МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А. Ю. Петрович

ЛЕКЦИИ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
Часть I
Введение в математический анализ

Допущено
Учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Российской Федерации
по образованию в области прикладных математики и физики
в качестве учебного пособия для студентов вузов
по направлению «Прикладные математика и физика»

МОСКВА
МФТИ
2012

УДК 517(075)
ББК 22.161я73
П30

Рецензенты:
Кафедра математики и естественно-научных дисциплин
Финансово-промышленной академии при правительстве Московской области (зав. кафедрой доктор физико-математических наук, профессор *К. Л. Самаров*)
Доктор физико-математических наук, профессор *В. В. Власов*

Петрович, А. Ю.
П30 Лекции по математическому анализу. В 3-х частях. учеб. пособие. – М.: МФТИ, 2012.
ISBN 978-5-7417-0437-0
Ч. 1. Введение в математический анализ. – 2012. – 275 с.
ISBN 978-5-7417-0429-5

Пособие состоит из 8 глав и содержит развёрнутое изложение курса лекций, читаемых автором студентам I курса МФТИ. Разобрано большое количество примеров, иллюстрирующих теоретический материал. К каждой главе приложен список упражнений для самостоятельной работы.

Предназначено для студентов МФТИ. Будет полезно для студентов физико-математических и инженерно-физических специальностей, изучающих математический анализ, а также для преподавателей, ведущих занятия по математическому анализу.

УДК 517(075)
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-7417-0437-0
ISBN 978-5-7417-0429-5 (ч. 1)

Оглавление

Предисловие

Настоящее учебное пособие является развёрнутым изложением первой части курса лекций, читаемых автором студентам Московского физико-технического института. Курс первого семестра в настоящее время называется «Введение в математический анализ» и содержит теорию действительных чисел, теорию пределов числовых последовательностей и функций одной переменной, дифференциальное исчисление функций одной переменной и элементы дифференциальной геометрии кривых; сюда же примыкает теория неопределённого интеграла, необходимая студентам математических и технических специальностей с самого начала обучения. Традиционно в конце курса излагаются основы теории комплексных чисел, которые удалены из основной школьной программы, а студентам они необходимы значительно раньше изучения курса теории функций комплексной переменной.

Курс математического анализа, так же как и другие основные математические курсы, сложился на кафедре высшей математики МФТИ под несомненным влиянием Льва Дмитриевича Кудрявцева, заведовавшего кафедрой более 30 лет. Эти курсы оказались настолько устойчивыми, что всякие попытки реформировать их с разных сторон не привели ни к каким существенным изменениям. Известные учебники по математическому анализу Л.Д. Кудрявцева, С.М. Никольского, А.М. Тер-Крикорова и М.И. Шабунина, Г.Н. Яковлева, О.В. Бесова, Г.Е. Иванова написаны на основе лекций, читавшихся или читаемых ныне в МФТИ их авторами. Настоящее учебное пособие даёт ещё одну интерпретацию физтеховского курса математического анализа.

Становлению предлагаемой интерпретации курса в значительной мере способствовало общение с лекторами, параллельно читавшими курс математического анализа, в первую очередь с Г.Н. Яковлевым, А.М. Тер-Крикоровым, О.В. Бесовым, М.И. Шабуниным. Преподавание математики в МФТИ существенно отличается от принятого на механикоматематическом факультете МГУ. Поэтому для автора, пришедшего в МФТИ после окончания аспирантуры мехмата, очень важно было общение с опытными преподавателями, параллельно проводившими семинарские занятия по математическому анализу, в первую очередь с И.А. Бочеком, Л.И. Коваленко, А.Д. Кутасовым, В.Р. Почуевым, И.А. Борачинским, К.А. Бежановым, В.А. Растрениным. Всем упомянутым преподавателям, как тем, кого уже, к сожалению, нет в живых, так и тем, кто и сейчас продолжает плодотворно работать, автор глубоко признателен. Автор благодарен студентам МФТИ О.Ю. Мельчаевой и М.Л. Мерецкой, представившим свои конспекты лекций, а также А.В. Полозову, подготовившему рукопись к печати.

Пожелания студентов об издании этого курса лекций поступали в течение многих лет, поэтому остаётся выразить надежду, что настоящее пособие поможет студентам при изучении математического анализа и подготовке к экзаменам.

ГЛАВА I. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Определение действительного числа по Дедекинду

Одним из основных понятий, изучаемых в курсе математического анализа, является понятие *действительного числа.* Оно возникает в школьном курсе элементарной алгебры фактически на интуитивном уровне как развитие понятия о числе — от натуральных чисел к целым, от целых к рациональным, от рациональных к действительным. В нашу задачу не входит сейчас аккуратное выведение этой цепочки из основных представлений о натуральных числах и их свойствах. Будем считать, что понятие *рационального числа* и основные свойства рациональных чисел, а также другие вопросы школьного курса элементарной алгебры (в частности, основная символика теории множеств) хорошо известны. Напомним, что множество натуральных чисел обозначается $\mathbb{N}$, множество целых чисел — $\mathbb{Z}$, множество рациональных чисел — $\mathbb{Q}$.

При переходе к действительным числам (множество которых обозначается $\mathbb{R}$) возникает качественно новое понятие *непрерывности*, присущее именно математическому анализу. Поэтому этот шаг будет разобран подробно и аккуратно.

Определение 1.1. Сечением α множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ называется такое разбиение $\mathbb{Q}$ на два непустых множества A и A' ($A \cap A' = \varnothing$, $A \cup A' = \mathbb{Q}$), что для всех $x \in A$, $x' \in A'$ выполняется неравенство $x < x'$. Множество A называется нижним классом сечения, множество A' — верхним классом.

Применяется обозначение $\alpha = A|A'$.

Приведём простейшие примеры сечений.

1) $A = \{r \in \mathbb{Q}\colon\ r \leqslant 1\}$; $A' = \{r \in \mathbb{Q}\colon\ r > 1\}$.
2) $A = \{r \in \mathbb{Q}\colon\ r < 1\}$; $A' = \{r \in \mathbb{Q}\colon\ r \geqslant 1\}$.
3) $A = \{r \in \mathbb{Q}\colon\ r \leqslant 0$ или $r > 0,\ r^2 < 2\}$; $A' = \{r \in \mathbb{Q}\colon\ r > 0,\ r^2 > 2\}$.

Напомним, что не существует рационального числа такого, что $r^2 = 2$.

Легко видеть, что в примере 1) в нижнем классе A есть наибольший элемент, в верхнем классе A' нет наименьшего элемента. В примере 2) в A нет наибольшего элемента, в A' есть наименьший. В примере 3) в A нет наибольшего элемента, в A' нет наименьшего.

Докажем, например, что в примере 3) в A нет наибольшего элемента (значком $\square$ будем обозначать начало доказательства, значком $\blacksquare$ — конец доказательства).

$\square$ Доказательство от противного. Пусть в A есть наибольший элемент r. Тогда $r > 0$, $r^2 < 2$. Но легко заметить, что найдётся рациональное число $r + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\left(r + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$. В самом деле, последнее неравенство равносильно $r^2 + \frac{2r}{n} + \frac{1}{n^2} < 2$, что заведомо выполняется при $r^2 + \frac{2r+1}{n} < 2$, т.е. при $n > \frac{2r+1}{2-r^2}$. Для таких n число $r + \frac{1}{n} \in A$: это противоречит тому, что r — наибольший элемент в A. Значит, в A нет наибольшего элемента. $\blacksquare$

Докажем теперь, что невозможен случай, когда в A есть наибольший элемент, в A' есть наименьший.

$\square$ Пусть существуют $r_1 \in A$, $r_2 \in A'$ — соответственно наибольший и наименьший элементы в этих классах. Выберем рациональное число r_0 такое, что $r_1 < r_0 < r_2$ (например, $r_0 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$). Так как $r_0 > r_1$, то $r_0 \notin A$, так как $r_0 < r_2$, то $r_0 \notin A'$ — это невозможно, так как любое рациональное число принадлежит либо A, либо A'. $\blacksquare$

Итак, существуют сечения трёх типов.

I. В нижнем классе есть наибольший элемент, в верхнем нет наименьшего.

II. В нижнем классе нет наибольшего элемента, в верхнем есть наименьший.

III. В нижнем классе нет наибольшего элемента, в верхнем нет наименьшего.

Определение 1.2. Иррациональным числом называется сечение III типа.

В случаях I и II говорят, что сечение производится рациональным числом (соответствующим наибольшему элементу в нижнем классе или наименьшему в верхнем). Сечения I и II типов отождествляются с соответствующими рациональными числами. Чтобы соответствие было взаимно однозначным, сечения типа I в дальнейшем не рассматриваются.

Например, сечение в примере 1) мы не будем рассматривать. Сечение в примере 2) — это рациональное число 1. Сечение в примере 3) — это иррациональное число (которое естественно объявить корнем квадратным из 2, не придавая пока этому термину строгого смысла).

Определение 1.3. Действительным (вещественным) числом называется любое сечение II или III типов. Множество действительных чисел обозначается $\mathbb{R}$. Сечения II типа отождествляются с соответствующими рациональными числами.

У сечений, соответствующих действительным числам, в нижнем классе нет наибольшего элемента. Если в верхнем классе есть наименьший элемент — сечение является рациональным числом, если нет — иррациональным.

Определение 1.4. Два действительных числа $\alpha = A|A'$ $\beta = B|B'$ называются равными, если $A = B$, $A' = B'$ (совпадают как множества, достаточно требовать только $A = B$).

Определение 1.5. Рассмотрим два неравных действительных числа α и β. Говорят, что $\alpha > \beta$, если $A \supset B$ (т.е. $A' \subset B'$); $\alpha < \beta$, если $A \subset B$ (т.е. $A' \supset B'$); включения множеств считаются строгими.

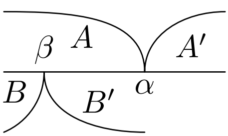

Рис. 1.1

Символ $>$ читается «больше», символ $<$ читается «меньше». На рис. 1.1 изображена ситуация, возникающая при $\alpha > \beta$.

Из свойств числовых множеств очевидно следует, что:

1) $\alpha < \beta$ тогда и только тогда, когда $\beta >$ $> \alpha$;

2) если $\alpha > \beta$ и $\beta > \gamma$, то $\alpha > \gamma$; если $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$, то $\alpha < \gamma$ (транзитивность отношений неравенства).

Теорема 1.1. *Если действительные числа α и β не равны (применяется обозначение $\alpha \neq \beta$), то либо $\alpha > \beta$, либо $\alpha < \beta$.*

$\square$ Пусть A и B — нижние классы сечений α и β соответственно; тогда $A \neq B$. Нужно доказать, что либо $A \subset B$, либо $A \supset B$.

Но если включение $A \subset B$ не выполнено, то существует рациональное число r_1 такое, что $r_1 \in A$, $r_1 \notin B$. Если включение $A \supset B$ не выполнено, то существует рациональное число r_2 такое, что $r_2 \in B$, $r_2 \notin A$. Но тогда $r_2 \in A'$, $r_1 \in B'$, т.е. $r_1 < r_2$ и $r_2 < r_1$ одновременно. Полученное противоречие показывает, что либо $A \subset B$, либо $A \supset B$. $\blacksquare$

Доказанная теорема выражает свойство упорядоченности множества действительных чисел (если два числа не равны, то одно из них больше другого).

Теорема 1.2 (плотность рациональных чисел во множестве действительных чисел). *Для любых действительных чисел α и β таких, что $\alpha > \beta$, найдётся рациональное число r такое, что $\alpha > r > \beta$.*

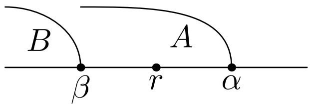

Рис. 1.2

$\square$ Так как $\alpha > \beta$, то для соответствующих нижних классов $A \supset B$ (строгое включение). Значит, найдётся рациональное число r такое, что $r \in A$, $r \notin B$ (см. рис. 1.2). Так как в нижнем классе нет наибольшего элемента, то $\alpha > r \geqslant \beta$. Если β — иррациональное число, то $r \neq \beta$ и $\alpha > r > \beta$; всё доказано. Если β — рациональное число, то $\beta \in A$. Так как в A нет наибольшего элемента, то в качестве r можно рассмотреть число из A, которое больше β $(\alpha > r > \beta)$. $\blacksquare$

З а м е ч а н и е. Таких рациональных чисел r между α и β можно вставить бесконечно много (сначала r_1, затем r_2 между r_1 и α и т.д.).

Теорема 1.3 (принцип Архимеда). *Для любого действительного числа α существует натуральное число n, большее α.*

□ Пусть $\alpha = A|A'$. Любое рациональное число $r \in A'$ (кроме самого α, если $\alpha \in \mathbb{Q}$) таково, что $r > \alpha$. Выберем натуральное $n > r$, тогда $n > \alpha$. ■

Следующее утверждение мы назовём леммой. Принципиального различия между теоремами и леммами нет, и то, и другое — утверждения, доказываемые в настоящем курсе. Теоремами обычно называют более фундаментальные утверждения, обладающие достаточной общностью формулировки, часто используемые в дальнейшем. Леммы обычно имеют более специальные формулировки и не так широко применяются в последующем изложении.

Лемма 1.1. *Пусть α и β — действительные числа. Если для любого положительного рационального числа ε найдутся рациональные числа s' и s'' такие, что $s' \leqslant \alpha \leqslant s''$, $s' \leqslant \beta \leqslant s''$, $s'' - s' < \varepsilon$, то $\alpha = \beta$.*

(Иными словами, если два действительных числа можно зажать между двумя сколь угодно близкими рациональными числами, то они равны.)

Как и в школьной программе, знак $\leqslant$ означает, что либо числа равны, либо первое меньше второго (аналогично применяется знак $\geqslant$).

□ Пусть $\alpha \neq \beta$, для определённости $\alpha > \beta$. По теореме 1.2 найдутся рациональные числа r' и r'' такие, что $\alpha > r'' > r' > \beta$. Рассмотрим положительное рациональное число $\varepsilon = r'' - r'$ и соответствующие ему по условию рациональные числа s' и s''. Так как $s' \leqslant \alpha \leqslant s''$, $s' \leqslant \beta \leqslant s''$, то $s'' > r'' > r' > s'$, откуда $s'' - s' > r'' - r'$, что противоречит тому, что $s'' - s' < \varepsilon$. ■

З а м е ч а н и е. При формулировке подобных утверждений рекомендуется применять сокращённые записи, содержащие кванторы $\forall$ (для любого, для всех, для каждого) и $\exists$ (существует, найдётся). Например, теорема 1.2 может быть сформулирована так:

$$(\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha > \beta) \Rightarrow (\exists\, r \in \mathbb{Q}:\ \alpha > r > \beta).$$

Лемма 1.1 может быть сформулирована так:

$$\Big(\forall\,\varepsilon \in \mathbb{Q},\ \varepsilon > 0 \to \exists\, s', s'' \in \mathbb{Q} :$$
$$(s' \leqslant \alpha \leqslant s'',\ s' \leqslant \beta \leqslant s'',\ s'' - s' < \varepsilon)\Big) \Rightarrow \alpha = \beta.$$

Такие записи являются лишь удобным сокращением словесных формулировок, и не следует считать, что в каждом конкретном случае данная запись является единственно возможной. Конечно, можно поставить вопрос о формальном языке, необходимом для таких записей, и довести их до логического совершенства. При этом придётся ввести символы $\vee$ (или), $\wedge$ (и), $\urcorner$ (пусть) и т.д.; придётся также договориться об аккуратности использования знаков : ; $\to$, скобок и т.д. Ещё раз подчёркиваем, что такая постановка вопроса не является существенной для курса математического анализа. Без сокращённых логических записей можно обойтись, они просто очень удобны для восприятия и позволяют экономить бумагу и время.

Во множестве действительных чисел можно строить сечения так же, как и во множестве рациональных чисел.

Определение 1.6. Сечением множества действительных чисел $\mathbb{R}$ называется такое разбиение $\mathbb{R}$ на два непустых множества $\tilde{A}$ и $\tilde{A}'$ ($\tilde{A} \cap \tilde{A}' = \varnothing$, $\tilde{A} \cup \tilde{A}' = \mathbb{R}$), что для всех $x \in \tilde{A}$, $x' \in \tilde{A}'$ выполняется неравенство $x < x'$.

Одновременное существование наибольшего элемента в нижнем классе $\tilde{A}$ и наименьшего элемента в верхнем классе $\tilde{A}'$ невозможно; доказательство аналогично соответствующему утверждению для сечений во множестве рациональных чисел. Оказывается, во множестве действительных чисел не может быть и сечений III типа. Имеет место

Теорема 1.4 (Дедекинда). *Для любого сечения $\tilde{A}|\tilde{A}'$ во множестве $\mathbb{R}$ существует действительное число β, которое является либо наибольшим элементом в $\tilde{A}$, либо наименьшим в $\tilde{A}'$.*

□ Пусть A — множество всех рациональных чисел из $\tilde{A}$; A' — множество всех рациональных чисел из $\tilde{A}'$. Очевидно, $A|A'$ — сечение в $\mathbb{Q}$, которое определяет некоторое действительное число β. Либо $\beta \in \tilde{A}$, либо $\beta \in \tilde{A}'$. Пусть для определённости $\beta \in \tilde{A}$; покажем, что β — наибольший элемент в $\tilde{A}$ (аналогично, если $\beta \in \tilde{A}'$, доказывается, что β — наименьший элемент в $\tilde{A}'$).

Предположим, что $\beta \in \tilde{A}$, но β не является наибольшим в $\tilde{A}$, т.е. существует действительное число $\gamma \in \tilde{A}$, $\gamma > \beta$. По теореме 1.2 существует рациональное число r такое, что $\gamma > r > \beta$. Очевидно, $r \in \tilde{A}$; значит, $r \in A$. Итак, r принадлежит нижнему классу сечения в $\mathbb{Q}$, определяемому числом β, но в то же время $r > \beta$. Полученное противоречие показывает, что β — наибольший элемент в $\tilde{A}$. ■

Заметим, что здесь не игнорируются сечения такие, что в нижнем классе есть наибольший элемент. В своё время это нужно было для установления взаимно однозначного соответствия между сечениями в $\mathbb{Q}$ и множеством $\mathbb{R}$, здесь похожей необходимости нет.

Теорема Дедекинда отражает свойство полноты или непрерывности множества действительных чисел. Иррациональные числа, как сечения III типа, фактически являлись «дырками» во множестве рациональных чисел. Введение действительных чисел заполнило эти дырки. Теорема Дедекинда показывает, что во множестве действительных чисел таких дырок нет.

Свойство непрерывности показывает существенное отличие множества $\mathbb{R}$ от множества $\mathbb{Q}$. Рассмотренные ранее свойства — упорядоченность, плотность, принцип Архимеда — имели место и во множестве $\mathbb{Q}$.

§ 2. Ограниченные множества. Точные верхние и нижние грани

Определение 1.7. Множество X, состоящее из действительных чисел, называется ограниченным сверху, если найдётся действительное число M такое, что для всех элементов x множества X выполняется неравенство $x \leqslant M$. Множество X, состоящее из действительных чисел, называется ограниченным снизу, если найдётся действительное число m такое, что для всех элементов x множества X выполняется неравенство $x \geqslant m$. Число M в этих определениях называется верхней границей множества X, число m — нижней границей. Множество X называется ограниченным, если оно ограничено и сверху и снизу.

На языке кванторов ограниченность множества X сверху описывается следующей сокращённой записью:

$$\exists\, M \in \mathbb{R}:\ \forall\, x \in X \to x \leqslant M. \tag{1.1}$$

Ограниченность снизу описывается так:

$$\exists\, m \in \mathbb{R}:\ \forall\, x \in X \to x \geqslant m.$$

Пример 1.1. Пусть $X = \mathbb{Q} \cap [0;1]$, т.е. X — множество рациональных точек отрезка $[0;1]$. Это множество ограничено, так как для всех $x \in X$ выполняются неравенства $0 \leqslant x \leqslant 1$. Верхняя граница 1, нижняя граница 0. В то же время верхней границей может быть, например, число 2, нижней — число -1.

Таким образом, верхняя и нижняя границы множества определены неоднозначно.

Попытаемся сформулировать высказывание «Множество X, состоящее из действительных чисел, не является ограниченным сверху», не применяя частиц и приставок типа «не» и «нет», т.е. в позитивном смысле. Что означает невыполнение (1.1)? Это значит, что для любого действительного числа M не выполняется высказывание $\forall\, x \in X \to x \leqslant M$. Иными словами, для любого действительного числа M найдётся элемент $x \in X$, для которого выполняется противоположное неравенство $x > M$.

Запишем окончательно на языке кванторов, что означает неограниченность множества X сверху:

$$\forall\, M \in \mathbb{R} \to \exists\, x \in X:\ x > M. \tag{1.2}$$

Наблюдая преобразование (1.1) в (1.2), мы можем сформулировать формальное правило построения отрицаний в позитивном смысле:

1) кванторы меняются друг на друга, т.е. $\forall$ превращается в $\exists$, $\exists$ превращается в $\forall$;

2) высказывания, стоящие при кванторах, не меняются;
3) существенные высказывания, не стоящие при кванторах, меняются на противоположные.

Пример 1.2. Множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел ограничено снизу ($\forall n \in \mathbb{N} \to n \geqslant 1$), но не является ограниченным сверху ($\forall M \in \mathbb{R} \to \exists n \in \mathbb{N}$: $n > M$ — принцип Архимеда).

Определение 1.8. Действительное число α называется точной верхней гранью множества $X \subset \mathbb{R}$, если это число является верхней границей множества X, а никакое меньшее число не является верхней границей X.

На языке кванторов это описывается как конъюнкция (т.е. одновременное выполнение) двух высказываний:

$$(\forall x \in X \to x \leqslant \alpha) \wedge (\forall \alpha' < \alpha \to \exists x \in X : \; x > \alpha'). \qquad (1.3)$$

Логический символ $\wedge$ («и») означает одновременное выполнение двух высказываний.

Точная верхняя грань обозначается sup («supremum»):

$$\alpha = \sup X.$$

Определение 1.9. Действительное число β называется точной нижней гранью множества $X \subset \mathbb{R}$, если это число является нижней границей множества X, а никакое большее число не является нижней границей X.

На языке кванторов записывается конъюнкция двух высказываний:

$$(\forall x \in X \to x \geqslant \beta) \wedge (\forall \beta' > \beta \to \exists x \in X : \; x < \beta'). \qquad (1.4)$$

Точная нижняя грань обозначается inf («infimum»):

$$\beta = \inf X.$$

Из определений следует, что $\sup X$ — это наименьшая из верхних границ множества X, а $\inf X$ — это наибольшая из нижних границ. Пока ниоткуда не следует, что эти наименьшая из верхних и наибольшая из нижних границ существуют. Дело в том, что ограниченное сверху множество может иметь наибольший элемент, а может и не иметь; ограниченное снизу множество может иметь наименьший элемент, а может и не иметь.

Лемма 1.2. *Если множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет наибольший элемент α, то $\alpha = \sup X$. Если множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет наименьший элемент β, то $\beta = \inf X$.*

$\square$ Доказательство приведём для наибольшего элемента, вторая часть доказывается аналогично.

Так как α — наибольший элемент X, то для всех $x \in X$ выполнено неравенство $x \leqslant \alpha$. С другой стороны, какое бы число $\alpha' < \alpha$ мы ни взяли, число α является элементом множества, и $\alpha > \alpha'$; значит, для любого $\alpha' < \alpha$ найдётся элемент X, больший α'. Доказано, что $\alpha = \sup X$. $\blacksquare$

Но может быть и так, что во множестве нет наибольшего (наименьшего) элемента, а точная верхняя (нижняя) грань существует. В этом случае говорят, что точная верхняя (нижняя) грань не достигается.

Пример 1.3. Пусть $X = \left\{1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \ldots;\ \frac{1}{n};\ \ldots\right\}$ — множество всех чисел вида $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, наибольшим элементом множества является число 1; по лемме 1.2 $\sup X = 1$ (точная верхняя грань множества достигается).

С другой стороны, ясно, что при всех $n = 1, 2, \ \ldots$ выполняется неравенство $\frac{1}{n} > 0$; множество ограничено снизу, но наименьшего элемента в нём нет. Докажем, что $\inf X = 0$ (таким образом, точная нижняя грань не достигается).

$\square$ В самом деле, для всех $x \in X$ выполняется неравенство $x \geqslant 0$. Но какое бы число $\beta' > 0$ мы ни взяли, найдутся рациональное число r такое, что $0 < r < \beta'$ (теорема 1.2), и натуральное число n такое, что $n > \frac{1}{r}$, т.е. $\frac{1}{n} < r$ (свойства неравенств между рациональными числами мы считаем известными). Поэтому $x = \frac{1}{n} < \beta'$. Итак, для любого $\beta' > 0$ найдётся число $x \in X$ такое, что $x < \beta'$. Доказано, что $\inf X = 0$. $\blacksquare$

Теорема 1.5 (о точной верхней (нижней) грани). *Для любого непустого множества действительных чисел, ограниченного сверху, существует и единственна точная верхняя* *грань. Для любого непустого множества действительных чисел, ограниченного снизу, существует и единственна точная нижняя грань.*

□ Доказательство проведём для точной верхней грани, вторая часть доказывается аналогично (отметим, что пустое множество формально является ограниченным сверху и снизу, но говорить о точных верхней и нижней гранях бессмысленно).

Пусть сначала ограниченное сверху множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет наибольший элемент. Тогда по лемме 1.2 этот элемент является точной верхней гранью.

Пусть теперь в X нет наибольшего элемента. Проведём сечение во множестве $\mathbb{R}$ так, что $\tilde{A}'$ — это все верхние границы X (они существуют в силу ограниченности X сверху), а $\tilde{A}$ — все остальные числа. Ясно, что $\tilde{A} \cap \tilde{A}' = \varnothing$, $\tilde{A} \cup \tilde{A}' = \mathbb{R}$, для любых $x \in \tilde{A}$ и $x \in \tilde{A}'$ выполняется неравенство $x < x'$ (ясно, что $x \neq x'$, но если $x > x'$, то число x больше некоторой верхней границы, значит, x — тоже верхняя граница, а это не так). При этом $X \subset \tilde{A}$ (если какой-то элемент X является верхней границей, то он наибольший в X, а мы рассматриваем случай, когда наибольшего элемента нет).

По теореме Дедекинда существует действительное число α либо наибольшее в $\tilde{A}$, либо наименьшее в $\tilde{A}'$. Но если α — наибольшее число в $\tilde{A}$, то, так как $X \subset \tilde{A}$, α — верхняя граница для X, т.е. $\alpha \in \tilde{A}'$ — противоречие. Значит, α — наименьшее число в $\tilde{A}'$ (наименьшая из верхних границ). Итак, α — верхняя граница X, а никакое меньшее число верхней границей не является, т.е. $\alpha = \sup X$.

