と置く。
2. $j_1 = -1$ ならば $\bigoplus_A a := ()$ である。
3. $j_1 = 0$ ならば $\bigoplus_A a := a_0$ である。
4. $j_1 > 0$ ならば $\bigoplus_A a := \left(\bigoplus_A (a_i)_{i=0}^{j_1-1}\right) \oplus_A a_{j_1}$ である。

何らかの条件を満たす配列の一意存在性を示す際、一意性が文字列の末尾または先頭からの比較により即座に従う場合は一意性の存在を省略する。

4 定式化

集合 M がペア数列であるとは、M が $()$ でない $\mathbb{N}^2$ 値配列であるということである。$i \in \{0,1\}$ と $\mathrm{Lng}(M)$ 未満の $j \in \mathbb{N}$ の組 (i,j) 全体の集合を $\mathrm{Idx}(M)$ と置く。各 $(i,j) \in \mathrm{Idx}(M)$ に対し、$(M_j)_i$ を $M_{i,j}$ と置く。

ペア数列全体の集合を T_{PS} と置く。

4.1 親子関係

$M \in T_{\mathrm{PS}}$ とする。$\mathbb{Z}^2$ 上の二項関係 $<_M^{\mathrm{Next}}$ と $\leq_M$ を以下のように同時に再帰的に定義する。

1. $(i_0,j_0),(i_1,j_1) \in \mathbb{Z}^2$ に対し、$(i_0,j_0) <_M^{\mathrm{Next}} (i_1,j_1)$ であるとは、以下を満たすということである：
   1. $(i_0,j_0),(i_1,j_1) \in \mathrm{Idx}(M)$ である。
   2. $i_0 = i_1$ である。
   3. $j_0 < j_1$ である。
   4. $M_{i_0,j_0} < M_{i_1,j_1}$ である。

5. $i_0 = 0$ ならば、任意の $j \in \mathbb{N}$ に対し、$j_0 < j < j_1$ ならば $M_{0,j} \geq M_{0,j_1}$ である。
6. $i_0 = 1$ ならば、$(0, j_0) \leq_M (0, j_1)$ かつ任意の $j \in \mathbb{N}$ に対し、$j_0 < j$ かつ $(0, j) \leq_M (0, j_1)$ ならば $M_{1,j} \geq M_{1,j_1}$ である。

2. $(i_0, j_0) \leq_M (i_1, j_1)$ であるとは、以下を満たすということである：
   1. $(i_0, j_0), (i_1, j_1) \in \mathrm{Idx}(M)$ である。
   2. $i_0 = i_1$ である。
   3. ある $a \in \mathbb{N}^{<\omega}$ が存在し、$J := \mathrm{Lng}(a) - 1$ と置くと以下を満たす：
      1. $a \neq ()$ である。
      2. $a_0 = j_0$ である。
      3. 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し、$k < J$ ならば $(i_0, a_k) <_M^{\mathrm{Next}} (i_1, a_{k+1})$ である。
      4. $a_J = j_1$ である。

命題 (親の存在の判定条件)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ と $j_0, j_1 \in \mathbb{N}$ に対し、$j_0 < j_1 < \mathrm{Lng}(M)$ ならば以下が成り立つ：

(1) $M_{0,j_0} < M_{0,j_1}$ ならば、ある $j \in \mathbb{N}$ が存在して $j_0 \leq j < j_1$ かつ $(0, j) <_M^{\mathrm{Next}} (0, j_1)$ である。
(2) $M_{1,j_0} < M_{1,j_1}$ かつ $(0, j_0) \leq_M (0, j_1)$ ならば、ある $j \in \mathbb{N}$ が存在して $j_0 \leq j < j_1$ かつ $(1, j) <_M^{\mathrm{Next}} (1, j_1)$ である。
(3) 条件「任意の $j \in \mathbb{N}$ に対し $j_0 < j \leq j_1$ ならば $M_{0,j_0} < M_{0,j}$ である」を満たすならば、$(0, j_0) \leq_M (0, j_1)$ である。
(4) 条件「任意の $j \in \mathbb{N}$ に対し $j_0 < j$ かつ $(0, j) \leq_M (0, j_1)$ ならば $M_{1,j_0} < M_{1,j}$ である」と $(0, j_0) \leq_M (0, j_1)$ を満たすならば、$(1, j_0) \leq_M (1, j_1)$ である。

命題 (親の基本性質)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ と $j_0, j, j_1 \in \mathbb{N}$ に対し、$j_0 < j \leq j_1$ ならば以下が成り立つ：

(1) $(0, j_0) <_M^{\mathrm{Next}} (0, j_1)$ ならば $M_{0,j} \geq M_{0,j_1}$ である。
(2) $(1, j_0) <_M^{\mathrm{Next}} (1, j_1)$ かつ $(0, j) \leq_M (0, j_1)$ ならば $M_{1,j} \geq M_{1,j_1}$ である。

系 (直系先祖の基本性質)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ と $j_0, j, j_1 \in \mathbb{N}$ に対し、$j_0 < j \leq j_1$ ならば以下が成り立つ：

(1) $(0, j_0) \leq_M (0, j_1)$ ならば $M_{0,j_0} < M_{0,j}$ である。
(2) $(1, j_0) \leq_M (1, j_1)$ かつ $(0, j) \leq_M (0, j_1)$ ならば $M_{1,j_0} < M_{1,j}$ である。

系 (直系先祖の木構造)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ と $j'_0, j, j'_1 \in \mathbb{N}$ に対し、以下が成り立つ：

(1) $(0, j'_0) \leq_M (0, j'_1)$ かつ $j'_0 \leq j \leq j'_1$ ならば、$(0, j'_0) \leq_M (0, j)$ である。
(2) $(1, j'_0) \leq_M (1, j'_1)$ かつ $j'_0 \leq j$ かつ $(0, j) \leq_M (0, j'_1)$ ならば、$(1, j'_0) \leq_M (1, j)$ である。

4.2 前者関数

写像

$$\begin{aligned} \mathrm{Pred} \colon T_{\mathrm{PS}} &\to T_{\mathrm{PS}} \\ M &\mapsto \mathrm{Pred}(M) \end{aligned}$$

を以下のように定める：

1. $j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置く。
2. $j_1 = 0$ ならば $\mathrm{Pred}(M) := M$ である。
3. $j_1 > 0$ ならば $\mathrm{Pred}(M) := (M_j)_{j=0}^{j_1 - 1}$ である。

まだ順序数表記系の構造を与えていないが、Pred は $\emptyset$ に対しては $\emptyset$ を、後続順序数に対してその最大元を取る操作に対応する。

写像

$$\begin{aligned} \mathrm{Derp} \colon T_{\mathrm{PS}} &\to T_{\mathrm{PS}} \cup \{()\} \\ M &\mapsto \mathrm{Derp}(M) \end{aligned}$$

を以下のように定める：

1. $j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置く。
2. $\mathrm{Derp}(M) := (M_j)_{j=1}^{j_1}$ である。

Derp には順序数の操作に関連する意味が特にないが、後に導入する Red という写像を定義するために便利なので一度だけ用いる。

4.3 基本列

写像

$$\begin{aligned} \mathrm{operator}[] \colon T_{\mathrm{PS}} \times \mathbb{N}_+ &\to T_{\mathrm{PS}} \\ (M, n) &\mapsto M[n] \end{aligned}$$

を以下のように再帰的に定める：

1. $j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置く。

2. $j_1 = 0$ ならば $M[n] := M$ である。
3. $j_1 > 0$ とする。
    1. $M_{j_1} = (0,0)$ ならば $M[n] := \mathrm{Pred}(M)$ である。
    2. $M_{j_1} \neq (0,0)$ とする。
        1. $i_1 := \max\{i \in \{0,1\} \mid M_{i,j_1} > 0\}$ と置く[1]。
        2. $(i_1, j_0) <_M^{\mathrm{Next}} (i_1, j_1)$ を満たす一意な $j_0 \in \mathbb{N}$ が存在しないならば $M[n] := \mathrm{Pred}(M)$ である。
        3. $(i_1, j_0) <_M^{\mathrm{Next}} (i_1, j_1)$ を満たす一意な $j_0 \in \mathbb{N}$ が存在するとする。
            1. $i < i_1$ を満たす各 $i \in \mathbb{N}$ に対し、$\delta_i := M_{i,j_1} - M_{i,j_0}$ と置く。
            2. $i \geq i_1$ を満たす各 $i \in \mathbb{N}$ に対し、$\delta_i := 0$ と置く。
            3. $G := (M_j)_{j=0}^{j_0-1} \in T_{\mathrm{PS}}$ と置く。
            4. $B := (((M_{0,j} + k\delta_0, M_{1,j} + k\delta_1))_{j=j_0}^{j_1-1})_{k=0}^{n-1} \in T_{\mathrm{PS}}^n$ と置く。
            5. $M[n] := (G \oplus_{\mathbb{N}^2} (\bigoplus_{\mathbb{N}^2} B))$ である。

まだ順序数表記系の構造を与えていないが、operator[] は $\emptyset$ に対しては $\emptyset$ を、後続順序数に関してはその最大元を、極限順序数に対してはその基本列を与える操作に対応する。

> **命題 (Pred が [1] で表されること)**
> 任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ に対し、$\mathrm{Lng}(M) > 1$ ならば $\mathrm{Pred}(M) = M[1]$ である。

4.4 ペア数列システム

写像 $f\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ を 1 つ固定する。主に $f(n) = n+1$ か $f(n) = n^2$ である。
$T_{\mathrm{PS}} \times \mathbb{N}_+$ 上の部分写像

$$F\colon (M, n) \mapsto F_M(n)$$

を以下ように再帰的に定める：

1. $j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置く。
2. $j_1 = 0$ ならば $F_M(n) := f(n)$ である。
3. $j_1 > 0$ とする。
    1. $M_{j_1} = (0,0)$ ならば $F_M(n) := F_{\mathrm{Pred}(M)}(f(n))$ である。
    2. $M_{j_1} \neq (0,0)$ とする。
        1. $i_1 := \max\{i \in \{0,1\} \mid M_{i,j_1} > 0\}$ と置く[2]。
        2. $(i_1, j_0) <_M^{\mathrm{Next}} (i_1, j_1)$ を満たす一意な $j_0 \in \mathbb{N}$ が存在しないならば $F_M(n) := F_{\mathrm{Pred}(M)}(f(n))$ である。
        3. $(i_1, j_0) <_M^{\mathrm{Next}} (i_1, j_1)$ を満たす一意な $j_0 \in \mathbb{N}$ が存在するならば $F_M(n) := F_{M[n]}(f(n))$ である。

[1] $M_{j_1} \neq (0,0)$ より max は存在する。
[2] $M_{j_1} \neq (0,0)$ より max は存在する。

ペア数列自体は元々ペア数列数という１つの数として定義されているだけなのでペア数列システムという概念はバシク行列のバージョンを固定しても人によって微妙にずれがある。上記もその１つの例に過ぎないが、この記事で示すことは基本的にどのペア数列システムの解釈でも通用するので、この定式化自体に深い意味はないことに注意する。

F の定義域を $\mathrm{Dom}(F) \subset T_{\mathrm{PS}} \times \mathbb{N}_+$ と置く。

命題 (F_M と基本列の関係)
任意の $(M, n) \in T_{\mathrm{PS}} \times \mathbb{N}_+$ に対し、以下は同値である：

(1) $(M, n) \in \mathrm{Dom}(F)$ である。
(2) $(M[n], n) \in \mathrm{Dom}(F)$ である。
(3) $(M, n) \in \mathrm{Dom}(F)$ かつ $(M[n], n) \in \mathrm{Dom}(F)$ かつ $F_M(n) = F_{M[n]}(n)$ である。

5 ペア数列の基本性質

後に定義する標準形のペア数列システムの停止性を証明するための準備として、ペア数列から Buchholz の表記系への翻訳写像 Trans を定めるための準備として、ペア数列の基本操作や基本性質を調べる。

5.1 最上行のインクリメント

写像

$$\begin{aligned} \mathrm{IncrFirst} \colon T_{\mathrm{PS}} &\to T_{\mathrm{PS}} \\ M &\mapsto \mathrm{IncrFirst}(M) \end{aligned}$$

を以下のように定める：

1. $j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置く。
2. $\mathrm{IncrFirst}(M) := ((M_{0,j} + 1, M_{1,j}))_{j=0}^{j_1}$ である。

命題 ($\leq_M$ の IncrFirst 不変性)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ に対し、$\leq_M$ と $\leq_{\mathrm{IncrFirst}(M)}$ は一致する。

5.2 単項性

$M \in T_{\mathrm{PS}}$ とする。

1. $j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置く。

2. M が零項であるとは、以下を満たすということである：
   1. $j_1 = 0$ である。
   2. $M_{1,0} = 0$ である。
3. M が単項であるとは、以下を満たすということである：
   1. M は零項でない。
   2. $(0,0) \leq_M (0, j_1)$ である。
4. M が複項であるとは、以下を満たすということである：
   1. M は零項でない。
   2. M は単項でない
5. 零項ペア数列全体の部分集合を $ZT_{\mathrm{PS}} \subset T_{\mathrm{PS}}$ と置く。
6. 単項ペア数列全体の部分集合を $PT_{\mathrm{PS}} \subset T_{\mathrm{PS}}$ と置く。
7. 複項ペア数列全体の部分集合を $MT_{\mathrm{PS}} \subset T_{\mathrm{PS}}$ と置く。

命題 (複項性の判定条件)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ に対し、以下は同値である：

(1) M は複項でない。
(2) 任意の $j \in \mathbb{N}$ に対し、$0 < j < \mathrm{Lng}(M)$ ならば $M_{0,0} < M_{0,j}$ である。
(3) $(0,0) \leq_M (0, j_1)$ である。

系 (単項性の始切片への遺伝性)
任意の $M \in PT_{\mathrm{PS}}$ と $j_0 \in \mathbb{N}$ に対し、$0 < j_0 < \mathrm{Lng}(M)$ ならば $(M_j)_{j=0}^{j_0}$ は単項である。

命題 (単項性の直系先祖による切片への遺伝性)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ と $j'_0, j'_1 \in \mathbb{N}$ に対し、$j'_0 < j'_1$ かつ $(0, j'_0) \leq_M (0, j'_1)$ ならば $(M_j)_{j=j'_0}^{j'_1}$ は単項である。

写像

$$\begin{aligned} P \colon T_{\mathrm{PS}} &\to T_{\mathrm{PS}}^{<\omega} \\ M &\mapsto P(M) \end{aligned}$$

を以下のように再帰的に定める：

1. M が零項または単項ならば $P(M) := (M)$ である。
2. M が複項とする。
   1. $j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置く。

2. $j_0 := \min\{j \in \mathbb{N} \mid 0 < j \leq j_1 \wedge (0,j) \leq_M (0,j_1)\}$ と置く[3]。
3. $P(M) := P((M_j)_{j=0}^{j_0-1}) \oplus_{T_{\mathrm{PS}}} (M_j)_{j=j_0}^{j_1}$ である。

P の再帰的定義から $P(M) \neq ()$ である。

命題 (P の IncrFirst 同変性)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ に対し、$J_1 := \mathrm{Lng}(P(M)) - 1$ と置くと、$P(\mathrm{IncrFirst}(M)) = (\mathrm{IncrFirst}(P(M)_J))_{J=0}^{J_1}$ である。

命題 (P の各成分の非複項性)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ に対し、以下が成り立つ：

(1) $P(M)$ の各成分は零項か単項である。
(2) M が複項である必要十分条件は $\mathrm{Lng}(P(M)) > 1$ である。

命題 (P の加法性)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ と $j_0 \in \mathbb{N}$ に対し、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置き、$0 < j_0 \leq j_1$ とし、任意の $j \in \mathbb{N}$ に対し $j < j_0$ ならば $M_{0,j} \geq M_{0,j_0}$ であるとすると、$P(M) = P((M_j)_{j=0}^{j_0-1}) \oplus_{T_{\mathrm{PS}}} P((M_j)_{j=j_0}^{j_1})$ である。

命題 (P と基本列の関係)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ と $n \in \mathbb{N}_+$ に対し、$J_1 := \mathrm{Lng}(P(M)) - 1$ と置くと以下が成り立つ：

(1) $\mathrm{Lng}(P(M)_{J_1}) = 1$ ならば $M[n] = \mathrm{Pred}(M)$ であり、更に $J_1 = 0$ か否かに従って $P(M[n]) = (M[n])$ または $P(M[n]) = (P(M)_J)_{J=0}^{J_1-1}$ である。
(2) $\mathrm{Lng}(P(M)_{J_1}) > 1$ ならば $M[n] = (\bigoplus_{\mathbb{N}^2}(P(M)_J)_{J=0}^{J_1-1}) \oplus_{\mathbb{N}^2} P(M)_{J_1}[n]$ かつ $P(M[n]) = (P(M)_J)_{J=0}^{J_1-1} \oplus_{T_{\mathrm{PS}}} P(P(M)_{J_1}[n])$ である。

命題 (非複項性と基本列の関係)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ と $n \in \mathbb{N}_+$ に対し、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置くと、M が複項でないならば以下が成り立つ：

[3] M が複項より $0 < j_1$ であり、かつ $(0, j_1) \leq_M (0, j_1)$ であるので min は存在する。

(1) $(0,0) <_M^{\mathrm{Next}} (0,j_1)$ かつ $M_{1,j_1} = 0$ ならば、$P(M[n]) = (\mathrm{Pred}(M))_{k=0}^{n-1}$ である。
(2) $(0,0) <_M^{\mathrm{Next}} (0,j_1)$ でないまたは $M_{1,j_1} > 0$ ならば、$P(M[n]) = (M[n])$ である。

