

# Metody czynnikowe

Maciej Nasiński, Paweł Strawiński, Dorota Celińska-Kopczyńska

Uniwersytet Warszawski

10 grudnia 2022

- 1 Wprowadzenie
- 2 Ogólna charakterystyka
  - Obszar zastosowań
  - Podział metod czynnikowych
- 3 Klasyczna analiza czynnikowa
  - Formalny zapis modelu i metody estymacji
  - Rotacja czynników
  - Wybór optymalnej liczby czynników
  - Interpretacja i ocena jakości
- 4 Analiza składowych głównych – PCA
  - Ogólna charakterystyka
  - Metoda
- 5 Porównanie FA i PCA

# Wprowadzenie

- Metody czynnikowe stanowią zbiór metod i procedur statystycznych pozwalających na redukcję dużej liczby zmiennych do kilku wzajemnie nieskorelowanych czynników.
- Za ich pomocą można zachować stosunkowo dużą część informacji zawartych w zmiennych pierwotnych.
- Jednocześnie każda z tych metod niesie inne treści merytoryczne.

# Cele

- **Redukcja liczby zmiennych** bez istotnej straty zawartych w nich informacji
- **Transformacja** układu zmiennych w nowy układ czynników głównych
- **Tworzenie skal i miar** z kilku zmiennych
- **Ustalanie wag** określających znaczenie, jakie należy przypisać poszczególnym zmiennym podczas analizy
- **Ortogonalizacja przestrzeni**, w której rozpatrywane są obiekty będące przedmiotem analizy
- **Wykrywanie ukrytych związków** między zmiennymi
- **Opis zjawisk** za pomocą nowych kategorii zdefiniowanych przez czynniki

# Przykłady zastosowań

- Kiedy interesuje nas **eksploracja** i rozpoznanie struktury zbioru danych.
- Gdy nie posiadamy modelu „głębokiej” **struktury czynników** wyjaśniających związki między danymi.
- Gdy potrzebujemy **zredukować zbiór zmiennych** skorelowanych ze sobą do wykorzystania ich w postaci zagregowanej w późniejszych etapach analizy.
- Gdy chcemy stworzyć **skalę, indeks, miernik** ukrytego zjawiska i jednoznacznie wyliczyć jego wartość.

## Przykładowe pytania i zagadnienia badawcze

- Stworzenie indeksu kapitału społecznego (FA)
- Wypowiedzenie się na temat postawy respondentów w oparciu o wiele stwierdzeń dotyczących jednego zagadnienia (np. zadowolenia ze spędzania czasu wolnego) (FA lub PCA)
- Stworzenie agregatowej zmiennej z wartości pomiarów potrzebnej do dalszej analizy (PCA)
- Stworzenie zmiennej opisującej objawy depresji, do wykorzystania w regresji liniowej, celem uniknięcia silnego skorelowania zmiennych (PCA)

# Dwa modele metod czynnikowych

- Model **klasyczny**, w którym wariancję całkowitą zmiennych dzieli się na wariancję wspólną i wariancję specyficzną (klasyczna analiza czynnikowa).
- Model **komponentowy**, w którym nie uwzględnia się struktury wariancji (metoda składowych głównych).

# Ogólna charakterystyka metody

- Klasyczna analiza czynnikowa (*factor analysis* (FA) służy do znajdowania ukrytych czynników, które określają związki pomiędzy zmiennymi pierwotnymi (obserwowalnymi).
- Zbiór zmiennych pierwotnych dzieli się na podzbiory, które są silnie determinowane przez określoną grupę czynników (ukrytych) a słabiej przez pozostałe.
- Jest to metoda modelowania liniowego – zakłada się, że zmienne można przedstawić za pomocą liniowej funkcji zmiennych ukrytych (czynników)
- Nie ma podziału na zmienne objaśniające i objaśniane.