Докажем теперь, что точная верхняя грань единственна. Пусть $\alpha = \sup X$ и $\beta = \sup X$, $\alpha < \beta$ (для определённости). Тогда, так как $\beta = \sup X$ и $\alpha < \beta$, то существует элемент $x \in$ $\in X$, больший α. Это противоречит тому, что $\alpha = \sup X$. ■

Отметим ещё раз, что $\sup X$ — это наименьшая из верхних границ множества X, а $\inf X$ — это наибольшая из нижних границ X (теорема 1.5 утверждает, что во множестве верхних границ существует наименьший элемент, а во множестве нижних границ существует наибольший элемент). Отсюда следует также

Лемма 1.3. *Если число M является верхней границей множества X, то и $\sup X \leqslant M$. Если число m является нижней границей множества X, то и $\inf X \geqslant m$.*

Запишем формулировку этой леммы на языке кванторов:

$$(\forall\, x \in X \to x \leqslant M) \Rightarrow \sup X \leqslant M;$$
$$(\forall\, x \in X \to x \geqslant m) \Rightarrow \inf X \geqslant m.$$

Отметим, кстати, что

$$(\forall\, x \in X \to x < M) \Rightarrow \sup X \leqslant M;$$
$$(\forall\, x \in X \to x > m) \Rightarrow \inf X \geqslant m,$$

т.е. при переходе к точной верхней (нижней) грани строгое неравенство может превратиться в нестрогое. В примере 1.3 для всех $x \in X$ выполнено неравенство $x > 0$, а $\inf X = 0$.

Определение 1.10. Если множество $X \subset \mathbb{R}$ неограничено сверху, то по определению $\sup X = +\infty$. Если множество $X \subset \subset \mathbb{R}$ неограничено снизу, то по определению $\inf X = -\infty$.

§ 3. Представление действительных чисел бесконечными десятичными дробями

Пусть действительное число α не является целым числом или конечной десятичной дробью. Рассмотрим соответствующее сечение во множестве рациональных чисел $\alpha = A|A'$ (в нижнем классе A нет наибольшего элемента).

Обозначим через c_0 наибольшее целое число в A. Тогда $c_0 + 1$ — наименьшее целое число в A'. Так как α не целое, то $\alpha \in (c_0; c_0 + 1)$. Разобьём отрезок $[c_0; c_0 + 1]$ на 10 отрезков равной длины 0,1: $[c_0; c_0 + 0,1]$; $[c_0 + 0,1; c_0 + 0,2]$; $\ldots$; $[c_0 + + 0,9; c_0 + 1]$ и выберем из них тот, который содержит число α:

$$\alpha \in \left(c_0 + \frac{c_1}{10}\,; c_0 + \frac{c_1 + 1}{10}\right), \quad \text{где} \quad c_1 = 0, 1, \ldots, 9$$

(α не совпадает с концом отрезка, так как не является конечной десятичной дробью).

Снова разбиваем полученный отрезок на 10 отрезков равной длины 0,01 и т.д., на n-м шагу получим

$$\alpha \in \left(c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \ldots + \frac{c_n}{10^n}\,; c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \ldots + \frac{c_n+1}{10^n}\right).$$

Здесь c_1, c_2, $\ldots$, c_n — «цифры», т.е. целые числа, принимающие значения 0, 1, $\ldots$, 9. Длина отрезка на n-м шаге равна $\frac{1}{10^n}$, а концы символически записываются в виде конечных десятичных дробей:

$$\alpha \in (\overline{c_0, c_1 c_2 \ldots c_n};\ \overline{c_0, c_1 c_2 \ldots (c_n + 1)}).$$

Естественно, что если $c_n = 9$, то при переходе к правому концу отрезка предыдущую цифру c_{n-1} нужно увеличить на 1, а вместо $c_n + 1$ написать 0. Если $c_n = c_{n+1} = \ldots = c_{n+k} = 9$, то при переходе к правому концу отрезка c_{n-1} нужно увеличить на 1, и вместо $c_n + 1$, $c_{n+1} + 1$, $\ldots$, $c_{n+k} + 1$ написать нули.

Так как α не является конечной десятичной дробью, то процесс никогда не оборвётся, и мы получим бесконечную последовательность цифр c_1, c_2, $\ldots$, c_n, $\ldots$ Бесконечную десятичную дробь $\overline{c_0, c_1 c_2 \ldots c_n \ldots}$ можно считать представлением действительного числа α.

Например, для числа π:

$$c_0 = 3, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 4, \quad c_3 = 1, \quad c_4 = 5, \quad c_5 = 9, \quad c_6 = 2, \quad c_7 = 6, \ldots$$

Описанная выше конструкция даёт следующие интервалы:

$$\pi \in (3; 4); \quad \pi \in (3,1; 3,2); \quad \pi \in (3,14; 3,15);$$
$$\pi \in (3,141; 3,142); \quad \pi \in (3,1415; 3,1416);$$
$$\pi \in (3,14159; 3,14160); \quad \pi \in (3,141592; 3,141593);$$
$$\pi \in (3,1415926; 3,1415927); \ldots$$

Левый конец соответствующего интервала длины $\frac{1}{10^n}$ обычно называют десятичным приближением n-го порядка числа α с недостатком, правый конец — десятичным приближением n-го порядка числа α с избытком; применяются обозначения соответственно $\underline{\alpha}_n$ и $\overline{\alpha}_n$. Например:

$$\underline{\pi}_0 = 3;\ \overline{\pi}_0 = 4;\ \underline{\pi}_2 = 3,14;\ \overline{\pi}_2 = 3,15;$$
$$\underline{\pi}_5 = 3,14159;\ \overline{\pi}_5 = 3,14160.$$

Бесконечная десятичная дробь $\overline{3,1415926\ldots}$ является представлением числа π.

Интересно отметить, что в такой конструкции для числа $-\pi$: $-\pi \in (-4;-3)$; $-\pi \in (-3,2;-3,1)$ и т.д. Поэтому $c_0 = -4$; $\underline{-\pi}_1 = -3,2 = c_0 + 0,8$; $\overline{-\pi}_1 = -3,1 = c_0 + 0,9$ и т.д.; $c_1 = 8$; $c_2 = 5$; $c_3 = 8$; $c_4 = 4$; $c_5 = 0$; $c_6 = 7$; $c_7 = 3$, $\ldots$

Представлением числа $-\pi$ является бесконечная десятичная дробь $\overline{(-4),8584073\ldots}$

Легко видеть, что для любого $n = 0,1,2\ldots$

$$\underline{\alpha}_n < \alpha < \overline{\alpha}_n, \quad \text{причём} \quad \overline{\alpha}_n - \underline{\alpha}_n = \frac{1}{10^n}\,.$$

Особое значение имеет случай, когда α — конечная десятичная дробь с n знаками после запятой:

$$\alpha = \overline{c_0,c_1c_2\ldots c_n}, \quad n = 1,2,\ \ldots, \quad c_n \neq 0,$$

или целое число: $\alpha = c_0 \in \mathbb{Z}$.

Случай целого α можно рассматривать как частный случай конечной десятичной дроби при $n = 0$.

В описанной выше конструкции после n-го шага процесс оборвётся. Число α будет являться общим концом двух отрезков длины $\frac{1}{10^n}$. Если α рассматривается как левый конец правого из двух возникших отрезков, то получим уже привычную десятичную дробь:

$$\alpha = \overline{c_0,c_1c_2\ldots c_n000\ldots}$$

(для иллюстрации общности процесса мы дополнили её бесконечной последовательностью нулей). Если же α рассматривать как правый конец левого из двух возникших отрезков, то

α представляется как бесконечная дробь, в которой начиная с $(n+1)$-го места после запятой идут девятки:

$$\alpha = \overline{c_0, c_1 c_2 \ldots (c_n - 1) 999 \ldots}$$

Таким образом, конечная десятичная дробь имеет два десятичных представления (с нулями, начиная с некоторого места, и с девятками, начиная с некоторого места). Например:

$$2,011 = \overline{2,011000\ldots} \quad \text{и} \quad 2,011 = \overline{2,010999\ldots};$$
$$-2,011 = \overline{(-3),989000\ldots} \quad \text{и} \quad -2,011 = \overline{(-3),988999\ldots}$$

В любом случае при $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\underline{\alpha}_n \leqslant \alpha \leqslant \overline{\alpha}_n, \quad \text{причём} \quad \overline{\alpha}_n - \underline{\alpha}_n = \frac{1}{10^n}\,.$$

Докажем теперь очень важную лемму, которая неоднократно будет использоваться в дальнейшем в теории действительных чисел.

Лемма 1.4. *Пусть α — действительное число. Тогда для любого рационального положительного числа ε найдутся рациональные числа r_1 и r_2 такие, что $r_1 < \alpha < r_2$ и $r_2 - r_1 < \varepsilon$.*

Иными словами, любое действительное число может быть зажато между двумя сколь угодно близкими рациональными числами.

□ Если α — рациональное число, то возьмём $r_2 = \alpha + \frac{\varepsilon}{4}$, $r_1 = \alpha - \frac{\varepsilon}{4}$. Ясно, что $r_1 < \alpha < r_2$, и $r_2 - r_1 = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Если α — иррациональное число, то, во всяком случае, α не является конечной десятичной дробью, и $\underline{\alpha}_n < \alpha < \overline{\alpha}_n$, $\overline{\alpha}_n - \underline{\alpha}_n = \frac{1}{10^n}$. Поэтому можно взять $r_2 = \overline{\alpha}_n$, $r_1 = \underline{\alpha}_n$; $r_2 - r_1 = \frac{1}{10^n} < \frac{1}{n}$ (неравенство $10^n > n$ при любом натуральном n легко доказывается, например, по индукции). По принципу Архимеда для любого положительного рационального числа ε найдётся натуральное число $n > \frac{1}{\varepsilon}$, значит, $\frac{1}{n} < \varepsilon$ и $r_2 - r_1 < \varepsilon$. ■

Мы видели, что любое действительное число представляется бесконечной десятичной дробью. Это представление единственно, если действительное число не является целым или конечной десятичной дробью, в противном случае таких представлений два. Докажем обратное утверждение.

Теорема 1.6. *Любая бесконечная десятичная дробь является представлением некоторого действительного числа, причём это число определяется единственным образом.*

□ Пусть $\overline{c_0, c_1 c_2 \ldots c_n \ldots}$ — бесконечная десятичная дробь ($c_0 \in \mathbb{Z}$; $c_1, c_2, \ldots = 0, 1, \ldots, 9$). Рассмотрим при $n = 1, 2, \ldots$ рациональные числа $r_n = \overline{c_0, c_1 c_2 \ldots c_n}$ и $r'_n = r_n + \frac{1}{10^n} = \overline{c_0, c_1 c_2 \ldots (c_n + 1)}$ — приближения для данной дроби с недостатком и с избытком соответственно. Ясно, что для всех $n \geqslant m$ выполняется неравенство $r_n \geqslant r_m$, поэтому $r'_n > r_n \geqslant r_m$.

Пусть теперь $n < m$. Тогда

$$r_m - r_n = \frac{c_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{c_{n+2}}{10^{n+2}} + \ldots + \frac{c_m}{10^m} \leqslant \leqslant 9 \left(\frac{1}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{10^m} \right).$$

Применяя формулу суммы членов геометрической прогрессии, получим

$$r_m - r_n \leqslant 9 \cdot \frac{\frac{1}{10^{m+1}} - \frac{1}{10^{n+1}}}{\frac{1}{10} - 1} = \frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^m} < \frac{1}{10^n},$$

поэтому $r_m - r'_n = r_m - r_n - \frac{1}{10^n} < 0$. Итак, при любых натуральных значениях m и n выполняется неравенство $r_m < r'_n$.

Рассмотрим множества рациональных чисел

$$A = \{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\} \quad \text{и} \quad B = \{r'_1, r'_2, \ldots, r'_n, \ldots\}.$$

При фиксированном $m = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $r_n < r'_m$ для любого натурального n, поэтому множество A ограничено сверху, и по лемме 1.3 его точная верхняя грань

$$\alpha = \sup A \leqslant r'_m, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Аналогично, при фиксированном $m = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $r'_n > r_m$ для любого натурального n, поэтому множество B ограничено снизу, и по лемме 1.3 его точная нижняя грань

$$\beta = \inf B \geqslant r_m, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Из леммы 1.3 и последнего неравенства, верного при всех $m = 1, 2, \ldots$, следует, что $\beta \geqslant \alpha$. Итак, при всех $n = 1, 2, \ldots$ имеют место неравенства $r_n \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant r'_n$, и $r'_n - r_n = \frac{1}{10^n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$ при $n > \frac{1}{\varepsilon}$ (ε — произвольное положительное рациональное число). По лемме 1.1 $\alpha = \beta$. Так как $r_n \leqslant \alpha \leqslant r'_n$ при $n = 1, 2, \ldots$, то данная бесконечная десятичная дробь является представлением числа α.

Единственность искомого действительного числа следует из леммы 1.1. В самом деле, если два числа α и α' являются представлениями одной и той же бесконечной десятичной дроби, то из неравенств $r_n \leqslant \alpha \leqslant r'_n$ и $r_n \leqslant \alpha' \leqslant r'_n$, $r'_n - r_n = \frac{1}{10^n} < \varepsilon$ (где ε — произвольное положительное рациональное число) следует, что $\alpha = \alpha'$. ■

§ 4. Арифметические операции с действительными числами

Нам предстоит определить для действительных чисел арифметические операции (сложение, вычитание, умножение, деление) так, чтобы сохранялись привычные свойства этих операций, а для рациональных чисел результаты операций не отличались от обычных.

Пусть α и β — два действительных числа. Будем рассматривать всевозможные рациональные числа a, b, a', b', удовлетворяющие неравенствам

$$a < \alpha < a', \quad b < \beta < b'. \tag{1.5}$$

Определение 1.11. Суммой $\alpha + \beta$ действительных чисел α и β называется действительное число γ такое, что для любых рациональных чисел a, b, a', b', удовлетворяющих неравенствам (1.5), выполняется неравенство

$$a + b < \gamma < a' + b'. \tag{1.6}$$

Докажем корректность этого определения. Иными словами, докажем, что такое действительное число γ существует, определено единственным образом, а в случае рациональных α и β построенное таким образом число γ совпадает с суммой рациональных чисел $\alpha + \beta$.

$\square$ I) С у щ е с т в о в а н и е. Рассмотрим множество всевозможных сумм $\{a+b\}$ в условиях (1.5). Оно ограничено сверху некоторой суммой $a' + b'$. Рассмотрим число $\gamma = \sup\{a + b\}$ в условиях (1.5).

Тогда при выполнении условий (1.5) $a + b \leqslant \gamma$. Но так как при фиксированных a', b' в условиях (1.5) выполняется неравенство $a+b < a'+b'$ для любых a, b в условиях (1.5), то по лемме 1.3, $\gamma \leqslant a' + b'$. Итак, в условиях (1.5) $a+b \leqslant \gamma \leqslant a' + b'$. Исключим равенства. Пусть найдутся a, b такие, что $\gamma = a+b$. Но по теореме 1.2 найдутся рациональные числа a_0, b_0 такие, что $a < a_0 < \alpha$, $b < b_0 < \beta$. Значит, $\gamma = a + b < a_0 + b_0$, что противоречит определению γ как $\sup\{a + b\}$ в условиях (1.5). Значит, $a + b < \gamma$. Аналогично показывается, что $\gamma < a' + b'$. Построенное число γ удовлетворяет условиям (1.6).

II) Е д и н с т в е н н о с т ь. По лемме 1.4 для любого положительного рационального числа ε найдутся рациональные числа a, a', b, b' в условиях (1.5) такие, что $a' - a < \frac{\varepsilon}{2}$, $b' - b < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$0 < (a' + b') - (a + b) = (a' - a) + (b' - b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

и эта разность может быть сделана сколь угодно малой. По лемме 1.1 существует единственное действительное число γ, удовлетворяющее условиям (1.6).

III) П р е е м с т в е н н о с т ь. Если α и β — оба рациональные числа, то их обычная рациональная сумма $\gamma = \alpha + \beta$ удовлетворяет определению 1.11, и в силу единственности другой суммы быть не может. $\blacksquare$

Теперь нужно показать, что привычные свойства операции сложения сохраняются для определённого таким образом сложения действительных чисел. Ввиду большого количества этих свойств будут проведены доказательства лишь некоторых из них; доказать остальные читатели смогут самостоятельно (наиболее существенные моменты будут показаны в доказательствах, приведённых здесь).

Свойства сложения действительных чисел

1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ (коммутативность).

□ Рассмотрим рациональные числа a, b, a', b', удовлетворяющие условиям (1.5). Тогда для чисел $\alpha + \beta$ и $\beta + \alpha$ (пока мы не знаем, что они равны)

$$a + b < \alpha + \beta < a' + b';$$
$$b + a < \beta + \alpha < b' + a'.$$

Так как сложение рациональных чисел коммутативно, то $a + b = b + a$, $a' + b' = b' + a'$, поэтому действительные числа $\alpha + \beta$ и $\beta + \alpha$ заключены в одних и тех же границах, разность между которыми может быть сделана сколь угодно малой (аналогично II в доказательстве корректности определения 1.11). По лемме 1.1 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$. ■

2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ (ассоциативность).

3) $\alpha + 0 = \alpha$.

4) Для любого действительного числа α найдётся число β, называемое противоположным числом и обозначаемое $\beta = -\alpha$, такое, что $\alpha + \beta = 0$.

□ Если α — рациональное число, то $\beta = -\alpha$, где $(-\alpha)$ — соответствующее рациональное число. Пусть теперь $\alpha = A|A'$ — иррациональное число. Рассмотрим число $\beta = \overline{A}|\overline{A}'$ такое, что $\overline{A}$ — множество всех элементов A' со знаком минус, $\overline{A}'$ — множество всех элементов A со знаком минус. Очевидно, что это сечение, где в $\overline{A}$ нет наибольшего, а в $\overline{A}'$ нет наименьшего элемента, т.е. β — иррациональное число. Рассмотрим всевозможные рациональные числа a и a' такие, что $a < \alpha < a'$, тогда $-a' < \beta < -a$. По определению суммы действительных чисел число $\gamma = \alpha + \beta$ удовлетворяет неравенствам $a - a' < < \gamma < a' - a$. По лемме 1.4 разность $a' - a$ может быть сделана меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, где ε — произвольное положительное рациональное число. Тогда разность $(a' - a) - (a - a') = 2(a' - a) < \varepsilon$, и по лемме 1.1 $\gamma = \alpha + \beta = 0$. ■

Так как операция сложения во множестве действительных чисел удовлетворяет условиям 1) – 4), то на языке высшей алгебры «действительные числа образуют коммутативную группу по сложению». В такой группе противоположный элемент всегда определён единственным образом.

5) Если β_1 и β_2 — два противоположных числа для действительного числа α, то $\beta_1 = \beta_2$.

□ С одной стороны, $\beta_1 + \alpha + \beta_2 = \beta_1 + (\alpha + \beta_2) = \beta_1 + 0 = \beta_1$; с другой стороны, $\beta_1 + \alpha + \beta_2 = (\beta_1 + \alpha) + \beta_2 = 0 + \beta_2 = \beta_2$. Значит, $\beta_1 = \beta_2$. ■

6) Если $\alpha > \beta$, то $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ для любого $\gamma \in \mathbb{R}$.

□ По лемме 1.2 найдутся рациональные числа r_1 и r_2 такие, что $\alpha > r_1 > r_2 > \beta$. По лемме 1.4 найдутся рациональные числа c и c' такие, что $c < \gamma < c'$, $c' - c < r_1 - r_2$. Отсюда получим

$r_1 + c > r_2 + c'$ (свойство сложения рациональных чисел);

$\alpha + \gamma > r_1 + c$; $\beta + \gamma < r_2 + c'$ (определение суммы действительных чисел).

Значит, $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$. ■

7) Если $\alpha > \beta$, $\gamma > \delta$, то $\alpha + \gamma > \beta + \delta$.

□ Двукратное применение предыдущего свойства. ■

8) Если $\alpha > \beta$, то $-\alpha < -\beta$.

9) Если $\alpha > 0$, то $-\alpha < 0$.

Определение 1.12. Разностью $\alpha - \beta$ двух действительных чисел α и β называется число $\alpha + (-\beta)$.

10) $\alpha + \beta = \gamma$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \gamma - \beta$ (перенос слагаемого в другую часть равенства с противоположным знаком).

□ С одной стороны, $\alpha + \beta + (-\beta) = \alpha + (\beta + (-\beta)) = \alpha + 0 = \alpha$; с другой стороны, $\alpha + \beta + (-\beta) = \gamma + (-\beta) = \gamma - \beta$. Значит, $\alpha = \gamma - \beta$. ■

11) $-(\alpha + \beta) = -\alpha - \beta = -\beta - \alpha$.

12) $\alpha > \beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha - \beta > 0$; $\alpha < \beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha - \beta < 0$.

Определение 1.13. Модулем (абсолютной величиной) действительного числа α называется число, обозначаемое $|\alpha|$ и равное α, если $\alpha \geqslant 0$, и равное $-\alpha$, если $\alpha < 0$.

13) $-|\alpha| \leqslant \alpha \leqslant |\alpha|$.

14) Если $-\beta \leqslant \alpha \leqslant \beta$, где $\beta \geqslant 0$, то $|\alpha| \leqslant \beta$.

15) $|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$.

□ Так как $\alpha + \beta \leqslant |\alpha| + |\beta|$ (свойства 13 и 7) и $\alpha + \beta \geqslant -|\alpha| - |\beta| = -(|\alpha| + |\beta|)$ (свойства 13, 7 и 11), то по свойству 14 $|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$. ■

16) $|\alpha - \beta| \geqslant \Big||\alpha| - |\beta|\Big|$.

Определим теперь умножение действительных чисел.

Определение 1.14. I. Пусть α и β — два положительных действительных числа, т.е. $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Будем рассматривать всевозможные рациональные числа a, b, a', b', удовлетворяющие неравенствам

$$0 < a < \alpha < a', \quad 0 < b < \beta < b'. \tag{1.7}$$

Произведением $\alpha\beta$ чисел α и β называется действительное число γ такое, что для любых рациональных чисел a, b, a', b', удовлетворяющих неравенствам (1.7), выполняется неравенство

$$ab < \gamma < a'b'. \tag{1.8}$$

II. Для любого действительного числа α

$$0 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0 = 0.$$

III. Если действительные числа α и β не равны нулю, то их произведением называется действительное число γ, равное $|\alpha| \cdot |\beta|$, если α и β одного знака, и равное $-|\alpha| \cdot |\beta|$, если α и β разных знаков.

Корректность части I определения 1.14 доказывается аналогично корректности определения 1.11. При этом доказательства существования и преемственности сохраняются дословно с заменой там, где нужно, суммы на произведение. Доказательство единственности чуть сложнее.

□ Пусть n — некоторое натуральное число, большее чисел α и β. Тогда по смыслу определения 1.14 можно считать, что рациональные числа a' и b' берутся меньшими, чем n. По лемме 1.4 для любого положительного рационального числа ε найдутся рациональные числа a, a', b, b' в условиях (1.7) такие, что $a' - a < \frac{\varepsilon}{2n}$, $b' - b < \frac{\varepsilon}{2n}$. Тогда

$$0 < a'b' - ab = a'b' - a'b + a'b - ab = \\ = a'(b' - b) + b(a' - a) < n \cdot \frac{\varepsilon}{2n} + n \cdot \frac{\varepsilon}{2n} = \varepsilon,$$

и эта разность может быть сделана сколь угодно малой (мы считаем, что $a' < n$, $b < b' < n$). По лемме 1.1 существует единственное действительное число γ, удовлетворяющее условиям (1.8). ■

Свойства умножения действительных чисел аналогичны соответствующим свойствам сложения. Они здесь приводятся без доказательств, которые аналогичны доказательствам свойств сложения.

17) $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

18) $\alpha\beta = \beta\alpha$ (коммутативность).

19) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ (ассоциативность).

20) $\alpha \cdot 1 = \alpha$.

21) Для любого ненулевого действительного числа α найдётся число β, называемое обратным числом и обозначаемое $\beta = \alpha^{-1}$, такое, что $\alpha\beta = 1$.

Свойства 18) – 21) означают на языке высшей алгебры, что «ненулевые действительные числа образуют коммутативную группу по умножению». Свойства 1) – 4) и 18) – 21) вместе означают, что «действительные числа образуют поле относительно операций сложения и умножения».

22) Обратный элемент для любого ненулевого действительного числа определён единственным образом.

23) $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

□ Рассмотрим сначала случай, когда все числа α, β, γ положительны. Пусть a, b, c, a', b', c' — всевозможные рациональные числа, удовлетворяющие условиям

$$0 < a < \alpha < a', \quad 0 < b < \beta < b', \quad 0 < c < \gamma < c'. \tag{1.9}$$

Если n — некоторое натуральное число, большее чисел α, β, γ, то можно считать, что рациональные числа a', b', c' меньше, чем n. Для чисел $(\alpha+\beta)\gamma$ и $\alpha\gamma+\beta\gamma$ (пока мы не знаем, что они равны) выполняются неравенства

$$(a+b)c < (\alpha+\beta)\gamma < (a'+b')c',$$
$$ac+bc < \alpha\gamma+\beta\gamma < a'c'+b'c'$$

(по определению суммы и произведения положительных действительных чисел). В силу дистрибутивности умножения рациональных чисел относительно сложения $(a+b)c = ac+bc$, $(a'+b')c' = a'c'+b'c'$. Поэтому действительные числа $(\alpha+\beta)\gamma$ и $\alpha\gamma+\beta\gamma$ заключены в одних и тех же границах, разность между которыми может быть сделана сколь угодно малой.

В самом деле, по лемме 1.4 найдутся рациональные числа a, a', b, b', c, c' в условиях (1.9) такие, что

$$a'-a < \frac{\varepsilon}{4n}, \quad b'-b < \frac{\varepsilon}{4n}, \quad c'-c < \frac{\varepsilon}{4n}$$

и $(a'+b')c'-(a+b)c = a'c'+b'c'-ac-bc = a'c'-ac'+ac'-$ $-ac+b'c'-bc'+bc'-bc = c'(a'-a)+a(c'-c)+c'(b'-b)+$ $+b(c'-c) < n\cdot\frac{\varepsilon}{4n}+n\cdot\frac{\varepsilon}{4n}+n\cdot\frac{\varepsilon}{4n}+n\cdot\frac{\varepsilon}{4n} = \varepsilon$. По лемме 1.1 существует единственное такое действительное число, откуда $(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma+\beta\gamma$.

К случаю положительных α, β, γ приводятся все остальные путём изменения знаков обеих частей равенства или переноса членов из одной части в другую. Если одно из чисел α, β, γ или $\alpha+\beta$ равно нулю, то искомое равенство очевидно. ■

24) $\alpha\cdot(-1) = -\alpha$.

25) Если $\alpha > \beta$, $\gamma > 0$, то $\alpha\gamma > \beta\gamma$; если $\alpha > \beta$, $\gamma < 0$, то $\alpha\gamma < \beta\gamma$.

Определение 1.15. Частным $\frac{\alpha}{\beta}$ двух действительных чисел α и β, где $\beta \neq 0$, называется число $\alpha\beta^{-1}$.

26) $\alpha\beta = \gamma$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \gamma\beta^{-1}$, т.е. $\alpha = \frac{\gamma}{\beta}$ (здесь считается, что $\beta \neq 0$).

27) Если α и β отличны от нуля, то $(\alpha\beta)^{-1} = \alpha^{-1}\beta^{-1}$.

28) Если $\beta \neq 0$, то $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$.

29) Если $\alpha > \beta > 0$, то $\alpha^{-1} < \beta^{-1}$; если $\alpha < \beta < 0$, то $\alpha^{-1} > \beta^{-1}$.

30) Если α — действительное число, а n — натуральное число, то число $n\alpha$ равно сумме n слагаемых, равных α:

$$n\alpha = \underbrace{\alpha + \alpha + \ \ldots + \alpha}_{n \text{ раз}}.$$

Вывод. Для действительных чисел имеют место все правила элементарной алгебры, относящиеся к четырём арифметическим действиям, равенствам и неравенствам.