5.3 許容性

$M \in T_{\mathrm{PS}}$ とし、$j \in \mathbb{N}$ とする。

1. $j_1 := \mathrm{Lng}(M)$ と置く。
2. j が非 M 許容であるとは、以下のいずれかを満たすということである：
   1. $j > j_1$ である。
   2. $(1,j-1) <_M^{\mathrm{Next}} (1,j) <_M^{\mathrm{Next}} (1,j+1)$ である。
3. j が M 許容であるとは、j が非 M 許容でないということである。
4. M 許容である自然数全体のなす部分集合を $\mathbb{N}_M \subset \mathbb{N}$ と置く。

命題 (許容性の切片への遺伝性)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ と $j'_0, j_0, j'_1 \in \mathbb{N}$ に対し、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置き、$j'_0 \leq j_0 \leq j'_1 \leq j_1$ とし $N := (M_j)_{j=j'_0}^{j'_1}$ と置くと、以下は同値である：

(1) j_0 が M 許容であるまたは $j'_0 = j_0$ または $j_0 = j'_1$ である。
(2) $j_0 - j'_0$ が N 許容である。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Adm}_M \colon T_{\mathrm{PS}} \times \mathbb{N} &\to \mathbb{N}_M \\
(M,j) &\mapsto \mathrm{Adm}_M(j)
\end{aligned}
$$

を以下のように定める：

1. j が M 許容ならば、$\mathrm{Adm}_M(j) := j$ である。
2. j は非 M 許容ならば、$\mathrm{Adm}_M(j) := \max\{j' \in \mathbb{N}_M \mid j' < j\}$ と置く[4]。

命題 (許容化の切片への遺伝性)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ と $j'_0, j'_1 \in \mathbb{N}$ に対し、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置き、$j'_0 \leq \mathrm{Adm}_M(j_0)$ かつ $j_0 < j'_1 \leq j_1$ とし $N := (M_j)_{j=j'_0}^{j'_1}$ と置くと、$\mathrm{Adm}_N(j_0 - j'_0) = \mathrm{Adm}_M(j_0) - j'_0$ である。

$(M,m) \in T_{\mathrm{PS}} \times \mathbb{N}$ とする。

[4] 0 は M 許容であり、かつ j は非 M 許容より $j > 0$ であるので、max は存在する。

1. (M, m) が基点付きペア数列であるとは、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置くと以下を満たすということである：
   1. m は M 許容である。
   2. $(0, m) \leq_M (0, j_1)$ である。
2. 基点付きペア数列全体の部分集合を $T_{\mathrm{PS}}^{\mathrm{Marked}} \subset T_{\mathrm{PS}} \times \mathbb{N}$ と置く。
3. $RT_{\mathrm{PS}}^{\mathrm{Marked}} := \{(M, m) \in T_{\mathrm{PS}}^{\mathrm{Marked}} \mid M \in RT_{\mathrm{PS}}\}$ である。

命題 (基点の切片への遺伝性)
任意の $(M, m) \in T_{\mathrm{PS}}^{\mathrm{Marked}}$ と $j'_0, j'_1 \in \mathbb{N}$ に対し、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置くと、$j'_0 \leq m \leq j'_1 \leq j_1$ ならば $((M_j)_{j=j'_0}^{j'_1}, m - j'_0) \in T_{\mathrm{PS}}^{\mathrm{Marked}}$ である。

5.4 幹と枝

写像

$$\begin{aligned} \mathrm{IdxSum} \colon T_{\mathrm{PS}}^{<\omega} &\to \mathbb{N}^{<\omega} \\ Q &\mapsto \mathrm{IdxSum}(Q) \end{aligned}$$

を以下のように定める：

1. $J_1 := \mathrm{Lng}(Q) - 1$ と置く。
2. $J \leq J_1 + 1$ を満たす各 $J \in \mathbb{N}$ に対し、$j_J \in \mathbb{N}$ を以下のように再帰的に定める：
   1. $J = 0$ ならば $j_J := 0$ である。
   2. $J > 0$ ならば $j_J := j_{J-1} + \mathrm{Lng}(Q_{J-1})$ である。
3. $\mathrm{IdxSum}(Q) := (j_J)_{J=0}^{J_1+1}$ である。

命題 ($\boldsymbol{P}$ と IdxSum の関係)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ と $J \in \mathbb{N}$ に対し、$J_1 := \mathrm{Lng}(P(M)) - 1$ と置くと、$J \leq J_1$ として $j'_0 := \mathrm{IdxSum}(P(M))_J$ と置き $j'_1 := \mathrm{IdxSum}(P(M))_{J+1}$ と置くと、$P(M)_J = (M_j)_{j=j'_0}^{j'_1-1}$ である。

系 ($\boldsymbol{P}$ と IdxSum の合成の特徴付け)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ に対し、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置き、$J_1 := \mathrm{Lng}(P(M)) - 1$ と置くと、以下が成り立つ：

(1) 任意の $J \in \mathbb{N}$ に対し、$J \leq J_1$ ならば、$(0, j_0) <_M^{\mathrm{Next}} (0, \mathrm{IdxSum}(P(M))_J)$ を満たす一意な $j_0 \in \mathbb{N}$ が存在しない。

(2) 任意の $j \in \mathbb{N}$ に対し、$j \leq j_1$ かつ $(0, j_0) <_M^{\mathrm{Next}} (0, j)$ を満たす一意な $j \in \mathbb{N}$ が存在しないならば、ある $J \in \mathbb{N}$ が存在して $J \leq J_1$ かつ $j = \mathrm{IdxSum}(P(M))_J$ である。

命題 (P の各成分の左端の単調性)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ と $J'_0, J'_1 \in \mathbb{N}$ に対し、$J_1 := \mathrm{Lng}(P(M)) - 1$ と置くと、$J'_0 \leq J'_1 \leq J_1$ ならば $(P(M)_{J'_0})_{0,0} \geq (P(M)_{J'_1})_{0,0}$ である。

命題 (切片の単項成分と $<^{\mathrm{Next}}_M$ の関係)
任意の $M \in PT_{\mathrm{PS}}$ と $j_0, J \in \mathbb{N}$ に対し、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置き、$0 < j_0 \leq j_1$ として $M' := (M_j)_{j=j_0}^{j_1}$ と置き、$J_1 := \mathrm{Lng}(P(M')) - 1$ と置くと、$J \leq J_1$ ならば一意な $j \in \mathbb{N}$ が存在して $j < j_0$ かつ $(0, j) <^{\mathrm{Next}}_M (0, j_0 + \mathrm{IdxSum}(P(M'))_J)$ である。

写像

$$\begin{aligned} \mathrm{TrMax} \colon PT_{\mathrm{PS}} &\to \mathbb{N} \\ M &\mapsto \mathrm{TrMax}(M) \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} \mathrm{Br} \colon PT_{\mathrm{PS}} &\to T_{\mathrm{PS}}^{<\omega} \\ M &\mapsto \mathrm{Br}(M) \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} \mathrm{FirstNodes} \colon PT_{\mathrm{PS}} &\to \mathbb{N}^{<\omega} \\ M &\mapsto \mathrm{FirstNodes}(M) \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} \mathrm{Joints} \colon PT_{\mathrm{PS}} &\to \mathbb{N}^{<\omega} \\ M &\mapsto \mathrm{Joints}(M) \end{aligned}$$

とを以下のように定める：

1. $\mathrm{TrMax}(M) := \max\{j \in \mathbb{N} \mid \forall j' \in \mathbb{N}, (j' < j) \rightarrow ((1, j') <^{\mathrm{Next}}_M (1, j' + 1))\}$ である[5]。
2. $j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置く。
3. $j'_1 := \mathrm{TrMax}(M)$ と置く。
4. $j'_1 = j_1$ ならば $\mathrm{Br}(M) := ()$ である。
5. $j'_1 < j_1$ ならば $\mathrm{Br}(M) := P((M_j)_{j=j'_1+1}^{j_1})$ である。
6. $J_1 := \mathrm{Lng}(\mathrm{Br}(M)) - 1$ と置く。

[5] $j = 0$ が条件を満たし、かつ条件を満たす j は $\mathrm{Lng}(M)$ 未満であるため、最大値が存在する。

7. $\mathrm{FirstNodes}(M) := (\mathrm{TrMax}(M) + 1 + \mathrm{IdxSum}(\mathrm{Br}(M))_J)_{J=0}^{J_1+1}$ である。
8. $J \leq J_1$ を満たす各 $J \in \mathbb{N}$ に対し、$(0, j) <_M^{\mathrm{Next}} (0, \mathrm{FirstNodes}(M)_J)$ を満たす一意な $j \in \mathbb{N}$ を a_J と置く[6]。
9. $\mathrm{Joints}(M) := (a_J)_{J=0}^{J_1}$ である。

TrMax の定義から $(1, \mathrm{TrMax}(M)) <_M^{\mathrm{Next}} (1, \mathrm{TrMax}(M)+1)$ でなくかつ $\mathrm{TrMax}(M) < \mathrm{Lng}(M)$ であるので、$\mathrm{TrMax}(M)$ は M 許容である。また FirstNodes(M) の定義から、$\mathrm{Br}(M) = ((M_j)_{j=\mathrm{FirstNodes}(M)_J}^{\mathrm{FirstNodes}(M)_{J+1}-1})_{J=0}^{J_1}$ となる。

命題 (FirstNodes と TrMax と Joints の関係)
任意の $M \in PT_{\mathrm{PS}}$ と $J \in \mathbb{N}$ に対し、$J_1 := \mathrm{Lng}(\mathrm{Br}(M)) - 1$ と置くと、$J \leq J_1$ ならば $\mathrm{Joints}(M)_J \leq \mathrm{TrMax}(M) < \mathrm{FirstNodes}(M)_J$ である。

系 (FirstNodes と Joints の単調性)
任意の $M \in PT_{\mathrm{PS}}$ と $J'_0, J'_1 \in \mathbb{N}$ に対し、$J_1 := \mathrm{Lng}(\mathrm{Br}(M)) - 1$ と置くと、$J'_0 < J'_1 \leq J_1$ ならば以下が成り立つ：

(1) $\mathrm{FirstNodes}(M)_{J'_0} \leq \mathrm{FirstNodes}(M)_{J'_1}$ である。
(2) $\mathrm{Joints}(M)_{J'_0} \geq \mathrm{Joints}(M)_{J'_1}$ である。
(3) $M_{0,\mathrm{FirstNodes}(M)_{J'_0}} \geq M_{0,\mathrm{FirstNodes}(M)_{J'_1}}$ である。
(4) 任意の $i \in \{0, 1\}$ に対し $M_{i,\mathrm{Joints}(M)_{J'_0}} > M_{i,\mathrm{Joints}(M)_{J'_1}}$ である。

系 (単項性の切片への遺伝性)
任意の $M \in PT_{\mathrm{PS}}$ と $j'_0, j'_1 \in \mathbb{N}$ に対し、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置き、$J_1 := \mathrm{Lng}(\mathrm{Br}(M)) - 1$ と置き、$j'_0 < j'_1 \leq j_1$ として $M' := (M_j)_{j=j'_0}^{j'_1}$ と置くと、$j'_0 \leq \mathrm{Joints}(M)_{J_1}$ ならば M' は単項である。

5.5 簡約化

写像

$$\begin{aligned} \mathrm{Red}\colon T_{\mathrm{PS}} &\to T_{\mathrm{PS}} \\ M &\mapsto \mathrm{Red}(M) \end{aligned}$$

を以下のように再帰的に定める：

[6] M の単項性から $(0, 0) \leq_M (0, \mathrm{FirstNodes}(M)_J)$ であり、$\mathrm{FirstNodes}(M)_J > j'_1 \geq 0$ より j は存在する。

1. M が零項ならば $\mathrm{Red}(M) := (0,0)$ である。
2. M が単項とする。
   1. $j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置く。
   2. $M_0 = (0,0)$ とする[7]。
      1. $j'_1 := \mathrm{TrMax}(M)$ と置く。
      2. $j'_1 = j_1$ ならば $\mathrm{Red}(M) := ((j,j))_{j=M_{1,0}}^{M_{1,0}+j_1}$ である。
      3. $j'_1 < j_1$ とする。
      4. $J_1 := \mathrm{Lng}(\mathrm{Br}(M)) - 1$ と置く。
      5. $J \leq J_1$ を満たす各 $J \in \mathbb{N}$ に対し、$n_J \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ と $N_J \in PT_{\mathrm{PS}}$ を以下のように定める：
         1. $(\mathrm{Br}(M)_J)_{1,0} = 0$ ならば、$n_J := -1$ である。
         2. $(\mathrm{Br}(M)_J)_{1,0} > 0$ ならば $(1,j) <_M^{\mathrm{Next}} (1, \mathrm{FirstNodes}(M)_J)$ を満たす一意な $j \in \mathbb{N}$ を n_J と置く[8]。
         3. $N_J := ((M_{0,0} + \mathrm{Joints}(M)_J + 1, M_{1,0} + n_J + 1)) \oplus_{\mathbb{N}^2} \mathrm{Derp}(\mathrm{Br}(M)_J)$ である[9]。
      6. $\mathrm{Red}(M) := ((j,j))_{j=0}^{j'_1} \oplus_{\mathbb{N}^2} \bigoplus_{\mathbb{N}^2} (\mathrm{IncrFirst}^{\mathrm{Joints}(M)_J - n_J}(\mathrm{Red}(N_J)))_{J=0}^{J_1}$ である[10]。
   3. $M_0 \neq (0,0)$ とする。
      1. $M_{1,0} = 0$ とする[11]。
         1. $N := ((M_{0,j} - M_{0,0}, M_{1,j}))_{j=0}^{j_1}$ と置く[12]。
         2. $\mathrm{Red}(M) := \mathrm{Red}(N)$ である。
      2. $M_{1,0} > 0$ とする。
         1. $N := \mathrm{Red}(((j,j))_{j=0}^{M_{1,0}-1} \oplus_{\mathbb{N}^2} \mathrm{IncrFirst}^{M_{1,0}}(M))$ と置く[13]。
         2. $j_1 := \mathrm{Lng}(N) - 1$ と置く。
            1. $M_{1,0} \leq j_1$ かつ $(N_j)_{j=M_{1,0}}^{j_1} \in PT_{\mathrm{PS}}$ ならば $\mathrm{Red}(M) := ((N_{0,j} - N_{0,M_{1,0}} + N_{1,M_{1,0}}, N_{1,j}))_{j=M_{1,0}}^{j_1}$ である[14]。
            2. $M_{1,0} \leq j_1$ かつ $(N_j)_{j=M_{1,0}}^{j_1} \in T_{\mathrm{PS}} \setminus PT_{\mathrm{PS}}$ ならば $\mathrm{Red}(M) := M$ である[15]。
            3. $M_{1,0} > j_1$ ならば $\mathrm{Red}(M) := M$ である[16]。
3. M が複項とする。
   1. $J_1 := \mathrm{Lng}(P(M)) - 1$ と置く。
   2. $\mathrm{Red}(M) := \bigoplus_{\mathbb{N}^2} (\mathrm{Red}(P(M)_J))_{J=0}^{J_1}$ である。

---

[7] M は零項でないので、この時 $j_1 > 0$ である。

[8] M が単項より $(0,0) \leq_M (0, \mathrm{FirstNodes}(M)_J)$ であり、$M_{0,0} = 0 < (\mathrm{Br}(M)_J)_{1,0} = M_{1,\mathrm{FirstNode}(M)_J}$ と親の存在の判定条件 (2) から j は存在する。

[9] FirstNodes と TrMax と Joints の関係より $\mathrm{Joints}(M)_J \leq \mathrm{TrMax}(M)$ なので $M_{0,0} + \mathrm{Joints}(M)_J \leq M_{0,\mathrm{Joints}(M)}$ であり、$(0, \mathrm{Joints}(M)_J) <_M^{\mathrm{Next}} (0, \mathrm{FirstNodes}(M)_J)$ より $M_{0,\mathrm{Joints}(M)_J} < M_{0,\mathrm{FirstNodes}(M)_J}$ であるので $M_{0,0} + \mathrm{Joints}(M)_J + 1 \leq M_{0,\mathrm{FirstNodes}(M)_J}$ となり、$\mathrm{Br}(M)_J$ が非複項であったので N_J も非複項となる。

[10] $\mathrm{Joints}(M)_J$ と n_J の定義より $\mathrm{Joints}(M)_J \geq n_J$ なので $\mathrm{IncrFirst}^{\mathrm{Joints}(M)_J - n_J}$ は意味を持つ。

[11] M は零項でないので、この時 $j_1 > 0$ である。

[12] $N_0 = (0,0)$ であり、M が単項より直系先祖の基本性質 (1) から任意の $j \in \mathbb{N}$ に対し $0 < j \leq j_1$ ならば $M_{0,0} < M_{0,j}$ であるので $N_j \in \mathbb{N}^2$ となり、$\leq_M$ と $\leq_N$ は等しいので N は単項である。

[13] $N_0 = (0,0)$ であり、任意の $j \in \mathbb{N}$ に対し $j < M_{1,0} + \mathrm{Lng}(M)$ ならば $N_{1,j} > 0$ なので N は単項である。