# Obszar zastosowania analizy czynnikowej

## 1 Analiza wyjaśniająca (eksploracyjna)

- Czynniki są opisywane przez grupowanie w zbiory zmiennych najsilniej ze sobą skorelowanych;
- Technika ma za zadanie wykryć zależności pomiędzy zmiennymi pierwotnymi, a zmiennymi ukrytymi bez wstępnych założeń dotyczących kierunku tych powiązań;

## 2 Analiza potwierdzająca

- Za jej pomocą potwierdzamy hipotezy badawcze o występowaniu pewnych nieobserwowalnych zjawisk
- Technika ta testuje określoną strukturę czynników, w której zmienne pierwotne zależą od domniemanych lub znanych badaczowi zmiennych ukrytych

# Zależność funkcyjna

$$X_i = f(F_1, F_2, \dots, F_p) + \varepsilon_i$$

- $p$  – liczba zmiennych ukrytych
- $k$  – liczba zmiennych pierwotnych
- $X_i$  – zmienna wyjściowa, o której zakłada się, że ma rozkład normalny ( $i = 1, \dots, k$ )
- $F_j$  – zmienna ukryta, czynnik  $j = 1, 2, \dots, p$ , gdzie  $p \leq k$
- $\varepsilon_i$  – czynnik losowy, zakłada się, że jest to zmienna losowa o rozkładzie normalnym.

## Zależność funkcyjna cd.

$$X_i = \lambda_{i1}f_1 + \lambda_{i2}f_2 + \cdots + \lambda_{ip}f_p + \varepsilon_i$$

$$X = \Lambda f + \varepsilon$$

- $\lambda_i$  – waga stojąca przy  $j$ -tej zmiennej ukrytej dla  $i$ -tej zmiennej pierwotnej, inaczej ładunek czynnikowy

## Założenia dotyczące wariancji

$$\sigma_i = \lambda_{i1}^2 + \lambda_{i2}^2 + \cdots + \lambda_{ip}^2 + \varphi = \sum_{j=1}^p \lambda_{ij}^2 + \varphi$$

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \lambda_{i1}\lambda_{j1} + \cdots + \lambda_{ip}\lambda_{jp}$$

$$\Sigma = \Lambda\Lambda' + \Phi$$

- $\sigma_i$  – wariancja zmiennej wyjściowej  $X_i$
- $\sum_{j=1}^p \lambda_{ij}^2$  – zmienność wspólna zmiennej wyjściowej  $X_i$
- $\varphi$  – zmienność swoista zmiennej wyjściowej  $X_i$
- $\Sigma$  – macierz kowariancji,  $\Phi$  to macierz z wartościami swoistymi na przekątnej (estymowana za pomocą macierzy kowariancji lub korelacji z próby)

## Założenia dodatkowe

- Czynniki wspólne nie są skorelowane ze sobą
- Czynniki swoiste (inaczej specyficzne) nie są skorelowane ze sobą
- Czynniki wspólne i swoiste nie są ze sobą skorelowane
- Czynniki wspólne są zestandaryzowane:  $E(F_j) = 0$  i  $Var(F_j) = 1$

# Algorytm

- Szukamy oszacowań ładunków dla czynników oraz dla części wspólnej wariancji
- Po określeniu rozwiązania początkowego w następnym kroku można dokonać rotacji czynników w celu łatwiejszej interpretacji
- Rozwiązujemy względem  $\hat{\Lambda}$  i  $\hat{\Phi}$  ograniczenie:

$$S = \hat{\Lambda}\hat{\Lambda}' + \hat{\Phi}$$

# Metoda osi głównych

- Metodę osi głównych stosuje się przy wyznaczaniu współczynników głównych składowych
- Jedyna różnica, w stosunku do procedury stosowanej w analizie głównych składowych, polega na wykorzystaniu zredukowanej macierzy korelacji zamiast pełnej macierzy korelacji
- Na głównej przekątnej zredukowanej macierzy korelacji zamiast jedynek znajdują się wartości zasobów zmienności wspólnej kolejnych zmiennych pierwotnych

# Metoda centroidalna

- Opiera się na geometrycznym podejściu do analizy czynnikowej
- Kolumny macierzy danych wejściowych można interpretować jako konfigurację  $m$  wektorów zmiennych w  $n$  wymiarowej przestrzeni euklidesowej  $R_n$ . Wzajemny układ wektorów, reprezentujących zmienne, określa korelacje pomiędzy zmiennymi, tzn. cosinusy kątów między wektorami są równe współczynnikom korelacji pomiędzy zmiennymi
- Zakłada się, że osie poszczególnych czynników przechodzą przez środki ciężkości (centroidy) konfiguracji wektorów
- Kolejne czynniki wyjaśniają maksymalną część zmienności wspólnej zmiennych pierwotnych
- Wartości ładunków czynnikowych to współrzędne punktów reprezentujących zmienne w nowym, ortogonalnym układzie odniesienia