Естественным образом определяется α^n, где α — действительное, n — натуральное число:

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ \ldots \cdot \alpha}_{n \text{ раз}};$$

$\alpha^0 = 1$, если $\alpha \neq 0$; $\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$, если $\alpha \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Сохраняются все свойства степеней с целым показателем (доказательства ничем не отличаются от доказательств в школьном курсе алгебры).

Обратим теперь внимание на то, что в лемме 1.1 действительное число зажималось между рациональными потому, что у нас ещё не было понятия разности действительных чисел. Приведём теперь более общий вариант этого утверждения.

Лемма 1.5. *Пусть α и β — действительные числа. Если для любого положительного действительного числа ε найдутся действительные числа s' и s'' такие, что $s' \leqslant \alpha \leqslant s''$, $s' \leqslant \beta \leqslant s''$, $s'' - s' < \varepsilon$, то $\alpha = \beta$.*

□ Пусть $\delta > 0$ — произвольное рациональное число; s' и s'' — такие действительные числа, что $s' \leqslant \alpha \leqslant s''$, $s' \leqslant \beta \leqslant s''$, $s'' - s' < \frac{\delta}{3}$ (они существуют по условию леммы при $\varepsilon = \frac{\delta}{3}$).

По лемме 1.4 найдутся рациональные числа r', r'', p', p'' такие, что

$$r' < s' < r'', \quad p' < s'' < p'', \quad r'' - r' < \frac{\delta}{3}, \quad p'' - p' < \frac{\delta}{3}.$$

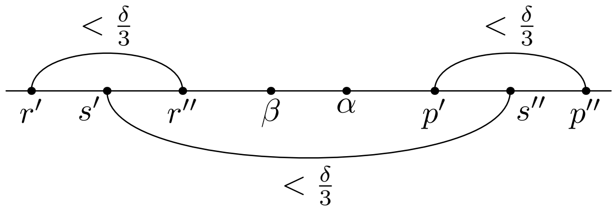

Рис. 1.3

Тогда (см. рис. 1.3): $s' - r' < r'' - r' < \frac{\delta}{3}$; $p'' - s'' < p'' - p' < \frac{\delta}{3}$; $p'' - r' = p'' - s'' + s'' - s' + s' - r' < \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta$.

Итак, для любого рационального положительного числа δ найдутся рациональные числа r' и p'' такие, что

$$r' < \alpha < p'', \quad r' < \beta < p'', \quad p'' - r' < \delta.$$

По лемме 1.1 $\alpha = \beta$. ■

§ 5. Счётные и несчётные множества

Определение 1.16. Два множества A и B называются эквивалентными (равномощными), если между A и B можно установить взаимно однозначное (биективное) соответствие.

Здесь мы фактически имеем дело с переводом русскоязычного термина на латинский язык (равномощный — эквивалентный, взаимно однозначное — биективное и т.д.). В принципе вполне можно было бы ограничиться русскоязычными терминами, но, поскольку их переводы очень распространены в отечественной научной и учебной литературе, их игнорировать нельзя.

Пример 1.4. Множество натуральных чисел эквивалентно множеству чётных натуральных чисел (взаимно однозначное соответствие устанавливается зависимостью $n \leftrightarrow 2n$), хотя одно из этих множеств является подмножеством другого.

Определение 1.17. Множество называется счётным, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел (т.е. если его элементы можно занумеровать в виде бесконечной последовательности).

Лемма 1.6. *Любое бесконечное множество содержит счётное подмножество.*

☐ Выберем некоторый элемент x_1, принадлежащий данному бесконечному множеству A. Так как множество бесконечно, то можно выбрать элемент x_2 среди оставшихся элементов, x_3 среди оставшихся и т.д. Процесс не оборвётся в силу бесконечности A. Построенное счётное множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \subset A$ (возможно, совпадает с A). ■

Лемма 1.7. *Любое бесконечное подмножество счётного множества счётно.*

☐ Пусть $B \subset A$; A — счётное множество, B — бесконечное. Докажем, что B — счётно. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Выберем первый из этих элементов, принадлежащий B: $b_1 = a_{n_1}$. Из оставшихся номеров выберем первый n_2 такой, что a_{n_2} принадлежит B; $b_2 = a_{n_2}$ (ясно, что $n_2 > n_1$). Из оставшихся номеров выберем первый n_3 такой, что a_{n_3} принадлежит B; $b_3 = a_{n_3}$ $(n_3 > n_2 > n_1)$, и т.д. Каждый элемент B имеется среди a_n, поэтому через конечное число шагов он будет обозначен: $b_k = a_{n_k}$. Таким образом, все элементы B занумерованы, и B — счётно. ■

Лемма 1.8. *Сумма конечного и счётного множеств, двух счётных множеств — счётна.*

☐ Напомним, что в теории множеств разностью множеств $B \setminus A$ называется множество тех и только тех элементов, которые принадлежат B, но не принадлежат A (на диаграмме Эйлера заштрихована разность $B \setminus A$ — см. рис. 1.4).

Из рис. 1.4 очевидны равенства

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A);$$
$$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B),$$

причём множества, объединяемые в правых частях этих равенств, имеют пустые пересечения.

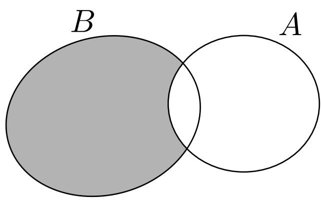

Рис. 1.4

1) Пусть A — счётно, B — конечно.

Если $A = \{a_1, a_2, \ \ldots, a_n, \ \ldots\}$, $B \setminus A = \{b_1, \ \ldots, b_k\}$ — также конечно (а может быть, и пусто), то $A \cup B = A \cup (B \setminus A) = \{b_1, \ \ldots, b_k, a_1, a_2, \ \ldots, a_n, \ \ldots\}$ — счётное множество.

2) Пусть A и B счётны. Если $B \setminus A$ конечно, то доказательство проходит, как в первом случае. Если $B \setminus A$ бесконечно, т.е. счётно, то $A = \{a_1, a_2, \ \ldots, a_n, \ \ldots\}$, $B \setminus A = \{b_1, b_2, \ \ldots, b_n, \ \ldots\}$ и $A \cup B = A \cup (B \setminus A) = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \ \ldots, a_n, b_n, \ \ldots\}$ — счётное множество. ■

Теорема 1.7. *Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счётно.*

□ Достаточно доказать, что счётно множество положительных рациональных чисел $\mathbb{Q}^+$, так как в этом случае множество отрицательных рациональных чисел, эквивалентное ему ($x \leftrightarrow \leftrightarrow -x$), также счётно, и вместе с единственным числом $\{0\}$ по лемме 1.8 они все в сумме образуют счётное множество. Занумеруем $\mathbb{Q}^+$ следующим образом (см. рис. 1.5):

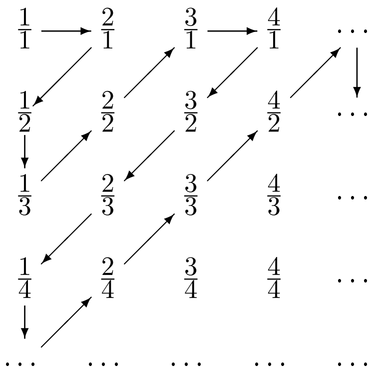

Рис. 1.5

Занумерованы все положительные рациональные числа, причём каждое число встречается много раз ($\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \ \ldots$ и т.д.). Таким образом, $\mathbb{Q}^+$ — бесконечное подмножество счётного множества. Значит, оно счётно. ■

Следствие. *Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ счётно (принадлежит $\mathbb{Q}$).*

Теорема 1.8. *Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ несчётно (т.е. действительных чисел «значительно больше», чем рациональных).*

$\square$ Достаточно доказать, что несчётным является множество действительных чисел полуинтервала $[0;1)$ (если $\mathbb{R}$ — счётно, то $[0;1) \subset \mathbb{R}$ — также счётно). Предположим, удалось занумеровать все числа $\alpha \in [0;1)$, т.е. $[0;1) = \{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n,\ \ldots\}$.

Выпишем десятичные представления этих чисел:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \overline{0, c_1^{(1)} c_2^{(1)} \ldots c_k^{(1)} \ldots};\\
\alpha_2 &= \overline{0, c_1^{(2)} c_2^{(2)} \ldots c_k^{(2)} \ldots};\\
&\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots\\
\alpha_n &= \overline{0, c_1^{(n)} c_2^{(n)} \ldots c_k^{(n)} \ldots};\\
&\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots
\end{aligned}$$

при этом конечная десятичная дробь записывается с нулями, начиная с некоторого номера (а не с девятками).

Рассмотрим число $\alpha = \overline{0, \gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_n \ldots}$ такое, что $\gamma_1 \neq c_1^{(1)}$, $\gamma_2 \neq c_2^{(2)},\ \ldots,\ \gamma_n \neq c_n^{(n)},\ \ldots,\ \gamma_i \neq 9$, $i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ (это число существует по теореме 1.6). Такого числа нет среди α_i, $i = 1$, $2,\ 3,\ \ldots$, хотя $\alpha \in [0;1)$. Получили противоречие тому, что все числа $[0;1)$ удалось занумеровать. $\blacksquare$

Следствие 1. *Множество иррациональных чисел несчётно* (иначе вместе с $\mathbb{Q}$ получилось бы счётное множество $\mathbb{R}$).

Следствие 2. *Множество чисел любого конечного интервала несчётно.*

$\square$ Множество $(0;1)$ несчётно, так как иначе при добавлении одной точки 0 получилось бы счётное множество $[0;1)$.

Несчётность произвольного интервала $(a;b)$ следует из того, что между $(0;1)$ и $(a;b)$ можно установить взаимно однозначное соответствие по формуле $x = a + t(b-a)$; $t \in (0;1) \iff \iff x \in (a;b)$. $\blacksquare$

Замечание к главе I. При помощи сечений были определены лишь арифметические операции с действительными числами. Развивая этот метод, можно определить арифметический корень n-й степени из положительного действительного числа, степень положительного числа с произвольным действительным показателем, логарифмы и другие элементарные функции, известные из школьного курса алгебры. Но если этим вопросам уделить внимание в лекционном курсе математического анализа, то возникнет нехватка времени для изложения последующих очень существенных глав.

Представляется удобным и разумным пойти путём наименьшего сопротивления — не вводить пока эти элементарные функции, ограничившись в главах II и III (теория пределов последовательностей и функций) арифметическими свойствами действительных чисел. И только в главе III, после изучения свойств непрерывных функций, ввести корень n-й степени как обратную функцию к x^n на соответствующем промежутке, аккуратно определить степень с действительным показателем, логарифм как обратную функцию и т.д. Этот путь имеет один недостаток — обедняется практическая сторона курса, при решении иллюстрирующих примеров приходится ограничиваться арифметическими операциями. Конечно, на практических занятиях следует решать примеры с корнями, логарифмами, тригонометрическими функциями и т.д., но при этом понимать, что всё, выходящее за рамки арифметики, пока является «незаконным» и чисто иллюстративным.

Упражнения к главе I

1.1. Доказать, что сечение во множестве рациональных чисел $\alpha = A|A'$, где $A = \{r \in \mathbb{Q}\colon\ 2^r < 4\}$; $A' = \{r \in \mathbb{Q}\colon\ 2^r \geqslant 4\}$ соответствует числу 2.

1.2. Рассматривается сечение во множестве рациональных чисел $\alpha = A|A'$, где $A = \{r \in \mathbb{Q}\colon\ 2^r > 3\}$; $A' = \{r \in \mathbb{Q}\colon\ 2^r > 3\}$. Доказать, что в A нет наибольшего элемента, в A' нет наименьшего элемента (сечение соответствует иррациональному числу $\log_2 3$).

1.3. Рассматриваются сечения во множестве целых чисел $\mathbb{Z}$. Доказать, что имеет место аналог теоремы Дедекинда:

либо в нижнем классе есть наибольший элемент, либо в верхнем классе есть наименьший элемент (своеобразная «полнота» множества целых чисел; согласно терминологии, которая будет введена во второй части курса, это свойство лучше назвать «замкнутостью»).

1.4. Сформулировать на языке кванторов утверждения:

а) число α не является точной верхней гранью множества X;

б) число β не является точной нижней гранью множества X;

в) α — верхняя граница множества X, но не точная верхняя грань;

г) β — нижняя граница множества X, но не точная нижняя грань;

д) множество X не ограничено ни сверху, ни снизу.

1.5. Найти точные верхние и нижние грани множеств:

а) $[0;1] \setminus \mathbb{Q}$ (множество иррациональных чисел $[0;1]$);

б) $\left\{-1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \ldots\right\}$;

в) $(0;1] \cup (2;3]$;

г) $(-1;+\infty)$;

д) $(-\infty;-3] \cup [2;+\infty)$;

е) $\left[1;\frac{3}{2}\right) \cup \left[2;\frac{7}{3}\right) \cup \left[3;\frac{13}{4}\right) \cup \ldots \cup \left[n; n+\frac{1}{n+1}\right) \cup \ldots = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \left[k; k+\frac{1}{k+1}\right)$;

ж) $\left(-1;-\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{4}\right) \cup \ldots = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k}; -\frac{1}{k+1}\right)$.

Если искомые точные грани конечны, то достигаются ли они? Символ $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ означает $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$

1.6. Пусть $A = \{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \underline{\alpha}_3, \ldots, \underline{\alpha}_n, \ldots\}$; $B = \{\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \overline{\alpha}_3, \ldots, \overline{\alpha}_n, \ldots\}$ — множества десятичных приближений соответственно снизу и сверху действительного числа α. Доказать, что $\alpha = \sup A = \inf B$.

1.7. Доказать свойства 2, 3, 8, 11 сложения действительных чисел.

1.8. Доказать свойства 18, 19, 20, 21, 24, 25 умножения действительных чисел.

1.9. Доказать, что если множества $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ — счётны, то и множество $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ счётно.

1.10. Доказать, что множество точек любого луча $(a; +\infty)$ несчётно.

1.11. Доказать, что множество всех алгебраических чисел (корней многочленов степеней 1, 2, 3, ... с целыми коэффициентами) счётно.

1.12. Построить взаимно однозначное отображение отрезка $[a; b]$ на интервал $(a; b)$.

1.13. Пусть α — положительное действительное число. Доказать, что существует единственное положительное действительное число β такое, что $\beta^2 = \alpha$ (арифметический квадратный корень из числа α).

1.14. Пусть α — действительное число. Доказать, что существует единственное действительное число β такое, что $\beta^3 = \alpha$ (кубический корень из α).

ГЛАВА II. **ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ**

§ 1. Общее понятие функции. Числовые последовательности

Определение 2.1. Пусть X, Y — два произвольных множества. Функцией f с областью определения X и множеством значений из Y называется такое соответствие между X и Y, при котором любому $x \in X$ соответствует ровно один $y \in Y$. Множество X называется областью определения функции (обозначается $X = D(f)$); множество элементов $y \in Y$, которые соответствуют некоторым $x \in X$, называется множеством значений функции (обозначается $E(f)$). Величина $x \in X$ называется аргументом функции f.

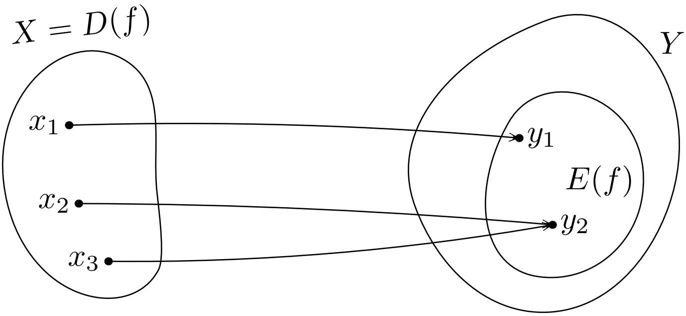

Рис. 2.1

Отметим, что $E(f) \subset Y$, но не обязано совпадать с Y. Возможно, различным x соответствует один и тот же y, но каждому x — ровно один y (см. рис. 2.1).

Пример 2.1. X — множество человек, присутствующих на лекции; $Y = \mathbb{N}$. Функция $y = f(x)$ определяется как год рождения x. Ясно, что $E(f) \subset Y$, но не совпадает с Y. Многим x может соответствовать один и тот же y, но каждому x — ровно один y.

Определение 2.2. Числовой последовательностью называется функция с областью определения $\mathbb{N}$ и множеством значений, принадлежащим $\mathbb{R}$: $y = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Обычно аргумент записывается в виде индекса: x_n, y_n, z_n, a_n и т.д.

Определение 2.3. Пусть $E(f) \subset \mathbb{R}$. Функция f называется ограниченной (ограниченной сверху, ограниченной снизу) на множестве X, если её множество значений ограничено (ограничено сверху, ограничено снизу). Точная верхняя и нижняя грани $E(f)$ называются точной верхней и нижней гранями f на X (обозначаются $\sup\limits_X f(x)$, $\inf\limits_X f(x)$). Числовая последовательность x_n называется ограниченной (ограниченной сверху, ограниченной снизу), если множество её значений ограничено (ограничено сверху, ограничено снизу). Точная верхняя и нижняя грани этого множества называются точной верхней и нижней гранями x_n (обозначаются $\sup x_n$, $\inf x_n$).

Пример 2.2. Последовательность $x_n = \frac{n}{n+1}$ ограничена, так как для всех n выполняется неравенство $0 < x_n < 1$. Отметим, что $x_n = 1 - \frac{1}{n+1}$; поэтому $x_{n+1} > x_n$, $n = 1, 2, \ \ldots$ (в дальнейшем такие последовательности мы будем называть строго возрастающими). Отсюда следует, что последовательность имеет наименьший член $x_1 = \frac{1}{2}$; по лемме 1.2 $\inf x_n = \frac{1}{2}$ (достигается). Докажем, что $\sup x_n = 1$ (не достигается). В самом деле, для всех n выполняется неравенство $x_n < 1$. Докажем, что для каждого числа $\alpha' < 1$ найдётся номер n такой, что $x_n > \alpha'$. Неравенство $1 - \frac{1}{n+1} > \alpha'$ перепишем в виде $n > \frac{1}{1-\alpha'} - 1$ (здесь использовано то, что $1 - \alpha' > 0$). Такой номер n найдётся по принципу Архимеда. Доказано, что $\sup x_n = 1$.

Лемма 2.1. *Функция f ограничена на множестве $X \iff$ $\iff$ найдётся такое положительное число C, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant C$.*

$\square$ $(\Leftarrow)$ Неравенство $|f(x)| \leqslant C$ равносильно $-C \leqslant f(x) \leqslant C$. Так как это двойное неравенство выполняется для всех $x \in X$, то это и означает, что множество значений f ограничено.

$\boxed{\Rightarrow}$ Так как для любого $x \in X$ выполняется неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то отсюда следует, что $|f(x)| \leqslant C$, где C — наибольшее из чисел $|m|$ и $|M|$. ■

Следствие. *Последовательность x_n ограничена $\iff$ найдётся такое положительное число C, что для всех n выполняется неравенство $|x_n| \leqslant C$.*

Подобные утверждения, формулировка которых содержит логический знак $\iff$ («тогда и только тогда», «необходимо и достаточно»), часто будут встречаться в нашем курсе. Доказательство их, как правило, будет состоять из двух частей: $\boxed{\Leftarrow}$ — достаточность, $\boxed{\Rightarrow}$ — необходимость. Лемма 2.1, например, может быть сформулирована так: для того чтобы функция f была ограничена на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы нашлось положительное число C такое, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant C$.

§ 2. Определение и простейшие свойства предела последовательности

Определение 2.4. ε-окрестностью точки a называется интервал $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Обозначение: $U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon; a+\varepsilon) = \{x : |x-a| < \varepsilon\}$; это множество точек, удалённых от точки a на числовой прямой на расстояние, меньшее, чем ε.

Определение 2.5 (геометрическое определение предела). Число a называется пределом последовательности x_n, если вне любой окрестности точки a содержится не более конечного числа членов x_n (обозначение: $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$).

Ясно, что вне $U_\varepsilon(a)$ содержится не более конечного числа x_n — это всё равно, что в $U_\varepsilon(a)$ содержатся все члены, начиная с некоторого номера. Определение предела можно сформулировать так.

Определение 2.5′. Число a называется пределом последовательности x_n, если для любого положительного числа ε найдётся номер n_0 такой, что при всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

На языке кванторов это можно записать так:

$$\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\, n_0: \quad \forall\, n \geqslant n_0 \to |x_n - a| < \varepsilon.$$

Любая подобная запись, где квантор существования $\exists$ стоит после квантора общности $\forall$, означает функциональную зависимость: здесь $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_0$, следовательно, $n_0 = n_0(\varepsilon)$.

Напишем на языке кванторов отрицание последнего определения (число a не является пределом последовательности x_n):

$$\exists\,\varepsilon > 0: \quad \forall\, n_0 \to \exists\, n \geqslant n_0: \quad |x_n - a| \geqslant \varepsilon.$$

Здесь уже нельзя считать, что $n_0 = n_0(\varepsilon)$; здесь $n = n(n_0)$.

Пример 2.3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, где $x_n = \dfrac{1}{n}$.

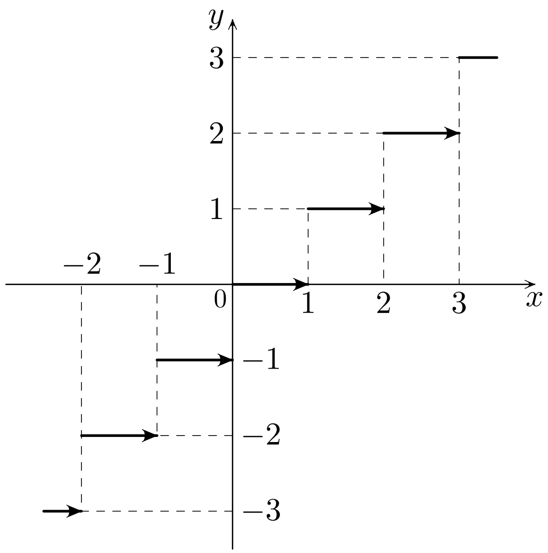

Рис. 2.2

$\square$ Докажем требуемое равенство по определению предела. Нужно, чтобы $\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\, n_0$: $\forall\, n \geqslant n_0 \to |x_n - 0| < \varepsilon$. Последнее неравенство имеет вид $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ и выполняется при $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. По принципу Архимеда найдётся натуральное число $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$, а при всех $n \geqslant n_0$ нужное неравенство и подавно выполняется. $\blacksquare$

Попробуем явно записать функциональную зависимость $n_0(\varepsilon)$. Для этого применим функцию $y = [x]$ («целая часть x»). Она определяется как наибольшее целое число, не превосходящее x. График этой функции изображён на рис. 2.2. Для всех «ступенек» крайняя левая точка принадлежит графику, крайняя правая — нет.

Ясно, что в качестве натурального числа $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ можно взять $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$; для всех $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ нужное неравенство выполняется.

Определение 2.6. Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся. Последовательность, не имеющая предела, называется расходящейся.

Лемма 2.2. *Сходящаяся последовательность имеет ровно один предел.*

$\square$ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$; для определённости, $a < b$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ такое, что

$$U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing \qquad \left(\varepsilon \leqslant \frac{b-a}{2}\right).$$

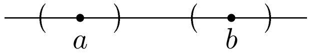

Рис. 2.3

По определению предела:

$$\begin{aligned} &\exists\, n_1: \quad \forall\, n \geqslant n_1 \to x_n \in U_\varepsilon(a);\\ &\exists\, n_2: \quad \forall\, n \geqslant n_2 \to x_n \in U_\varepsilon(b). \end{aligned}$$

Тогда если $n_3 = \max(n_1, n_2)$ — наибольший из номеров n_1 и n_2, то при $n \geqslant n_3$ имеем включение $x_n \in U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b)$ — противоречие. $\blacksquare$

Для доказательства большинства утверждений в теории пределов последовательностей достаточно представить себе геометрическую картинку (в данном случае рис. 2.3). После этого, как правило, уже несложно привести аккуратное доказательство.

Часто бывает удобно в качестве области определения последовательности рассматривать не всё множество $\mathbb{N}$, а множество целых чисел, не меньших некоторого фиксированного целого числа n_0. Например, последовательность $x_n = \dfrac{1}{n-3}$

определена (как последовательность) при $n \geqslant 4$, а $x_n = \dfrac{1}{n+3}$ можно определить при $n \geqslant -2$.

В силу геометрического определения предела, сходимость последовательности и величина предела не зависят от конечного числа членов (конечное число членов можно выбросить, добавить, заменить — сходимость и величина предела не изменятся). При исследовании сходимости можно считать, что x_n определена при $n \geqslant n_0$, где n_0 — фиксированное целое число.

Лемма 2.3. *Если последовательность x_n ограничена при $n \geqslant n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ (т.е. $\exists\, m, M$: $\forall\, n \geqslant n_0 \to m \leqslant x_n \leqslant M$), и определена при всех $n \in \mathbb{N}$, то она ограничена.*

□ Вне отрезка $[m, M]$ имеется не более конечного числа членов x_n (разве что $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0-1}$). Рассмотрим $m_1 = \min(x_1, x_2, \ldots, x_{n_0-1}, m)$; $M_1 = \max(x_1, x_2, \ldots, x_{n_0-1}, M)$. Тогда для всех натуральных n выполняются неравенства $m_1 \leqslant x_n \leqslant M_1$, т.е. x_n ограничена. ■

Лемма 2.4. *Сходящаяся последовательность ограничена.*

□ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. По определению предела ($\varepsilon = 1$): $\exists\, n_0$: $\forall\, n \geqslant n_0 \to |x_n - a| < 1$, т.е. $a - 1 < x_n < a + 1$. По лемме 2.3 x_n ограничена. ■

Обратное неверно. Ограниченная последовательность не обязана сходиться.

Пример 2.4. Рассмотрим последовательность $x_n = (-1)^n$ ($x_n = 1$ при чётном n, $x_n = -1$ при нечётном n). Так как при всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства $-1 \leqslant x_n \leqslant 1$, то x_n ограничена. Докажем, что x_n расходится.

□ Пусть x_n сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда по определению предела ($\varepsilon = 1$):

$$\exists\, n_0: \quad \forall\, n \geqslant n_0 \to |x_n - a| < 1.$$

Рассмотрим $n = n_0 + 1$ и $n = n_0$:

$$|x_{n_0+1} - a| < 1; \quad |x_{n_0} - a| < 1.$$

Но одно из чисел x_{n_0} и x_{n_0+1} равно 1, другое равно -1. Поэтому $|1 - a| < 1$ и $|-1 - a| < 1$, т.е. одновременно $0 < a < 2$ и $-2 < a < 0$. Противоречие. ■

Мы будем часто использовать обозначение $\operatorname{sign} x$ (читается «сигнум», что по латыни означает «знак»). По определению

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

График функции $y = \operatorname{sign} x$ изображён на рис. 2.4.

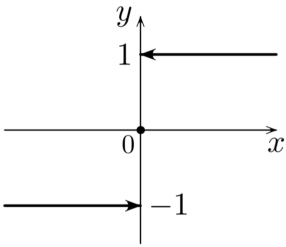

Рис. 2.4

Лемма 2.5. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$, *то найдётся номер* n_0 *такой, что при всех* $n \geqslant n_0$ *выполняется неравенство* $|x_n| > \frac{|a|}{2}$, *причём* $\operatorname{sign} x_n = \operatorname{sign} a$. *Иными словами:*
если $a > 0$, *то найдётся номер* n_0 *такой, что при всех* $n \geqslant n_0$ *выполняется неравенство* $x_n > \frac{a}{2}$;
если $a < 0$, *то найдётся номер* n_0 *такой, что при всех* $n \geqslant n_0$ *выполняется неравенство* $x_n < \frac{a}{2}$.