[14] $(N_j)_{j=M_{1,0}}^{j_1} \in PT_{\mathrm{PS}}$ より任意の $j \in \mathbb{N}$ に対し $M_{1,0} < j \leq j_1$ ならば $N_{0,M_{1,0}} < N_{0,j}$ であるので $(N_{0,j} - N_{0,M_{1,0}} + N_{1,M_{1,0}}, N_{1,j}) \in \mathbb{N}^2$ である。

[15] 後で証明する単項性と Red の関係により、この分岐が生じないことが分かる。

[16] 後で証明する Lng の Red 不変性により、この分岐が生じないことが分かる。

命題 (Red の well-defined 性)
上の条件を全て満たす写像 Red が一意に存在する。

命題 (Red の IncrFirst 不変性)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ に対し、$\mathrm{Red}(\mathrm{IncrFirst}(M)) = \mathrm{Red}(M)$ である。

命題 (Lng の Red 不変性)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ に対し、$\mathrm{Lng}(\mathrm{Red}(M)) = \mathrm{Lng}(M)$ である。

系 (Red が零項性を保つこと)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ に対し、以下は同値である：

(1) M は零項である。
(2) $\mathrm{Red}(M)$ は零項である。

系 (直系先祖の Red 不変性)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ に対し、$\leq_M$ と $\leq_{\mathrm{Red}(M)}$ は一致する。

系 (Red が単項性を保つこと)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ に対し、以下は同値である：

(1) M は単項である。
(2) $\mathrm{Red}(M)$ は単項である。

系 (P の Red 同変性)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ に対し、$J_1 := \mathrm{Lng}(P(M))$ と置くと $P(\mathrm{Red}(M)) = (\mathrm{Red}(P(M)_J))_{J=0}^{J_1}$ である。

命題 (単項性と Red の関係)
任意の $M \in PT_{\mathrm{PS}}$ に対し、$N := \mathrm{Red}(((j,j))_{j=0}^{M_{1,0}-1} \oplus_{\mathbb{N}^2} \mathrm{IncrFirst}^{M_{1,0}}(M))$ と置き $j_1 := \mathrm{Lng}(N) - 1$ と置くと、$(N_j)_{j=M_{1,0}}^{j_1} \in PT_{\mathrm{PS}}$ である。

命題 (Red の冪等性)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ に対し、$\mathrm{Red}^2(M) = \mathrm{Red}(M)$ である。

命題 (Red と Pred の可換性)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ に対し、$\mathrm{Red}(\mathrm{Pred}(M)) = \mathrm{Pred}(\mathrm{Red}(M))$ である。

命題 (Red と基本列の可換性)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ と $n \in \mathbb{N}_+$ に対し、$\mathrm{Red}(M)[n] = \mathrm{Red}(M[n])$ である。

命題 (Red が許容性を保つこと)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ に対し、$\mathbb{N}_M = \mathbb{N}_{\mathrm{Red}(M)}$ である。

系 (許容化の Red 不変性)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ と $j \in \mathbb{N}$ に対し、$\mathrm{Adm}_M(j) = \mathrm{Adm}_{\mathrm{Red}(M)}(j)$ である。

系 (Red が基点を保つこと)
任意の $(M,m) \in T_{\mathrm{PS}}^{\mathrm{Marked}}$ に対し、$(\mathrm{Red}(M), m) \in RT_{\mathrm{PS}}^{\mathrm{Marked}}$ である。

5.6 簡約性

$M \in T_{\mathrm{PS}}$ とする。

1. M が簡約であるとは、$\mathrm{Red}(M) = M$ を満たすということである。
2. 簡約ペア数列全体のなす部分集合を $RT_{\mathrm{PS}} \subset T_{\mathrm{PS}}$ と置く。

すなわち $RT_{\mathrm{PS}} = \mathrm{Im}(\mathrm{Red})$ である。$RT_{\mathrm{PS}} \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Red})$ であることは簡約性の定義から従い、$\mathrm{Im}(\mathrm{Red}) \subset RT_{\mathrm{PS}}$ であることは Red の冪等性から従う。

命題 (簡約性の切片への遺伝性)
任意の $M \in RT_{\mathrm{PS}}$ に対し、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置くと、任意の $j'_0, j'_1 \in \mathbb{N}$ に対し $j'_0 \leq \mathrm{TrMax}(M) \leq j'_1 \leq j_1$ ならば $(M_j)_{j=j'_0}^{j'_1}$ は簡約である。

命題 (P が簡約性を保つこと)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ に対し、以下は同値である：

(1) M は簡約である。
(2) $P(M)$ の各成分は簡約である。

命題 (簡約性が基本列で保たれること)
任意の $M \in RT_{\mathrm{PS}}$ と $n \in \mathbb{N}_+$ に対し、$M[n] \in RT_{\mathrm{PS}}$ である。

命題 (簡約性と係数の関係)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ に対し、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置くと M が簡約である必要十分条件は以下が成り立つことである：

(A) 任意の $i \in \{0, 1\}$ と $j'_1 \in \mathbb{N}$ に対し、$(i, j'_0) <^{\mathrm{Next}}_M (i, j'_1)$ を満たす一意な $j'_0 \in \mathbb{N}$ が存在するならば $M_{i,j'_0} + 1 = M_{i,j'_1}$ である。
(B) 任意の $j'_1 \in \mathbb{N}$ に対し、$(0, j'_0) <^{\mathrm{Next}}_M (0, j'_1)$ を満たす一意な $j'_0 \in \mathbb{N}$ が存在せずかつ $j'_1 \leq j_1$ ならば、$M_{0,j'_1} = M_{1,j'_1}$ である。

簡約性と係数の関係の証明の準備としていくつかの補題を用意する。

補題 (Red と左端の関係)

任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ に対し、以下が成り立つ：

(1) $\mathrm{Red}(M)_{1,0} = M_{1,0}$ である。

(2) 任意の $u, j_0 \in \mathbb{N}$ に対し、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置くと、M が単項かつ $j_0 \leq j_1$ かつ $(M_j)_{j=0}^{j_0} = ((j,j))_{j=u}^{j_0+u}$ ならば、$\mathrm{Red}(M)_{j_0} = (j_0+u, j_0+u)$ である。

補題 (簡約性と係数の基本性質)

任意の $M \in RT_{\mathrm{PS}}$ と $j \in \mathbb{N}$ に対し、$j < \mathrm{Lng}(M)$ ならば $M_{0,j} \geq M_{1,j}$ である。

補題 (簡約性と左端の関係)

任意の $M \in RT_{\mathrm{PS}} \cap PT_{\mathrm{PS}}$ と $u \in \mathbb{N}$ に対し、$u \leq M_{1,0}$ ならば $N := ((j,j))_{j=u}^{M_{1,0}-1} \oplus_{\mathbb{N}^2} M$ と置くと N は簡約かつ単項である。

補題 (条件 (A) と (B) と係数の基本性質)

任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ に対し、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置くと、$M_0 = (0,0)$ かつ M が条件 (A) を満たすならば、以下が成り立つ：

(1) 任意の $j \in \mathbb{N}$ に対し、$j \leq j_1$ ならば $M_{0,j} \leq j$ である。

(2) M が条件 (B) を満たすならば、任意の $j \in \mathbb{N}$ に対し、$j \leq j_1$ ならば $M_{0,j} \geq M_{1,j}$ である。

(3) $i \in \{0,1\}$ とし、$i = 0$ であるか、または $i = 1$ かつ M が条件 (B) を満たすとする。任意の $j \in \mathbb{N}$ に対し、ある $j'_0, j'_1 \in \mathbb{N}$ が存在して $(i, j'_0) \leq_M (i, j'_1)$ でなくかつ $j'_0 < j'_1 \leq j \leq j_1$ ならば、$M_{i,j} < j$ である。

系 (直系先祖による切片と Red と IncrFirst の関係)

任意の $M \in RT_{\mathrm{PS}}$ と $j'_0, j'_1 \in \mathbb{N}$ に対し、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置き $j'_0 < j'_1 \leq j_1$ として $N := \mathrm{Red}((M_j)_{j=j'_0}^{j'_1})$ と置くと、$(0, j'_0) \leq_M (0, j'_1)$ ならば N は簡約かつ単項かつ $(M_j)_{j=j'_0}^{j'_1} = \mathrm{IncrFirst}^{M_{0,m}-M_{1,m}}(N)$ である[17]。

[17] 簡約性と係数の関係より $M_{0,j'_0} - M_{1,j'_0} \geq 0$ であるので $\mathrm{IncrFirst}^{M_{0,j'_0}-M_{1,j'_0}}$ は意味を持つ。

系 (1 列ペア数列の基本性質)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ に対し、以下は同値である：

(1) $\mathrm{Lng}(M) = 1$ かつ M は簡約である。
(2) 一意な $v \in \mathbb{N}$ が存在して $M = ((v, v))$ である。

5.7 標準形

部分集合 $S \subset T_{\mathrm{PS}}$ であって以下を満たすもののうち最小のものを ST_{PS} と置く[18]：

1. 任意の $u, v \in \mathbb{N}$ に対し、$u \leq v$ ならば $((j, j))_{j=u}^{v} \in S$ である。
2. 任意の $M \in S$ と $n \in \mathbb{N}_+$ に対し、$M[n] \in S$ である。

ここでは ST_{PS} に属するペア数列のことを標準形と呼ぶ。通常は標準形ペア数列と言ったら 3 行バシク行列 $((0, 0, 0)(1, 1, 1))$ の展開で現れるものを指すが、それは上の条件において $u = 0$ としたものに対応するため、ここでの流儀では標準形が通常より広い対象を指す用語となる。

命題 (標準形の簡約性)
$ST_{\mathrm{PS}} \subset RT_{\mathrm{PS}}$ である。

各 $k \in \mathbb{N}$ に対し、部分集合 $S_k T_{\mathrm{PS}} \subset ST_{\mathrm{PS}}$ を以下のように再帰的に定める：

1. $k = 0$ ならば $S_k T_{\mathrm{PS}} := \{((j, j))_{j=u}^{v} \mid (u, v) \in \mathbb{N}^2 \wedge u \leq v\}$ である。
2. $k > 0$ ならば $S_k T_{\mathrm{PS}} := \{M[n] \mid M \in S_{k-1} T_{\mathrm{PS}} \wedge n \in \mathbb{N}\}$ である。

ST_{PS} の定義に基づく最小性より、$ST_{\mathrm{PS}} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k T_{\mathrm{PS}}$ である。

命題 (標準形の単項成分が標準形であること)
任意の $k \in \mathbb{N}$ と $M \in S_k T_{\mathrm{PS}}$ に対し、$P(M) \in S_k T_{\mathrm{PS}}^{<\omega}$ である。

命題 (標準形の始切片への遺伝性)
任意の $M \in ST_{\mathrm{PS}}$ と $j'_1 \in \mathbb{N}$ に対し、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置くと、$j'_1 \leq j_1$ ならば $(M_j)_{j=0}^{j'_1}$ は標準形である。

[18] $S = T_{\mathrm{PS}}$ が条件を満たし、条件を満たす S 全体の共通部分もまた条件を満たすため、最小の S が存在する。

5.8 降順性

$Q \in T_{\mathrm{PS}}^{<\omega}$ とする。

1. $J_1 := \mathrm{Lng}(Q) - 1$ と置く。
2. Q が降順であるとは、任意の $J'_0, J'_1 \in \mathbb{N}$ に対し、$J'_0 \leq J'_1 \leq J_1$ ならば以下が成り立つということである：
   1. $(Q_{J'_0})_{0,0} \geq (Q_{J'_1})_{0,0}$ である。
   2. $(Q_{J'_0})_{0,0} = (Q_{J'_1})_{0,0}$ ならば、$(Q_{J'_0})_{1,0} \geq (Q_{J'_1})_{1,0}$ である。

P の各成分の左端の単調性より、任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ に対し以下は同値である：

(1) $P(M)$ は降順である。

(2) 任意の $J'_0, J'_1 \in \mathbb{N}$ に対し、$J'_0 \leq J'_1 \leq J_1$ かつ $(P(M)_{J'_0})_{0,0} = (P(M)_{J'_1})_{0,0}$ ならば、$(P(M)_{J'_0})_{1,0} \geq (P(M)_{J'_1})_{1,0}$ である。

従って特に M が単項の時、$j'_1 := \mathrm{TrMax}(M)$ と置き、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置き、$j'_1 < j_1$ である場合は $\mathrm{Br}(M)$ の降順性の判定には (2) を $(M_j)_{j=j'_1}^{j_1}$ に対し確認すれば良い。

命題 (標準形の切片と Br の降順性の関係)
任意の $M \in ST_{\mathrm{PS}}$ と $j'_0, j'_1 \in \mathbb{N}$ に対し、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置き、$j'_0 < j'_1 \leq j_1$ として $M' := (M_j)_{j=j'_0}^{j'_1}$ と置くと、$(0, j'_0) \leq_M (0, j'_1)$ ならば M' は単項かつ $\mathrm{Br}(M')$ は降順である。

命題 (標準形の単項成分が降順であること)
任意の $M \in ST_{\mathrm{PS}}$ と $J'_0, J'_1 \in \mathbb{N}$ に対し、$J_1 := \mathrm{Lng}(P(M)) - 1$ と置くと、$J'_0 \leq J'_1 \leq J_1$ かつ $(P(M)_{J'_0})_{0,0} = (P(M)_{J'_1})_{0,0}$ ならば、$(P(M)_{J'_0})_{1,0} \geq (P(M)_{J'_1})_{1,0}$ である。

6 Buchholz の表記系への翻訳

後に定義する標準形ペア数列システムの停止性を証明するための準備として、ペア数列から Buchholz の表記系への翻訳写像 Trans を定め、その性質を調べる。

6.1 Buchholz の表記系

以下では T_{B} は D_ω を含まない項全体のなす Buchholoz の表記系 T[19]の部分集合を表す。T_{B} は順序数項[20]とは限らないことに注意する。最終的に用いるのは順序数項であるが、最初から順序数項に制限すると議論の過程で現れる各項が順序数項であるか否かを逐一判定する必要があるので非常に冗長となる。従って標準形ペアシステムの停止性を証明する直前の段階までは順序数項に制限せず議論する。

T_{B} の要素間の関係 $<$ は通常の強順序[21]を表し、T_{B} の要素間の関係 $\leq$ は「$<$ または $=$」の略記を表し、T_{B} の要素間の演算 $+$ は加法[22]を表し、$n \in \mathbb{N}$ に対し T_{B} の要素への $\times n$ は n 倍[23]を表し、T_{B} の要素に対する $[]$ 演算子は [Buc1] pp. 203–204 の $[]$ 演算子の再帰的定義のうち ($[]$.4) (ii) のみ [Buc2] p. 6 の Definition の 6 の規則に変えたもの[24]として得られる基本列[25]を表し、dom は各項ごとに $[]$ 演算子の定義域[26]を表す。

0 でも単項[27]でもない Buchholz の表記系の項を複項と呼ぶ。$PT_{\mathrm{B}} \subset T_{\mathrm{B}}$ で D_ω を含まない単項全体のなす部分集合を表し、$MT_{\mathrm{B}} \subset T_{\mathrm{B}}$ で D_ω を含まない複項全体のなす部分集合を表す。

$\underline{(}$ で T_{B} における字母 (を表し、$\underline{,}$ で T_{B} における字母 , を表し、$\underline{)}$ で T_{B} における字母) を表す。T_{B} における字母 $\underline{(}$ と $\underline{,}$ と $\underline{)}$ と 0 と各 $u \in \omega + 1$ に対する D_u 全体の集合を Σ と置く。

$t \in PT_{\mathrm{B}}^{<\omega}$ とする。

1. $t = ()$ ならば $t' := 0 \in \Sigma$ と置く。
2. $t \neq ()$ とする。
    1. $j_1 := \mathrm{Lng}(t) - 1$ と置く。
    2. $s_0 := ()$ と置く。
    3. $0 < j < j_1$ を満たす各 $j \in \mathbb{N}$ に対して $s_j := s_{j-1}t_{j-1}\underline{,}$ と置く。
    4. $t' := s_{j_1-1}t_{j_1}\underline{)} \in \Sigma$ と置く。

$j_1 = -1$ ならば $t' = 0 \in T_{\mathrm{B}}$ である。$j_1 = 0$ ならば $t' = \underline{(}t_0\underline{)}$ より縮約規則 $\{(p) = p \mid c \in PT_{\mathrm{B}}\}$ の下で t' は $t_0 \in PT_{\mathrm{B}}$ と同一視される。$j_1 > 0$ ならば $t' \in T_{\mathrm{B}} \setminus (\{0\} \cup PT_{\mathrm{B}})$ である。従っていずれの場合も T_{B} の項を定め、それを $\Sigma_{\mathrm{B}} t$ と表記する。

写像

$$\begin{aligned} P \colon T_{\mathrm{B}} &\to PT_{\mathrm{B}}^{<\omega} \\ t &\mapsto P(t) \end{aligned}$$

を以下のように定める：

[19] [Buc1] p. 200 参照。
[20] [Buc1] p. 201 参照。
[21] [Buc1] p. 200 参照。
[22] [Buc1] p. 203 参照。
[23] [Buc1] p. 203 参照。
[24] すなわち [Buc1] ($[]$.4) (ii) の場合分けにおいて、各 $i \in \mathbb{N}$ に対し x_i を「$i = 0$ ならば $x_i = D_u 0$、$i > 0$ ならば $x_i = b[D_u x_{i-1}]$」と定め、$a[n]$ の定義を $D_v b[x_n]$ に変えるということである。
[25] [Buc1] の $[]$ 演算子の再帰的定義は基本的に基本列を再帰的に翻訳したものだが、($[]$.4) (ii) の場合分けは基本列の一部だけを再帰的に翻訳したものであるため、そこだけ変更する必要がある。
[26] [Buc1] pp. 203–204 参照。
[27] [Buc1] p. 200 (T2) 参照。