# Metoda największej wiarygodności

- W przeciwieństwie do innych metod, tutaj określamy liczbę czynników wspólnych, którą chcemy uzyskać **przed przystąpieniem do analizy**
- Założenie: dane wejściowe, zmienne wyjściowe, składnik losowy oraz funkcje zmiennych ukrytych pochodzą z próby o wielowymiarowym rozkładzie normalnym
- Postać funkcji wiarygodności:

$$L = -\frac{1}{2}n\{\ln|\Lambda\Lambda' + \Phi| + \text{tr}(S|\Lambda\Lambda' + \Phi|^{-1})\}$$

# Rotacja czynników

- Uzyskana macierz ładunków czynnikowych nie jest jedynym możliwym rozwiązaniem analizy czynnikowej
- Można wygenerować nieskończenie wiele różnych macierzy ładunków poprzez obrót układu wzajemnie ortogonalnych osi
- Rotacja ma pomóc w znalezieniu układu, który będzie prostszy w interpretacji
- Istnieją dwie grupy metod rotacji: ortogonalne i ukośne

# Rotacje ortogonalne

- Polegają na znalezieniu ortogonalnej macierzy transformacji
- Najbardziej znane metody to **varimax** i **quartimax**
- Varimax minimalizuje liczbę zmiennych potrzebnych do wyjaśnienia danego czynnika
- Quartimax minimalizuje liczbę czynników potrzebnych do wyjaśnienia danej zmiennej

# Rotacje ukośne

- Macierz ładunków staje się macierzą wzorców zachowań
- Do wyznaczenia korelacji czynników wykorzystuje się wagi nadane poszczególnym czynnikom  $F$

# Metody wyboru liczby czynników

Do wyboru optymalnej liczby czynników można stosować następujące metody:

- Metodę procentu wariancji tłumaczonej przez czynniki
- Metodę wartości własnych większych od jedności
- Metodę testu osypiska

Ale i tak ostateczna decyzja jest subiektywnym wyborem badacza

## Metoda wartości własnej większej od jedności

- Jest to najczęściej spotykana metoda: każdy czynnik powinien wyjaśniać zmienność co najmniej jednej zmiennej pierwotnej
- Polecana, jeśli liczba zmiennych jest większa niż 20
- W przypadku analiz na mniejszych zbiorach danych, metoda ta ma tendencję do wybierania zbyt małej liczby czynników

## Metoda procentu wariancji tłumaczonej

- Liczbę wybranych czynników ustala się na podstawie procentu wariancji przez nie tłumaczonej
- Dążymy do odtworzenia co najmniej 70% wariancji (niższe wartości w przypadku dużych zbiorów danych)
- Żaden następny czynnik poza wybranymi przez nas nie tłumaczy więcej niż 5% wariancji.

## Metoda testu osypiska

- Najpierw sporządzamy wykres, na którym na osi poziomej umieszczamy kolejne czynniki, natomiast na osi pionowej ich wartości własne
- Szukamy punktów załamania, w których zmienia się kąt załamania krzywej (zaczynają się kolejne rumowiska)
- Miejsce punktu załamania określa maksymalną liczbę czynników kwalifikujących się do dalszej analizy
- Metoda ta pozwala włączyć do analizy większą liczbę czynników niż metoda wartości własnych większych od 1



## Nazwy czynników

- Dla każdego czynnika wybieramy kilka zmiennych o najwyższych ładunkach czynnikowych
- Następnie spróbować nadać wspólną nazwę w oparciu o te zmienne danemu czynnikowi
- Mając nazwy czynników spróbować znaleźć ich odniesienie do danego, głębszego wymiaru, ich związek z badaną zmienną ukrytą

## Wskaźnik Kaisera-Mayera-Olkina (KMO)

- Informuje, czy istnieją podstawy do stosowania analizy czynnikowej
- Indeks o wartościach  $[0,1]$  porównuje cząstkowe współczynniki korelacji z dwuzmiennowymi współczynnikami korelacji

$$KMO = \frac{\sum_{i \neq j} \sum_{j \neq i} r_{ij}^2}{\sum_{i \neq j} \sum_{j \neq i} r_{ij}^2 + \sum_{i \neq j} \sum_{j \neq i} a_{ij}^2}$$

- $r_{ij}$  – element macierzy korelacji  $R$
- $a_{ij}$  – współczynnik korelacji cząstkowej
- Im wartość wskaźnika bliższa 1, tym silniejsze podstawy do zastosowania analizy czynnikowej