$\square$ Пусть $a > 0$. Рассмотрим в определении предела $\varepsilon = \frac{a}{2}$. Тогда $\exists\, n_0$: $\forall\, n \geqslant n_0 \to |x_n - a| < \frac{a}{2}$, откуда следует, что $x_n > \frac{a}{2}$ (см. рис. 2.5). Случай $a < 0$ рассматривается аналогично (в определении предела берётся $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$, см. рис. 2.6). $\blacksquare$

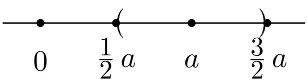

Рис. 2.5

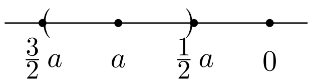

Рис. 2.6

Отсюда моментально следует

Лемма 2.6 (о сохранении знака). *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$, *то найдётся номер* n_0 *такой, что при всех* $n \geqslant n_0$ *знаки* x_n *и* a *совпадают. Иными словами, если* $a > 0$, *то найдётся номер* n_0 *такой, что при всех* $n \geqslant n_0$ *выполняется неравенство* $x_n > 0$; *если* $a < 0$, *то найдётся номер* n_0 *такой, что при всех* $n \geqslant n_0$ *выполняется неравенство* $x_n < 0$.

Определение 2.7. Последовательность α_n называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Лемма 2.7. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff x_n = a + \alpha_n$, *где* α_n — *бесконечно малая последовательность.*

□ Пусть $x_n - a = \alpha_n$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\, n_0: \ \forall\, n \geqslant n_0 \to |x_n - a| < \varepsilon \iff$$
$$\iff \forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\, n_0: \quad \forall\, n \geqslant n_0 \to |\alpha_n| < \varepsilon \iff$$
$$\iff \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0. \quad ■$$

Отметим, что если $x_n = C$ при $n = 1,\ 2,\ \ldots$ (постоянная последовательность), то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$; это следует из того, что $\alpha_n = x_n - C = 0$ — очевидно, бесконечно малая последовательность.

Лемма 2.8. *Сумма двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой.*

□ Пусть α_n и β_n — бесконечно малые. Поэтому

$$\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\, n_1: \quad \forall\, n \geqslant n_1 \to |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}\,;$$
$$\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\, n_2: \quad \forall\, n \geqslant n_2 \to |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Тогда при $n \geqslant n_0$, где $n_0 = \max(n_1, n_2)$, выполняется неравенство

$$|\alpha_n + \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. $\alpha_n + \beta_n$ — бесконечно малая. ■

Лемма 2.9. *Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную является бесконечно малой.*

□ Если последовательность β_n ограничена, то

$$\exists\, C > 0: \quad \forall\, n \to |\beta_n| \leqslant C.$$

Если α_n — бесконечно малая, то

$$\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\, n_0: \quad \forall\, n \geqslant n_0 \to |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{C}\,.$$

Тогда при $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $|\alpha_n \beta_n| < \frac{\varepsilon}{C} \cdot C = \varepsilon$, т.е. $\alpha_n \beta_n$ — бесконечно малая. ■

Следствие 1. *Если α_n — бесконечно малая последовательность, $C \in \mathbb{R}$, то $x_n = C\alpha_n$ — бесконечно малая.*

□ Следует из того, что постоянная последовательность ограничена. ■

Следствие 2. *Произведение двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой.*

□ Следует из того, что одну из этих последовательностей можно рассматривать просто как имеющую предел, следовательно, ограниченную. ■

Пример 2.5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$, так как $x_n = (-1)^n \cdot \dfrac{1}{n}$ — произведение ограниченной последовательности $(-1)^n$ на бесконечно малую $\dfrac{1}{n}$.

Теорема 2.1 (об арифметических операциях с пределами). *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда*

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$;

3) *если $b \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.*

□ $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где α_n и β_n — бесконечно малые последовательности.

1) $x_n + y_n = (a + \alpha_n) + (b + \beta_n) = (a + b) + \gamma_n$, где $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$ — бесконечно малая, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$.

2) $x_n y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + \gamma_n$, где $\gamma_n = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n$ — бесконечно малая, так как все три слагаемые являются бесконечно малыми по следствиям из леммы 2.9, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$. Отметим, что лемма 2.8 по индукции распространяется на случай суммы любого конечного фиксированного числа бесконечно малых последовательностей.

3) Так как $b \neq 0$, то по лемме 2.6 найдётся номер n_0 такой, что при всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $y_n \neq 0$, и последовательность $\dfrac{x_n}{y_n}$ определена при всех $n \geqslant n_0$. Она может быть не определена при некоторых значениях $n < n_0$, но, как мы уже отмечали, при исследовании сходимости последовательность может быть определена лишь при $n \geqslant n_0$, где n_0

— фиксированное целое число. В условии теоремы нет необходимости требовать, чтобы $y_n \neq 0$; достаточно потребовать $b \neq 0$. Имеем

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{y_n}\left(\alpha_n - \frac{a}{b}\,\beta_n\right).$$

Последовательность $\gamma_n = \alpha_n - \frac{a}{b}\,\beta_n$ — бесконечно малая по лемме 2.8 и следствию 1 из леммы 2.9. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$, то по лемме 2.5 $\exists\, n_1\colon\ \forall\, n \geqslant n_1 \to |y_n| > \frac{|b|}{2}$, откуда следует, что $\left|\frac{1}{y_n}\right| < \frac{2}{|b|}$. Последовательность $\frac{1}{y_n}$ ограничена при $n \geqslant n_1$. По лемме 2.3 эта последовательность ограничена (она может быть не определённой при конечном числе номеров n тех, где $y_n = 0$, но на наличие предела это не влияет). Тогда по лемме 2.9 последовательность $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{y_n}\cdot\gamma_n$ — бесконечно малая, и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$. ■

Следствия. *В условиях теоремы* 2.1

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(Cx_n) = Ca$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^k = a^k$ *(при* $k \in \mathbb{N}$*; если* $a \neq 0$*, то при* $k \in \mathbb{Z}$*)*;
4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k} = 0$ *при* $k \in \mathbb{N}$ *(т.к.* $\frac{1}{n^k} = \left(\frac{1}{n}\right)^k$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$*)*.

Теорема 2.2 (предельный переход в неравенстве). *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, *причём найдётся номер* n_0 *такой, что при всех* $n \geqslant n_0$ *выполнено неравенство* $x_n \leqslant y_n$, *то* $a \leqslant b$.

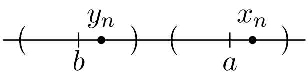

Рис. 2.7

□ Пусть $a > b$. Рассмотрим $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing$ (например, $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$). Тогда:

$$\exists\, n_1: \quad \forall\, n \geqslant n_1 \to x_n \in U_\varepsilon(a);$$
$$\exists\, n_2: \quad \forall\, n \geqslant n_2 \to y_n \in U_\varepsilon(b).$$

При $n \geqslant n_3 = \max(n_0, n_1, n_2)$ выполняется неравенство $x_n > y_n$, что противоречит условию (см. рис. 2.7). ■

Следствие. *Если найдётся номер n_0 такой, что при всех $n \geqslant n_0$ члены $x_n \in [a;b]$, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, то $\alpha \in [a;b]$.*

З а м е ч а н и е. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, и при всех $n \geqslant n_0$ выполнено неравенство $x_n < y_n$, то $a \leqslant b$ (возможно, $a = b$). Например: $x_n = -\frac{1}{n} < y_n = \frac{1}{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Теорема 2.3. *Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ и найдётся номер n_0 такой, что при всех $n \geqslant n_0$ выполнено неравенство $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.*

□

$$
\begin{aligned}
&\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\, n_1: \quad \forall\, n \geqslant n_1 \to x_n \in U_\varepsilon(a);\\
&\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\, n_2: \quad \forall\, n \geqslant n_2 \to z_n \in U_\varepsilon(a).
\end{aligned}
$$

Тогда при всех $n \geqslant n_3 = \max(n_0, n_1, n_2)$ выполняются неравенства $a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon$, т.е. $\forall\, n \geqslant n_3 \to y_n \in U_\varepsilon(a)$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. ■

В официальной литературе теорема 2.3 называется теоремой о трёх последовательностях или теоремой о зажатой переменной. Тем не менее на студенческом жаргоне и в различных внутривузовских изданиях она обычно называется «теоремой о двух милиционерах». В самом деле, если два представителя силовых структур x_n и z_n ведут задержанного y_n в отделение внутренних дел так, что y_n всё время находится между x_n и z_n, то y_n придёт туда же. Аналогичные названия этого утверждения имеются и в других языках («теорема о двух карабинерах» и т.д.), так что переименование милиции в полицию вряд ли что-нибудь здесь изменит.

Лемма 2.10. *Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.*

□ 1) При $q = 0$ утверждение очевидно.

2) Пусть $0 < q < 1$. Тогда $q = \dfrac{1}{1+\alpha}$, $\alpha > 0$. В элементарной алгебре хорошо известно неравенство Бернулли $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$, справедливое при $\alpha > -1$, $n \in \mathbb{N}$; его несложно доказать,

например, по индукции. Тогда (учитывая, что у нас $\alpha > 0$)

$$0 < q^n = \frac{1}{(1+\alpha)^n} \leqslant \frac{1}{1+n\alpha} < \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{n} = z_n.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$, и, по теореме 2.3, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

3) Пусть $-1 < q < 0$. Тогда рассмотрим $p = -q$; $0 < p < 1$. Так как по только что доказанному, $\lim\limits_{n\to\infty} p^n = 0$, то $q^n = (-1)^n p^n$ — также бесконечно малая последовательность, как произведение ограниченной $(-1)^n$ на бесконечно малую p^n. ■

Доказанные утверждения позволяют вычислять некоторые простые пределы.

Пример 2.6

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - n + 1}{2n^2 + 5n + 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2}} =$$

$$= \frac{3 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{2 + 5 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} + 3 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{3 - 0 + 0}{2 + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 0} = \frac{3}{2}$$

(и вообще, предел последовательности отношения двух многочленов от n одинаковой степени равен отношению их старших коэффициентов).

Пример 2.7

$$\lim_{n\to\infty} \frac{25^n + (-7)^n}{5^{2n+1} + 3^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \left(-\frac{7}{25}\right)^n}{5 + \left(\frac{9}{25}\right)^n} =$$

$$= \frac{1 + \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{-7}{25}\right)^n}{5 + \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{9}{25}\right)^n} = \frac{1+0}{5+0} = \frac{1}{5}$$

(здесь использована лемма 2.10).

Пример 2.8

$$x_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}.$$

Последовательность x_n представляет собой сумму n слагаемых, предел каждого из которых равен 0. Но было бы ошибкой на основании леммы о сумме бесконечно малых заявить, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Лемма 2.8 была доказана для двух слагаемых и, как было отмечено, справедлива для конечного фиксированного числа слагаемых. В нашем же случае число слагаемых равно n (неограниченно растёт). Оценим последовательность x_n сверху и снизу; воспользуемся тем, что самое большое слагаемое в сумме — первое, самое маленькое — последнее. Поэтому

$$\frac{n^2}{n^2+n} = n \cdot \frac{n}{n^2+n} \leqslant x_n \leqslant n \cdot \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1}\,.$$

Аналогично примеру 2.6, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = 1$. Поэтому по теореме 2.3 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ (не равен нулю!).

§ 3. Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса

Определение 2.8. Последовательность x_n называется строго возрастающей, если для всех номеров n выполняется неравенство $x_{n+1} > x_n$; строго убывающей, если для всех n выполняется неравенство $x_{n+1} < x_n$; нестрого возрастающей, если для всех n выполняется неравенство $x_{n+1} \geqslant x_n$; нестрого убывающей, если для всех n выполняется неравенство $x_{n+1} \leqslant x_n$. Все такие последовательности называются монотонными.

Применяем обозначения: $x_n \uparrow$ для возрастающих последовательностей (строго или нестрого), $x_n \downarrow$ для убывающих последовательностей (строго или нестрого). Последовательность может быть монотонной, начиная с некоторого номера. Например, последовательность x_n является строго убывающей, начиная с номера n_0, если $\forall\, n \geqslant n_0 \to x_{n+1} < x_n$, и т.д.

Теорема 2.4 (Вейерштрасса). *Если последовательность x_n возрастает (вообще говоря, нестрого) и ограничена сверху, то существует предел последовательности x_n, равный её точ-*

ной верхней грани. Если последовательность x_n убывает (вообще говоря, нестрого) и ограничена снизу, то существует предел последовательности x_n, равный её точной нижней грани.

□ Докажем первую часть теоремы; вторая доказывается аналогично. По теореме 1.5 последовательность x_n имеет точную верхнюю грань $\sup x_n = \alpha$. Тогда

$$(\forall\, n \to x_n \leqslant \alpha) \wedge (\forall\, \alpha' < \alpha \to \exists\, n_0 : \quad x_{n_0} > \alpha').$$

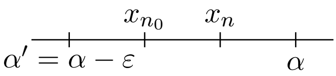

Рис. 2.8

Удобно обозначить $\alpha' = \alpha - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. В силу возрастания последовательности, для всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $x_n \geqslant x_{n_0}$, но при этом $x_n \leqslant \alpha$.

Итак:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, n_0 : \quad \forall\, n \geqslant n_0 \to \alpha - \varepsilon < x_n \leqslant \alpha,$$

а отсюда следует, что $x_n \in U_\varepsilon(\alpha)$ (см. рис. 2.8). Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$. ■

Теорема Вейерштрасса — чистая теорема существования. Она не даёт непосредственной возможности вычислять значение предела.

Пример 2.9. Рассмотрим последовательность

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

(символ $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ означает $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$). Ясно, что эта последовательность строго возрастает, так как $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{(n+1)^2} > x_n$. Далее, при $k \geqslant 2$ выполняется оценка

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

поэтому

$$x_n < 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2 - \frac{1}{k} < 2.$$

Последовательность x_n возрастает и ограничена сверху, поэтому она сходится. Значение $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ совпадает с $\sup x_n$, но мы не можем найти ни то, ни другое. Можно показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi^2}{6}$, но это доказательство нам пока недоступно.

Пример 2.10. Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Докажем, что последовательность строго возрастает и для всех n выполняется неравенство $x_n < 3$. Отсюда будет следовать, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Этот предел обозначается буквой e. Число e иррациональное, $e = 2,718281828459045\ldots$ Это число играет исключительную роль в математическом анализе.

□ Напомним формулу бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = C_n^0\cdot a^n + C_n^1\cdot a^{n-1}b + C_n^2\cdot a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-1}\cdot ab^{n-1} + C_n^n\cdot b^n,$$

где $$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

— так называемые биномиальные коэффициенты. Напомним также, что $n!$ (n факториал) — это произведение всех натуральных чисел от 1 до n: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$; по дополнительному определению, $0! = 1$. Легко видеть, что $C_n^k = C_n^{n-k}$ при $k = 0, 1, 2, \ldots, n$; $C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$; $C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$; $C_n^3 = C_n^{n-3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$, и т.д.

Имеем

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot 1^{n-1}\cdot\frac{1}{n} + C_n^2\cdot 1^{n-2}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots + C_n^k\cdot 1^{n-k}\cdot\frac{1}{n^k} + \ldots + C_n^{n-1}\cdot\frac{1}{n^{n-1}} + C_n^n\cdot\frac{1}{n^n} = 2 + \frac{C_n^2}{n^2} + \ldots + \frac{C_n^k}{n^k} + \ldots + \frac{C_n^n}{n^n};$$

$$x_{n+1} = 2 + \frac{C_{n+1}^2}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{C_{n+1}^k}{(n+1)^k} + \ldots + \frac{C_{n+1}^n}{(n+1)^n} + \frac{C_{n+1}^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}.$$

Нетрудно заметить, что при $2 \leqslant k \leqslant n$

$$\frac{C_n^k}{n^k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!n^k} =$$
$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{k!} <$$
$$< \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)\frac{1}{k!} = \frac{C_{n+1}^k}{(n+1)^k}\,.$$

Поэтому так как при $n \geqslant 1$ в x_{n+1} последнее слагаемое положительно, то $x_{n+1} > 2+\frac{C_n^2}{n^2}+\ldots+\frac{C_n^k}{n^k}+\ldots+\frac{C_n^n}{n^n} = x_n$. Значит, последовательность x_n строго возрастает. Далее,

$$\frac{C_n^k}{n^k} \leqslant \frac{1}{k!} \quad \text{при} \quad k \geqslant 2, \quad \text{а} \quad k! = 2\cdot 3\cdot\ \ldots\cdot k \geqslant \underbrace{2\cdot 2\cdot\ \ldots\cdot 2}_{k-1 \text{ раз}} = 2^{k-1};$$

поэтому $\frac{C_n^k}{n^k} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$, и при всех n

$$x_n \leqslant 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}} = 2+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^k}}{1-\frac{1}{2}} = 3-\frac{1}{2^{k-1}} < 3. \blacksquare$$

Иногда теорема Вейерштрасса позволяет установить сходимость последовательности, после чего, переходя к пределу в рекуррентном соотношении, можно вычислить значение предела.

Пример 2.11. Докажем, что если $x_n = \frac{a^n}{n!}$, $a > 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

$\square$ Если $0 < a \leqslant 1$, то $0 < x_n \leqslant \frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{n}$, и по теореме 2.3 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Пусть теперь $a > 1$. Тогда $z_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$. Напишем определение предела при $\varepsilon = 1$: $\exists\, n_0$: $\forall\, n \geqslant n_0 \to |z_n| < 1$; в силу положительности x_n последнее неравенство даёт $0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Значит, последовательность x_n убывает при $n \geqslant n_0$; при этом $x_n > 0$. Так как конечное число членов последовательности не влияет на сходимость, то по теореме Вейерштрасса последовательность x_n сходится; обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta$.

Мы уже видели, что последовательность x_n удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$x_{n+1} = \frac{a}{n+1}\, x_n. \tag{2.1}$$

Последовательность x_{n+1} — та же последовательность, что и x_n (если выбросить x_1); поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \beta$. Переходя к пределу в (2.1), получим

$$\beta = 0 \cdot \beta, \quad \text{откуда} \quad \beta = 0. \qquad \blacksquare$$

§ 4. Теорема Кантора о вложенных отрезках

Если проанализировать изложенный выше материал, то можно заметить, что только три утверждения: теорема 1.4 Дедекинда, теорема 1.5 о точных верхней и нижней гранях и теорема 2.4 Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности — характерны именно для действительных чисел и выражают свойство их полноты (непрерывности). Все остальные утверждения имели бы место и во множестве рациональных чисел. Например, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, где x_n, y_n, a, $b \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$. А вот если последовательность рациональных чисел возрастает и ограничена сверху, то она может не иметь рационального предела (и соответственно рациональной точной верхней грани). В качестве примера можно рассмотреть последовательность десятичных приближений снизу какого-нибудь иррационального числа α. Эта последовательность имеет предел α (мы сейчас докажем это полезное утверждение), но не имеет рационального предела; если бы она имела рациональный предел β, то у неё было бы два разных действительных предела α и β, что противоречит лемме 2.2.

Лемма 2.11. *Пусть $\underline{\alpha}_n$ и $\overline{\alpha}_n$ — последовательности десятичных приближений снизу и сверху действительного числа α. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{\alpha}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{\alpha}_n = \alpha$.*

□ Как известно, для любого n выполняется неравенство

$$\underline{\alpha}_n \leqslant \alpha \leqslant \overline{\alpha}_n.$$

Тогда $0 \leqslant \alpha - \underline{\alpha}_n \leqslant \overline{\alpha}_n - \underline{\alpha}_n = \frac{1}{10^n} < \frac{1}{n}$.

Значит, $\alpha - \frac{1}{n} < \underline{\alpha}_n \leqslant \alpha$, по теореме 2.3 $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{\alpha}_n = \alpha$. Аналогично доказывается вторая часть утверждения. ■

Приведём ещё одну очень важную теорему, выражающую свойство полноты действительных чисел.

Теорема 2.5 (Кантора о вложенных отрезках). *Если $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \ldots \supset [a_n; b_n] \supset \ldots$ (бесконечная последовательность вложенных отрезков), то существует точка γ, общая для всех отрезков (т.е. для всех n выполняется неравенство $a_n \leqslant \gamma \leqslant b_n$). Если при этом последовательность длин отрезков стремится к нулю ($\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$), то такая точка γ единственна, при этом*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} a_n = \sup a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \inf b_n.$$

□ Так как для всех n

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1,$$

то для любых натуральных n и m выполняется неравенство $a_n \leqslant b_m$. Рассмотрим множества $A = \{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \ldots\}$ и $B = \{b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n \ldots\}$. При любом фиксированном $m = 1,\ 2,\ \ldots$ множество A ограничено сверху числом b_m; значит, существует $\gamma_1 = \sup A = \sup a_n$; при этом по лемме 1.3 для любого m выполняется неравенство $\gamma_1 \leqslant b_m$. Аналогично множество B ограничено снизу и существует $\gamma_2 = \inf B = \inf b_n$, и для любого n выполняется неравенство $\gamma_2 \geqslant a_n$. Из последнего неравенства и леммы 1.3 следует, что $\gamma_1 \leqslant \gamma_2$. Итак, для любого n выполняются неравенства $a_n \leqslant \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant b_n$. Ясно, что точки γ_1 и γ_2 (и весь отрезок $[\gamma_1, \gamma_2]$, если $\gamma_1 < \gamma_2$) принадлежат всем отрезкам $[a_n; b_n]$. Первая часть теоремы доказана. Отметим, что здесь нигде не использовалось понятие предела.

Пусть теперь $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Тогда

$$\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\, n_0: \quad \forall\, n \geqslant n_0 \to b_n - a_n < \varepsilon$$

(мы учли, что $b_n - a_n > 0$). Так как $a_n \leqslant \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant b_n$, то из леммы 1.5 следует, что $\gamma_1 = \gamma_2$. Обозначим их общее значение γ. Тогда $\gamma = \sup a_n = \inf b_n$. В силу монотонного возрастания и ограниченности сверху последовательности a_n по теореме Вейерштрасса $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Аналогично $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Если существует ещё одна точка δ такая, что для всех n выполняется неравенство $a_n \leqslant \delta \leqslant b_n$, то по лемме 1.5 $\gamma = \delta$. Единственность общей точки доказана. ■

Пример 2.12. $[a_n; b_n] = \left[-\frac{1}{n}\,; \frac{1}{n}\right]$; это — последовательность вложенных отрезков, для которой $b_n - a_n = \frac{2}{n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Существует единственная общая точка 0.

Пример 2.13. $[a_n; b_n] = \left[-\frac{1}{n}\,; 1 + \frac{1}{n}\right]$; это — последовательность вложенных отрезков, для которой $b_n - a_n = 1 + \frac{2}{n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) \neq 0$. Общие точки заполняют целый отрезок $[0; 1]$.

Пример 2.14. Для последовательности вложенных интервалов теорема теряет силу. Пусть $(a_n; b_n) = \left(0; \frac{1}{n}\right)$. Эта последовательность вложенных интервалов не имеет общих точек, при этом $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

§ 5. Бесконечно большие последовательности

Наряду с ε-окрестностями конечных чисел рассмотрим ε-окрестности символов $+\infty$, $-\infty$, ∞.

Определение 2.9. При $\varepsilon > 0$:

$$U_\varepsilon(+\infty) = (\varepsilon; +\infty); \quad U_\varepsilon(-\infty) = (-\infty; -\varepsilon);$$
$$U_\varepsilon(\infty) = (-\infty; -\varepsilon) \cup (\varepsilon; +\infty).$$

Определение 2.10. Говорят, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если $\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\, n_0$: $\forall\, n \geqslant n_0 \to x_n \in U_\varepsilon(+\infty)$ (т.е. $x_n > \varepsilon$).

Говорят, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если $\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\, n_0\colon\ \forall\, n \geqslant n_0 \to$ $\to x_n \in U_\varepsilon(-\infty)$ (т.е. $x_n < -\varepsilon$).

Говорят, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, если $\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\, n_0\colon\ \forall\, n \geqslant n_0 \to$ $\to x_n \in U_\varepsilon(\infty)$ (т.е. $|x_n| > \varepsilon$).

В последнем случае последовательность называется бесконечно большой.

В определении конечного предела по существу малые $\varepsilon >$ > 0 (если $x_n \in U_\varepsilon(a)$ для малых ε, то и подавно для больших). В определениях бесконечных пределов по существу большие ε; из эстетических соображений лучше вместо ε писать большую букву E.

Очевидно, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, то x_n — бесконечно большая. Обратное неверно; для бесконечно большой последовательности x_n не обязательно $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Пример 2.15. $x_n = n$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

$\square$ $\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\, n_0\colon\ \forall\, n \geqslant n_0 \to x_n > E$. Неравенство $n > E$ выполняется для всех $n \geqslant n_0$, где $n_0(E) = [E] + 1$; напомним, что там, где квантор существования стоит после квантора общности, имеет место функциональная зависимость ($n_0 = n_0(E)$). $\blacksquare$

Пример 2.16. $x_n = -n$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ (аналогично).

Пример 2.17. $x_n = (-1)^n n$. Так как $|x_n| = n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =$ $= \infty$, но знаки x_n чередуются; поэтому неверно ни то, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, ни то, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ тогда и только тогда, когда x_n бесконечно большая и $\exists\, n_0\colon\ \forall\, n \geqslant n_0 \to x_n > 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =$ $= -\infty$ тогда и только тогда, когда x_n бесконечно большая и $\exists\, n_0\colon\ \forall\, n \geqslant n_0 \to x_n < 0$.

Лемма 2.12. *Бесконечно большая последовательность является неограниченной.*

$\square$ x_n неограничена:

$$\forall\, E > 0 \to \exists\, n: \quad |x_n| > E.$$

x_n бесконечно большая:

$$\forall\, E > 0 \to \exists\, n_0 : \quad \forall\, n \geqslant n_0 \to |x_n| > E.$$

Ясно, что бесконечно большая последовательность неограничена. ■

Обратное неверно. Неограниченная последовательность не обязана быть бесконечно большой.

Пример 2.18. Рассмотрим последовательность

$$x_n = n(1 + (-1)^n) = \begin{cases} 2n, & \text{если } n \text{ чётно;} \\ 0, & \text{если } n \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Она неограничена, но не является бесконечно большой.

□ Последовательность неограничена за счёт чётных номеров. $\forall\, E > 0 \to \exists\, n$ — чётное: $|x_n| = 2n > E$. Это верно, так как $\forall\, E > 0 \to \exists$ чётное $n > \frac{E}{2}$ (например, $n(E) = 2\left(\left[\frac{E}{4}\right] + 1\right)$).

За счёт нечётных номеров последовательность не является бесконечно большой:

$$\exists\, E > 0 : \quad \forall\, n_0 \to \exists\, n \geqslant n_0 : \quad |x_n| \leqslant E.$$

Это верно. Возьмём, например, $E = 1$. Для любого номера n_0 найдётся нечётное натуральное число $n \geqslant n_0$, например, $n = 2n_0 + 1$; при этом $|x_n| = 0 < 1$. ■

Схема, изображённая на рис. 2.9, должна помочь разобраться в понятиях, связанных со сходимостью, ограниченностью и т.д., а также усвоить связь между этими понятиями.