1. $t = 0$ ならば $P(t) := ()$ である。
2. $t \in PT_{\mathrm{B}}$ ならば $P(t) := (t)$ である。
3. $t \in MT_{\mathrm{B}}$ とする。
    1. Buchholz の表記系の再帰的定義より、一意な $s \in \Sigma^{<\omega}$ と $t' \in PT_{\mathrm{PS}}$ が存在して以下を満たす：
        1. $t = \underline{(}s\underline{,}t'\underline{)}$ である。
        2. $s \in PT_{\mathrm{B}}$ または $\underline{(}s\underline{)} \in MT_{\mathrm{B}}$ である。
    2. $s \in PT_{\mathrm{B}}$ ならば $P(t) := P(s) \oplus_{PT_{\mathrm{B}}} (t')$ である。
    3. $\underline{(}s\underline{)} \in MT_{\mathrm{B}}$ ならば $P(t) := P((\underline{(}s\underline{)})) \oplus_{PT_{\mathrm{B}}} (t')$ である。

$t \in T_{\mathrm{B}}$ に対し、$P(t)$ の各成分を t の単項成分と呼ぶ。

命題 (順序数項のカッコの個数が左右で等しいこと)
任意の $t \in T_{\mathrm{B}}$ に対し、t に出現する $\underline{(}$ の個数と t に出現する $\underline{)}$ の個数は等しい。

命題 (順序数項の単項成分の基本性質)
任意の $t \in T_{\mathrm{B}}$ に対し、$J_1 := \mathrm{Lng}(P(t)) - 1$ と置くと以下が成り立つ：

(1) $J_1 = -1$ である必要十分条件は $t = 0$ である。
(2) $t = \Sigma_{\mathrm{B}}(P(t)_J)_{J=0}^{J_1}$ である。

命題 (部分表現の不等式の延長性)
任意の $s, b \in \Sigma^{<\omega}$ と $t_0, t_1 \in T_{\mathrm{B}}$ に対し、$st_0b \in T_{\mathrm{B}}$ かつ $st_1b \in T_{\mathrm{B}}$ ならば、以下は同値である：

(1) $t_0 < t_1$ である。
(2) $st_0b < st_1b$ である。

6.2 scb 分解

写像

$$\begin{aligned} \mathrm{RightNodes} \colon T_{\mathrm{B}} &\to \mathbb{N}^{<\omega} \\ t &\mapsto \mathrm{RightNodes}(t) \end{aligned}$$

を以下のように再帰的に定める：

1. $t = 0$ ならば $\mathrm{RightNodes}(t) := ()$ である。
2. $t \in PT_{\mathrm{B}}$ とする。

   1. $u \in \mathbb{N}$ と $t' \in T_{\mathrm{B}}$ を用いて $t = D_u t'$ と置く。
   2. $\mathrm{RightNodes}(t) := (u) \oplus_{\mathbb{N}} \mathrm{RightNodes}(t')$ である。
3. $t \in T_{\mathrm{B}} \setminus (\{0\} \cup PT_{\mathrm{B}})$ とする。
   1. $J_1 := \mathrm{Lng}(P(t)) - 1$ と置く。
   2. $\mathrm{RightNodes}(t) := \mathrm{RightNodes}(P(t)_{J_1})$ である。

順序数項の不等式や加法や基本列の計算補助をするために、文字列の構文情報を与える scb 分解という概念を導入する。

$t \in T_{\mathrm{B}}$ とし、$(s, c, b) \in (\Sigma^{<\omega})^3$ とする。

1. (s, c, b) が t の scb 分解であるとは、以下を満たすということである：
   1. $t = scb$ である。
   2. $t \neq 0$ ならば $c \in PT_{\mathrm{B}}$ である。
   3. b は $\underline{)}$ のみからなる文字列である。
2. (s, c, b) が t の第 0 種 scb 分解であるとは、以下を満たすということである：
   1. (s, c, b) は t の scb 分解である。
   2. $\mathrm{Lng}(\mathrm{RightNodes}(c)) = 2$ である。
   3. $\mathrm{RightNodes}(c)_1 = 0$ である。
3. (s, c, b) が t の第 1 種 scb 分解であるとは、以下を満たすということである：
   1. (s, c, b) は t の scb 分解である。
   2. $j_1 := \mathrm{Lng}(\mathrm{RightNodes}(c)) - 1$ と置くと $j_1 \geq 1$ である。
   3. $\mathrm{RightNodes}(c)_0 < \mathrm{RightNodes}(c)_{j_1}$ である。
   4. 任意の $j \in \mathbb{N}$ に対し、$0 < j < j_1$ ならば $\mathrm{RightNodes}(c)_j \geq \mathrm{RightNodes}(c)_{j_1}$ である。

命題 (scb 分解の置換可能性)
任意の $s, b \in \Sigma^{<\omega}$ と $c_0, c_1 \in T_{\mathrm{B}}$ に対し、「c_0 が単項でないまたは c_1 が単項である」かつ $sc_0b \in T_{\mathrm{B}}$ かつ (s, c_0, b) が sc_0b の scb 分解であるならば、$sc_1b \in T_{\mathrm{B}}$ かつ (s, c_1, b) は sc_1b の scb 分解である。

命題 (scb 分解の合成則)
任意の $t \in T_{\mathrm{B}}$ に対し、以下が成り立つ：

(1) 任意の $c_0 \in PT_{\mathrm{B}}$ と $s_0, s_1, c_1, b_1, b_0 \in \Sigma^{<\omega}$ に対し、(s_0, c_0, b_0) が t の scb 分解でかつ (s_1, c_1, b_1) が c_0 の scb 分解ならば、$(s_0 s_1, c_1, b_1 b_0)$ は t の scb 分解である。
(2) 任意の $v \in \mathbb{N}$ と $s, c, b \in \Sigma^{<\omega}$ に対し、(s, c, b) が t の scb 分解であるならば $(D_v s, c, b)$ は $D_v t$ の scb 分解である。

(s, c, b) が t の scb 分解となるような $(s, b) \in (\Sigma^{<\omega})$ が存在する $(t, c) \in T_{\mathrm{B}}^2$ 全体のなす部分集合を $T_{\mathrm{B}}^{\mathrm{Marked}} \subset T_{\mathrm{B}}^2$ と置く。

命題 (scb 分解の自明性の判定条件)
任意の $(t,c) \in T_{\mathrm{B}}^{\mathrm{Marked}}$ に対し、以下が同値である：

(1) $t = c$ である。
(2) 任意の $(s,b) \in (\Sigma^{<\omega})^2$ に対し、(s,c,b) が t の scb 分解であるならば $s = ()$ かつ $b = ()$ である。
(3) ある $b \in \Sigma^{<\omega}$ が存在し、$((),c,b)$ が t の scb 分解である。

$t \in T_{\mathrm{B}}$ とする。

1. t が第 0 種 scb 分解可能であるとは、t の第 0 種 scb 分解が存在するということである。
2. t が第 1 種 scb 分解可能であるとは、t の第 1 種 scb 分解が存在するということである。

命題 (scb 分解の一意性)
任意の $t \in T_{\mathrm{B}}$ に対し、以下が成り立つ：

(1) 任意の $(s_0,s_1,c,b_0,b_1) \in (\Sigma^{<\omega})^5$ に対し、(s_0,c,b_0) と (s_1,c,b_1) が t の scb 分解であるならば、$s_0 = s_1$ かつ $b_0 = b_1$ である。
(2) $\mathrm{dom}(t) = \mathbb{N}$ である必要十分条件は、t が第 0 種 scb 分解可能または第 1 種 scb 分解可能であることである。
(3) t は第 0 種 scb 分解可能でないかまたは t は第 1 種 scb 分解可能でない。
(4) t の第 0 種 scb 分解は一意である。
(5) t の第 1 種 scb 分解は一意である。

系 (加法と scb 分解の関係)
任意の $t \in T_{\mathrm{B}}$ と $c \in PT_{\mathrm{B}}$ に対し、以下が成り立つ：

(1) $(t+c,c) \in T_{\mathrm{B}}^{\mathrm{Marked}}$ である。
(2) 任意の $(s,b) \in (\Sigma^{<\omega})^2$ と $c' \in PT_{\mathrm{B}}$ に対し、(s,c,b) が $t+c$ の scb 分解であるならば (s,c',b) は $t+c'$ の scb 分解でである。
(3) 任意の $v \in \mathbb{N}$ と $s_0,s_1,b_0,b_1 \in \Sigma^{<\omega}$ と $c' \in PT_{\mathrm{B}}$ に対し、$s_1 D_v(t+c)b_1 \in T_{\mathrm{B}}$ かつ (s_0,c,b_0) が $s_1 D_v(t+c)b_1$ の scb 分解であるならば、$s_1 D_v(t+c')b_1 \in T_{\mathrm{B}}$ かつ (s_0,c',b_0) は $s_1 D_v(t+c')b_1$ の scb 分解である。

命題 (scb 分解と基本列の関係)
任意の $v, n \in \mathbb{N}$ に対し、以下が成り立つ：

(1) 任意の $t'_0, t'_1 \in T_{\mathrm{B}}$ に対し以下が成り立つ。
  (1-1) $t'_0 + D_v(t'_1 + D_0 0)[n] = t'_0 + (D_v t'_1) \times (n+1)$ である。
  (1-2) 任意の $t \in T_{\mathrm{B}}$ と $u \in \mathbb{N}$ と $(s, b) \in (\Sigma^{<\omega})^2$ に対し、$(s, D_u(t'_0 + D_v(t'_1 + D_0 0)), b)$ が t の scb 分解ならば、$(s, D_u(t'_0 + (D_v t'_1) \times (n+1)), b)$ は $t[n]$ の scb 分解である。
(2) 任意の $t \in T_{\mathrm{B}}$ と $u \in \mathbb{N}$ と $(s_0, s_1, c_2, b_0, b_1) \in (\Sigma^{<\omega})^5$ に対し、(s_1, c_2, b_1) が t の第 1 種 scb 分解でありかつ $(D_u s_0, D_v 0, b_0)$ が c_2 の scb 分解であるならば、$v > u$ かつ $t[n] = s_1 D_u (s_0 D_{v-1})^{n+1} 0 b_0^{n+1} b_1$ である。

命題 (RightNodes と部分表現の関係)
任意の $s, b \in \Sigma^{<\omega}$ と $v \in \mathbb{N} t \in PT_{\mathrm{B}}$ に対し、b が $\underline{)}$ のみからなりかつ $sD_v 0b \in T_{\mathrm{B}}$ ならば、$sD_v tb \in T_{\mathrm{B}}$ かつ $\mathrm{Lng}(P(sD_v tb)) = \mathrm{Lng}(P(sD_v 0b))$ であり一意な $a_0, a_1 \in \mathbb{N}^{<\omega}$ が存在して以下を満たす：

(1) $\mathrm{RightNodes}(sD_v tb) = a_0 \oplus_{\mathbb{N}} (v) \oplus_{\mathbb{N}} a_1$ である。
(2) $\mathrm{RightNodes}(sD_v 0b) = a_0 \oplus_{\mathbb{N}} (v)$ である。
(3) $\mathrm{RightNodes}(D_v t) = (v) \oplus_{\mathbb{N}} a_1$ である。

6.3 翻訳写像

$(\mathrm{Trans}(M), \mathrm{Mark}(M, m)) \in T_{\mathrm{B}}^{\mathrm{Marked}}$ を満たす写像

$$\begin{aligned} \mathrm{Trans} \colon T_{\mathrm{PS}} &\to T_{\mathrm{B}} \\ M &\mapsto \mathrm{Trans}(M) \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} \mathrm{Mark} \colon T_{\mathrm{PS}}^{\mathrm{Marked}} &\to T_{\mathrm{B}} \\ (M, m) &\mapsto \mathrm{Mark}(M, m) \end{aligned}$$

を以下のように再帰的に定める：

1. $j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置く。
2. $M \in RT_{\mathrm{PS}}$ かつ $j_1 = 0$ とする。
    1. $M_0 = (0, 0)$ とする。
        1. $\mathrm{Trans}(M) := 0$ である。
        2. $\mathrm{Mark}(M, m) := 0$ である。
    2. $M_0 \neq (0, 0)$ とする。
        1. $\mathrm{Trans}(M) := D_{M_{1,0}} 0$ である。

2. $\mathrm{Mark}(M, m) := D_{M_{1,0}} 0$ である。

3. M が簡約かつ単項かつ $j_1 > 0$ とする。
   1. $t_1 := \mathrm{Trans}(\mathrm{Pred}(M))$ と置く。
   2. $t_1 = 0$ とする[28]。
      1. $\mathrm{Trans}(M) := D_0 D_{M_{1,j_1}} 0$ である。
      2. $m = 0$ ならば $\mathrm{Mark}(M, m) := D_0 D_{M_{1,j_1}} 0$ である。
      3. $m > 0$ ならば $\mathrm{Mark}(M, m) := D_{M_{1,j_1}} 0$ である。
   3. $t_1 \neq 0$ とする。
      1. $i_1 := \max\{i \in \{0,1\} \mid M_{i,j_1} > 0\}$ と置く[29]。
      2. $j_0 := \max\{j \in \mathbb{N} \mid j < j_1 \land (0,j) \leq_M (0,j_1)\}$ と置く[30]。
      3. $j_{-1} := \mathrm{Adm}_M(j_0)$ と置く。
      4. 互いに背反な条件 (I)〜(VI) を以下のように定める：
         1. 条件 (I) は「$M_{1,j_1} = 0$ かつ j_0 は M 許容」である。
         2. 条件 (II) は「$M_{1,j_1} = 0$ かつ j_0 は非 M 許容」である。
         3. 条件 (III) は「$M_{1,j_1} > 0$ かつ $M_{1,j_0} \geq M_{1,j_1}$ かつ j_0 は M 許容」である。
         4. 条件 (IV) は「$M_{1,j_1} > 0$ かつ $M_{1,j_0} \geq M_{1,j_1}$ かつ j_0 は非 M 許容」である。
         5. 条件 (V) は「$M_{1,j_1} > 0$ かつ $M_{1,j_0} + 1 = M_{1,j_1}$ かつ $j_0 + 1 < j_1$」である。
         6. 条件 (VI) は「$M_{1,j_1} > 0$ かつ $M_{1,j_0} + 1 = M_{1,j_1}$ かつ $j_0 + 1 = j_1$」である。
      5. $c_1 := \mathrm{Mark}(\mathrm{Pred}(M), j_{-1})$ と置く[31]。
      6. $(t_1, c_1) \in T_{\mathrm{B}}^{\mathrm{Marked}}$ かつ $t_1 \neq 0$ より、$c_1 \in PT_{\mathrm{B}}$ であり scb 分解の一意性 (1) より一意な $(s_1, b_1) \in (\Sigma^{<\omega})^2$ が存在して (s_1, c_1, b_1) は t_1 の scb 分解をなす。
      7. $v \in \mathbb{N}$ と $t_2 \in T_{\mathrm{B}}$ を用いて $c_1 = D_v t_2$ と置く。
      8. $J_1 := \mathrm{Lng}(P(t_2)) - 1$ と置く。
      9. 条件 (I) か (III) か (V) を満たすならば $c_2 := D_v(t_2 + D_{M_{1,j_1}} 0)$ と置く。
      10. 条件 (II) か (IV) を満たすとする。
          1. $t_2 = 0$ ならば[32]、$c_2 := D_v D_{M_{1,j_0}} D_{M_{1,j_1}} 0$ と置く。
          2. $t_2 \neq 0$ とする。
             1. $P(t_2)_{J_1}$ の左端が $D_{M_{1,j_0}}$ であるとする。
                1. $t_3 := \Sigma_{\mathrm{B}}(P(t_2)_J)_{J=0}^{J_1-1}$ と置く。
                2. $t_4 \in T_{\mathrm{PS}}$ を用いて $P(t_2)_{J_1} = D_{M_{1,j_0}} t_4$ と置く。
             2. $P(t_2)_{J_1}$ の左端が $D_{M_{1,j_0}}$ でないとする。
                1. $t_3 := t_2$ と置く。
                2. $t_4 := t_2$ と置く。
             3. $c_2 := D_v(t_3 + D_{M_{1,j_0}}(t_4 + D_{M_{1,j_1}} 0))$ と置く。

---

[28] 後で示す Trans が零項性を保つことから、この条件は $j_1 = 1$ かつ $M_0 = (0,0)$ と同値である。

[29] M が単項かつ $j_1 > 0$ より $M_{j_1} \neq (0,0)$ であるので、max は存在する。

[30] M が単項より $(0,0) \leq_M (0,j_1)$ であり、$j_1 > 0$ より max は存在する。また M が簡約より、簡約性と係数の関係から $M_{0,j_0} = M_{0,j_1} - 1$ となる。

[31] $j_{-1} \leq j_0 < j_1$ から基点の切片への遺伝性より $(\mathrm{Pred}(M), j_{-1}) \in T_{\mathrm{PS}}^{\mathrm{Marked}}$ である。

