Modelo en el tiempo.

$$x_{t+1} = A x_t + B a + B_2 \mathcal{E}$$

$$x_t = \overset{4\times 1}{\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ \dot{u}_t \\ \dot{v}_t \end{pmatrix}}$$

* Si $\mu = x_t = 4\times 1$ entonces $A = 4\times 4$
* Acción $= \phi$, $Ba = \phi$

Si $\mathcal{E} = \overset{2\times 1}{\begin{pmatrix} \mathcal{E}_u \\ \mathcal{E}_v \end{pmatrix}}$

$$B_2 = \begin{bmatrix} \Delta t, 0 \\ 0, \Delta t \\ 1 \quad 0 \\ 0 \quad 1 \end{bmatrix}$$

$$x_{t+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ \dot{u}_t \\ \dot{v}_t \end{pmatrix}}_{x_t} + B_2 \mathcal{E}$$

$$x_{t+1} = \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{4\times 4} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ \dot{u}_t \\ \dot{v}_t \end{pmatrix}}_{4\times 1}}_{4\times 1} + \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta t & 0 \\ 0 & \Delta t \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{4\times 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{E}_u \\ \mathcal{E}_v \end{pmatrix}}_{2\times 1}}_{4\times 1}$$

Observación

$$y_t = C x_t + D a_t + \delta_t$$

* Como primera instancia el vector C tenia un tamaño de 1x4, sin embargo, al calcular el residuo en el proceso de Actualización las matrices no eran simetricas, Así que la solución fue usar C con un tamaño 2x4, quedando de la siguiente manera.

$$C = \begin{pmatrix} 1, 0, 0, 0 \\ 0, 1, 0\ 0 \end{pmatrix} \qquad \delta_t = 1$$

$$\overset{2\times 1}{y_t} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1, 0, 0, 0 \\ 0, 1, 0\ 0 \end{pmatrix}}_{2\times 4} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ \dot{u}_t \\ \dot{v}_t \end{pmatrix}}_{4\times 1} + \underbrace{\cancel{D a_t}}_{\phi} + (1)$$

Predicción

$$\mu_{t+1} = A \cdot \mu_t + \cancel{B_2 \varepsilon}_{\phi}$$

- Épsilon es de media cero, por tanto el error vale ϕ

$$\Sigma_t = A \, \Sigma_t \, A^T + B_2 \cdot Q \cdot B_2^T \qquad Q = \begin{pmatrix} \sigma_u^2 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma_t} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \Delta t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \Delta t & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A^T} +$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta t & 0 \\ 0 & \Delta t \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B^2} * \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_u^2 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 \end{pmatrix}}_{Q} * \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \Delta t & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B^T} = \begin{bmatrix} (\Delta t \sigma_u)^2, & 0, & \Delta t, & 0 \\ 0, & (\Delta t \sigma_v)^2, & 0, & \Delta t \\ \Delta t, & 0, & (\Delta t \sigma_u)^2, & 0 \\ 0, & \Delta t, & 0, & (\Delta t \sigma_v)^2 \end{bmatrix}$$

Update

$$\mu_{t+1} = \mu_t + K_t \cdot r_t$$

r_t = Residuo del instante de tiempo, entre lo que espero observar y la observación real.

$$\mu_{t+1} = \mu_t + K_t \left(y_t - C \cdot \mu_t \right)$$

$$\underset{4\times1}{\mu_t} + \underset{4\times2}{K_t} \cdot \underbrace{\left[\underset{2\times1}{y_t} - \underset{2\times4}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \underset{4\times1}{\begin{pmatrix} \mu_t \\ v_t \\ \dot{\mu}_t \\ \dot{v}_t \end{pmatrix}} \right]}_{r_t = 2\times1}$$

$*$ → 4×1 ; $+$

$$K_t = \Sigma_t \cdot C^T \cdot S^{-1} \qquad S = C \, \Sigma_t \, C^T + R$$

- $S = R$ para el primer instante de tiempo

4×2 ; $*$ → 4×2 ; $*$ → 4×2 ; 2×2

$$\underset{4\times2}{K_t} = \underset{4\times4}{\Sigma_t} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_u^2 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$R = \begin{pmatrix} \sigma_u^2 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 \end{pmatrix}$$

- El ruido es de media cero

$$\varepsilon_x \sim N(0, \sigma_x)$$