Рис. 2.9

Лемма 2.13. 1) *Если последовательность x_n является бесконечно большой, то последовательность $y_n = \frac{1}{x_n}$ — бесконечно малая.*

2) *Если последовательность x_n бесконечно малая и найдётся номер n_0 такой, что для всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $x_n \neq 0$, то последовательность $y_n = \frac{1}{x_n}$ — бесконечно большая.*

$\square$ 1) $\forall\, E > 0 \to \exists\, n_0$: $\forall\, n \geqslant n_0 \to |x_n| > E$. Тогда при $n \geqslant n_0$ выполнено неравенство $x_n \neq 0$; последовательность $y_n = \frac{1}{x_n}$ определена, и не нужно делать дополнительную оговорку, как во второй части леммы. Для любого числа $\varepsilon > 0$ рассмотрим $E = \frac{1}{\varepsilon} > 0$. Тогда $\exists\, n_0$: $\forall\, n \geqslant n_0 \to |x_n| > E$, значит, $|y_n| = \left|\frac{1}{x_n}\right| < \frac{1}{E} = \varepsilon$, т.е. y_n — бесконечно малая.

2) Доказательство аналогично. $\blacksquare$

Лемму 2.13 символически можно записать так: $\frac{1}{\infty} = 0$; $\frac{1}{0} = \infty$. Но отсюда вовсе не следует, что $0 \cdot \infty = 1$. Бесконечные символы — это не числа, с ними нельзя «вольно» обращаться, т.е. автоматически переносить на них формальные правила операций с действительными числами. Выражение $0 \cdot \infty$ называется «неопределённостью», так как в зависимости от конкретных бесконечно малой x_n и бесконечно большой y_n предельное поведение последовательности $x_n \cdot y_n$ может быть самым разнообразным. Произведение $x_n y_n$ может быть: а) бесконечно малым; б) бесконечно большим; в) иметь конечный ненулевой предел; г) не иметь предела — ни конечного ни бесконечного.

Пример 2.19. Во всех случаях $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$:

а) $x_n = \frac{1}{n^2}$; $y_n = n$; $x_n y_n = \frac{1}{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$;

б) $x_n = \frac{1}{n}$; $y_n = n^2$; $x_n y_n = n$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$;

в) $x_n = \frac{1}{n}$; $y_n = n$; $x_n y_n = 1$;

г) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$; $y_n = n$; $x_n y_n = (-1)^n$ — ограничена, но расходится.

Традиционно принято рассматривать 7 типов неопределённостей: $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, для каждого из которых можно построить примеры типа а–г. Классическим типом неопределённости 1^∞ является предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Теоремы об арифметических действиях с пределами нельзя автоматически переносить на бесконечные символы. Если в каком-то случае такой перенос имеет место, то нужно доказать соответствующее утверждение.

Лемма 2.14. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$ *(символическая запись:* $(+\infty) + a = +\infty$*).*

$\square$ Достаточно провести доказательство для случая, когда y_n ограничена снизу ($\exists\, m$: $\forall\, n \to y_n \geqslant m$). Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, то $\forall\, E > 0 \to \exists\, n_0$: $\forall\, n \geqslant n_0 \to x_n > E - m$ (строго говоря, это верно при $E - m > 0$, но если $E - m \leqslant 0$, неравенство и подавно верно). Итак,

$$\forall\, E > 0 \to \exists\, n_0 : \quad \forall\, n \geqslant n_0 \to x_n + y_n > E - m + m = E,$$

значит, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$. $\blacksquare$

Можно привести ещё немало символических записей с участием бесконечных символов, которые фактически применяются в различных рассуждениях. При этом нужно уметь аккуратно формулировать и доказывать возникающие утверждения (аналогично лемме 2.14). Например:

$$(+\infty)\cdot a = +\infty, \quad a > 0; \qquad (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty;$$
$$(+\infty)\cdot a = -\infty, \quad a < 0; \qquad (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty;$$
$$(-\infty)\cdot a = -\infty, \quad a > 0; \qquad (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty;$$
$$(-\infty)\cdot a = +\infty, \quad a < 0; \qquad (+\infty)^k = +\infty, \quad k \in \mathbb{N};$$
$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty; \qquad \infty^k = +\infty, \quad k \in \mathbb{N},\ \text{чётное};$$
$$\infty^k = 0, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k < 0;$$
$$0^k = \infty, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k < 0.$$

Лемма 2.15. 1) *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *и* $\exists\, n_0$: $\forall\, n \geqslant n_0 \to$ $\to y_n \geqslant x_n$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$*;*

2) *если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ *и* $\exists\, n_0$: $\forall\, n \geqslant n_0 \to y_n \leqslant x_n$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$.

□ 1) Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, то $\forall\, E > 0 \to \exists\, n_1$: $\forall\, n \geqslant n_1 \to x_n > E$. Пусть $n_2 = \max(n_0, n_1)$. Тогда $\forall\, n \geqslant n_2 \to y_n > E$, а это значит, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$.

2) Доказательство аналогично. ■

Эта лемма является аналогом теоремы 2.3 для случая бесконечно больших последовательностей.

Пример 2.20. $\forall\, k \in \mathbb{N} \to \lim\limits_{n\to\infty} n^k = +\infty$.

□ Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, то по лемме 2.13, $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$ (с учётом того, что $n > 0$). Остаётся заметить, что $n^k \geqslant n$, и применить лемму 2.15. ■

Теорема 2.6 (аналог теоремы Вейерштрасса для неограниченных последовательностей). *Если последовательность x_n возрастает (вообще говоря, нестрого) и неограничена сверху, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Если последовательность x_n убывает (вообще говоря, нестрого) и неограничена снизу, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.*

□ Докажем первую часть теоремы, вторая доказывается аналогично. Так как x_n неограничена сверху, то

$$\forall\, E \to \exists\, n_0: \quad x_{n_0} > E$$

(естественно, можно считать, что $E > 0$, при $E \leqslant 0$ неравенство и подавно верно). В силу возрастания последовательности при всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $x_n \geqslant x_{n_0}$, поэтому

$$\forall\, E > 0 \to \exists\, n_0: \quad \forall\, n \geqslant n_0 \to x_n > E.$$

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. ■

В отличие от теоремы Вейерштрасса 2.4 эта теорема имеет место и во множестве рациональных чисел, она не является характерной именно для действительных чисел.

Для неограниченной сверху последовательности мы считаем по определению, что $\sup x_n = +\infty$, а для неограниченной снизу $\inf x_n = -\infty$. Поэтому для любой нестрого возрастающей последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup x_n$, а для любой нестрого убывающей $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf x_n$.

§ 6. Односторонние пределы

Введём символы $a+0$ и $a-0$ («a справа» и «a слева»), $a \in \mathbb{R}$, и определим ε-окрестности этих символов.

Определение 2.11. При $\varepsilon > 0$:

$$U_\varepsilon(a+0) = [a; a+\varepsilon); \quad U_\varepsilon(a-0) = (a-\varepsilon; a].$$

Определение 2.12. Говорят, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a+0$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, n_0 : \quad \forall\, n \geqslant n_0 \to x_n \in U_\varepsilon(a+0)$$

(т.е. $a \leqslant x_n < a+\varepsilon$).

Говорят, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a-0$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, n_0 : \quad \forall\, n \geqslant n_0 \to x_n \in U_\varepsilon(a-0)$$

(т.е. $a-\varepsilon < x_n \leqslant a$).

Ясно, что в обоих этих случаях $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. А вот если предел последовательности x_n равен a, то не обязательно он равен $a+0$ или $a-0$.

Пример 2.21. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = +0$ (вместо $0+0$ обычно пишут $+0$); $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = -0$ (вместо $0-0$ обычно пишут -0). А вот $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, но этот предел не равен ни $+0$, ни -0, так как последовательность всё время меняет знак.

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a+0$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\exists\, n_0$: $\forall\, n \geqslant n_0 \to x_n \geqslant a$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a-0$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\exists\, n_0$: $\forall\, n \geqslant n_0 \to x_n \leqslant a$.

В дальнейшем под словами «6 стандартных предельных символов (СПС)» будем понимать

$$a; \quad a+0; \quad a-0; \quad +\infty; \quad -\infty; \quad \infty.$$

§ 7. Частичные пределы. Теорема Больцано–Вейерштрасса

Определение 2.13. Пусть x_n — числовая последовательность, а n_k, $k = 1, 2, \ldots$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда последовательность $y_k = x_{n_k}$ (с индексом k) называется подпоследовательностью последовательности x_n.

Определение 2.14. Число $a \in \mathbb{R}$ называется частичным пределом (предельной точкой) последовательности x_n, если существует такая строго возрастающая последовательность индексов n_k, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

Пример 2.22. Рассмотрим последовательность $x_n = (-1)^n$. Она расходится, но имеет сходящиеся подпоследовательности $x_{2k} = 1$ и $x_{2k-1} = -1$. Таким образом, она имеет частичные пределы 1 и -1.

Условие строгого возрастания последовательности n_k в определении 2.13 является достаточным (но не необходимым) условием для того, чтобы $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$. В самом деле, $n_1 \geqslant 1$; $n_2 > n_1 \Rightarrow n_2 \geqslant 2$; $n_3 > n_2 \Rightarrow n_3 \geqslant 3$, и т.д. По индукции нетрудно доказать, что $n_k \geqslant k$ при $k = 1, 2, \ldots$ Но $\lim\limits_{k\to\infty} k = +\infty$ (пример 2.20); по лемме 2.15, $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$. При отказе от этого условия может оказаться так, что последовательность n_k ограничена, и ни о каком поведении при $n \to \infty$ не может быть речи (например, при $n_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots$ последовательность x_{n_k} не имеет никакого отношения к предельному поведению последовательности x_n).

Лемма 2.16. *Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, где α — один из 6 СПС, то для любой последовательности x_{n_k} также $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$.*

□ По геометрическому определению предела, сохраняющемуся для любого СПС α, вне любой $U_\varepsilon(\alpha)$, $\varepsilon > 0$, имеется не более конечного числа членов x_n. Так как все n_k различны, то вне любой $U_\varepsilon(\alpha)$ и подавно имеется не более конечного числа x_{n_k}; значит, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$. ■

Следствие. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, *то* a *— единственный частичный предел* x_n.

Под частичными пределами можно понимать также символы $+\infty$ и $-\infty$. Таким образом, частичными пределами могут быть не все 6 СПС, а только три: a, $+\infty$, $-\infty$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, то по лемме 2.16 единственным частичным пределом последовательности является $+\infty$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, то единственным частичным пределом последовательности является $-\infty$.

Теорема 2.7 (критерий частичного предела). *Пусть* α *— один из символов* a, $+\infty$, $-\infty$. *Тогда* α *является частичным пределом* $x_n \iff$ *в любой* ε*-окрестности* α $(\varepsilon > 0)$ *содержится бесконечно много членов* x_n.

$\square$ $(\Rightarrow)$ Если α — частичный предел x_n, то существует подпоследовательность x_{n_k} такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$ $(n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ вне $U_\varepsilon(\alpha)$ содержится не более конечного числа членов x_{n_k}, а внутри $U_\varepsilon(\alpha)$ — все x_{n_k}, начиная с некоторого номера k_0, а значит, бесконечно много членов x_n.

$(\Leftarrow)$ Сначала рассмотрим случай $\alpha = a \in \mathbb{R}$. Возьмём $\varepsilon = 1$; x_{n_1} — некоторый член $x_n \in U_1(a)$. Возьмём теперь $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Так как в $U_{1/2}(a)$ содержится бесконечно много членов x_n, то выберем $x_{n_2} \in U_{1/2}(a)$ так, что $n_2 > n_1$, и т.д. Пусть построены $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$, где $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$; $x_{n_k} \in U_{1/k}(a)$. Так как в $U_{1/(k+1)}(a)$ бесконечно много x_n, то выберем $x_{n_{k+1}} \in U_{1/(k+1)}(a)$ так, что $n_{k+1} > n_k$. Таким образом, построена бесконечная последовательность x_{n_k}, причём $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, $x_{n_k} \in U_{1/k}(a)$. т.е. $a - \frac{1}{k} < x_{n_k} < a + \frac{1}{k}$. По теореме 2.3 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, т.е. a — частичный предел x_n.

Для $\alpha = +\infty$ или $\alpha = -\infty$ доказательство аналогично. Например, для $\alpha = +\infty$ нужно брать $\varepsilon = 1, 2, 3, \ldots, k, \ldots$; x_{n_k} выбирать таким, что $x_{n_k} \in U_k(+\infty)$, т.е. $x_{n_k} > k$. Тогда по лемме 2.15 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$. $\blacksquare$

Заметим, что если в любой $U_\varepsilon(\alpha)$ содержится бесконечно много x_n, то отсюда ещё не следует, что вне $U_\varepsilon(\alpha)$ не более конечного числа x_n (вне $U_\varepsilon(\alpha)$ тоже может быть бесконечно много x_n). Этим и отличается частичный предел от предела последовательности. В популярных изданиях для школьников раньше предел последовательности иногда назывался «ловушкой», а частичный предел — «кормушкой». Кормушек может быть много, а ловушка — только одна.

В примере 2.22 других частичных пределов, кроме 1 и -1, последовательность $x_n = (-1)^n$ не имеет. В самом деле, если $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \pm 1$, или $\alpha = \pm\infty$, то существует окрестность α, в которой вообще нет членов x_n.

Пример 2.23. $x_n = n(1 + (-1)^n)$ (см. пример 2.18). Так как $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = +\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = 0$, то частичными пределами последовательности являются 0 и $+\infty$. Других частичных пределов последовательность не имеет (для других α существует окрестность, в которой вообще нет членов x_n).

Пример 2.24. $x_n = n\cdot(-1)^n$, т.е. $x_{2k} = 2k$, $x_{2k-1} = -(2k - 1)$, $k = 1, 2, \ldots$. Так как $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = +\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = -\infty$, то частичными пределами последовательности являются $+\infty$ и $-\infty$; других частичных пределов последовательность не имеет.

Пример 2.25. Пусть x_n — последовательность, в которую каким-то образом занумерованы все рациональные числа (это можно сделать в силу счётности множества $\mathbb{Q}$). Так как в любой окрестности любого действительного числа α содержится бесконечно много рациональных чисел (если $\alpha \in \mathbb{Q}$, то возьмём $r_n = \alpha + \frac{1}{n}$; если $\alpha \notin \mathbb{Q}$, то $r_n = \overline{\alpha}_n$; в любом случае $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \alpha$, и в любой $U_\varepsilon(\alpha)$ содержатся все r_n при $n \geqslant n_0$, т.е. бесконечно много членов x_n), то α — частичный предел x_n. Аналогично, для $\alpha = +\infty$ возьмём $r_n = n$, для $\alpha = -\infty$ возьмём $r_n = -n$. Итак, частичными пределами x_n являются все действительные числа, а также символы $+\infty$ и $-\infty$.

Как мы знаем, ограниченная последовательность может расходиться, но при этом иметь частичные пределы (пример 2.22). Это не случайно, имеет место

Теорема 2.8 (Больцано–Вейерштрасса). *Любая ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность (т.е. имеет конечный частичный предел).*

□ Пусть для всех $n = 1,\ 2,\ \ldots$ выполняется неравенство $a \leqslant x_n \leqslant b$. Разобьём отрезок $[a; b]$ на 2 равных отрезка $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$ и $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$; выберем ту половину Δ_1, где содержится бесконечно много членов x_n (и там, и там конечного числа x_n быть не может, так как тогда их всего было бы конечное число). Если и там, и там бесконечно много x_n, то Δ_1 — любая из половинок. В отрезке Δ_1 выберем половину Δ_2, где бесконечно много x_n (аналогично), в Δ_2 — половину Δ_3, где бесконечно много x_n и т.д. На k-м шагу в Δ_k выберем половину Δ_{k+1}, где бесконечно много x_n. Имеем последовательность вложенных отрезков $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \ldots$, причём длина n-го отрезка равна $\frac{b-a}{2^n} = (b-a)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ — стремится к нулю по лемме 2.10.

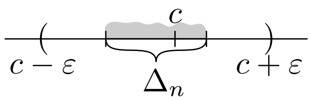

Рис. 2.10

По теореме Кантора о вложенных отрезках существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам Δ_n. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $\exists\, n_0\colon\ \forall\, n \geqslant n_0 \to$ длина $\Delta_n < \varepsilon$, то при $n \geqslant n_0$ отрезок Δ_n целиком принадлежит $U_\varepsilon(c)$ (см. рис. 2.10), значит, в $U_\varepsilon(c)$ бесконечно много членов x_n. По теореме 2.7 c — частичный предел x_n. ■

Теорема 2.9 (аналог теоремы Больцано–Вейерштрасса для неограниченных последовательностей). *Если последовательность x_n неограничена сверху, то она имеет частичный предел $+\infty$. Если последовательность x_n неограничена снизу, то она имеет частичный предел $-\infty$.*

□ Докажем первую часть теоремы: вторая доказывается аналогично. Зафиксируем $E > 0$. Так как x_n неограничена сверху, то $\exists\, n_1\colon\ x_{n_1} > E$. В качестве нового E в определении неограниченности сверху рассмотрим x_{n_1}. Тогда $\exists\, n_2\colon\ x_{n_2} > x_{n_1}$. Аналогично, $\exists\, n_3\colon\ x_{n_3} > x_{n_2}$ и т.д. Мы выбрали бесконечно много различных членов последовательности x_n таких, что $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3} < \ldots < x_{n_k} < \ldots$ в $U_E(+\infty)$. По теореме 2.7 $+\infty$ — частичный предел x_n. ■

Итак, любая последовательность имеет частичный предел: ограниченная — конечный, неограниченная — равный $+\infty$ или $-\infty$.

Отметим, что теорема Больцано–Вейерштрасса характерна именно для действительных чисел и выражает свойство их полноты (непрерывности). Её аналог — теорема 2.9 — выполняется и во множестве рациональных чисел.

Теорема 2.10 (о единственном частичном пределе). *Пусть последовательность x_n ограничена и имеет единственный частичный предел a. Тогда последовательность x_n сходится к числу a.*

□ Пусть для любого номера n выполняется неравенство $m \leqslant x_n \leqslant M$. Так как для некоторой последовательности x_{n_k} предел $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, и $m \leqslant x_{n_k} \leqslant M$ для всех k, то по теореме 2.2 $m \leqslant a \leqslant M$. Докажем, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Если это не так, то найдётся $U_\varepsilon(a)$, вне которой имеется бесконечно много членов x_n. Пусть для определённости бесконечно много членов x_n имеется правее $U_\varepsilon(a)$, т.е. на $[a+\varepsilon; M]$ (см. рис. 2.11).

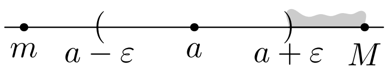

Рис. 2.11

На $[m; a-\varepsilon]$ тоже может быть бесконечно много x_n, а может быть и нет. Не исключено даже, что $a - \varepsilon < m$. По теореме Больцано–Вейерштрасса, на $[a+\varepsilon; M]$ существует частичный предел x_n, отличный от a, что противоречит единственности частичного предела. Полученное противоречие показывает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. ■

Определение 2.15. Предельным множеством последовательности x_n называется множество всех её частичных пределов (включая символы $+\infty$ и $-\infty$, если они являются частичными пределами).

Определение 2.16. Верхним пределом последовательности x_n (обозначается $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$) называется точная верхняя грань её предельного множества, нижним пределом ($\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$) — точная нижняя грань её предельного множества. Если предельное множество содержит символ $+\infty$ ($-\infty$), то $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (соответственно $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty$). Если предельное множество состоит из единственного символа $+\infty$ ($-\infty$), то $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (соответственно $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty$).

Пример 2.26. Если $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ (или $+\infty$, или $-\infty$), то $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = a$ (соответственно $+\infty$, или $-\infty$). Если $x_n = (-1)^n$, то $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -1$. Если $x_n = n \cdot (1 + (-1)^n)$, то $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$. Если $x_n = n \cdot (-1)^n$, то $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Лемма 2.17. *Для любой последовательности x_n выполняются неравенства $\inf x_n \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leqslant \sup x_n$. При этом формально считается, что $-\infty < +\infty$, и для любого действительного числа a выполняются неравенства $-\infty < a < +\infty$.*

$\square$ Неравенство $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ следует из определения 2.16. Если последовательность x_n неограничена сверху, то $\sup x_n = +\infty$, и неравенство $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leqslant \sup x_n$ очевидно. Если x_n ограничена сверху и $M = \sup x_n$, то для любой подпоследовательности x_{n_k} при $k = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $x_{n_k} \leqslant M$. По теореме 2.2 для любого частичного предела a выполняется неравенство $a \leqslant M$, и по лемме 1.3 $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leqslant M$.

Неравенство $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \geqslant \inf x_n$ доказывается аналогично. $\blacksquare$

Лемма 2.18. 1) *Последовательность x_n ограничена сверху $\iff \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n < +\infty$ (т.е. конечен или равен $-\infty$);*

2) *последовательность x_n ограничена снизу $\iff \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n > -\infty$ (т.е. конечен или равен $+\infty$).*

$\square$ Докажем первую часть леммы, вторая доказывается аналогично. Если x_n ограничена сверху, то $\sup x_n < +\infty$, и утверждение леммы следует из леммы 2.17. Если x_n неограничена сверху, то по теореме 2.9 она имеет частичный предел $+\infty$; значит, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. $\blacksquare$

Теорема 2.11. *Пусть* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ *и* $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ *конечны и совпадают. Тогда последовательность* x_n *сходится к их общему значению.*

$\square$ Из леммы 2.18 следует, что последовательность x_n ограничена сверху и снизу. Так как предельное множество состоит из единственного числа $\alpha = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ (по теореме Больцано–Вейерштрасса предельное множество непусто и никакого другого частичного предела, кроме α, быть не может), то x_n ограничена и имеет единственный частичный предел α. По теореме 2.10 существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$. $\blacksquare$

Пример 2.27. Рассмотрим последовательность $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$. Так как $x_{2k} = 1 + \frac{1}{2k}$, $x_{2k-1} = -1 + \dfrac{1}{2k-1}$, то $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = 1$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = -1$, последовательность имеет частичные пределы 1 и -1. Легко видеть, что при всех n выполняется неравенство $x_n > -1$. С другой стороны, для любого числа $\beta > -1$ найдётся нечётное число $n = 2k-1$ такое, что $x_{2k-1} < \beta$ (последнее неравенство имеет вид

$$-1 + \frac{1}{2k-1} < \beta \Longleftrightarrow k > \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1+\beta}\right);$$

можно взять $k = \left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1+\beta}\right)\right] + 1$, $n = 2k-1$). Значит, $\inf x_n = -1$ (не достигается). Так как $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant \inf x_n$, то $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -1$.

Далее при всех $k = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $x_{2k} \leqslant x_2 = \frac{3}{2}$. При нечётных n значения $x_n \leqslant 0$, поэтому наибольший член последовательности равен $\frac{3}{2}$. Значит, $\sup x_n = \frac{3}{2}$. Никакое число, большее 1, не может быть частичным пределом x_n, так как в достаточно малой окрестности этого числа либо совсем нет членов последовательности, либо содержится единственный член (само это число). Поэтому $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

В нашем случае

$$\inf x_n = \varliminf_{n\to\infty} x_n < \varlimsup_{n\to\infty} x_n < \sup x_n.$$

Теорема 2.12. *Верхний и нижний пределы числовой последовательности являются частичными пределами (таким образом, конечный верхний (нижний) предел является наибольшим (соответственно наименьшим) частичным пределом).*

□ Пусть сначала $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = \sup X$, где X — предельное множество последовательности. Тогда

$$(\forall\, p \in X \to p \leqslant \alpha) \wedge (\forall\, \alpha' < \alpha \to \exists\, p \in X : \quad p > \alpha').$$

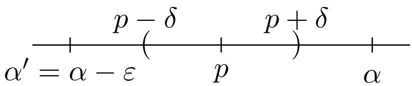

Рис. 2.12

Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $\alpha' = \alpha - \varepsilon$. Возьмём соответствующее $p \in X$ такое, что $p > \alpha - \varepsilon$. Если $p = \alpha$, то α — частичный предел, и всё доказано. Если же $p < \alpha$, то выберем $\delta > 0$ такое, что $U_\delta(p) \subset (\alpha'; \alpha)$ (см. рис. 2.12). В $U_\delta(p)$ содержится бесконечно много членов x_n, так как p — частичный предел. Поэтому на интервале $(\alpha'; \alpha)$ бесконечно много x_n, значит, в $U_\varepsilon(\alpha)$ — бесконечно много x_n. Так как $\varepsilon > 0$ — произвольно, то по критерию частичного предела α — частичный предел.

Если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, то по лемме 2.18 последовательность x_n неограничена сверху. По теореме 2.9 последовательность x_n имеет частичный предел $+\infty$.

Наконец, если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, то из определения 2.16 видно, что предельное множество содержит единственный символ $-\infty$, т.е. $-\infty$ является частичным пределом (и просто пределом) x_n.

Случай нижнего предела рассматривается аналогично. ■

§ 8. Критерий Коши сходимости последовательности

Определение 2.17. Последовательность x_n называется фундаментальной, если $\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\, n_0$: $\forall\, n, m \geqslant n_0 \to |x_n - x_m| < \varepsilon$ (для любого положительного числа ε найдётся номер n_0 такой, что для любых двух номеров $n \geqslant n_0$ и $m \geqslant n_0$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$).

Теорема 2.13 (критерий Коши). *Последовательность x_n сходится $\iff$ x_n фундаментальна.*

$\square$ $(\Rightarrow)$ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда

$$\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\, n_0 :$$
$$\left(\left(\forall\, n \geqslant n_0 \to |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \wedge \left(\forall\, m \geqslant n_0 \to |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}\right)\right).$$

Тогда для любых $n \geqslant n_0$ и $m \geqslant n_0$ выполняется неравенство

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leqslant |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

значит, последовательность фундаментальна.

$(\Leftarrow)$ Пусть x_n — фундаментальная последовательность. Докажем сначала, что она ограничена. При $\varepsilon = 1$ имеем

$$\exists\, n_0 : \quad \forall\, n, m \geqslant n_0 \to |x_n - x_m| < 1.$$

Зафиксируем $m = n_0$. Тогда при $n \geqslant n_0$ выполнено неравенство

$$|x_n| = |(x_n - x_{n_0}) + x_{n_0}| \leqslant |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < 1 + |x_{n_0}|.$$

Таким образом, последовательность x_n ограничена при $n \geqslant n_0$. По лемме 2.3 последовательность ограничена.

По теореме Больцано–Вейерштрасса последовательность x_n имеет конечный частичный предел. В силу теоремы 2.10 о единственном частичном пределе достаточно доказать, что других частичных пределов последовательность не имеет. Пусть это не так, и последовательность имеет два различных частичных предела a и b (для определённости, $a < b$). Возьмём в определении фундаментальности $\varepsilon = \frac{b - a}{3}$ (так, чтобы

$U_\varepsilon(a)$ и $U_\varepsilon(b)$ не только не пересекались, но ещё имели между собой зазор ширины ε):

$$\exists\, n_0 : \quad \forall\, n, m \geqslant n_0 \to |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Но в $U_\varepsilon(a)$ содержится бесконечно много членов x_n (по теореме 2.7). Значит, $\exists\, n_1 \geqslant n_0$: $x_{n_1} \in U_\varepsilon(a)$. Аналогично $\exists\, m_1 \geqslant n_0$: $x_{m_1} \in U_\varepsilon(b)$.

Тогда (см. рис. 2.13) $|x_{n_1} - x_{m_1}| > \varepsilon$. Полученное противоречие показывает единственность частичного предела. ■

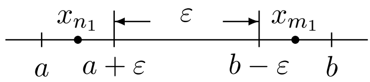

Рис. 2.13

На практике критерий Коши удобно использовать для доказательства расходимости последовательности.