[32] 後で示す条件 (II) か (IV) の下で t_2 が 0 でないことから、この分岐が結果的に生じないことが分かる。

        11. 条件 (VI) を満たすならば $c_2 := D_v D_{M_{1,j_1}} 0$ と置く。
        12. $\mathrm{Trans}(M) := s_1 c_2 b_1$ である[33]。
        13. $m < j_1$ とする。
            1. $c_0 := \mathrm{Mark}(\mathrm{Pred}(M), m)$ と置く[34]。
            2. $(c_0, c_1) \in T_{\mathrm{B}}^{\mathrm{Marked}}$ とする。
                1. $(t_1, c_0) \in T_{\mathrm{B}}^{\mathrm{Marked}}$ より、scb 分解の一意性 (1) から一意な $(s_0, b_0) \in (\Sigma^{<\omega})^2$ が存在して (s_0, c_0, b_0) は t_1 の scb 分解である。
                2. $(c_0, c_1) \in T_{\mathrm{B}}^{\mathrm{Marked}}$ より、scb 分解の一意性 (1) から一意な $(s_{-1}, b_{-1}) \in (\Sigma^{<\omega})^2$ が存在して (s_{-1}, c_1, b_{-1}) は c_0 の scb 分解である[35]。
                3. $\mathrm{Mark}(M, m) := s_{-1} c_2 b_{-1}$ である[36]。
            3. $(c_0, c_1) \in T_{\mathrm{B}}^{\mathrm{Marked}}$ でないならば[37]、$\mathrm{Mark}(M, m) := D_{M_{1,j_1}} 0$ である[38]。
        14. $m = j_1$ ならば $\mathrm{Mark}(M, m) := D_{M_{1,j_1}} 0$ である[39]。
4. M が簡約かつ複項とする。
    1. $J_1 := \mathrm{Lng}(P(M)) - 1$ と置く。
    2. $j_0 := j_1 - \mathrm{Lng}(P(M)_{J_1}) + 1$ と置く。
    3. $P(M)_{J_1} = ((0,0))$ とする。
        1. $\mathrm{Trans}(M) := \mathrm{Trans}((M_j)_{j=0}^{j_0-1}) + D_0 0$ である。
        2. $\mathrm{Mark}(M, m) := D_0 0$ である。
    4. $P(M)_{J_1} \neq ((0,0))$ とする。
        1. $\mathrm{Trans}(M) := \mathrm{Trans}((M_j)_{j=0}^{j_0-1}) + \mathrm{Trans}(P(M)_{J_1})$ である。
        2. $\mathrm{Mark}(M, m) := \mathrm{Mark}(P(M)_{J_1}, m - j_0)$ である[40]。
5. M が簡約でないとする。
    1. $\mathrm{Trans}(M) :=$ $\mathrm{Trans}(\mathrm{Red}(M))$ である。
    2. $\mathrm{Mark}(M, m) := \mathrm{Mark}(\mathrm{Red}(M), m)$ である[41]。

命題 (Trans の well-defined 性)
上の条件を全て満たす写像 Trans と Mark が一意に存在する。

---

[33] scb 分解の置換可能性より $s_1 c_2 b_1 \in T_{\mathrm{B}}$ である。
[34] $(0,m) \leq_M (0,j_1)$ かつ $m < j_1$ より $(0,m) \leq_M (0,j_1-1)$ であるので $(0,m) \leq_{\mathrm{Pred}(M)} (0,j_1-1)$ である。従って $(\mathrm{Pred}(M), m) \in T_{\mathrm{PS}}^{\mathrm{Marked}}$ である。
[35] この時 $t_1 = s_1 c_1 b_1$ かつ $t = s_0 c_0 b_0$ より $s_1 = s_0 s_{-1}$ かつ $b_1 = b_{-1} b_0$ である。
[36] $t_1 = s_0 c_0 b_0$ かつ $t_1 = s_1 c_1 b_1$ より $s_1 = s_0 s_{-1}$ かつ $b_1 = b_{-1} b_0$ であるので $\mathrm{Trans}(M) = s_0 \mathrm{Mark}(M, m) b_0$ である。従って $(\mathrm{Trans}(M), \mathrm{Mark}(M, m)) \in T_{\mathrm{B}}^{\mathrm{Marked}}$ である。
[37] 後で示す Mark が順序関係を保つことから、この分岐は生じないことが分かる。
[38] $\mathrm{Trans}(M)$ の定義から $(\mathrm{Trans}(M), \mathrm{Mark}(M, m)) \in T_{\mathrm{B}}^{\mathrm{Marked}}$ である。
[39] $\mathrm{Trans}(M)$ の定義から $(\mathrm{Trans}(M), \mathrm{Mark}(M, m)) \in T_{\mathrm{B}}^{\mathrm{Marked}}$ である。
[40] $(0,m) \leq_M (0,j_1)$ より $j_0 \leq m$ であり、$P(M)_{J_1} = (M_j)_{j=j_0}^{j_1}$ より $(0, m-j_0) \leq_{P(M)_{J_1}} (0, j_1 - j_0)$ である。従って $(P(M)_{J_1}, m - j_0) \in T_{\mathrm{PS}}^{\mathrm{Marked}}$ である。
[41] 直系先祖の Red 不変性より $(\mathrm{Red}(M), m) \in T_{\mathrm{PS}}^{\mathrm{Marked}}$ である。

命題 (2 列ペア数列の基本性質)
任意の $M \in RT_{\mathrm{PS}} \cap PT_{\mathrm{PS}}$ に対し、$\mathrm{Lng}(M) = 2$ ならば以下が成り立つ：

(1) $\mathrm{Trans}(M) = D_{M_{1,0}} D_{M_{1,1}} 0$ である。
(2) $(M,0),(M,1) \in T_{\mathrm{PS}}^{\mathrm{Marked}}$ である。
(3) $\mathrm{Mark}(M,0) = D_{M_{1,0}} D_{M_{1,1}} 0$ かつ $\mathrm{Mark}(M,1) = D_{M_{1,1}} 0$ である。

命題 (Trans の $(\mathbf{IncrFirst}, \mathbf{Red})$ 不変 $\boldsymbol{P}$ 同変性)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ に対し以下が成り立つ：

(1) $\mathrm{Trans}(M) = \mathrm{Trans}(\mathrm{Red}(M)) = \mathrm{Trans}(\mathrm{IncrFirst}(M))$ である。
(2) M が複項とする。$J_1 := \mathrm{Lng}(P(M))$ と置く。$J \leq J_1$ を満たす各 $J \in \mathbb{N}$ に対し、$P(M)_J$ が零項ならば $t_J := D_0 0$ と置き $P(M)_J$ が零項でないならば $t_J := \mathrm{Trans}(P(M)_J)$ と置く。この時 $\mathrm{Trans}(M) = \Sigma_{\mathrm{B}}(t_J)_{J=0}^{J_1}$ である。

命題 (Mark の $(\mathbf{IncrFirst}, \mathbf{Red}, \boldsymbol{P})$ 不変性)
任意の $(M,m) \in T_{\mathrm{PS}}^{\mathrm{Marked}}$ に対し以下が成り立つ：

(1) $\mathrm{Mark}(M,m) = \mathrm{Mark}(\mathrm{Red}(M),m) = \mathrm{Mark}(\mathrm{IncrFirst}(M),m)$ である。
(2) M が複項とする。$J_1 := \mathrm{Lng}(P(M))$ と置き、$j_0 := \mathrm{Lng}(M) - \mathrm{Lng}(P(M)_{J_1}) - 1$ と置く。$P(M)_{J_1}$ が零項ならば $\mathrm{Mark}(M,m) = D_0 0$ であり、$P(M)_{J_1}$ が零項でないならば $\mathrm{Mark}(M,m) = \mathrm{Mark}(P(M)_{J_1}, m - j_0)$ である。

命題 (Trans が零項性を保つこと)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ に対し、以下は同値である：

(1) M は零項である。
(2) $\mathrm{Trans}(M) = 0$ である。

命題 ($\boldsymbol{c_1}$ と $\boldsymbol{c_2}$ の大小関係)
任意の $M \in RT_{\mathrm{PS}} \cap PT_{\mathrm{PS}}$ に対し、Trans の再帰的定義中に導入した記号を用いると、$j_1 > 0$ かつ $t_1 \neq 0$ ならば、c_1 と c_2 は単項でありかつ $c_1 < c_2$ である。

命題 (Pred の Trans に関する降下性)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ に対し、$\mathrm{Lng}(M) > 1$ ならば $\mathrm{Trans}(\mathrm{Pred}(M)) < \mathrm{Trans}(M)$ である。

命題 (右端第 1 基点の Mark の基本性質)
任意の $(M, m) \in RT_{\mathrm{PS}}^{\mathrm{Marked}}$ に対し、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置くと以下は同値である：

(1) $m = j_1$ である。
(2) $\mathrm{Mark}(M, m) = D_{M_{1,m}} 0$ である。

系 (Mark の左端の基本性質)
任意の $(M, m) \in RT_{\mathrm{PS}}^{\mathrm{Marked}}$ に対し、$\mathrm{Mark}(M, m)$ の左端は $D_{M_{1,m}}$ である。

系 (条件 (II) か (IV) の下で $\boldsymbol{t_2}$ が 0 でないこと)
任意の $M \in RT_{\mathrm{PS}} \cap PT_{\mathrm{PS}}$ に対し、Trans の再帰的定義中に導入した記号を用いると、$t_1 \neq 0$ かつ M が条件 (II) か (IV) を満たすならば、$t_2 \neq 0$ である。

命題 (右端第 2 基点の Mark の基本性質)
$M \in RT_{\mathrm{PS}} \cap PT_{\mathrm{PS}}$ とし、Trans の再帰的定義中に導入した記号を用いると、$j_1 > 0$ かつ $t_1 \neq 0$ ならば、$\mathrm{Mark}(M, j_{-1}) = c_2$ である。

命題 (Trans の最左単項成分の左端の基本性質)
任意の $M \in RT_{\mathrm{PS}}$ に対し以下が成り立つ：

(1) $P(M)_0 = ((0,0))$ かつ $\mathrm{Lng}(P(M)) > 1$ ならば $\mathrm{Trans}(M)$ の最左単項成分の左端は $D_{M_{1,1}}$ である。
(2) $P(M)_0 \neq ((0,0))$ ならば $\mathrm{Trans}(M)$ の最左単項成分は $\mathrm{Trans}(P(M)_0)$ でありその左端は $D_{M_{1,0}}$ である。

(3) $(1,0) <^{\mathrm{Next}}_{M} (1,1)$ ならば $\mathrm{Trans}(M)$ の最左単項成分の左端 2 文字はある $u \in \mathbb{N}$ を用いて $D_{M_{1,0}} D_u$ と表せる。

命題 (Trans が単項性を保つこと)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ に対し、以下は同値である：

(1) M は単項である。
(2) $\mathrm{Trans}(M)$ は単項であるか、$P(M)_0$ が零項でありかつ $\mathrm{Lng}(P(M)) = 2$ である。

系 (Trans と非可算基数の関係)
任意の $M \in RT_{\mathrm{PS}}$ と $v \in \mathbb{N}$ に対し、以下は同値である：

(1) $\mathrm{Trans}(M) = D_v 0$ である。
(2) $v = 0$ かつ $M = ((0,0),(0,0))$ であるか、または $v > 0$ かつ $M = ((v,v))$ である。

系 (左端第 1 基点の Mark の基本性質)
任意の $M \in RT_{\mathrm{PS}} \cap PT_{\mathrm{PS}}$ に対し以下が成り立つ：

(1) $(M,0) \in T^{\mathrm{Marked}}_{\mathrm{PS}}$ である。
(2) 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し、$(M,m) \in T^{\mathrm{Marked}}_{\mathrm{PS}}$ ならば、$\mathrm{Mark}(M,m) = \mathrm{Trans}(M)$ である必要十分条件は $m = 0$ である。

系 (s_1 と b_1 の空性と基点の関係)
任意の $M \in RT_{\mathrm{PS}} \cap PT_{\mathrm{PS}}$ に対し、Trans の再帰的定義中に導入した記号を用いると、以下は同値である：

(1) $j_{-1} = 0$ である。
(2) $s_1 = ()$ かつ $c_1 = t_1$ かつ $b_1 = ()$ である。
(3) $s_1 = ()$ である。

命題 (Mark が順序関係を保つこと)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ と $m_0, m_1 \in \mathbb{N}$ に対し、$(M, m_0), (M, m_1) \in T_{\mathrm{PS}}^{\mathrm{Marked}}$ ならば以下は同値である：

(1) $m_0 < m_1$ である。
(2) $\mathrm{Mark}(M, m_1) \neq \mathrm{Mark}(M, m_0)$ かつ $(\mathrm{Mark}(M, m_1), \mathrm{Mark}(M, m_0)) \in T_{\mathrm{B}}^{\mathrm{Marked}}$ である。

系 ($\boldsymbol{s_{-1}}$ と $\boldsymbol{b_{-1}}$ の空性と基点の関係)
任意の $(M, m) \in T_{\mathrm{PS}}^{\mathrm{Marked}}$ に対し、M が簡約かつ単項ならば、Trans と Mark の再帰的定義中に導入した記号を用いると、以下が同値である：

(1) $m = j_{-1}$ である。
(2) $s_{-1} = ()$ かつ $b_{-1} = ()$ である。

命題 (Mark の Trans による表示)
任意の $(M, m) \in T_{\mathrm{PS}}^{\mathrm{Marked}}$ に対し、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置くと、$j_1 - m > 0$ ならば $\mathrm{Mark}(M, m) = \mathrm{Trans}((M_j)_{j=m}^{j_1})$ である。

6.4 許容的親子関係

$M \in T_{\mathrm{PS}}$ とする。$\mathbb{Z}^2$ 上の二項関係 $<_M^{\mathrm{NextAdm}}$ を以下のように定める：

1. $(i_0, j_0), (i_1, j_1) \in \mathbb{Z}^2$ に対し、$(i_0, j_0) <_M^{\mathrm{NextAdm}} (i_1, j_1)$ であるとは、以下を満たすということである：
   1. $(i_0, j_0) \leq_M (i_1, j_1)$ である。
   2. $j_0 < j_1$ である。
   3. j_0 は M 許容である。
   4. 任意の $j \in \mathbb{N}$ に対し、$j_0 < j < j_1$ ならば以下のいずれかを満たす：
      1. $(i_0, j) \leq_M (i_1, j_1)$ でない。
      2. j は非 M 許容である。

命題 ($\mathbf{Adm}_{\boldsymbol{M}}$ と $\boldsymbol{<_M^{\mathrm{NextAdm}}}$ の関係)
$M \in T_{\mathrm{PS}}$ とし、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置く。任意の $i \in \{0, 1\}$ に対し、$(i, j_0) <_M^{\mathrm{Next}} (i, j_1)$ を満たす一意な $j_0 \in \mathbb{N}$ が存在するならば。$j_{-1} := \mathrm{Adm}_M(j_0)$ と置くと $(i, j_{-1}) <_M^{\mathrm{NextAdm}} (i, j_1)$ である。

命題 (Trans と $<^{\mathrm{NextAdm}}_{M}$ の関係)
$M \in T_{\mathrm{PS}}$ とし、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置く。$(0, j_0) <^{\mathrm{NextAdm}}_{M} (0, j_1)$ を満たす一意な $j_0 \in \mathbb{N}$ が存在するならば、一意な $(s_0, b_0) \in (\Sigma^{<\omega})^2$ が存在し、以下を満たす：

(1) $(s_0, \mathrm{Mark}(\mathrm{Pred}(M), j_0), b_0)$ は $\mathrm{Trans}(\mathrm{Pred}(M))$ の scb 分解である。
(2) $(s_0, \mathrm{Mark}(M, j_0), b_0)$ は $\mathrm{Trans}(M)$ の scb 分解である。

系 (Mark と $<^{\mathrm{NextAdm}}_{M}$ の関係)
$M \in T_{\mathrm{PS}}$ とし、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置く。$(0, j_0) <^{\mathrm{NextAdm}}_{M} (0, j_1)$ を満たす一意な $j_0 \in \mathbb{N}$ が存在するとする。任意の $j \in \mathbb{N}$ に対し、$(0, j) \leq_M (0, j_0)$ ならば、一意な $(s_0, b_0) \in (\Sigma^{<\omega})^2$ が存在し、以下を満たす：

(1) $(s_0, \mathrm{Mark}(\mathrm{Pred}(M), j_0), b_0)$ は $\mathrm{Mark}(\mathrm{Pred}(M), j)$ の scb 分解である。
(2) $(s_0, \mathrm{Mark}(M, j_0), b_0)$ は $\mathrm{Mark}(M, j)$ の scb 分解である。

系 (Trans の Mark と Pred による表示)
任意の $(M, m) \in T^{\mathrm{Marked}}_{\mathrm{PS}}$ に対し、$m < \mathrm{Lng}(M) - 1$ ならば一意な $(s_0, b_0) \in (\Sigma^{<\omega})^2$ が存在し、以下を満たす：

(1) $(s_0, \mathrm{Mark}(\mathrm{Pred}(M), m), b_0)$ は $\mathrm{Trans}(\mathrm{Pred}(M))$ の scb 分解である。
(2) $(s_0, \mathrm{Mark}(M, m), b_0)$ は $\mathrm{Trans}(M)$ の scb 分解である。

系 (Trans の Mark と切片による表示)
任意の $(M, m) \in RT^{\mathrm{Marked}}_{\mathrm{PS}}$ に対し、$0 < m < \mathrm{Lng}(M) - 1$ ならば一意な $(s_0, b_0) \in (\Sigma^{<\omega})^2$ が存在し、以下を満たす：