# Test Bartletta o sferyczności

- $H_0: R = I$  (macierz korelacji jest macierzą jednostkową)
- $H_1: R \neq I$  (macierz korelacji nie jest macierzą jednostkową)
- Dążymy do odrzucenia  $H_0$

# Analiza składowych głównych (PCA)

- Stanowi metodę transformacji zmiennych pierwotnych we wzajemnie ortogonalne nowe zmienne, tzw. składowe główne
- Służy redukcji wymiaru przestrzeni cech oraz pogrupowaniu ich w podzbiory
- Dzięki niej można graficznie zaprezentować konfigurację porównywanych zmiennych

## Ogólna charakterystyka – cd.

- Zmienne pierwotne poddaje się standaryzacji, więc ich wariancje są sobie równe
- Nowa agregatowa zmienna powinna wyjaśniać maksymalną ilość wariancji zmiennych pierwotnych
- Wariancja nowej zmiennej agregatowej jest nazywana wartością własną (*eigenvalue*)
- Zbiór danych powinien być jednorodny (brak obserwacji odstających)

# Zapis formalny modelu

$$PC_i = w_{i1}X_1 + w_{i2}X_2 + \cdots + w_{ik}X_k$$

$$\sum_{j=1}^k w_{ij}^2 = 1$$

- Współczynniki  $w$  przy zmiennych  $X$  stanowią wagi, jakie przypisuje się zmiennym w tworzeniu głównej składowej
- Zakładamy, że poszukiwane czynniki są niezależne i mają wystandaryzowany rozkład normalny

## Wyznaczanie współczynników

- Wartości wektora  $w$  są tak dobierane, żeby maksymalizować wariancję  $PC$
- Szukamy wartości własnych następującego równania:

$$|R - \lambda I| = 0$$

- $R$  – macierz korelacji  $k$  zmiennych wyjściowych
- $\Lambda$  – wektor zawierający wartości własne o wymiarach  $k \times k$
- Wariancją  $i$ -tej składowej jest  $i$ -ta wartość własna

## Wyznaczanie współczynników – cd

- Każdej wartości własnej możemy przypisać wektor własny macierzy o postaci:

$$Rw_i = \lambda_i w_i$$

- $w_i$  – wektor własny macierzy korelacji
- Wartości składowe tego wektora stanowią wartości współczynników stojących przy zmiennych pierwotnych; ich kombinacja tworzy nowe zmienne: składowe główne
- Pułapka: utworzona kombinacja liniowa jest zależna od jednostek miary i rzędów wielkości poszczególnych zmiennych (należy standaryzować zmienne!)



## Wybór optymalnej liczby składowych głównych

- Dążymy do odtworzenia maksymalnej ilości informacji z pierwotnego zbioru zmiennych
- W praktyce wybieramy liczbę składowych, które łącznie wyjaśniają powyżej 70% zmienności zmiennych pierwotnych
- Nie uwzględniamy tych składowych, dla których wartości własne są niższe od średniej
- Można opuścić główne składowe, dla których wartości własne są niższe od 1 (symulacje wskazują, że lepszym progiem jest 0,7)
- Opuszczamy składowe, które mają mniejszy udział w wariancji niż 5%

## Wybór właściwego modelu

- Wybór między PCA a FA zależy przede wszystkim od celu analizy
- W klasycznej analizie czynnikowej mała liczba czynników pozwala wyjaśniać zależności pomiędzy zmiennymi obserwowalnymi; chcemy zidentyfikować zmienne ukryte
- W analizie składowych głównych dążymy do zachowania jak największej ilości informacji przy jak najmniejszej liczbie nowych zmiennych; chcemy uprościć strukturę danych
- FA to analiza modelowa, PCA to technika eksploracyjna, pomocnicza

## FA i PCA – różnice

- **Wariancja** – FA obejmuje pewną część wariancji, zwaną wariancją wspólną; PCA obejmuje wariancję całkowitą zmiennych
- **Punkt wyjścia** – dla FA to zredukowana macierz korelacji; dla PCA zwykła macierz korelacji
- **Zmienne pierwotne** – w FA zmienna pierwotna jest funkcją czynników wspólnych i swoistych; w PCA główna składowa jest funkcją zmiennych pierwotnych
- **Zależność** – w FA czynniki mogą być skorelowane; w PCA główne składowe są zawsze niezależne