Пример 2.28. Докажем, что последовательность $x_n = (-1)^n$ расходится.

□ Отрицание определения фундаментальности звучит так:

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \quad \forall\, n_0 \to \exists\, n, m \geqslant n_0 : \quad |x_n - x_m| \geqslant \varepsilon.$$

В самом деле, рассмотрим $\varepsilon = 2$. Для любого номера n_0 возьмём $n = n_0$, $m = n_0 + 1$ $(n, m \geqslant n_0)$. Тогда одно из чисел x_n и x_m равно 1, другое равно -1, поэтому $|x_n - x_m| = 2$. Последовательность не является фундаментальной, значит, расходится. ■

Рассмотрим другую форму записи определения фундаментальности. Ясно, что можно считать $m > n$ (x_m и x_n входят в определение симметрично, а при $m = n$ имеем $|x_m - x_n| = 0 < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$). Тогда $m = n + p$, $p \in \mathbb{N}$.

Последовательность x_n сходится $\iff$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, n_0 : \quad \forall\, n \geqslant n_0, \quad \forall\, p \in \mathbb{N} \to |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Последовательность x_n расходится $\iff$

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \quad \forall\, n_0 \to \exists\, n \geqslant n_0, \quad \exists\, p \in \mathbb{N} : \quad |x_{n+p} - x_n| \geqslant \varepsilon.$$

Пример 2.29. $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ (сходимость этой последовательности была установлена в примере 2.9 при помощи теоремы Вейерштрасса; теперь применим критерий Коши).

□ Имеем

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\sum_{k=1}^{n+p} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k-1)} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

Это выражение меньше ε при $n > \frac{1}{\varepsilon}$, т.е. при $n \geqslant n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Итак, $\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$: $\forall\, n \geqslant n_0$, $\forall\, p \in \mathbb{N} \to |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. Последовательность сходится. ■

Отметим, что номер n_0 должен зависеть только от ε и ни в коем случае не должен зависеть от p.

Пример 2.30. $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Хотя внешне эта последовательность мало отличается от предыдущей, но она расходится.

□ Имеем

$$|x_{n+p} - x_n| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \geqslant \frac{p}{n+p}$$

(в сумме p слагаемых, самое маленькое равно $\dfrac{1}{n+p}$). Возьмём $n = n_0$, $p = n_0$. Тогда $|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{2}$.

Итак, $\exists\, \varepsilon = \frac{1}{2}$: $\forall\, n_0 \to \exists\, n = n_0$, $\exists\, p = n_0$: $|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{2}$. Последовательность расходится. ■

В качестве предостережения приведём неверное «доказательство» того, что эта последовательность сходится.

Имеем $|x_{n+p} - x_n| = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \leqslant \frac{p}{n+1} < \varepsilon$ при всех $n > \frac{p}{\varepsilon} - 1$. Отсюда нельзя сделать вывод о фундаментальности последовательности x_n, так как номер n_0 такой, что при $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, зависит не только от ε, но и от p.

Пример 2.31. Если p — фиксированное натуральное число, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+p} = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+p} - x_n) = 0$. В частности, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$. Верно ли, что из выполнения для любого $p \in \mathbb{N}$ равенства $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+p} - x_n) = 0$ следует сходимость x_n?

Ответ: нет (рассмотреть последовательность из примера 2.30).

Доказательство $\Rightarrow$ критерия Коши (необходимость) сохраняется во множестве рациональных чисел, доказательство $\Leftarrow$ (достаточность) характерно именно для действительных чисел. Сходимость фундаментальной последовательности выражает полноту (непрерывность) множества действительных чисел. Любая фундаментальная последовательность рациональных чисел сходится к действительному числу, но не обязана сходиться к рациональному числу. Таким образом, фундаментальные последовательности рациональных чисел в теории действительных чисел играют ту же роль, что и сечения. Если фундаментальная последовательность рациональных чисел не имеет рационального предела, то она является такой же «дыркой» во множестве рациональных чисел, как и сечение III типа. Наличие таких дырок говорит о неполноте множества рациональных чисел. А вот во множестве действительных чисел таких «дырок» уже нет — любая фундаментальная последовательность сходится.

Упражнения к главе II

2.1. Исследовать последовательности на ограниченность сверху и снизу, найти их точные верхние и нижние грани:

а) $x_n = n + \dfrac{1}{n}$; б) $x_n = \dfrac{n-1}{3n+1}$;

в) $x_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$; г) $x_n = (-1)^n n^2$;

д) $x_n = \dfrac{1}{n!}$; е) $x_n = \dfrac{n^2-2}{n^2+2}$;

ж) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$; з) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$.

2.2. Доказать, применяя определение предела последовательности, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-2}{3n+1} = \dfrac{1}{3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-3n+2}{3n^2+n-1} = \dfrac{2}{3}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+(-1)^n+1}{n^3-n^2+2} = 2$.

2.3. Доказать, что следующие последовательности расходятся:

а) $x_n = \dfrac{(-1)^n \cdot n+1}{n+1}$; б) $x_n = \dfrac{n^3+1}{n^2}$; в) $x_n = n^{(-1)^n}$.

2.4. Доказать, что если последовательность сходится, то она достигает либо точной верхней грани, либо точной нижней грани, либо обеих сразу.

2.5. Применяя теоремы об арифметических действиях с пределами и известные пределы, найти пределы последовательностей

а) $x_n = \dfrac{2n^3-3n^2+1}{4n^3+n+2}$; б) $x_n = \dfrac{3n^2+(-1)^n \cdot n+2}{2n^2-n+3\cdot(-1)^n}$;

в) $x_n = \dfrac{56^n+6\cdot 7^n}{7^n\cdot 2^{3n+1}+(-3)^{n+2}}$; г) $x_n = \dfrac{1}{n\cdot 2^n}$;

д) $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

2.6. Применяя теорему 2.3, найти пределы последовательностей

а) $x_n = \dfrac{n^2}{n^3+1} + \dfrac{n^2}{n^3+2} + \ldots + \dfrac{n^2}{n^3+n}$; б) $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

2.7. Установить сходимость последовательности по теореме Вейерштрасса. Величину предела найти, перейдя к пределу в рекуррентном соотношении:

а) $x_n = q^n$, $0 < q < 1$; б) $x_n = \dfrac{n^k}{a^n}$, $k \in \mathbb{N}$, $a > 1$;

в) $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

2.8. Применяя теорему Вейерштрасса, установить сходимость последовательностей

а) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^3}$; б) $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$; в) $x_n = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$,

где $(2n+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)$; $(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n$.

2.9. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$. Верно ли, что если последовательность $|x_n|$ сходится, то и последовательность x_n сходится?

2.10. Известно, что последовательность x_n сходится, а последовательность y_n расходится. Что можно сказать о сходимости последовательностей $x_n + y_n$ и $x_n \cdot y_n$?

2.11. Известно, что последовательность x_n сходится. Что можно сказать о сходимости последовательности $\frac{x_{n+1}}{x_n}$?

2.12. Доказать, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n+1} = +\infty$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3-n^3}{1+2n^2} = -\infty$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n n^2+1}{2n-1} = \infty$.

2.13. Доказать, что последовательность $x_n = n^{(-1)^n}$ неограничена, но не является бесконечно большой.

2.14. Сформулировать и доказать утверждения, соответствующие символическим записям с бесконечными символами, приведёнными перед формулировкой леммы 2.15.

2.15. Для всех типов неопределённостей привести примеры, когда соответствующее выражение

а) является бесконечно малой последовательностью;

б) является бесконечно большой последовательностью;

в) имеется конечный ненулевой предел;

г) не имеет предела ни конечного, ни бесконечного.

2.16. Для данных последовательностей найти

$$\sup x_n, \quad \inf x_n, \quad \varlimsup_{n\to\infty} x_n, \quad \varliminf_{n\to\infty} x_n :$$

а) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$; б) $x_n = 3 + 2(-1)^{n+1}$;

в) $x_n = 2(-1)^n + \dfrac{3}{n^2}$; г) $x_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$;

д) $x_n = n^2(1+(-1)^n)$; е) $x_n = n(2+(-1)^n)$;

ж) $x_n = n(1+2(-1)^n)$; з) $x_n = -n + (-1)^n$.

2.17. Может ли данное множество действительных чисел являться предельным множеством некоторой последовательности? Если да, то привести пример:

а) множество точек отрезка $[0;1]$;

б) множество точек интервала $(0;1)$;

в) множество $\left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots; \frac{1}{n}; \ldots\right\}$;

г) множество $\left\{0; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots; \frac{1}{n}; \ldots\right\}$.

2.18. Число α является частичным пределом последовательности x_n, число β является частичным пределом последовательности y_n. Верно ли, что число $\alpha+\beta$ является частичным пределом последовательности $x_n + y_n$?

2.19. Применяя критерий Коши, доказать, что следующие последовательности сходятся:

а) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$; б) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1+k+k^2}{k^3+k^4}$; в) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$.

2.20. Применяя критерий Коши, доказать, что следующие последовательности расходятся:

а) $x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; б) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1+k}{1+k^2}$; в) $x_n = 2^{(-1)^n}$.

2.21. Геометрическая прогрессия называется бесконечно убывающей, если её знаменатель q по модулю меньше, чем 1. Пусть S_n — сумма n первых членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{x_1}{1-q}$, где x_1 — первый член, а q — знаменатель прогрессии (формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии).

2.22. Доказать, что представление рационального числа, не являющегося конечной десятичной дробью, в виде бесконечной дроби имеет период (бесконечная периодическая десятичная дробь). Обратно, любая бесконечная периодическая десятичная дробь является представлением рационального числа.

2.23. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = a$ (теорема о средних арифметических сходящейся последовательности). Обратное утверждение неверно (рассмотреть $x_n = (-1)^n$).

2.24. Доказать, что если ограниченная снизу последовательность не имеет конечных частичных пределов, то она имеет предел $+\infty$.

2.25. Равносильно ли сходимости последовательности x_n утверждение: $\forall\, p \in \mathbb{N}, \forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, n_0\colon \forall\, n \geqslant n_0 \to |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$?

ГЛАВА III. **ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ЧИСЛОВОЙ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

§ 1. Определения предела по Гейне и по Коши. Их эквивалентность

Для каждого из 6 СПС наряду с $U_\varepsilon(\alpha)$ рассмотрим проколотые окрестности $\mathring{U}_\varepsilon(\alpha)$, которые для бесконечных символов не отличаются от $U_\varepsilon(\alpha)$, а для конечных символов a, $a+0$, $a-0$ получаются из $U_\varepsilon(\alpha)$ удалением точки a.

α	a	$a+0$	$a-0$	∞	$+\infty$	$-\infty$
$U_\varepsilon(\alpha)$	$(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$	$[a; a+\varepsilon)$	$(a-\varepsilon; a]$	$(-\infty; -\varepsilon)\cup$ $\cup(\varepsilon; +\infty)$	$(\varepsilon; +\infty)$	$(-\infty; -\varepsilon)$
$\mathring{U}_\varepsilon(\alpha)$	$(a-\varepsilon; a)\cup$ $\cup(a; a+\varepsilon)$	$(a; a+\varepsilon)$	$(a-\varepsilon; a)$	$(-\infty; -\varepsilon)\cup$ $\cup(\varepsilon; +\infty)$	$(\varepsilon; +\infty)$	$(-\infty; -\varepsilon)$

Нам предстоит дать определение $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$, где α и β каждый — один из 6 СПС, т.е. всего 36 определений.

Будем считать, что функция f определена в некоторой проколотой окрестности α. Тогда для любой последовательности x_n такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$ и $x_n \neq \alpha$, значения $f(x_n)$ определены для $n \geqslant n_0$, где n_0 — некоторое натуральное число. При этом оговорка $x_n \neq \alpha$ для $\alpha = a$, $a+0$, $a-0$ означает $x_n \neq a$, для бесконечных символов оговорку $x_n \neq \alpha$ можно опустить.

Определение 3.1 (определение предела функции по Гейне). Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности α. Тогда говорят, что $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$, если для любой последовательности x_n такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$ и $x_n \neq \alpha$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \beta$.

Например:

I. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, если существует $\delta > 0$ такое, что f определена при $0 < |x-a| < \delta$, и для любой последовательности x_n такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $x_n \neq a$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

II. $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = +\infty$, если существует $\delta > 0$ такое, что $f(x)$ определена при $a - \delta < x < a$, и для любой последовательности x_n такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < a$ и $x_n < a$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$.

III. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b + 0$, если существует $\Delta > 0$ такое, что f определена при $|x| > \Delta$, и для любой последовательности x_n такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b + 0$.

Аналогично можно сформулировать остальные 33 определения.

При исследовании предела f при $x \to \alpha$ существенно поведение f лишь в некоторой проколотой окрестности α. Если $\alpha = a$, $a + 0$, $a - 0$, то в точке a функция f не обязана быть определённой; если $a \in D(f)$, то значение $f(a)$ не обязано совпадать со значением предела.

Пример 3.1.

а) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0 \end{cases}$ (график на рис. 3.1);

б) $f(x) \equiv 0$ (график на рис. 3.2);

в) $f(x) = 0$, если $x \neq 0$, $0 \notin D(f)$ (график на рис. 3.3).

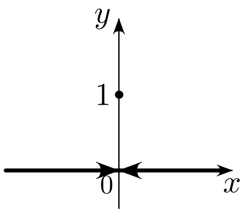

Рис. 3.1

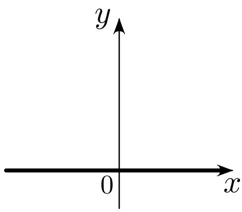

Рис. 3.2

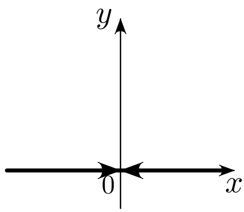

Рис. 3.3

Во всех трёх случаях $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, так как f определена в некоторой проколотой окрестности точки 0 и для любой последовательности x_n такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и $x_n \neq 0$, выполняется равенство $f(x_n) = 0$. С точки зрения предела при $x \to 0$ эти функции неразличимы, так как совпадают в некоторой проколотой окрестности точки 0. Для сравнения: две последовательности неразличимы с точки зрения предела, если они совпадают начиная с некоторого номера.

Аналогично если $f(x) = C$ в проколотой окрестности СПС α (постоянная функция), то $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = C$.

Пример 3.2. Для функции $f(x) = x$ при любом $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to a} f(x) = a.$$

$\square$ Для любой последовательности x_n такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $x_n \neq a$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Значит, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a$. $\blacksquare$

Аналогично можно доказать, что

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty, \quad \lim_{x\to+\infty} x = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x = -\infty.$$

Пример 3.3. При построении различных контрпримеров в математическом анализе часто рассматривается функция Дирихле:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

График этой функции нарисовать невозможно — это две «сплошь дырявые» параллельные прямые. Тем не менее определение 2.1 выполнено, и это — совершенно «полноправная» функция. Докажем, что ни при каком $a \in \mathbb{R}$ не существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

$\square$ Если бы существовал $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то для любой последовательности x_n такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $x_n \neq a$, выполнялось бы равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$. Легко показать, что можно построить две последовательности x'_n и x''_n такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x''_n = a$, $x'_n \neq a$, $x''_n \neq a$, причём $x'_n \in \mathbb{Q}$, $x''_n \notin \mathbb{Q}$ при всех $n = 1, 2, \ldots$. Если a — рациональное число, то можно взять $x'_n = a + \frac{1}{n}$, $x''_n = a + \frac{\gamma}{n}$, где γ — некоторое положительное иррациональное число. Если a — иррациональное число, то можно взять $x''_n = a + \frac{1}{n}$, $x'_n = \overline{a}_n$ — последовательность десятичных приближений a сверху (лемма 2.11). Тогда при всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняются равенства $f(x'_n) = 1$, $f(x''_n) = 0$, т.е. одновременно $b = 1$ и $b = 0$. Полученное противоречие показывает, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ не существует (ни конечный, ни бесконечный). ■

З а м е ч а н и е. Так как $x'_n > a$, $x''_n > a$, то мы фактически доказали, что не существует $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$. Аналогично можно доказать, что не существует $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$.

Метод, применённый в доказательстве утверждения примера 3.3, часто используется при доказательстве отсутствия предела функции. Для того чтобы доказать, что $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ не существует, достаточно выбрать две последовательности x'_n и x''_n такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} x''_n = \alpha$, $x'_n \neq \alpha$, $x''_n \neq \alpha$, и при этом $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n)$ различны. Если бы существовал $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$, то имели бы место равенства $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = \beta$, что не выполняется. Значит, $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ не существует.

Определение 3.2 (определение предела функции по Коши). Пусть α и β каждый — один из 6 СПС. Говорят, что $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \mathring{U}_\delta(\alpha)$ соответствующие значения $f(x)$ принадлежат $U_\varepsilon(\beta)$.

Всего здесь 36 определений. Например:

I. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, где $a, b \in \mathbb{R}$, если

$$\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\,\delta > 0 : \quad \forall\,x \neq a,\ |x-a| < \delta \to |f(x) - b| < \varepsilon.$$

II. $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = +\infty$, если

$$\forall\,E > 0 \to \exists\,\delta > 0 : \quad \forall\,x \in (a-\delta; a) \to f(x) > E.$$

III. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b + 0$, если

$$\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\,\Delta > 0 : \quad \forall\,x, |x| > \Delta \to b \leqslant f(x) < b + \varepsilon.$$

IV. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, если

$$\forall\,E > 0 \to \exists\,\Delta > 0 : \quad \forall\,x > \Delta \to f(x) < -E.$$

Аналогично можно сформулировать остальные 32 определения. В определении предела по Коши число δ зависит от ε, $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Докажем, что определения предела функции по Гейне и Коши эквивалентны.

Теорема 3.1. *Пусть α и β каждый — один из 6 СПС. Тогда $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ в смысле определения* 3.1 $\iff$ $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ *в смысле определения* 3.2.

$\square$ $\Leftarrow$ Пусть $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ по Коши. Тогда

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, \delta > 0 : \quad \forall\, x \in \overset{\circ}{U}_\delta(\alpha) \to f(x) \in U_\varepsilon(\beta).$$

Рассмотрим любую последовательность x_n такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $x_n \neq \alpha$. Для δ, найденного по данному ε, выберем номер n_0 такой, что $\forall\, n \geqslant n_0 \to x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(\alpha)$. Тогда $f(x_n) \in U_\varepsilon(\beta)$. Итак,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, n\colon \forall\, n \geqslant n_0 \to f(x_n) \in U_\varepsilon(\beta).$$

Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \beta$. Так как x_n — любая, то $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ по Гейне.

$\Rightarrow$ Пусть $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ по Гейне. Докажем от противного, что $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ по Коши. Если это не так, то

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \quad \forall\, \delta > 0 \to \exists\, x \in \overset{\circ}{U}_\delta(\alpha) : \quad f(x) \notin U_\varepsilon(\beta).$$

Рассмотрим сначала случай, когда α — конечный символ (a, $a+0$ или $a-0$, $a \in \mathbb{R}$). Возьмём $\delta = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ \ldots$ Найденное число $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(\alpha)$ зависит от n, т.е. мы нашли некоторую последовательность x_n, $n = 1, 2, \ \ldots$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \to \exists\, x_n \in \overset{\circ}{U}_{1/n}(\alpha) : \quad f(x_n) \notin U_\varepsilon(\beta). \tag{3.1}$$

Ясно, что $x_n \neq \alpha$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$ по теореме 2.3 (если $\alpha = a$, то $a - \frac{1}{n} < x_n < a + \frac{1}{n}$, если $\alpha = a + 0$, то $a < x_n < a + \frac{1}{n}$, если $\alpha = a - 0$, то $a - \frac{1}{n} < x_n < a$). Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \beta$, т.е.

$$\exists\, n_0\colon \forall\, n \geqslant n_0 \to f(x_n) \in U_\varepsilon(\beta),$$

что противоречит (3.1). Полученное противоречие показывает, что $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ по Коши.

Если $\alpha = \infty$, $+\infty$ или $-\infty$, то доказательство аналогично, только берём $\delta = n$, $n = 1, 2, \ \ldots$ Если $\alpha = \infty$, то $|x_n| > n$, если $\alpha = +\infty$, то $x_n > n$, если $\alpha = -\infty$, то $x_n < -n$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, и завершение доказательства аналогично. ■

Отметим, что в доказательстве теоремы 3.1 мы не использовали никакие свойства предела функции. Поэтому все свойства предела функции можно выводить как из определения 3.1, так и из определения 3.2, никаких нарушений логической последовательности изложения не будет.

Пример 3.4. Рассмотрим функцию $g(x) = xf(x)$, где $f(x)$ — функция Дирихле из примера 3.3, т.е.

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

□ **Первый способ** (по определению Коши). Так как для всех x выполняется неравенство $|g(x)| \leqslant |x|$, то при $|x| < \varepsilon$ также и $|g(x)| < \varepsilon$. Значит,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, \delta = \varepsilon : \quad \forall\, x,\ 0 < |x - 0| < \delta \to |g(x) - 0| < \varepsilon.$$

По определению 3.2 $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

Второй способ (по определению Гейне). Для любой последовательности x_n такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $x_n \neq 0$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = 0$, так как $g(x_n) = x_n \cdot f(x_n)$ — произведение ограниченной последовательности $f(x_n)$ ($0 \leqslant f(x_n) \leqslant 1$) на бесконечно малую x_n (лемма 2.9). Значит, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$. ■

Определение 3.3. Функция f называется бесконечно малой при $x \to \alpha$, если $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = 0$. Функция f называется бесконечно большой при $x \to \alpha$, если $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \infty$.

Пример 3.5. Функция $f(x) = x$ — бесконечно малая при $x \to 0$, бесконечно большая при $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Она не является ни бесконечно малой, ни бесконечно большой при $x \to a$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

§ 2. Свойства предела функции

Лемма 3.1 (о сохранении знака). *Если* $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = b$, *где* α *— один из 6 СПС,* $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, *то существует* $\delta > 0$ *такое, что для всех* $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(\alpha)$ *выполняется равенство* $\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} b$. *Иными словами, если* $b > 0$, *то* $\exists\, \delta > 0$: $\forall\, x \in \overset{\circ}{U}_\delta(\alpha) \to f(x) > 0$, *если* $b < 0$, *то* $\exists\, \delta > 0$: $\forall\, x \in \overset{\circ}{U}_\delta(\alpha) \to f(x) < 0$.

□ Пусть $b = \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) > 0$. Тогда по определению 3.2 при $\varepsilon = b$ имеем: $\exists\, \delta > 0$: $\forall\, x \in \overset{\circ}{U}_\delta(\alpha) \to f(x) \in U_b(b)$, т.е. $0 < f(x) < 2b$. В частности, отсюда следует, что $\forall\, x \in \overset{\circ}{U}_\delta(\alpha)$ выполняется неравенство $f(x) > 0$. Случай $b < 0$ разбирается аналогично ($\varepsilon = -b$). ■

Теорема 3.2 (об арифметических операциях с пределами функций). *Пусть* $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = c$, *где* $b, c \in \mathbb{R}$, α *— один из 6 СПС. Тогда*

1) $\lim\limits_{x\to\alpha} (f(x) + g(x)) = b + c$;
2) $\lim\limits_{x\to\alpha} (f(x)g(x)) = bc$;
3) *если* $c \neq 0$, *то* $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$.

□ Докажем 3-е утверждение. Так как $c \neq 0$, то по лемме 3.1 существует $\delta > 0$ такое, что $g(x) \neq 0$ в $\overset{\circ}{U}_\delta(\alpha)$, и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ определена в $\overset{\circ}{U}_\delta(\alpha)$. Тогда для любой последовательности x_n такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$ и $x_n \neq \alpha$, выполняются равенства $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = c \neq 0$, значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \dfrac{b}{c}$. Это и означает, что $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$.

1-е и 2-е утверждения доказываются аналогично (без разбора оговорки $c \neq 0$). ■

Следствия. *В условиях теоремы 3.2:*

1) $\lim\limits_{x\to\alpha} (Cf(x)) = Cb$;
2) $\lim\limits_{x\to\alpha} (f(x) - g(x)) = b - c$;

3) $\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x))^k = b^k$ *(при* $k\in\mathbb{N}$*; если* $b\neq 0$*, то при* $k\in\mathbb{Z}$*);*

4) $\lim\limits_{x\to a} x^k = a^k$*, если* $a\in\mathbb{R}$ *(при* $k\in\mathbb{N}$*; если* $a\neq 0$*, то при* $k\in\mathbb{Z}$*).*

Теорема 3.3 (предельный переход в неравенстве). *Если* $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = b$*,* $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = c$*, причём существует такое* $\delta > 0$*, что при всех* $x\in\mathring{U}_\delta(\alpha)$ *выполняется неравенство* $f(x)\leqslant g(x)$*, то* $b\leqslant c$*.*

$\square$ Рассмотрим любую последовательность x_n такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $x_n\neq\alpha$. Тогда $\exists\, n_0$: $\forall\, n\geqslant n_0 \to x_n\in\mathring{U}_\delta(\alpha)$, значит, $f(x_n)\leqslant g(x_n)$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = c$, то по теореме 2.2 $b\leqslant c$. $\blacksquare$

З а м е ч а н и е. Если $\forall\, x\in\mathring{U}_\delta(\alpha)\to f(x) < g(x)$, то $b\leqslant c$ (возможно, $b = c$). Например, $\forall\, x\in(0;\delta)$ выполняется неравенство $x < 2x$, но $\lim\limits_{x\to+0} x = \lim\limits_{x\to+0} 2x = 0$.

Теорема 3.4 («теорема о двух милиционерах для функций»). *Если* $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = b\in\mathbb{R}$*, причём*

$$\exists\,\delta > 0:\quad \forall\, x\in\mathring{U}_\delta(\alpha)\to f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x),$$

то и $\lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = b$*.*

$\square$ Рассмотрим любую последовательность x_n такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $x_n\neq\alpha$. Тогда $\exists\, n_0$: $\forall\, n\geqslant n_0\to x_n\in\mathring{U}_\delta(\alpha)$, значит, $f(x_n)\leqslant h(x_n)\leqslant g(x_n)$. Но $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = b$, поэтому по теореме 2.3 $\lim\limits_{n\to\infty} h(x_n) = b$. Так как x_n — любая, то $\lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = b$. $\blacksquare$

Лемма 3.2.

1) *Если* $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$*, и* $\exists\,\delta > 0$*:* $\forall\, x\in\mathring{U}_\delta(\alpha)\to g(x)\geqslant f(x)$*, то* $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$*;*

2) *если* $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$*, и* $\exists\,\delta > 0$*:* $\forall\, x\in\mathring{U}_\delta(\alpha)\to g(x)\leqslant f(x)$*, то* $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = -\infty$*.*

$\square$ 1) Рассмотрим любую последовательность x_n такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $x_n\neq\alpha$. Тогда $\exists\, n_0$: $\forall\, n\geqslant n_0\to x_n\in$

$\in \overset{\circ}{U}_\delta(\alpha)$, значит, $g(x_n) \geqslant f(x_n)$. Но $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$, поэтому по лемме 2.15 $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = +\infty$. Так как x_n — любая, то $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$.