(1) $(s_0, D_{M_{1,m}} 0, b_0)$ は $\mathrm{Trans}((M_j)_{j=0}^{m})$ の scb 分解である。
(2) $(s_0, \mathrm{Mark}(M, m), b_0)$ は $\mathrm{Trans}(M)$ の scb 分解である。

系 (RightNodes と Mark の関係)
任意の $(M, m) \in RT^{\mathrm{Marked}}_{\mathrm{PS}}$ に対し、$0 < m < \mathrm{Lng}(M) - 1$ ならば、ある $a_0, a_1 \in \mathbb{N}^{<\omega}$ が存在して以下を満たす：

(1) $\mathrm{RightNode}(\mathrm{Trans}(M)) = a_0 \oplus_{\mathbb{N}} (M_{1,m}) \oplus_{\mathbb{N}} a_1$ である。
(2) $\mathrm{RightNode}(\mathrm{Trans}((M_j)_{j=0}^{m})) = a_0 \oplus_{\mathbb{N}} (M_{1,m})$ である。
(3) $\mathrm{RightNode}(\mathrm{Mark}(M, m)) = (M_{1,m}) \oplus_{\mathbb{N}} a_1$ である。

写像

$$\begin{aligned} \mathrm{RightAnces} \colon T_{\mathrm{PS}} &\to \mathbb{N}^{<\omega} \\ M &\mapsto \mathrm{RightAnces}(M) \end{aligned}$$

を以下のように定義する：

1. Trans の再帰的定義中に導入した記号を用いる。
2. M が簡約かつ $j_1 = 0$ とする。
    1. $M_0 = (0,0)$ ならば $\mathrm{RightAnces}(M) := ()$ である。
    2. $M_0 \neq (0,0)$ ならば $\mathrm{RightAnces}(M) := (M_{1,0})$ である。
3. M が簡約かつ $j_1 > 0$ かつ単項とする。
    1. $\mathrm{Pred}(M)$ が零項ならば $\mathrm{RightAnces}(M) := (0, M_{1,j_1})$ である。
    2. $\mathrm{Pred}(M)$ が零項でないとする[42]。
        1. $(M_j)_{j=0}^{j-1}$ が零項ならば $a := (0)$ と置く。
        2. $(M_j)_{j=0}^{j-1}$ が零項でないならば $a := \mathrm{RightAnces}((M_j)_{j=0}^{j-1})$ と置く。
        3. M が条件 (I) か (III) か (V) か (VI) を満たすならば $\mathrm{RightAnces}(M) := a \oplus_{\mathbb{N}} (M_{1,j_1})$ である。
        4. M が条件 (II) か (IV) を満たすならば $\mathrm{RightAnces}(M) := a \oplus_{\mathbb{N}} (M_{1,j_0}, M_{1,j_1})$ である。
4. M が簡約かつ複項とする。
    1. $J_1 := \mathrm{Lng}(P(M)) - 1$ と置く。
    2. $P(M)_{J_1} = ((0,0))$ ならば $\mathrm{RightAnces}(M) := (0)$ である。
    3. $P(M)_{J_1} \neq ((0,0))$ ならば $\mathrm{RightAnces}(M) := \mathrm{RightAnces}(P(M)_{J_1})$ である。
5. M が簡約でないならば $\mathrm{RightAnces}(M) := \mathrm{RightAnces}(\mathrm{Red}(M))$ である。

命題 (RightNodes と RightAnces の関係)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ に対し、$\mathrm{RightAnces}(M) = \mathrm{RightNodes}(\mathrm{Trans}(M))$ である。

系 (非零項の RightAnces が非空であること)
任意の $M \in T_{\mathrm{PS}}$ に対し、以下は同値である：

(1) M は零項である。

[42] この時 Trans が零項性を保つことから $\mathrm{Trans}(\mathrm{Pred}(M)) \neq 0$ であるので、M に対して条件 (I)〜(VI) が意味を持つ。

(2) $\mathrm{RightAnces}(M) = ()$ である。

7 停止性

まずは単項な標準形ペア数列に対し条件 (I)〜(VI) のそれぞれの下での展開規則を調べ、それにより Buchholz の表記系における展開規則との比較を行い、標準形ペア数列に伴う計算可能関数の全域性（すなわち計算規則の停止性）を証明する。

7.1 条件 (I) の下での展開規則

命題 (条件 (I) の下での Trans と基本列の交換関係)
任意の $M \in RT_{\mathrm{PS}} \cap PT_{\mathrm{PS}}$ と $n \in \mathbb{N}_+$ に対し、Trans の再帰的定義中に導入した記号を用いると、$j_1 > 1$ かつ M が条件 (I) を満たすならば[43]、以下が成り立つ：

(1) $\mathrm{Trans}(M[n]) = \mathrm{Trans}(M)[n-1]$ である。
(2) $\mathrm{Trans}(M[n]) < \mathrm{Trans}(M)$ である。

条件 (I) の下での Trans と基本列の交換関係を証明するための準備としていくつかの補題を示す。

補題 (公差 $(1,1)$ のペア数列の Trans の基本性質)
任意の $u, v \in \mathbb{N}$ に対し、$u < v$ ならば $M = ((j,j))_{j=u}^{v}$ と置くと $\mathrm{Trans}(M) = D_u D_v 0$ である。

系 (Pred が公差 $(1,1)$ のペア数列の Trans の基本性質)
任意の $u, v, w, w' \in \mathbb{N}$ に対し、$u < v$ ならば $M := ((j,j))_{j=u}^{v} \oplus_{\mathbb{N}^2} (w', w)$ と置くと以下が成り立つ：

(1) $w' = v + 1$ かつ $u < w \leq v$ ならば $\mathrm{Trans}(M) = D_u D_v D_w 0$ である。
(2) $u < w' \leq v$ かつ $w = w'$ ならば $\mathrm{Trans}(M) = D_u \underline{(} D_v 0 \underline{,} D_w 0 \underline{)}$ である。
(3) $u + 1 < w' \leq v$ かつ $w < w'$ ならば $\mathrm{Trans}(M) = D_u \underline{(} D_v 0 \underline{,} D_{w'-1} \underline{(} D_v 0 \underline{,} D_w 0 \underline{))}$ である。
(4) $u + 1 = w'$ かつ $w < w'$ ならば $\mathrm{Trans}(M) = D_u \underline{(} D_v 0 \underline{,} D_w 0 \underline{)}$ である。

[43] $j_1 > 1$ より $t_1 \neq 0$ であるので M に対し条件 (I) が意味を持つ。

補題 (条件 (I) か (III) の下での c_1 前後の具体表示)
任意の $M \in RT_{\mathrm{PS}} \cap PT_{\mathrm{PS}}$ に対し、Trans の再帰的定義中に導入した記号を用いると、j_0 が M 許容かつ $j_1 > 1$ かつ $M_{1,j_0} \geq M_{1,j_1}$ ならば、以下が成り立つ：

(1) $t_1 \neq 0$ であり M は条件 (I) か (III) を満たし $\mathrm{Trans}((M_j)_{j=j_0}^{j_1-1}) = c_1 \in PT_{\mathrm{B}}$ である。

更に $(0,j'_0) <_M^{\mathrm{Next}} (0,j_0)$ を満たす一意な $j'_0 \in \mathbb{N}$ が存在するとし、$j'_{-1} := \mathrm{Adm}_M(j'_0)$ と置く。

(2) $j'_0 \leq j_1 - 2$ かつ $(\mathrm{Pred}(M), j'_{-1}) \in T_{\mathrm{PS}}^{\mathrm{Marked}}$ かつ $((M_j)_{j=j'_{-1}}^{j_1-1}, j_0 - j'_{-1}) \in T_{\mathrm{PS}}^{\mathrm{Marked}}$ である。
(3) $j'_0 + 1 = j_0$ ならば以下が成り立つ：
  (3-1) $j'_{-1} = j'_0$ または $M_{1,j'_0} + 1 = M_{1,j_0}$ ならば、$\mathrm{Mark}(\mathrm{Pred}(M), j'_{-1}) = D_{M_{1,j'_{-1}}} c_1$ である。
  (3-2) $j'_{-1} < j'_0$ かつ $M_{1,j'_0} \geq M_{1,j_0}$ ならば、$\mathrm{Mark}(\mathrm{Pred}(M), j'_{-1}) = D_{M_{1,j'_{-1}}} D_{M_{1,j'_0}} c_1$ である。
(4) $j'_0 + 1 < j_0$ ならば以下が成り立つ：
  (4-1) $j'_{-1} = j'_0$ または $M_{1,j'_0} + 1 = M_{1,j_0}$ ならば、一意な $t'_2 \in T_{\mathrm{B}}^2$ が存在して $\mathrm{Mark}(\mathrm{Pred}(M), j'_{-1}) = D_{M_{1,j'_{-1}}}(t'_2 + c_1)$ である。
  (4-2) $j'_{-1} < j'_0$ かつ $M_{1,j'_0} \geq M_{1,j_0}$ ならば、一意な $(t'_3, t'_4) \in T_{\mathrm{B}}^2$ が存在して $\mathrm{Mark}(\mathrm{Pred}(M), j'_{-1}) = D_{M_{1,j'_{-1}}}(t'_3 + D_{M_{1,j'_0}}(t'_4 + c_1))$ である。

更に任意の $n \in \mathbb{N}_+$ に対し、$n > 1$ とし、$N := (M[n]_j)_{j=0}^{j_0+(n-1)(j_1-j_0)}$ と置き Trans の再帰的定義中に導入した記号を N に対して定め N に対する適用であることを明示するために右肩に N を乗せて表記する。

(5) $(M[n], j_0 + (n-1)(j_1 - j_0)) \in T_{\mathrm{B}}^{\mathrm{Marked}}$ かつ $(0,j'_0) <_{M[n]}^{\mathrm{Next}} (0, j_0 + (n-1)(j_1 - j_0))$ であり、$j_1^N = j_0 + (n-1)(j_1 - j_0)$ かつ $j_0^N = j'_0$ かつ $j_{-1}^N = j'_{-1}$ かつ $t_1^N \neq 0$ であり、N は条件 (VI) を満たさない。

7.2 強単項性

条件 (II) の下での展開規則を調べるために、強単項性という概念を導入する。
$M \in \mathrm{T}_{\mathrm{PS}}$ とする。

1. M が強単項であるとは、M が簡約かつ単項かつ $\mathrm{Br}(M)$ が降順であるということである。
2. 強単項ペア数列全体のなす部分集合を $DT_{\mathrm{PS}} \subset T_{\mathrm{PS}}$ と置く。

命題 (標準形の直系先祖による切片の簡約化の強単項性)
任意の $M \in ST_{\mathrm{PS}}$ と $j'_0, j'_1 \in \mathbb{N}$ に対し、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置き、$j'_0 < j'_1 \leq j_1$ とし $M' := (M_j)_{j=j'_0}^{j'_1}$ と置くと、$(0,j'_0) \leq_M (0,j'_1)$ ならば $\mathrm{Red}(M')$ は強単項である。

写像

$$\begin{aligned} \mathrm{LastStep} \colon DT_{\mathrm{PS}} &\to \mathbb{N} \\ M &\mapsto \mathrm{LastStep}(M) \end{aligned}$$

を以下のように定める：

1. $J_1 := \mathrm{Lng}(\mathrm{Br}(M))$ と置く。
2. $J_1 = 0$ ならば $\mathrm{LastStep}(M) = 0$ である[44]。
3. $J_1 > 0$ とする[45]。
   1. $(\mathrm{Br}(M)_{J_1})_{0,0} = (\mathrm{Br}(M)_{J_1})_{1,0}$ ならば $\mathrm{LastStep}(M) = J_1$ である[46]。
   2. $(\mathrm{Br}(M)_{J_1})_{0,0} > (\mathrm{Br}(M)_{J_1})_{1,0}$ ならば $\mathrm{LastStep}(M) := \min\{J \in \mathbb{N} \mid (\mathrm{Br}(M)_{J_1})_{0,0} = (\mathrm{Br}(M)_J)_{0,0} > (\mathrm{Br}(M)_J)_{1,0}\}$ である[47]。

命題 (条件 (II) か (IV) の下での終切片と Trans の関係)
任意の $M \in DT_{\mathrm{PS}}$ に対し、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置き、$J_1 := \mathrm{Lng}(\mathrm{Br}(M)) - 1$ と置き、$J_1 \geq 0$ として $j'_0 := \mathrm{Joints}(M)_{J_1}$ と置き、 $j'_1 := \mathrm{FirstNodes}(M)_{J_1}$ と置き、$J_0 := \mathrm{LastStep}(M)$ と置き、$m_1 := \mathrm{FirstNodes}(M)_{J_0} - 1$ と置き、$N := (M_j)_{j=0}^{m_1}$ と置き、$N' := (M_j)_{j=j'_0}^{m_1}$ と置き[48]、$M' := (M_j)_{j=j'_0}^{j_1}$ と置くと、$0 < j'_0 < \mathrm{TrMax}(M)$ かつ $M_{0,j'_1} > M_{1,j'_1}$ ならば一意な $t_1, t_2 \in T_{\mathrm{B}}$ が存在して以下を満たす：

(1) $\mathrm{Trans}(N) = D_{M_{1,0}} t_1$ である。
(2) $\mathrm{Trans}(N') = D_{M_{1,j'_0}} t_1$ である。
(3) $\mathrm{Trans}(M') = D_{M_{1,j'_0}} (t_1 + t_2)$ かつ $t_2 \neq 0$ である。
(4) $\mathrm{Trans}(M) = D_{M_{1,0}} (t_1 + D_{M_{1,j'_0}} (t_1 + t_2))$ である。

条件 (II) か (IV) の下での終切片と Trans の関係を証明するための準備としていくつかの補題を示す。

補題 (強単項性の切片への遺伝性)
任意の $M \in DT_{\mathrm{PS}}$ と $j'_0, j'_1 \in \mathbb{N}$ に対し、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置き、$J_1 := \mathrm{Lng}(\mathrm{Br}(M)) - 1$ と置き、$j'_0 < j'_1 \leq j_1$ とし $M' := (M_j)_{j=j'_0}^{j'_1}$ と置くと、$j'_0 \leq \mathrm{Joints}(M)_{J_1}$ ならば M' は強単項である。

---

[44] この分岐は使わない。
[45] この時簡約性と係数の基本性質より $(\mathrm{Br}(M)_{J_1})_{0,0} \geq (\mathrm{Br}(M)_{J_1})_{1,0}$ である。
[46] この分岐は使わない
[47] $J = J_1$ が条件を満たすため min が存在する。
[48] $m_1 \geq \mathrm{TrMax}(M) \geq j'_0$ より $N' \in T_{\mathrm{PS}}$ である。

補題 (部分表現の単項成分と Pred の関係)
任意の $M \in RT_{\mathrm{PS}} \cap PT_{\mathrm{PS}}$ に対し、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置き、$J_1 := \mathrm{Lng}(\mathrm{Br}(M)) - 1$ と置き、$J_1 \geq 0$ として $j'_0 := \mathrm{Joints}(M)_{J_1}$ と置き、$j'_1 := \mathrm{FirstNodes}(M)_{J_1}$ と置くと、$j_1 > 1$ ならば以下のいずれかが成り立つ：

(1) $j'_1 = j_1$ であり、$\mathrm{TrMax}(M) = 0$ または $j'_0 < \mathrm{TrMax}(M)$ であり、$M_{0,j'_1} = M_{1,j'_1}$ または j'_0 が M 許容であり、一意な $t_1 \in T_{\mathrm{B}}$ が存在して $\mathrm{Trans}(\mathrm{Pred}(M)) = D_{M_{1,0}} t_1$ かつ $\mathrm{Trans}(M) = D_{M_{1,0}}(t_1 + D_{M_{1,j'_1}} 0)$ である。
(2) $j'_1 = j_1$ であり、$M_{0,j'_1} > M_{1,j'_1}$ かつ j'_0 が非 M 許容であり、一意な $(t_1, t_2) \in T_{\mathrm{B}}^2$ が存在して $\mathrm{Trans}(\mathrm{Pred}(M)) = D_{M_{1,0}} t_1$ かつ $\mathrm{Trans}(M) = D_{M_{1,0}}(t_1 + D_{M_{1,j'_0}} t_2)$ である。
(3) 一意な $(t_1, t_2, t_3) \in T_{\mathrm{B}}^2$ が存在して $\mathrm{Trans}(\mathrm{Pred}(M)) = D_{M_{1,0}}(t_1 + D_{M_{1,j'_1}} t_2)$ かつ $\mathrm{Trans}(M) = D_{M_{1,0}}(t_1 + D_{M_{1,j'_1}} t_3)$ である。
(4) 一意な $(t_1, t_2, t_3) \in T_{\mathrm{B}}^2$ が存在して $\mathrm{Trans}(\mathrm{Pred}(M)) = D_{M_{1,0}}(t_1 + D_{M_{1,j'_0}} t_2)$ かつ $\mathrm{Trans}(M) = D_{M_{1,0}}(t_1 + D_{M_{1,j'_0}} t_3)$ である。

補題 (強単項性の下での部分表現の単項成分の基本性質)
任意の $M \in DT_{\mathrm{PS}}$ に対し、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置き、$J_1 := \mathrm{Lng}(\mathrm{Br}(M)) - 1$ と置き、$J_1 \geq 0$ として $j'_0 := \mathrm{Joints}(M)_{J_1}$ と置き、$j'_1 := \mathrm{FirstNodes}(M)_{J_1}$ と置くと、一意な $t' \in T_{\mathrm{B}}$ が存在して以下を満たす：

(1) $\mathrm{Trans}(M) = D_{M_{1,0}} t'$ である。
(2) $j'_0 = 0$ または $M_{0,j'_1} = M_{1,j'_1}$ ならば、t' の各単項成分は $D_{M_{1,j'_1}} 0$ 以上である。
(3) $0 < j'_0 < \mathrm{TrMax}(M)$ かつ $M_{0,j'_1} > M_{1,j'_1}$ ならば、t' の各単項成分は $D_{M_{1,j'_0}} 0$ 以上である。
(4) $0 < j'_0 = \mathrm{TrMax}(M)$ ならば、t' の各単項成分は $D_{M_{1,\mathrm{TrMax}(M)}} 0$ 以上である。

補題 (条件 (V) の下での右端の親の基本性質)
任意の $M \in RT_{\mathrm{PS}} \cap PT_{\mathrm{PS}}$ と $m \in \mathbb{N}$ に対し、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置き、$J_1 := \mathrm{Lng}(\mathrm{Br}(M)) - 1$ と置き、$J_1 \geq 0$ として $j'_0 := \mathrm{Joints}(M)_{J_1}$ と置き、$j'_1 := \mathrm{FirstNodes}(M)_{J_1}$ と置き、$M' := (M_j)_{j=m}^{j_1}$ と置くと、「$m < j'_0$」または「$m = j'_0$ かつ $M_{0,j'_1} = M_{1,j'_1}$ かつ $\mathrm{Br}(M)$ が降順」ならば、一意な $j_0 \in \mathbb{N}$ が存在して以下を満たす：

(1) $(0, j_0) <_M^{\mathrm{Next}} (0, j_1)$ である。
(2) $j'_0 \leq j_0$ である。
(3) $m < j_0$ または $M_{0,j_1} = M_{1,j_1}$ である。
(4) $m = j_0$ ならば $j_0 < \mathrm{TrMax}(M)$ である。

補題 (条件 (V) の下での終切片と Trans の関係)
任意の $M \in RT_{\mathrm{PS}} \cap PT_{\mathrm{PS}}$ と $m \in \mathbb{N}$ に対し、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置き、$J_1 := \mathrm{Lng}(\mathrm{Br}(M)) - 1$ と置き、$J_1 \geq 0$ として $j'_0 := \mathrm{Joints}(M)_{J_1}$ と置き、$j'_1 := \mathrm{FirstNodes}(M)_{J_1}$ と置き、$M' := (M_j)_{j=m}^{j_1}$ と置くと、「$m < j'_0$」または「$m = j'_0$ かつ $M_{0,j'_1} = M_{1,j'_1}$ かつ $\mathrm{Br}(M)$ が降順」ならば、一意な $t_1 \in T_{\mathrm{B}}$ が存在して以下を満たす：

(1) $\mathrm{Trans}(M) = D_{M_{1,0}} t_1$ である。
(2) $\mathrm{Trans}(M') = D_{M_{1,m}} t_1$ である。

7.3 条件 (II) の下での展開規則

命題 (条件 (II) の下での Trans と基本列の交換関係)
任意の $M \in ST_{\mathrm{PS}} \cap PT_{\mathrm{PS}}$ と $n \in \mathbb{N}_+$ に対し、Trans の再帰的定義中に導入した記号を用い、$L := \mathrm{Red}((M_j)_{j=j_{-1}}^{j_1})$ と置くと、$j_1 > 1$ かつ M が条件 (II) を満たすならば[49]、$P(t_2)_{J_1}$ の左端が $D_{M_{1,j_0}}$ であるか否かに従って $m_n := n - 1$ または $m_n := n - 2$ と置くと、以下が成り立つ：

(1) $m_n = -1$ ならば $\mathrm{Trans}(M[n]) = s_1 D_{M_{1,j_{-1}}} t_2 b_1$ である。
(2) $m_n \geq 0$ ならば $\mathrm{Trans}(M[n]) = \mathrm{Trans}(M)[m_n]$ である。
(3) $\mathrm{Mark}(M[n], j_{-1}) = D_{M_{1,j_{-1}}}(t_3 + (D_{M_{1,j_0}} t_4) \times (m_n + 1))$ である。
(4) $\mathrm{Trans}(M[n]) < \mathrm{Trans}(M)$ である。

条件 (II) の下での Trans と基本列の交換関係を証明するための準備としていくつかの補題を示す。

補題 (第 0 種型基本列の基本不等式)
任意の $MinT_{\mathrm{PS}}$ と $n, r' \in \mathbb{N}_+$ と $q, q' \in \mathbb{N}$ に対し、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置くと、$(0, j_0) <_M^{\mathrm{Next}} (0, j_1)$ を満たす一意な $j_0 \in \mathbb{N}$ が存在し $M_{1,j_1} = 0$ かつ $q, q' \leq n - 1$ かつ $r' \in j_1 - j_0$ ならば、$M[n]_{0, j_0 + q(j_1 - j_0)} < M[n]_{0, q'(j_1 - j_0) + r'}$ である。

補題 (第 0 種型基本列の基本分岐規則)
任意の $M \in RT_{\mathrm{PS}}$ と $n \in \mathbb{N}_+$ と $q \in \mathbb{N}$ に対し、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置き、$(0, j_0) <_M^{\mathrm{Next}} (0, j_1)$ を満たす一意な $j_0 \in \mathbb{N}$ が存在するとし、$M_{1,j_1} = 0$ かつ $q \leq n - 1$ かつ j_0 が非 M 許容ならば、

[49] 標準形の簡約性から M は簡約であり、$j_1 > 1$ より $t_1 \neq 0$ であるので M に対し条件 (II) が意味を持つ。

$(0, j_0 - 1) <^{\mathrm{Next}}_{M[n]} (0, j_0 + q(j_1 - j_0))$ かつ $(1, j_0 - 1) <^{\mathrm{Next}}_{M[n]} (1, j_0 + q(j_1 - j_0))$ である。

補題 (第 0 種型基本列の基本基点関係)
任意の $M \in RT_{\mathrm{PS}}$ と $n \in \mathbb{N}_+$ に対し、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置き、$(0, j_0) <^{\mathrm{Next}}_M (0, j_1)$ を満たす一意な $j_0 \in \mathbb{N}$ が存在するとし $j_{-1} := \mathrm{Adm}_M(j_0)$ と置くと、$M_{1,j_1} = 0$ ならば以下が成り立つ：

(1) $n > 1$ ならば $(M[n], j_0 + (n-1)(j_1 - j_0)) \in RT^{\mathrm{Marked}}_{\mathrm{PS}}$ である。
(2) j_0 が非 M 許容ならば $(M[n], j_{-1}) \in RT^{\mathrm{Marked}}_{\mathrm{PS}}$ である。

7.4 条件 (III) か (IV) の下での展開規則

命題 (条件 (III) か (IV) の下での Trans と基本列の交換関係)
任意の $M \in ST_{\mathrm{PS}} \cap PT_{\mathrm{PS}}$ と $n \in \mathbb{N}_+$ に対し、Trans の再帰的定義中に導入した記号を用い、$(1, j_{-2}) <^{\mathrm{Next}}_M (1, j_1)$ を満たす一意な $j_{-2} \in \mathbb{N}$ が存在するとし $j_{-3} := \mathrm{Adm}_M(j_{-2})$ と置くと、$j_1 > 1$ かつ M が条件 (III) か (IV) を満たすならば[50]、以下が成り立つ：

(1) $\mathrm{Trans}(M[n]) \leq \mathrm{Trans}(M)[n-1]$ である。
(2) $\mathrm{Trans}(M[n]) < \mathrm{Trans}(M)$ である。
(3) $\mathrm{Trans}(M)[n-1] < \mathrm{Trans}(M[n+1])$ である。

条件 (III) か (IV) の下での Trans と基本列の交換関係を証明するための準備としていくつかの補題を示す。

補題 (右端の非許容直系先祖の基本性質)
任意の $M \in ST_{\mathrm{PS}} \cap PT_{\mathrm{PS}}$ と $m_0, m_1 \in \mathbb{N}$ に対し、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置き、$m_{-1} := \mathrm{Adm}_M(m_0)$ と置き、$N := (M_j)_{j=m_{-1}}^{j_1}$ と置き、$(0, m_0) <^{\mathrm{Next}}_M (0, m_1) \leq_M (0, j_1)$ として $N' := (M_j)_{j=m_0}^{j_1}$ と置き、$J_1 := \mathrm{Lng}(\mathrm{Br}(\mathrm{Red}(N))) - 1$ と置くと、$(1, m_1 - 1) <^{\mathrm{Next}}_M (1, m_1)$ でなくかつ m_0 が非 M 許容ならば、$J_1 \geq 0$ かつ $0 < m_0 - m_{-1} < \mathrm{TrMax}(\mathrm{Red}(N))$ かつ $m_0 - m_{-1} = \mathrm{Joints}(\mathrm{Red}(N))_{J_1}$ かつ $\mathrm{FirstNodes}(\mathrm{Red}(N))_{J_1} = m_1 - m_{-1}$ である。

[50] 標準形の簡約性から M は簡約であり、$j_1 > 1$ より $t_1 \neq 0$ であるので M に対し条件 (III) と (IV) が意味を持つ。

補題 (条件 (III)〜(V) の下での右端の置き換えと Trans の関係)

任意の $M \in ST_{\mathrm{PS}} \cap PT_{\mathrm{PS}}$ に対し、Trans の再帰的定義中に導入した記号を用い、$(1, j_{-2}) <_M^{\mathrm{Next}} (1, j_1)$ を満たす一意な $j_{-2} \in \mathbb{N}$ が存在するとして $N' := (M_j)_{j=j_{-2}}^{j_1}$ と置き、$L' := (M_j)_{j=j_{-2}}^{j_1-1} \oplus_{\mathbb{N}^2} ((M_{0,j_1}, M_{1,j_{-2}}))$ と置くと、$j_{-2} < j_1 - 1$ ならば一意な $(s, b) \in (\Sigma^{<\omega})^2$ が存在して以下を満たす：

(1) $(s, D_{M_{1,j_1}} 0, b)$ は $\mathrm{Trans}(N')$ の scb 分解である。

(2) $j_{-2} = j_0$ または j_0 が M 許容であるならば、$(s, D_{M_{1,j_{-2}}} 0, b)$ は $\mathrm{Trans}(L')$ の scb 分解である。

(3) $j_{-2} < j_0$ かつ j_0 が非 M 許容であるならば、$(s, D_{M_{1,j_0}} (t_2 + D_{M_{1,j_0}} 0), b)$ は $\mathrm{Trans}(L')$ の scb 分解である。

補題 (条件 (III)〜(VI) の下での展開規則の基本性質)

任意の $M \in ST_{\mathrm{PS}} \cap PT_{\mathrm{PS}}$ に対し、Trans の再帰的定義中に導入した記号を用い、$(1, j_{-2}) <_M^{\mathrm{Next}} (1, j_1)$ を満たす一意な $j_{-2} \in \mathbb{N}$ が存在するとし $N' := (M_j)_{j=j_{-2}}^{j_1}$ と置き、$L' := (M'_j)_{j=j_{-2}}^{j_1}$ と置き、各 $n \in \mathbb{N}_+$ に対し $L_n := M[n] \oplus_{\mathbb{N}^2} ((M_{0,j_{-2}} + n(M_{0,j_1} - M_{0,j_{-2}}), M_{1,j_{-2}}))$ と置くと[51]、$j_1 > 1$[52]ならば以下が成り立つ：

(1) M が条件 (III) か (IV) を満たすならば $j_{-2} < j_0$ であり、M が条件 (V) か (VI) を満たすならば $j_{-2} = j_0$ である。

(2) 任意の $n \in \mathbb{N}_+$ に対し、L_n は簡約かつ単項である。

(3) $\leq_M$ と $\leq_{L_1}$ の $(\{0,1\} \times \mathbb{N}) \setminus \{(1, j_1)\}$ への制限は一致する。

(4)「M が (VI) を満たすかまたは j_0 が M 許容である」ならば L_1 は条件 (I) か (III) を満たし、「M が (VI) を満たさずかつ j_0 が非 M 許容である」ならば L_1 は条件 (II) か (IV) を満たす[53]。

(5) 任意の $n \in \mathbb{N}_+$ に対し、$n > 1$ ならば一意な $(s', b') \in (\Sigma^{<\omega})^2$ が存在して以下を満たす：

(5-1) $(s', D_{M_{1,j_{-2}}} 0, b')$ は $\mathrm{Trans}(L_{n-1})$ の scb 分解である。

(5-2) $(s', \mathrm{Trans}(L'), b')$ は $\mathrm{Trans}(L_n)$ の scb 分解である。

(5-3) $(s', \mathrm{Trans}(\mathrm{Pred}(N')), b')$ は $\mathrm{Trans}(M[n])$ の scb 分解である。

補題 (条件 (III)〜(VI) の下での Trans と scb 分解の関係)

任意の $M \in RT_{\mathrm{PS}} \cap PT_{\mathrm{PS}}$ に対し、$j_1 := \mathrm{Lng}(M) - 1$ と置いて $j_1 > 1$ とし、Trans の再帰的定義中に導入した記号を用い、$(1, j_{-2}) <_M^{\mathrm{Next}} (1, j_1)$ を満たす一意な $j_{-2} \in \mathbb{N}$ が存在するとし、$j_{-3} := \mathrm{Adm}_M(j_{-2})$ と置き、$N := (M_j)_{j=j_{-3}}^{j_1}$ と置くと、一意な $(s', b') \in (\Sigma^{<\omega})^2$ が存在して $(s', \mathrm{Trans}(N), b')$ は $\mathrm{Trans}(M)$

[51] $(1, j_{-2}) <_M^{\mathrm{Next}} (1, j_1)$ より $(0, j_{-2}) \leq_M (0, j_1)$ なので $M_{0,j_1} - M_{0,j_{-2}} > 0$ であり、L_n の各成分は自然数となる。

[52] この時 $\mathrm{Pred}(M)$ が零項でないので M に対し条件 (I)〜(VI) が意味を持つ。

[53] この時 $\mathrm{Pred}(L_1) = \mathrm{Pred}(M)$ は零項でないので L_1 に対し条件 (I)〜(VI) が意味を持つ。

の第 1 種 scb 分解である。

補題 (条件 (III)〜(V) の下での切片の scb 分解)
任意の $M \in ST_{\mathrm{PS}} \cap PT_{\mathrm{PS}}$ と $n \in \mathbb{N}_+$ に対し、Trans の再帰的定義中に導入した記号を用い、$(1, j_{-2}) <_M^{\mathrm{Next}} (1, j_1)$ を満たす一意な $j_{-2} \in \mathbb{N}$ が存在するとし $N' := (M_j)_{j=j_{-2}}^{j_1}$ と置くと、M が条件 (VI) を満たさずかつ $\mathrm{Adm}_M(j_{-2}) = j_{-1}$ ならば、一意な $(s'_1, b'_1) \in (\Sigma^{<\omega})^2$ が存在して以下を満たす：

(1) $(D_{M_{1,j_{-1}}} s'_1, D_{M_{1,j_1}} 0, b'_1)$ は c_2 の scb 分解である。
(2) $(D_{M_{1,j_{-2}}} s'_1, D_{M_{1,j_1}} 0, b'_1)$ は $\mathrm{Trans}(N')$ の scb 分解である。
(3) $\mathrm{Trans}(\mathrm{Pred}(N')) = D_{M_{1,j_{-2}}} t_2$ である。

補題 (条件 (III)〜(V) の下での各種 scb 分解)
任意の $M \in ST_{\mathrm{PS}} \cap PT_{\mathrm{PS}}$ と $n \in \mathbb{N}_+$ に対し、Trans の再帰的定義中に導入した記号を用い、$(1, j_{-2}) <_M^{\mathrm{Next}} (1, j_1)$ を満たす一意な $j_{-2} \in \mathbb{N}$ が存在するとし $N' := (M_j)_{j=j_{-2}}^{j_1}$ と置き、$L' := (M_j)_{j=j_{-2}}^{j_1-1} \oplus_{\mathbb{N}^2} ((M_{0,j_1}, M_{1,j_{-2}}))$ と置き、$L_n := M[n] \oplus_{\mathbb{N}^2} ((M_{0,j_{-2}} + n(M_{0,j_1} - M_{0,j_{-2}}), M_{1,j_{-2}}))$ と置くと[54]、M が条件 (VI) を満たさずかつ「$j_{-2} < j_0$ または j_0 が M 許容」かつ $\mathrm{Adm}_M(j_{-2}) = j_{-1}$ ならば、一意な $(s'_1, b'_1) \in (\Sigma^{<\omega})^2$ が存在して以下を満たす：

(1) $(D_{M_{1,j_{-1}}} s'_1, D_{M_{1,j_1}} 0, b'_1)$ は c_2 の scb 分解である。
(2) $(D_{M_{1,j_{-2}}} s'_1, D_{M_{1,j_1}} 0, b'_1)$ と $(D_{M_{1,j_{-2}}} s'_1, D_{M_{1,j_{-2}}} 0, b'_1)$ はそれぞれ $\mathrm{Trans}(N')$ と $\mathrm{Trans}(L')$ の scb 分解である。
(3) $\mathrm{Trans}(\mathrm{Pred}(N')) = D_{M_{1,j_{-2}}} t_2$ である。
(4) $\mathrm{Trans}(L_n) = s_1 D_{M_{1,j_{-1}}} (s'_1 D_{M_{1,j_{-2}}})^n 0 (b'_1)^n b_1$ である。
(5) $\mathrm{Trans}(M[n]) = s_1 D_{M_{1,j_{-1}}} (s'_1 D_{M_{1,j_{-2}}})^{n-1} t_2 (b'_1)^{n-1} b_1$ である。