2) Доказательство аналогично. ■

Лемма 3.3. *Пусть функция f ограничена в некоторой $\overset{\circ}{U}_\delta(\alpha)$, $\delta > 0$, а функция g — бесконечно малая при $x \to \alpha$. Тогда функция fg — бесконечно малая при $x \to \alpha$.*

□ Рассмотрим любую последовательность x_n такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $x_n \neq \alpha$. Тогда $\exists\, n_0$: $\forall\, n \geqslant n_0 \to x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(\alpha)$. Значит, последовательность $f(x_n)$ ограничена при $n \geqslant n_0$, т.е. по лемме 2.3 ограничена. Далее, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = 0$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)g(x_n) = 0$ (произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую). Так как последовательность x_n — любая, то $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)g(x) = 0$. ■

Лемма 3.4. *Если $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = b \in \mathbb{R}$, то существует $\delta > 0$ такое, что f ограничена в $\overset{\circ}{U}_\delta(\alpha)$.*

□ Возьмём в определении предела по Коши $\varepsilon = 1$:

$$\exists\, \delta > 0: \quad \forall\, x \in \overset{\circ}{U}_\delta(\alpha) \to |f(x) - b| < 1,$$

откуда следует, что $b - 1 < f(x) < b + 1$, т.е. функция f ограничена в $\overset{\circ}{U}_\delta(\alpha)$. ■

Лемма 3.5. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \beta$, $a \in \mathbb{R} \iff \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \beta$.

□ ($\Rightarrow$) Очевидно, так как если $f(x) \in U_\varepsilon(\beta)$ для любых $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(\alpha)$, то $f(x) \in U_\varepsilon(\beta)$ для всех $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a+0)$ и для всех $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a-0)$.

($\Leftarrow$) Пусть $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \beta$. Тогда

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, \delta_1 > 0: \quad \forall\, x \in (a; a+\delta_1) \to f(x) \in U_\varepsilon(\beta);$$
$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, \delta_2 > 0: \quad \forall\, x \in (a-\delta_2; a) \to f(x) \in U_\varepsilon(\beta).$$

Тогда если взять $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, то $\forall\, x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \to f(x) \in U_\varepsilon(\beta)$. ■

Лемма 3.6. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \beta \iff \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \beta$.

$\square$ Доказывается аналогично, нужно взять $\Delta = \max(\Delta_1, \Delta_2)$. $\blacksquare$

Лемма 3.7. 1) *Если функция f бесконечно большая при $x \to \alpha$, то функция $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая при $x \to \alpha$.*

2) *Если функция f бесконечно малая при $x \to \alpha$ и $\exists\,\delta > 0$: $\forall\, x \in \overset{\circ}{U}_\delta(\alpha) \to f(x) \neq 0$, то функция $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ — бесконечно большая при $x \to \alpha$.*

$\square$ Докажем сначала вторую часть утверждения. Рассмотрим любую последовательность x_n такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$ и $x_n \neq \alpha$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Но $\exists\, n_0$: $\forall\, n \geqslant n_0 \to x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(\alpha)$, значит, $f(x_n) \neq 0$. Тогда по лемме 2.13 последовательность $g(x_n) = \dfrac{1}{f(x_n)}$ — бесконечно большая. Так как последовательность x_n — любая, то $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \infty$.

Первая часть доказывается аналогично. Надо только учесть, что так как $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \infty$, то, взяв в определении предела по Коши $\varepsilon = 1$, получим

$$\exists\,\delta > 0: \quad \forall\, x \in \overset{\circ}{U}_\delta(\alpha) \to |f(x)| > 1,$$

т.е. заведомо $f(x) \neq 0$ в $\overset{\circ}{U}_\delta(\alpha)$. $\blacksquare$

Теорема 3.5 (о замене переменной под знаком предела). *Пусть $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ и $f(x) \neq \beta$ в некоторой $\overset{\circ}{U}_\delta(\alpha)$. Пусть далее $\lim\limits_{u\to\beta} g(u) = \gamma$. Тогда $\lim\limits_{x\to\alpha} g(f(x)) = \gamma$.*

$\square$ Рассмотрим любую последовательность x_n такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $x_n \neq \alpha$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \beta$. Рассмотрим последовательность $u_n = f(x_n)$; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \beta$. Найдётся номер n_0 такой, что $\forall\, n \geqslant n_0 \to x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(\alpha)$, значит, $u_n = f(x_n) \neq \beta$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} g(u_n) = \gamma$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n)) = \gamma$. Так как последовательность x_n — любая, то $\lim\limits_{x\to\alpha} g(f(x)) = \gamma$. $\blacksquare$

З а м е ч а н и е 1. Здесь каждый из символов α, β, γ — один из 6 СПС. Итого имеем 216 утверждений.

З а м е ч а н и е 2. Условие «$f(x) \neq \beta$ в $\mathring{U}_\delta(\alpha)$» в теореме 3.5 существенно. Рассмотрим следующий пример. Пусть $f(x) \equiv 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, но условие «$f(x) \neq 0$ в $\mathring{U}_\delta(0)$» не выполнено. Пусть $g(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } u \neq 0; \\ 1, & \text{если } u = 0. \end{cases}$ Мы знаем, что $\lim\limits_{u\to 0} g(u) = 0$ (пример 3.1). Но $g(f(x)) \equiv 1$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x)) = 1 \neq \lim\limits_{u\to 0} g(u)$. Теорема 3.5 не выполняется, так как не выполнено одно из её условий.

Пример 3.6. Доказать, что $\lim\limits_{x\to +0} \left[\frac{1}{x}\right] = +\infty$.

□ Применим теорему 3.5. Внутренняя функция $f(x) = \frac{1}{x}$, $\alpha = +0$, $\beta = \lim\limits_{x\to +0} f(x) = +\infty$ (это следует из примера 3.2, лемм 3.5 и 3.7, а также из того, что $f(x) > 0$ при $x > 0$). При этом проверять условие $f(x) \neq +\infty$ не имеет смысла. Так как $[u] > u - 1$ для всех u, то из примера 3.2 и леммы 3.2 следует, что $\lim\limits_{u\to +\infty} g(u) = +\infty$, где внешняя функция $g(u) = [u]$, $\gamma = +\infty$. Значит, $\lim\limits_{x\to +0} g(f(x)) = +\infty$. ■

Теорема 3.6 (критерий Коши существования конечного предела функции). *Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности α, где α — один из 6 СПС. Тогда существует конечный $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) \iff \forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\,\delta > 0$: $\forall\,x', x'' \in \mathring{U}_\delta(\alpha) \to |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ (условие Коши, являющееся аналогом фундаментальности в формулировке критерия Коши сходимости последовательности).*

□ $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = b \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\,\delta > 0: \quad \left(\left(\forall\,x' \in \mathring{U}_\delta(\alpha) \to |f(x') - b| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \wedge \right.$$
$$\left. \wedge \left(\forall\,x'' \in \mathring{U}_\delta(\alpha) \to |f(x'') - b| < \frac{\varepsilon}{2}\right)\right).$$

Окончательно для любых $x' \in \mathring{U}_\delta(\alpha)$ и $x'' \in \mathring{U}_\delta(\alpha)$ выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x'')| = |(f(x') - b) + (b - f(x''))| \leqslant$$

$$\leqslant |f(x') - b| + |b - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Условие Коши выполнено.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\,\delta > 0$: $\forall\,x', x'' \in \mathring{U}_\delta(\alpha) \to |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Рассмотрим любую последовательность x_n такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $x_n \neq \alpha$. Для данного $\delta(\varepsilon)$

$$\exists\,n_0: \quad ((\forall\,n \geqslant n_0 \to x_n \in \mathring{U}_\delta(\alpha)) \wedge (\forall\,m \geqslant n_0 \to x_m \in \mathring{U}_\delta(\alpha))).$$

Тогда

$$\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\,n_0: \quad \forall\,n, m \geqslant n_0 \to |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Последовательность $f(x_n)$ фундаментальна, по критерию Коши сходимости последовательности она сходится. Остаётся доказать, что для любых последовательностей x_n таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $x_n \neq \alpha$, предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ один и тот же.

Пусть для двух таких последовательностей x'_n и x''_n:

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = a, \quad \lim_{n\to\infty} f(x''_n) = b, \quad a \neq b.$$

Рассмотрим последовательность $\{x'_1,\ x''_1,\ x'_2,\ x''_2,\ \ldots,\ x'_n,\ x''_n,\ \ldots\}$, полученную «перемешиванием» последовательностей x'_n и x''_n. Очевидно, её предел равен α (вне любой $\mathring{U}_\delta(\alpha)$ не более конечного числа x'_n и не более конечного числа x''_n, значит, не более конечного числа членов «перемешанной» последовательности). Но последовательность

$$\{f(x'_1),\ f(x''_1),\ f(x'_2),\ f(x''_2),\ \ldots,\ f(x'_n),\ f(x''_n),\ \ldots\}$$

не имеет предела, так как имеет два конечных частичных предела a и b. Полученное противоречие показывает, что существует конечный $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$. ■

Пример 3.7. Докажем при помощи критерия Коши, что ни при каком $a \in \mathbb{R}$ не существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, где f — функция Дирихле (см. пример 3.3).

□ Отрицание условия Коши формулируется так:

$$\exists\,\varepsilon > 0: \quad \forall\,\delta > 0 \to \exists\,x', x'' \in \mathring{U}_\delta(\alpha): \quad |f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon.$$

Это имеет место при $\varepsilon = 1$, так как в любой $\mathring{U}_\delta(\alpha)$ найдутся как рациональное число x', так и иррациональное число x''. При этом $f(x') = 1$, $f(x'') = 0$, значит, $|f(x') - f(x'')| = 1$. ■

§ 3. Непрерывность функции в точке

Определение 3.4. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$. Тогда f называется непрерывной в точке a, если существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

На языке Коши (определение предела 3.2) непрерывность f в точке a означает, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, \delta > 0 : \quad \forall\, x, |x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Оговорка $x \neq a$ (соответствующая неравенству $0 < |x-a| < \delta$) здесь уже не нужна, так как при $x = a$ имеем $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$, и нужное неравенство выполняется автоматически.

На языке Гейне (определение предела 3.1) непрерывность f в точке a означает, что для любой последовательности x_n такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Оговорка $x_n \neq a$ здесь опять-таки не нужна. В самом деле, если x_n принимает значения, равные a, то в последовательности $f(x_n)$ появляются члены, равные $f(a)$. Если их конечное число, то они ни на что не влияют. Если же их бесконечное число, то последовательность $f(x_n)$ приобретёт частичный предел, равный $f(a)$. Если и без этих членов $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$, то новых частичных пределов не появится, предел останется равным $f(a)$. Если без этих членов утверждение $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ было неверным, то оно останется неверным и после учёта этих членов.

Определение 3.5. Пусть $a \in \mathbb{R}$ и функция f определена в некоторой окрестности $a+0$ (или $a-0$). Тогда f называется непрерывной справа (соответственно слева) в точке a, если существует $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a)$ (соответственно $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a)$).

В дальнейшем будем применять следующие обозначения:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \equiv f(a+0), \quad \lim_{x\to a-0} f(x) \equiv f(a-0),$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) \equiv f(+\infty), \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) \equiv f(-\infty).$$

Очевидно, функция f непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда $f(a+0) = f(a-0) = f(a)$ (следует из леммы 3.5). Это можно сформулировать иначе: f непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда она непрерывна в этой точке и слева, и справа.

Определение 3.6. Функция f называется разрывной в точке $a \in \mathbb{R}$, если она определена в некоторой проколотой окрестности точки a и не является непрерывной в этой точке. Точка a при этом называется точкой разрыва функции f.

Определение 3.7. Если в точке разрыва a функции f существуют конечные $f(a+0)$ и $f(a-0)$, то эта точка называется точкой разрыва первого рода. Величина $d = f(a+0) - f(a-0)$ называется скачком функции в точке a. Если в точке разрыва первого рода $f(a+0) = f(a-0)$, то разрыв называется устранимым. Точка разрыва, не являющаяся точкой разрыва первого рода, называется точкой разрыва второго рода.

З а м е ч а н и е 1. Требование определения функции в некоторой проколотой окрестности точки a существенно. Например, функция $f(x) = \dfrac{1}{|x| - x}$ не определена при $x \geqslant 0$, поэтому она не является разрывной, например, в точке 1, хотя, конечно, не является и непрерывной в этой точке.

З а м е ч а н и е 2. В точке устранимого разрыва $f(a+0) = f(a-0)$, но и непрерывности нет. Поэтому либо $f(a+0) = f(a+0) \neq f(a)$ (как, например, точка $a = 0$ в примере 3.1а), либо f не определена в точке a (как, например, точка $a = 0$ в примере 3.1в). Если в точке устранимого разрыва доопределить или переопределить $f(a)$ общим значением $f(a+0) = f(a-0)$, то получится функция, непрерывная в точке a (как говорят, «разрыв устранился»). Пример 3.1б представляет собой устранение разрыва в точке $a = 0$ для примеров 3.1а и 3.1в.

Пример 3.8. Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{sign} x$ (график изображён на рис. 2.4). Ясно, что $f(+0) = 1$ ($f(x) = 1$ при $x > 0$, а если две функции совпадают в $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(+0)$, то они неразличимы с точки зрения предела при $x \to +0$). Аналогично, $f(-0) = -1$. Поэтому $a = 0$ — точка разрыва первого рода, скачок в этой точке равен 2.

Пример 3.9. Рассмотрим функцию $f(x) = [x]$ (график изображён на рис. 2.2). Если $a \in \mathbb{Z}$, то $f(a+0) = a = f(a)$, $f(a-0) = a-1$. Поэтому любая целая точка a является точкой разрыва первого рода. Скачок в этой точке равен 1. Отметим, что в этой точке функция f является непрерывной справа, но не является непрерывной слева.

Пример 3.10. Для функции Дирихле (см. пример 3.3 и замечание к нему) любая точка a является точкой разрыва второго рода, так как не существуют конечные пределы слева и справа в этой точке. Такие разрывы второго рода обычно называют ограниченными, так как функция ограничена в некоторой окрестности каждой такой точки.

Пример 3.11. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x}$ (график изображён на рис. 3.4). Из леммы 3.7 и примера 3.2 следует, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$ (учитывая знаки $f(x)$, $\lim\limits_{x\to +0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = -\infty$).

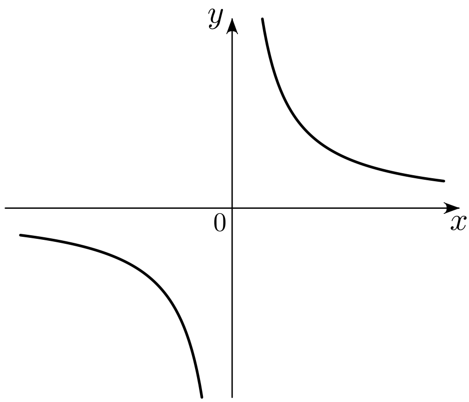

Рис. 3.4

Поэтому точка $a = 0$ является точкой разрыва второго рода (это — неограниченный разрыв).

Из теорем об арифметических операциях с пределами следует

Теорема 3.7. *Если функции f и g непрерывны в точке a, то функции $f + g$ и $f \cdot g$ непрерывны в точке a; если при этом $g(a) \neq 0$, то и функция $\dfrac{f}{g}$ непрерывна в точке a.*

Отметим, что функции $f(x) = C$ и $f(x) = x$ непрерывны в любой точке (замечание после примера 3.1 и пример 3.2). Поэтому из теоремы 3.7 следует, что любой многочлен непрерывен в любой точке, любая рациональная функция (отношение двух многочленов) непрерывна в любой точке, где знаменатель не обращается в нуль.

Пример 3.12. Найти пределы функции $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8}$:

а) при $x \to 0$; б) при $x \to 2$;
в) при $x \to 4$; г) при $x \to \infty$.

□ а) Функция f непрерывна в точке 0, как рациональная функция, знаменатель которой не обращается в нуль при $x = 0$. Поэтому $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = \frac{3}{4}$.

б) И числитель, и знаменатель обращаются в нуль при $x = 2$. Но легко видеть, что при $x \neq 2$ функция f совпадает с $g(x) = \dfrac{x-3}{x-4}$. Функция g непрерывна в точке 2, и $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = g(2) = \frac{1}{2}$. Так как $f = g$ в проколотой окрестности точки 2, то с точки зрения предела при $x \to 2$ они неразличимы, и $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} g(x) = \frac{1}{2}$.

в) Рассмотрим функцию $h(x) = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 6}$. Эта функция непрерывна в точке 4, и $\lim\limits_{x \to 4} h(x) = h(4) = 0$. По лемме 3.7 $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \infty$ (здесь использовано то, что $h(x) \neq 0$ в $\mathring{U}_\delta(4)$).

г) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{6}{x} + \frac{8}{x^2}} = \dfrac{1 - 5 \cdot \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} + 6 \cdot \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}}{1 - 6 \cdot \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} + 8 \cdot \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}} = \dfrac{1 - 5 \cdot 0 + 6 \cdot 0}{1 - 6 \cdot 0 + 8 \cdot 0} = 1$ (в силу теоремы 3.2 и леммы 3.7). ■

Теорема 3.8 (о переходе к пределу под знаком непрерывной функции). *Пусть* $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = b \in \mathbb{R}$, *а функция* g *непрерывна в точке* b. *Тогда* $\lim\limits_{x\to\alpha} g(f(x)) = g(b)$.

Последнее равенство может быть записано в виде

$$\lim_{x\to\alpha} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to\alpha} f(x)\right)$$

(знак предела и знак непрерывной функции можно поменять местами).

□ Рассмотрим любую последовательность x_n такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$ и $x_n \neq \alpha$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$. Рассмотрим последовательность $u_n = f(x_n)$; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = b$. В силу определения непрерывности на языке Гейне $\lim\limits_{n\to\infty} g(u_n) = g(b)$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(b)$. Так как последовательность x_n — любая, то $\lim\limits_{x\to\alpha} g(f(x)) = g(b)$. ■

З а м е ч а н и е. Эта теорема аналогична теореме 3.5, но не следует сразу из неё, так как в условии нет оговорки «$f(x) \neq b$ в $\overset{\circ}{U}_\delta(\alpha)$».

Следствие (непрерывность сложной функции).

Если функция f *непрерывна в точке* $c \in \mathbb{R}$, *а функция* g *непрерывна в точке* $b = f(c)$, *то сложная функция* $g(f)$ *непрерывна в точке* c.

□ По теореме 3.8, $\lim\limits_{x\to c} g(f(x)) = g(b) = g(f(c))$. ■

§ 4. Пределы монотонных функций

Определение 3.8. Функция f называется строго (или нестрого) возрастающей на множестве $X \subset \mathbb{R}$, если для любых $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) \leqslant f(x_2)$). Функция f называется строго (или нестрого) убывающей на множестве $X \subset \mathbb{R}$, если для любых $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) \geqslant f(x_2)$). Все такие функции называются монотонными на множестве X.

Пример 3.13. Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ является строго убывающей на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$, но не является монотонной на всей области определения $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Теорема 3.9 (о пределах монотонных функций). 1) *Пусть функция f возрастает (вообще говоря, нестрого) на $(a; b)$, где a — конечно или $a = -\infty$, b — конечно или $b = +\infty$. Тогда существует $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \sup\limits_{(a;b)} f(x)$; если f ограничена сверху на $(a; b)$, то предел конечен, если нет — равен $+\infty$. Кроме того, существует $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \inf\limits_{(a;b)} f(x)$; если f ограничена снизу на $(a; b)$, то он конечен, если нет — равен $-\infty$.*
2) *Пусть функция f убывает (вообще говоря, нестрого) на $(a; b)$, где a — конечно или $a = -\infty$, b — конечно или $b = +\infty$. Тогда существуют $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \sup\limits_{(a;b)} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \inf\limits_{(a;b)} f(x)$ (с аналогичными оговорками).*

З а м е ч а н и е. Если $b = +\infty$, то под $b - 0$ понимаем тот же символ $+\infty$. Если $a = -\infty$, то под $a + 0$ понимаем $-\infty$.
$\square$ Доказательство теоремы проводим для случая возрастающей функции, $x \to b - 0$ (остальные случаи доказываются аналогично).

Рассмотрим любую последовательность x_n такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b - 0$ ($x_n < b$, если $b \in \mathbb{R}$). Нужно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = M = \sup\limits_{(a;b)} f(x)$.

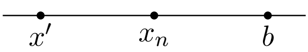

Рис. 3.5

1) Пусть $M \in \mathbb{R}$, т.е. f ограничена сверху на $(a; b)$. Тогда $\forall\, x \in (a; b) \to (f(x) \leqslant M) \wedge (\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, x' \in (a; b)$: $f(x') > M - \varepsilon)$. В определении точной верхней грани мы заменили для удобства число $M' < M$ на $M - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b - 0$, то $\exists\, n_0$: $\forall\, n \geqslant n_0 \to x_n \in (x'; b)$ (см. рис. 3.5). Тогда $f(x_n) \geqslant f(x') > M - \varepsilon$, также $\forall\, n \to f(x_n) \leqslant M$. Окончательно

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, n_0 : \quad \forall\, n \geqslant n_0 \to f(x_n) \in (M - \varepsilon; M],$$

значит, $f(x_n) \in U_\varepsilon(M)$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = M$.

2) Пусть $M = +\infty$, т.е. f неограничена сверху на $(a;b)$. Тогда $\forall\, E > 0 \to \exists\, x' \in (a;b)$: $f(x') > E$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b - 0$, то $\exists\, n_0$: $\forall\, n \geqslant n_0 \to x_n \in (x';b)$ (см. рис. 3.5). Тогда $f(x_n) \geqslant f(x') > E$. Окончательно

$$\forall\, E > 0 \to \exists\, n_0 : \quad \forall\, n \geqslant n_0 \to f(x_n) > E.$$

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$. ■

Эта теорема распространяет теорему Вейерштрасса 2.4 и её аналог 2.6 на пределы функций.

Лемма 3.8. *Если функция f монотонна на интервале $(a;b)$ (конечном или бесконечном), то её разрывы во внутренних точках $(a;b)$ могут быть только первого рода.*

□ Пусть для определённости f возрастает на $(a;b)$ (вообще говоря, нестрого); $x_0 \in (a;b)$. Тогда f возрастает на $(a;x_0)$ и ограничена сверху (так как $f(x) \leqslant f(x_0)$ для всех $x \in (a;x_0)$). По теореме 3.9 существует конечный $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$. Аналогично существует конечный $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$. Поэтому если x_0 — точка разрыва, то — первого рода. ■

Лемма 3.9. *Функция f, монотонная на интервале $(a;b)$, конечном или бесконечном, не может иметь точек устранимого разрыва на $(a;b)$.*

□ Пусть для определённости f возрастает на $(a;b)$ (вообще говоря, нестрого); $x_0 \in (a;b)$. Для всех $x \in (a;x_0)$ имеет место неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$. Переходя к пределу в неравенстве (теорема 3.3), получим $f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0)$ (предел $f(x_0 - 0)$ существует по лемме 3.8). Аналогично $f(x_0) \leqslant f(x_0 + 0)$. Поэтому если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, то $f(x_0)$ равно их общему значению, и f непрерывна в точке x_0. ■

Теорема 3.10. *Множество точек разрыва функции f, монотонной на интервале $(a;b)$ (конечном или бесконечном) — не более чем счётно.*

□ Каждая точка разрыва — первого рода, неустранимая. Поэтому ей соответствует интервал $(f(x_0-0); f(x_0+0))$ на оси ординат. В силу монотонности f такие интервалы, соответствующие различным точкам разрыва, не пересекаются. Выберем в каждом из них рациональную точку (теорема 1.2 о плотности множества рациональных чисел во множестве действительных чисел). Все эти рациональные точки различны. Получим взаимно однозначное соответствие между множеством точек разрыва f и подмножеством множества $\mathbb{Q}$, которое не более чем счётно. ■

Пример 3.14. Функция $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$ на интервале $(0; 1)$ имеет счётное множество точек разрыва, соответствующее целым значениям функции $\frac{1}{x}$ на $(0; 1)$ (точки $x = \frac{1}{n}$, $n = 2$, 3, $\ldots$). Эта функция нестрого убывает на $(0; 1)$, её график изображён на рис. 3.6.

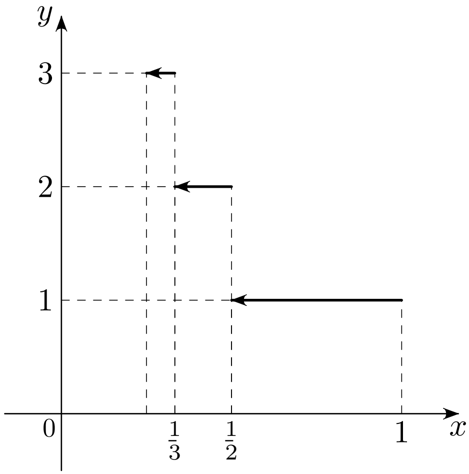

Рис. 3.6

З а м е ч а н и е. Немонотонная функция может иметь несчётное множество точек разрыва. Например, функция Дирихле (примеры 3.3 и 3.10) разрывна в каждой точке.

§ 5. Свойства функций, непрерывных на промежутках

Определение 3.9. Промежутком числовой прямой называется содержащее более одной точки множество $X \subset \mathbb{R}$, которое вместе с любыми двумя точками содержит целиком отрезок с концами в этих точках.

Лемма 3.10. *Множество $X \subset \mathbb{R}$ является промежутком $\iff X$ есть одно из множеств вида $(a;b)$, $[a;b]$, $(a;b]$, $[a;b)$, $(a;+\infty)$, $[a;+\infty)$, $(-\infty;b)$, $(-\infty;b]$, $(-\infty;+\infty)$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.*

□ $\Leftarrow$ Утверждение очевидно.

$\Rightarrow$ Пусть $a = \inf X$, $b = \sup X$ (так как X содержит более одной точки, то $a < b$). Если множество X ограничено, причём $a \in X$, $b \in X$, то $X \subset [a;b]$. Но так как $a, b \in X$, то $[a;b] \subset X$. Значит, $X = [a;b]$.

Если множество X ограничено, но $a \notin X$, $b \notin X$, то $X \subset (a;b)$. С другой стороны,

$$\forall\, x_0 \in (a;b) \to \exists\, x_1 \in (a;x_0),\ \exists\, x_2 \in (x_0;b): \quad x_1, x_2 \in X.$$

Тогда $[x_1;x_2] \subset X$ и $x_0 \in X$. Так как x_0 — любая точка $(a;b)$, то $(a;b) \subset X$. Значит, $X = (a;b)$.

Аналогично разбираются остальные случаи. Например, если множество X неограничено сверху и ограничено снизу, причём $a = \inf X \in X$, то $X \subset [a;+\infty)$. С другой стороны,

$$\forall\, x_0 \in [a;+\infty) \to \exists\, x_1 > x_0: \quad x_1 \in X.$$

Тогда $[a;x_1] \subset X$ и $x_0 \in X$. Так как x_0 — любая точка $[a;+\infty)$, то $[a;+\infty) \subset X$. Значит, $X = [a;+\infty)$. ■

Определение 3.10. Функция f, определённая на промежутке, называется непрерывной на этом промежутке, если она непрерывна во всех его внутренних точках, а в концах промежутка, если они принадлежат промежутку, имеет место соответствующая односторонняя непрерывность f.

Так, функция, определённая на отрезке $[a;b]$, называется непрерывной на $[a;b]$, если она непрерывна во всех точках интервала $(a;b)$, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

Теорема 3.11 (первая теорема Вейерштрасса). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на $[a;b]$.*

□ Пусть f не является ограниченной на $[a; b]$. Тогда

$$\forall E > 0 \to \exists x \in [a; b]: \quad |f(x)| > E.$$

Возьмём $E = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ Тогда полученные значения x образуют последовательность $x_n \in [a; b]$ такую, что при всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $|f(x_n)| > n$. По теореме Больцано–Вейерштрасса можно выделить сходящуюся подпоследовательность x_{n_k}: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Так как все $x_{n_k} \in [a; b]$, то и $x_0 \in [a; b]$ (следствие из теоремы 2.2). Но f непрерывна в точке x_0, значит, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$. Если x_0 — один из концов отрезка, например, $x_0 = a$, то $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a + 0$, а f непрерывна справа в точке a. Равенство $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$ сохраняется.