補題 (条件 (III) か (IV) の下での各種 scb 分解)
任意の $M \in ST_{\mathrm{PS}} \cap PT_{\mathrm{PS}}$ と $n \in \mathbb{N}_+$ に対し、Trans の再帰的定義中に導入した記号を用い、$(1, j_{-2}) <_M^{\mathrm{Next}} (1, j_1)$ を満たす一意な $j_{-2} \in \mathbb{N}$ が存在するとし $j_{-3} := \mathrm{Adm}_M(j_{-2})$ と置き、$N := (M_j)_{j=j_{-3}}^{j_1}$ と置き、$N' := (M_j)_{j=j_{-2}}^{j_1}$ と置き、$L' := (M_j)_{j=j_{-2}}^{j_1-1} \oplus_{\mathbb{N}^2} ((M_{0,j_1}, M_{1,j_{-2}}))$ と置き、$L_n := M[n] \oplus_{\mathbb{N}^2} ((M_{0,j_{-2}} + n(M_{0,j_1} - M_{0,j_{-2}}), M_{1,j_{-2}}))$ と置くと[55]、$j_1 > 1$ かつ M が条件 (III)

[54] $(1, j_{-2}) <_M^{\mathrm{Next}} (1, j_1)$ より $(0, j_{-2}) \leq_M (0, j_1)$ なので $M_{0,j_1} - M_{0,j_{-2}} > 0$ であり、L_n の各成分は自然数となる。

か (IV) を満たし[56]かつ $j_{-3} < j_{-1}$ ならば、一意な $(s'_0, s'_1, s'_2, b'_2, b'_1, b'_0) \in (\Sigma^{<\omega})^6$ が存在して以下を満たす：

(1) $(s'_0, \mathrm{Trans}(N), b'_0)$ は $\mathrm{Trans}(M)$ の scb 分解である。
(2) $(D_{M_{1,j_{-3}}} s'_1, c_1, b'_1)$ と $(D_{M_{1,j_{-3}}} s'_1, c_2, b'_1)$ はそれぞれ $\mathrm{Trans}(\mathrm{Pred}(N))$ と $\mathrm{Trans}(N)$ の scb 分解である。
(3) $(s'_2, D_{M_{1,j_1}} 0, b'_2)$ は c_2 の scb 分解である。
(4) $(D_{M_{1,j_{-2}}} s'_1, c_1, b'_1)$ と $(D_{M_{1,j_{-2}}} s'_1, c_2, b'_1)$ と $(D_{M_{1,j_{-2}}} s'_1 s'_2, D_{M_{1,j_{-2}}} 0, b'_2 b'_1)$ はそれぞれ $\mathrm{Trans}(\mathrm{Pred}(N'))$ と $\mathrm{Trans}(N')$ と $\mathrm{Trans}(L')$ の scb 分解である。
(5) $\mathrm{Trans}(L_n) = s'_0 D_{M_{1,j_{-3}}} (s'_1 s'_2 D_{M_{1,j_{-2}}})^n 0 (b'_2 b'_1)^n b'_0$ である。
(6) $\mathrm{Trans}(M[n]) = s'_0 D_{M_{1,j_{-3}}} (s'_1 s'_2 D_{M_{1,j_{-2}}})^{n-1} s'_1 c_1 b'_1 (b'_2 b'_1)^{n-1} b'_0$ である。

補題 (条件 (III) か (IV) の下での基本列の基本性質)
任意の $M \in ST_{\mathrm{PS}} \cap PT_{\mathrm{PS}}$ と $n \in \mathbb{N}_+$ に対し、Trans の再帰的定義中に導入した記号を用い、$(1, j_{-2}) <^{\mathrm{Next}}_M (1, j_1)$ を満たす一意な $j_{-2} \in \mathbb{N}$ が存在するとすると、$j_1 > 1$ かつ M が条件 (III) か (IV) を満たすならば[57]、以下が成り立つ：

(1) $M[n] = M[n+1][1]^{j_1 - j_{-2}}$ である。
(2) $\mathrm{Trans}(M)[n-1] = \mathrm{Trans}(M[n+1][1]^{j_1 - 1 - j_{-2}})$ である。
(3) ある $(s', c'_1, c'_2, b') \in (\Sigma^{<\omega})^4$ が存在し、以下を満たす；
  (3-1) c'_1 と c'_2 は $c'_1 < c'_2$ を満たす単項である。
  (3-2) (s', c'_1, b') は $\mathrm{Trans}(M[n])$ の scb 分解である。
  (3-2) (s', c'_2, b') は $\mathrm{Trans}(M)[n]$ の scb 分解である。

7.5 条件 (V) の下での展開規則

命題 (条件 (V) の下での Trans と基本列の交換関係)
任意の $M \in ST_{\mathrm{PS}} \cap PT_{\mathrm{PS}}$ と $n \in \mathbb{N}_+$ に対し、Trans の再帰的定義中に導入した記号を用い、j_0 が M 許容ならば $m_n := n - 1$ と置き、j_0 が非 M 許容ならば $m_n := n$ と置くと、$j_1 > 1$ かつ M が条件 (V) を満たすならば[58]、以下が成り立つ：

(1) $\mathrm{Trans}(M[n]) \leq \mathrm{Trans}(M)[m_n]$ である。

[55] $(1, j_{-2}) <^{\mathrm{Next}}_M (1, j_1)$ より $(0, j_{-2}) \leq_M (0, j_1)$ なので $M_{0,j_1} - M_{0,j_{-2}} > 0$ であり、L_n の各成分は自然数となる。
[56] 標準形の簡約性から M は簡約であり、$j_1 > 1$ より $t_1 \neq 0$ であるので M に対し条件 (III) と (IV) が意味を持つ。
[57] 標準形の簡約性から M は簡約であり、$j_1 > 1$ より $t_1 \neq 0$ であるので M に対し条件 (III) と (IV) が意味を持つ。

(2) $\mathrm{Trans}(M[n]) < \mathrm{Trans}(M)$ である。
(3) $\mathrm{Trans}(M)[m_n] \leq \mathrm{Trans}(M[n+1])$ である。

条件 (V) の下での Trans と基本列の交換関係を証明するための準備としていくつかの補題を示す。

補題 (条件 (V) の下での Joints と FirstNodes と t_2 の基本性質)
任意の $M \in ST_{\mathrm{PS}} \cap PT_{\mathrm{PS}}$ に対し、Trans の再帰的定義中に導入した記号を用い、$N := (M_j)_{j=j_{-1}}^{j_1}$ と置き、$J_1 := \mathrm{Lng}(\mathrm{Br}(\mathrm{Red}(N))) - 1$ と置くと、$(1, j_0) <_M^{\mathrm{Next}} (1, j_1)$ かつ j_0 が非 M 許容でありかつ $j_0 < j_1 - 1$ ならば以下が成り立つ：

(1) $J_1 \geq 0$ かつ $j_0 - j_{-1} = \mathrm{Joints}(\mathrm{Red}(N))_{J_1}$ かつ $\mathrm{FirstNodes}(\mathrm{Red}(N))_{J_1} = j_1 - j_{-1}$ である。
(2) $\mathrm{Red}(N)_{0,j_1-j_{-1}} = \mathrm{Red}(N)_{1,j_1-j_{-1}}$ である。
(3) t_2 の各単項成分は $D_{M_{1,j_1}}0$ 以上である。

補題 (条件 (V) の下での各種 scb 分解)
任意の $M \in ST_{\mathrm{PS}} \cap PT_{\mathrm{PS}}$ と $n \in \mathbb{N}_+$ に対し、Trans の再帰的定義中に導入した記号を用い、$N' := (M_j)_{j=j_0}^{j_1}$ と置き、$L' := (M_j)_{j=j_0}^{j_1-1} \oplus_{\mathbb{N}^2} ((M_{0,j_1}, M_{1,j_0}))$ と置き、$L_n := M[n] \oplus_{\mathbb{N}^2} ((M_{0,j_0} + n(M_{0,j_1} - M_{0,j_0}), M_{1,j_0}))$ と置くと[59]、$j_1 > 1$ かつ M が条件 (V) を満たし[60]かつ j_0 が非 M 許容であるならば、一意な $(s'_1, b'_1) \in (\Sigma^{<\omega})^2$ が存在して以下を満たす：

(1) $(D_{M_{1,j_{-1}}} s'_1, D_{M_{1,j_1}} 0, b'_1)$ は c_2 の scb 分解である。
(2) $(D_{M_{1,j_0}} s'_1, D_{M_{1,j_1}} 0, b'_1)$ と $(D_{M_{1,j_0}} s'_1, D_{M_{1,j_0}} 0, b'_1)$ はそれぞれ $\mathrm{Trans}(N')$ と $\mathrm{Trans}(L')$ の scb 分解である。
(3) $\mathrm{Trans}(\mathrm{Pred}(N')) = D_{M_{1,j_0}} t_2$ である。
(4) $\mathrm{Trans}(L_n) = s_1 D_{M_{1,j_{-1}}} (s'_1 D_{M_{1,j_0}})^{n+1} 0 (b'_1)^{n+1} b_1$ である。
(5) $\mathrm{Trans}(M[n]) = s_1 D_{M_{1,j_{-1}}} (s'_1 D_{M_{1,j_0}})^n t_2 (b'_1)^n b_1$ である。

補題 (条件 (V) の下での基本列の scb 分解)
任意の $M \in ST_{\mathrm{PS}} \cap PT_{\mathrm{PS}}$ と $n \in \mathbb{N}_+$ に対し、Trans の再帰的定義中に導入した記号を用い、j_0 が M 許容ならば $m_n := n - 1$ と置き、j_0 が非 M 許容ならば $m_n := n$ と置くと、$j_1 > 1$ かつ M が条件 (V)

[58] 標準形の簡約性から M は簡約であり、$j_1 > 1$ より $t_1 \neq 0$ であるので M に対し条件 (V) が意味を持つ。
[59] $(0, j_0) <_M^{\mathrm{Next}} (0, j_1)$ より $(0, j_0) \leq_M (0, j_1)$ なので $M_{0,j_1} - M_{0,j_0} > 0$ であり、L_n の各成分は自然数となる。
[60] 標準形の簡約性から M は簡約であり、$j_1 > 1$ より $t_1 \neq 0$ であるので M に対し条件 (V) が意味を持つ。

を満たすならば[61]、一意な $u \in \mathbb{N}$ と $(s'_0, b'_0) \in (\Sigma^{<\omega})^2$ と $t' \in T_{\mathrm{B}}$ が存在して以下を満たす：

(1) $(s'_0, D_u t_2, b'_0)$ は $\mathrm{Trans}(M[n])$ の scb 分解である。
(2) $(s'_0, D_u(t_2 + D_{M_{1,j_0}} 0), b'_0)$ は $\mathrm{Trans}(M)[m_n]$ の scb 分解である。
(3) $(s'_0, D_u(t_2 + D_{M_{1,j_0}} t'), b'_0)$ は $\mathrm{Trans}(M[n+1])$ の scb 分解である。

7.6 条件 (VI) の下での展開規則

命題 (条件 (VI) の下での Trans と基本列の交換関係)
任意の $M \in ST_{\mathrm{PS}} \cap PT_{\mathrm{PS}}$ と $n \in \mathbb{N}_+$ に対し、Trans の再帰的定義中に導入した記号を用い、j_0 が M 許容ならば $m_n := n-2$ と置き、j_0 が非 M 許容ならば $m_n := n-1$ と置くと、$j_1 > 1$ かつ M が条件 (VI) を満たすならば[62]、以下が成り立つ：

(1) $m_n = -1$ ならば、ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して $1 < k \leq M_{1,j_1} + 1$ かつ $\mathrm{Trans}(M[n]) = \mathrm{Trans}(M)[0]^k$ である。
(2) $m_n \geq 0$ ならば、$\mathrm{Trans}(M[n]) = \mathrm{Trans}(M)[m_n]$ である。
(3) $\mathrm{Trans}(M[n]) < \mathrm{Trans}(M)$ である。

条件 (VI) の下での Trans と基本列の交換関係を証明するための準備としていくつかの補題を示す。

補題 (公差 $(1,0)$ のペア数列の Trans の基本性質)
任意の $u, m, j_1 \in \mathbb{N}$ に対し、$M := ((m+j, u))_{j=0}^{j_1} \in T_{\mathrm{PS}}$ と置くと

$$\mathrm{Trans}(M) = \begin{cases} 0 & (j_1 = 0 \wedge u = 0) \\ D_u^{j_1+1} 0 & (j_1 > 0 \vee u > 0) \end{cases}$$

となる。

補題 (公差 $(1,1)$ のペア数列の Trans の展開規則)
任意の $u, j_1 \in \mathbb{N}$ と $n \in \mathbb{N}_+$ に対し、$M := ((u+j, u+j))_{j=0}^{j_1} \in T_{\mathrm{PS}}$ と置くと、$j_1 > 1$ ならば $\mathrm{Trans}(M[n]) = D_u D_{u+j_1-1}^n 0$ である。

[61] 標準形の簡約性から M は簡約であり、$j_1 > 1$ より $t_1 \neq 0$ であるので M に対し条件 (V) が意味を持つ。
[62] 標準形の簡約性から M は簡約であり、$j_1 > 1$ より $t_1 \neq 0$ であるので M に対し条件 (VI) が意味を持つ。

補題 (順序数項の末尾単項の零化可能性)
任意の $t, t' \in T_{\mathrm{B}}$ と $s, b \in \Sigma^{<\omega}$ と $u, v \in \mathbb{N}$ に対し、$(s, D_u(t' + D_v 0), b)$ が t の scb 分解であるならば、ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して $0 < k \leq v + 1$ かつ $(s, D_u t', b)$ が $t[0]^k$ の scb 分解である。となる。

7.7 主結果

定理 (標準形ペア数列システムの停止性)
$ST_{\mathrm{PS}} \times \mathbb{N}_+ \subset \mathrm{Dom}(F)$ である。

標準形ペア数列システムの停止性を証明するための準備としていくつかの補題を示す。

補題 (公差 $(0,0)$ のペア数列の Trans の基本性質)
任意の $u, j_1 \in \mathbb{N}$ に対し、$M := ((u,u))_{j=0}^{j_1}$ と置くと、

$$\mathrm{Trans}(M) = \begin{cases} (D_0 0) \times j_1 & (u = 0) \\ (D_u 0) \times (j_1 + 1) & (u > 0) \end{cases}$$

である。

補題 (基本列の降下性)
任意の $M \in ST_{\mathrm{PS}}$ と $n \in \mathbb{N}_+$ に対し、$\mathrm{Lng}(M) > 1$ ならば $\mathrm{Trans}(M[n]) < \mathrm{Trans}(M)$ である。

以下、[Buc1] における OT と T_{B} の共通部分を OT_{B} と置く。

補題 (順序数項の再帰構造)
任意の $t \in OT_{\mathrm{B}}$ と $c \in T_{\mathrm{B}}$ と $s, b \in \Sigma^{<\omega}$ に対し、(s, c, b) が t の scb 分解であるならば、c は順序数項である。となる。

補題 (順序数項の共終数の遺伝性)
任意の $t, t' \in T_{\mathrm{B}}$ と $s, b \in \Sigma^{<\omega}$ に対し、$\mathrm{dom}(t') = \mathbb{N}$ かつ (s, t', b) が t の scb 分解であるならば、

$\mathrm{dom}(t) = \mathbb{N}$ である。となる。

補題 (順序数項の末尾項の零化可能性)
任意の $t \in OT_{\mathrm{B}}$ と $t' \in T_{\mathrm{B}}$ と $s, b \in \Sigma^{<\omega}$ と $u \in \mathbb{N}$ に対し、$(s, D_u t', b)$ が t の scb 分解であるならば、ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して $(s, D_u 0, b)$ が $t[0]^k$ の scb 分解である。となる。

補題 (Pred と [0] の関係)
任意の $M \in RT_{\mathrm{PS}} \cap PT_{\mathrm{B}}$ に対し、Trans の再帰的定義中に導入した記号を用いると、$j_1 > 1$ かつ M が条件 (VI) を満たさず[63]かつ $\mathrm{Trans}(M)$ が順序数項であるならば、ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して $\mathrm{Trans}(M)[0]^k = t_1$ である。

補題 (順序数項の基本例)
(1) 任意の $u \in \mathbb{N}$ に対し、$D_u 0 \in OT_{\mathrm{B}}$ である。
(2) 任意の $u, v \in \mathbb{N}$ に対し、$D_u D_v 0 \in OT_{\mathrm{B}}$ である。
(3) 任意の $u \in \mathbb{N}$ と $n \in \mathbb{N}_+$ に対し、$(D_u 0) \times (n-1) \in OT_{\mathrm{B}}$ である。
(4) 任意の $u \in \mathbb{N}$ と $n \in \mathbb{N}$ に対し、$D_u^n 0 \in OT_{\mathrm{B}}$ である。

補題 (Trans が標準形を保つこと)
任意の $M \in ST_{\mathrm{PS}}$ に対し、$\mathrm{Trans}(M) \in OT_{\mathrm{B}}$ である。

[63] $j_1 > 1$ より $t_1 \neq 0$ であるので M に対し条件 (VI) が意味を持つ。