Но $|f(x_{n_k})| > n_k \geqslant k$ (так как $1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots < n_k < < \ldots$), поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty$. Полученное противоречие показывает, что $f(x)$ ограничена на $[a; b]$. ■

Пример 3.15. Функция, непрерывная на конечном интервале, не обязана быть ограниченной. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на $(0; 1)$. Она неограничена, так как

$$\forall E > 0 \to \exists x(E) = \frac{1}{2E}: \quad f(x) > E.$$

Пример 3.16. Функция, не являющаяся непрерывной на отрезке $[a; b]$, не обязана быть ограниченной. Рассмотрим функцию $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{если } x \in [-1; 0) \cup [0; 1]; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Она разрывна в точке $x = 0$ и неограничена на $[-1; 1]$ (аналогично примеру 3.15). График этой функции изображён на рис. 3.7.

Примеры 3.15 и 3.16 показывают, что в теореме 3.11 оба условия: отрезок как область определения и непрерывность функции — являются существенными.

Теорема 3.12 (вторая теорема Вейерштрасса). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, то существуют точки x_1 и x_2 на отрезке $[a; b]$ такие, что $f(x_1) = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$, $f(x_2) =$*

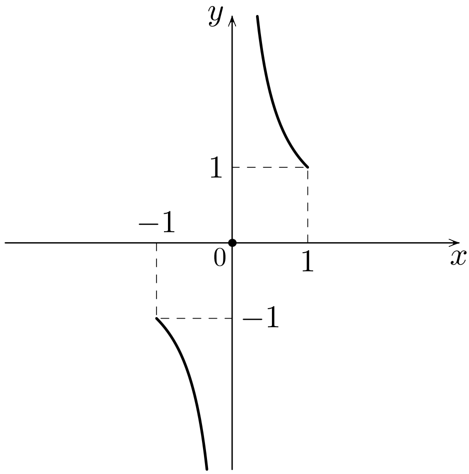

Рис. 3.7

$= \inf\limits_{[a;b]} f(x)$ *(функция достигает своих точных верхней и нижней граней).*

□ Докажем, что достигается $M = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$ (для точной нижней грани доказательство аналогично).

По определению точной верхней грани, которая существует по теореме 3.11,

$$(\forall\, x \in [a;b] \to f(x) \leqslant M) \wedge$$
$$\wedge (\forall\, M' < M \to \exists\, x \in [a;b]: \quad f(x) > M').$$

Рассмотрим $M' = M - \frac{1}{n}$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ Тогда полученные значения $x(M')$ образуют последовательность $x_n \in [a;b]$ такую, что при всех $n = 1,\ 2,\ \ldots$ выполняется неравенство

$$M \geqslant f(x_n) > M - \frac{1}{n}\,.$$

По теореме 2.3 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = M$.

По теореме Больцано–Вейерштрасса можно выделить сходящуюся подпоследовательность x_{n_k}: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in [a;b]$. Но f непрерывна в точке x_0, значит, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$. Случай, когда x_0 — один из концов отрезка, разбирается так же, как и в доказательстве теоремы 3.11. С другой стороны, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$. Значит, $M = f(x_0)$; x_0 и есть та точка, где достигается точная верхняя грань $f(x)$. ■

Пример 3.17. Функция, непрерывная на конечном интервале, может быть ограниченной, но не достигать ни точной верхней, ни точной нижней грани. Рассмотрим функцию $f(x) = x$ на $(0;1)$. Она ограничена: $\sup\limits_{(0;1)} f(x) = 1$, $\inf\limits_{(0;1)} f(x) = 0$, ни одна из точных граней не достигается.

Пример 3.18. Функция, не являющаяся непрерывной на отрезке $[a;b]$, может быть ограниченной, но не достигать ни точной верхней, ни точной нижней грани. Рассмотрим функцию $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in (-1;1); \\ 0, & \text{если } x = \pm 1. \end{cases}$ Она разрывна в точках $x = \pm 1$ (в концах отрезка $[-1;1]$ нет односторонней непрерывности); $\sup\limits_{x\in(-1;1)} f(x) = 1$; $\inf\limits_{(-1;1)} f(x) = -1$; ни одна из точных граней не достигается.

Теорема 3.13 (Больцано–Коши). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает в точках a и b значения разного знака (т.е. $f(a)f(b) < 0$), то существует точка $c \in (a;b)$ такая, что $f(c) = 0$.*

□ Рассмотрим точку $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$ — середину отрезка. Если $f(x_1) = 0$, то искомая точка найдена. Если нет, то выберем Δ_1 — ту из половинок отрезка $[a;b]$, на концах которой f принимает значения разных знаков. Рассмотрим теперь точку x_2 — середину отрезка Δ_1. Если $f(x_2) = 0$, то искомая точка найдена. Если нет, то выберем Δ_2 — ту из половинок Δ_1, на концах которой f принимает значения разных знаков, и т.д. Если на каком-то n-м шаге $f(x_n) = 0$, то искомая точка найдена. В противном случае получим последовательность вложенных отрезков $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \ldots$ такую, что на концах каждого из отрезков Δ_n функция принимает значения разных знаков. Длина n-го отрезка равна $\dfrac{b-a}{2^n} = (b-a)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ — стремится к нулю по лемме 2.10.

По теореме Кантора о вложенных отрезках существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам Δ_n. Ясно, что $c \in [a;b]$. Докажем, что $f(c) = 0$. Пусть это не так, и, например, $f(c) > 0$ (если c — один из концов отрезка, то соответствующий предел односторонний). По лемме 3.1

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \quad \forall\, x \in U_\varepsilon(c) \to f(x) > 0$$

(в самой точке c неравенство выполняется автоматически, так как $f(c) > 0$; если c — один из концов отрезка, то соответствующая окрестность — односторонняя). Так как найдётся номер n_0 такой, что при всех $n \geqslant n_0$ длина отрезка Δ_n меньше, чем ε, то при всех $n \geqslant n_0$ отрезок Δ_n целиком лежит в $U_\varepsilon(c)$ (см. рис. 2.10). Следовательно, для всех $x \in \Delta_n$ выполняется неравенство $f(x) > 0$. Это противоречит тому, что на концах Δ_n функция принимает значения разных знаков. Значит, $f(c) = 0$. Ясно также, что $c \in (a;b)$, так как $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$. ■

Пример 3.19. Для разрывных на $[a;b]$ функций теорема не обязана выполняться. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ -1, & \text{если } -1 \leqslant x < 0. \end{cases}$$

На концах отрезка $[-1;1]$ функция принимает значения разных знаков, но нигде на $(-1;1)$ не обращается в нуль.

Теорема 3.14 (о промежуточных значениях непрерывной функции). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, то для любого значения y_0, заключённого между $f(a)$ и $f(b)$, существует точка $x_0 \in [a;b]$ такая, что $f(x_0) = y_0$.*

□ Если $y_0 = f(a)$ или $y_0 = f(b)$, то $x_0 = a$ или $x_0 = b$ соответственно. В противном случае рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - y_0$. Тогда числа $g(a)$ и $g(b)$ имеют разный знак; по теореме Больцано–Коши найдётся точка $x_0 \in (a;b)$ такая, что $g(x_0) = 0$, т.е. $f(x_0) = y_0$. ■

Теорема 3.15. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда множество её значений на $[a;b]$ есть отрезок $[m;M]$, где $m = \inf\limits_{[a;b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$.*

$\square$ По теоремам 3.11 и 3.12 m и M — конечны, и найдутся точки x_1 и x_2 из отрезка $[a;b]$ такие, что $f(x_1) = m$; $f(x_2) = M$. Рассмотрим f на отрезке $[x_1;x_2]$ (или $[x_2;x_1]$, смотря что больше). По теореме 3.14

$$\forall\, y_0 \in [m;M] \to \exists\, x_0 \in [x_1;x_2]: \quad f(x_0) = y_0.$$

Значит, $y_0 \in E(f)$, но $E(f) \subset [m;M]$, поэтому $E(f) = [m;M]$. $\blacksquare$

Приведём теперь аккуратное доказательство теоремы, которую в школьном курсе алгебры обычно считают очевидной.

Теорема 3.16. *Любой многочлен нечётной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень.*

$\square$ Рассмотрим многочлен $\mathcal{P}(x) = a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \ldots + a_{2n}x + a_{2n+1}$, где $a_0 \neq 0$ (для определённости считаем, что $a_0 > 0$). Пусть $f(x) = \dfrac{\mathcal{P}(x)}{x^{2n+1}} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_{2n+1}}{x^{2n+1}}$, т.е. $\mathcal{P}(x) = x^{2n+1}f(x)$. Ясно, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a_0 > 0$. Тогда, так как $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2n+1} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2n+1} = -\infty$, то и $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathcal{P}(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathcal{P}(x) = -\infty$ (символические записи $(+\infty)\cdot a_0 = +\infty$, $(-\infty)\cdot a_0 = -\infty$; соответствующие записи предлагались в качестве упражнения 2.14 в случае последовательностей, для функций доказательство проводится стандартным образом сведением к последовательностям и применением определения предела функции по Гейне).

Значит, взяв в определении предела $E = 1$:

$$\exists\, \Delta_1 > 0: \quad \forall\, x > \Delta_1 \to \mathcal{P}(x) > 1,$$
$$\exists\, \Delta_2 > 0: \quad \forall\, x < -\Delta_2 \to \mathcal{P}(x) < -1.$$

Выберем фиксированные точки $x_1 > \Delta_1$, $x_2 < -\Delta_2$. Тогда $\mathcal{P}(x_1) > 0$, $\mathcal{P}(x_2) < 0$. По теореме Больцано–Коши найдётся число $c \in [x_2;x_1]$ такое, что $\mathcal{P}(c) = 0$. $\blacksquare$

Лемма 3.11. *Если функция f непрерывна на промежутке I, то её множество значений $E(f) = f(I)$ — также промежуток или состоит из одной точки (для постоянной функции).*

□ Пусть $y_1, y_2 \in f(I)$. Тогда найдутся точки $x_1, x_2 \in I$ такие, что $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Так как f непрерывна на $[x_1, x_2]$, то по теореме 3.14

$$\forall\, y_0 \in [y_1; y_2] \to \exists\, x_0 \in [x_1; x_2]: \quad f(x_0) = y_0,$$

откуда следует, что $y_0 \in f(I)$. Значит, $f(I)$ — промежуток. ■

Лемма эта необратима, так как для разрывной на промежутке функции множество значений может быть также промежутком.

Пример 3.20. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & \text{если } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Докажем, что эта функция непрерывна в точке $x = 0$, разрывна в остальных точках.

□ В самом деле, легко видеть, что

$$f(x) = xg(x), \quad \text{где} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}; \\ -1, & \text{если } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Функция g ограничена, поэтому $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ (произведение ограниченной функции g на бесконечно малую x). Значит, функция f непрерывна в точке $x = 0$.

Далее, для любого числа $a \in \mathbb{R}$ найдутся последовательности x'_n и x''_n такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x''_n = a$, $x'_n \neq a$, $x''_n \neq a$, причём $x'_n \in \mathbb{Q}$, $x''_n \notin \mathbb{Q}$ (см. пример 3.3). Так как $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x'_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = -\lim\limits_{n\to\infty} x''_n = -a$, то при $a \neq 0$ предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ не существует, следовательно, f разрывна в любой точке $x \neq 0$. ■

Вместе с тем ясно, что множество значений f на отрезке $[-1; 1]$ — это отрезок $[-1; 1]$.

Для монотонных функций лемма 3.11 обратима.

Лемма 3.12. *Пусть функция f нестрого монотонна и не является постоянной на промежутке I. Тогда f непрерывна на $I \iff$ её множество значений $f(I)$ — промежуток.*

□ ($\Rightarrow$) Это утверждение следует из леммы 3.11.

$\boxed{\Leftarrow}$ Для определённости считаем, что f возрастает на I. Пусть f разрывна во внутренней точке x_0 промежутка I. Так как разрыв первого рода и неустранимый (леммы 3.8 и 3.9), то $f(x_0+0) > f(x_0-0)$.

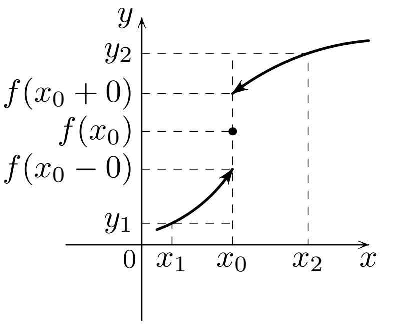

Рис. 3.8

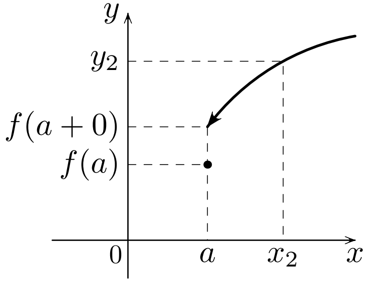

Рис. 3.9

Рассмотрим точки x_1, $x_2 \in I$ такие, что $x_1 < x_0 < x_2$. Тогда (см. рис. 3.8) $y_1 = f(x_1) \leqslant f(x_0-0) < f(x_0+0) \leqslant f(x_2) = y_2$. Ясно, что $y_1, y_2 \in f(I)$, но весь отрезок $[y_1; y_2]$ не может принадлежать $f(I)$ (из всех точек интервала $(f(x_0-0); f(x_0+0))$ множеству $f(I)$ принадлежит разве что точка $f(x_0)$, если она не совпадает с $f(x_0-0)$ или $f(x_0+0)$). Значит, $f(I)$ не является промежутком.

Аналогично разбирается случай разрыва в конце промежутка I, если этот конец принадлежит промежутку. Например, пусть левый конец $a \in I$ и в этой точке функция f не является непрерывной справа в точке a. Рассмотрим точку $x_2 \in I$ такую, что $x_2 > a$. Тогда (см. рис. 3.9) $y_2 = f(x_2) \geqslant f(a+0) > f(a)$. Точки $f(a)$ и y_2 принадлежат $f(I)$, но отрезок $[f(a); y_2]$ не принадлежит целиком $f(I)$. Значит, $f(I)$ не является промежутком. ■

§ 6. Теорема об обратной функции

Определение 3.11. Пусть f — функция с областью определения $X = D(f)$ и множеством значений $Y = E(f)$, причём соответствие между X и Y, осуществляемое функцией f, взаимно однозначно, т.е. любому $y \in Y$ соответствует единственный $x \in X$ такой, что $y = f(x)$. Тогда функция f называется обратимой на X. Обратное соответствие определяет также функцию с областью определения Y и множеством значений X, которая называется обратной к функции f. Обратная функция обозначается f^{-1}.

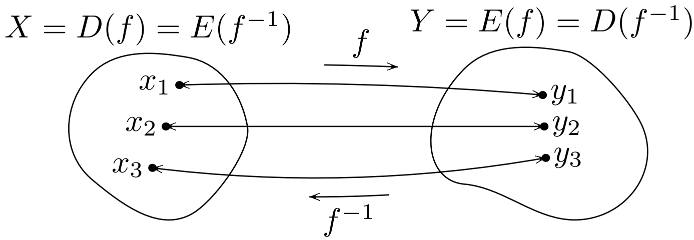

Рис. 3.10

Особенностями этой ситуации по сравнению с общим определением 2.1 является наличие взаимно однозначного (биективного) соответствия между $D(f)$ и $E(f)$, а также совпадение $E(f)$ с Y (см. рис. 3.10, сравнить его с рис. 2.1).

Пример 3.21. Пусть X — множество человек, присутствующих на лекции, $y = f(x)$ — год рождения x. Если в качестве Y рассмотреть подмножество $\mathbb{N}$, совпадающее с $E(f)$, то функция не является обратимой, так как в аудитории присутствуют разные люди, имеющие один и тот же год рождения (см. пример 2.1).

Теорема 3.17 (об обратной функции). *Пусть функция f строго монотонна и непрерывна на промежутке I. Тогда на промежутке $J = f(I)$ определена, строго монотонна в ту же сторону и непрерывна обратная функция f^{-1}.*

□ Пусть для определённости f строго возрастает на I. По лемме 3.11, J — промежуток. Покажем, что f осуществляет взаимно однозначное соответствие между I и J. Пусть это не так, т.е. существуют $x_1, x_2 \in I$ такие, что $x_1 \neq x_2$ и $f(x_1) = f(x_2)$. Но если для определённости $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$ — противоречие.

Значит, существует обратная функция f^{-1}. При этом $D(f) = E(f^{-1}) = I$, $E(f) = D(f^{-1}) = J$. Покажем, что f^{-1} строго возрастает на J. Пусть $y_1, y_2 \in J$, $y_1 < y_2$. Докажем, что $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Пусть это не так, т.е. $x_1 = f^{-1}(y_1) \geqslant x_2 = f^{-1}(y_2)$. Тогда, в силу возрастания функции f, выполняется неравенство $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, т.е. $y_1 \geqslant y_2$ — противоречие.

Так как $E(f^{-1}) = I$ — промежуток и f^{-1} монотонна на J, то по лемме 3.12 f^{-1} непрерывна на J. ■

Пример 3.22. Рассмотрим функцию $f(x) = x^n$ при нечётном натуральном n. Ясно, что $D(f) = (-\infty; +\infty)$, функция строго возрастает и непрерывна на $(-\infty; +\infty)$,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Отсюда следует, что f принимает сколь угодно большие по модулю как положительные, так и отрицательные значения. Поэтому $E(f)$ — промежуток, неограниченный как сверху, так и снизу, т.е. $E(f) = (-\infty; +\infty)$. По теореме 3.17 на $(-\infty; +\infty)$ определена, строго возрастает и непрерывна обратная функция f^{-1}, которая называется корнем n-й степени (обозначение $\sqrt[n]{}$).

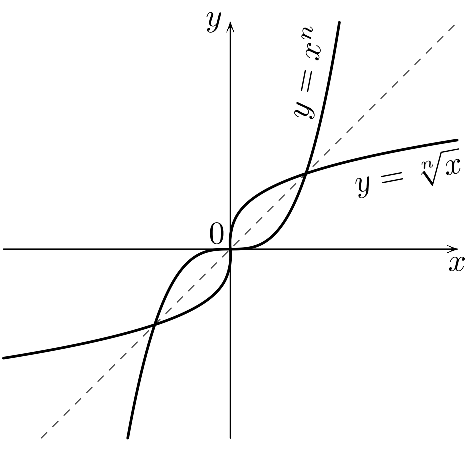

Рис. 3.11

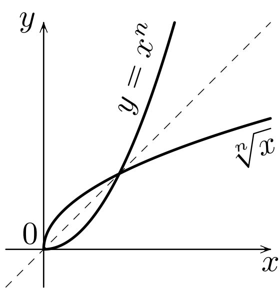

Рис. 3.12

Если $y = x^n$, то $x = \sqrt[n]{y}$. Обозначая аргумент обратной функции традиционно через x, получим $y = \sqrt[n]{x}$. Переобозначение x и y соответствует симметричному отражению плоскости относительно биссектрисы I и III координатных углов, поэтому графики $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ симметричны относительно этой биссектрисы (см. рис. 3.11).

Пример 3.23. Рассмотрим функцию $f(x) = x^n$ при чётном натуральном n. Она необратима, так как не осуществляет взаимно однозначное соответствие между $D(f)$ и $E(f)$ ($x^n = (-x)^n$). Будем теперь считать $D(f) = [0; +\infty)$; $f(x)$ строго возрастает и непрерывна на $[0; +\infty)$. Далее, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $f(x) \geqslant 0$, $f(0) = 0$. Тогда $E(f)$ — промежуток, содержащий 0, не содержащий отрицательных чисел и неограниченный сверху, т.е. $E(f) = [0; +\infty)$. По теореме 3.17 на $[0; +\infty)$ определена, строго возрастает и непрерывна обратная функция f^{-1}, которая называется корнем n-й степени (обозначение $\sqrt[n]{}$).

Графики функций $y = x^n$ и $y = \sqrt[n]{x}$ изображены на рис. 3.12.

Как и в курсе элементарной алгебры, корень n-й степени, извлечённый из неотрицательного числа и принимающий неотрицательные значения, называется арифметическим корнем. Свойства арифметического корня n-й степени, известные из курса алгебры, сохраняются вместе с доказательствами (в школьном курсе не устанавливается лишь существование корня из любого положительного числа). Аналогично элементарному курсу определяется степень с рациональным показателем положительного действительного числа $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$, доказывается независимость этого выражения от представления рационального числа в виде отношения двух целых чисел, а также доказываются известные свойства степени с рациональным показателем.

Приведём некоторые примеры решения задач на пределы последовательностей и пределы функций, содержащих корни n-й степени и степени с рациональным показателем.

Пример 3.24. Доказать, что:
1) если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$;
2) если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, причём $\exists\, n_0\colon\ \forall\, n \geqslant n_0 \to x_n \geqslant 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = 0$.

□ Сформулированное утверждение фактически означает, что:
1) функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна в любой точке $a > 0$;
2) функция $\sqrt{x}$ непрерывна справа в точке 0.
Приведём также непосредственные доказательства этих утверждений.

1) Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$, то по лемме 2.6 $\exists\, n_0\colon\ \forall\, n \geqslant n_0 \to$ $\to x_n > 0$ и $\sqrt{x_n}$ определён. Так как $\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, n_1\colon\ \forall\, n \geqslant n_1 \to$ $\to |x_n - a| < \varepsilon\sqrt{a}$, то $\forall\, n \geqslant n_2 = \max(n_0; n_1) \to |\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| =$ $= \dfrac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \dfrac{\varepsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \varepsilon$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

2) $\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, n_1\colon\ \forall\, n \geqslant n_1 \to |x_n| < \varepsilon^2$, тогда если $n_2 =$ $= \max(n_0; n_1)$, то $\forall\, n \geqslant n_2 \to |\sqrt{x_n}| < \varepsilon$, значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = 0$. ■

Пример 3.25. Доказать, что для любого рационального числа $r > 0$ имеет место равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^r} = 0$.

□ Сначала докажем, что для любого натурального m

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[m]{n}} = 0. \tag{3.2}$$

В самом деле, неравенство $\dfrac{1}{\sqrt[m]{n}} < \varepsilon$ равносильно $n > \varepsilon^{-m}$. Поэтому $\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, n_0 = [\varepsilon^{-m}] + 1\colon\ \forall\, n \geqslant n_0 \to \left|\dfrac{1}{\sqrt[m]{n}}\right| < \varepsilon$. Равенство (3.2) доказано.

Если r — любое положительное рациональное число, то найдётся натуральное число m такое, что $r \geqslant \dfrac{1}{m}$, (если $r = \dfrac{p}{m}$, где $p, m \in \mathbb{N}$, то $r \geqslant \dfrac{1}{m}$). Тогда при $n = 1,\ 2,\ \ldots$ выполняются неравенства

$$0 < \frac{1}{n^r} \leqslant \frac{1}{n^{1/m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{n}}\,.$$

Из (3.2) и теоремы 2.3 следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^r} = 0$. ■

Пример 3.26. При всех $a > 0$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

$\square$ Сначала рассмотрим случай $a > 1$. Так как $\sqrt[n]{a} > 1$, то $\sqrt[n]{a} = 1 + \beta_n$, где $\beta_n > 0$. Тогда, применяя неравенство Бернулли, имеем

$$a = (1 + \beta_n)^n \geqslant 1 + n\beta_n > n\beta_n,$$

откуда $0 < \beta_n < \frac{a}{n}$.

По теореме 2.3 $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Если $0 < a < 1$, то $b = \frac{1}{a} > 1$. Тогда из предыдущего следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}} = 1$.

При $a = 1$ утверждение очевидно. $\blacksquare$

Пример 3.27. Доказать, что для любого рационального числа $r > 0$ имеет место равенство $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^r} = +0$.

$\square$ Сначала докажем, что для любого натурального m

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[m]{x}} = +0. \tag{3.3}$$

В самом деле, неравенство $\frac{1}{\sqrt[m]{x}} < \varepsilon$ равносильно $x > \varepsilon^{-m}$. Поэтому $\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\,\Delta = \varepsilon^{-m}\colon\ \forall\,x > \Delta \to 0 < \frac{1}{\sqrt[m]{x}} < \varepsilon$. Равенство (3.3) доказано.

Если r — любое положительное рациональное число, то аналогично примеру 3.25 найдётся натуральное число m такое, что $r \geqslant \frac{1}{m}$. Тогда при $x > 0$ выполняются неравенства

$$0 < \frac{1}{x^r} \leqslant \frac{1}{x^{1/m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{x}}\,.$$

Из (3.3) и теоремы 3.4 следует, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^r} = +0$. $\blacksquare$

§ 7. Тригонометрические функции

После аккуратного определения корня n-й степени нашей ближайшей задачей будет определение всех элементарных функций, применяемых в алгебре (тригонометрические и обратные тригонометрические функции, показательная функция, логарифмы).

Определение тригонометрических функций числового аргумента — то же, что в элементарной тригонометрии. Пусть $x \in \mathbb{R}$, P_0 — точка плоскости, имеющая в прямоугольной системе координаты $(1; 0)$, P_x — точка единичной окружности с центром в начале координат такая, что поворот вектора $\overrightarrow{OP_0}$ против часовой стрелки на угол x радиан даёт вектор $\overrightarrow{OP_x}$. Тогда $\sin x$ и $\cos x$ — это соответственно ордината и абсцисса точки P_x (см. рис. 3.13), $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Естественно, имеют место неравенства $|\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$, а также все известные формулы тригонометрии: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и т.д.

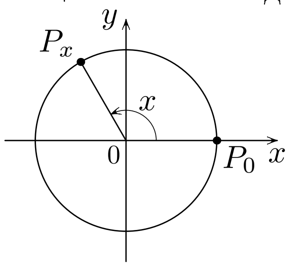

Рис. 3.13

Конечно, такое определение тригонометрических функций нельзя признать аккуратным. Дело в том, что угол x радиан — это центральный угол такой, что длина соответствующей дуги окружности единичного радиуса равна x. А определения длины дуги кривой линии у нас пока нет. Это определение будет дано в главе VI. Строго говоря, мы должны пока воздержаться от рассмотрения тригонометрических и обратных тригонометрических функций и весь материал, к ним относящийся, считать полностью иллюстративным. Только после того, как будет развита соответствующая теория, можно говорить о тригонометрических функциях (кстати, и о числе π, связанном с длиной окружности единичного радиуса). На этом пути возникают существенные трудности, и в учебных пособиях по математическому анализу, как правило, этот момент вообще игнорируется. Мы обращаем внимание на проблему, но, подобно большинству авторов аналогичных пособий, не будем пытаться построить строгую теорию, исключающую ссылки на геометрическую наглядность.

Лемма 3.13. *Для любого действительного числа x выполняется неравенство $|\sin x| \leqslant |x|$; если $x \neq 0$, то $|\sin x| < |x|$.*

□ Достаточно рассмотреть случай $x \neq 0$. В силу нечётности функций x и $\sin x$ достаточно доказать, что $|\sin x| < x$ при $x > 0$.

Но если $x \geqslant \frac{\pi}{2}$, то $|\sin x| \leqslant 1 < \frac{\pi}{2} \leqslant x$, поэтому остаётся разобрать случай $0 < x < \frac{\pi}{2}$. В этом случае (см. рис. 3.14):

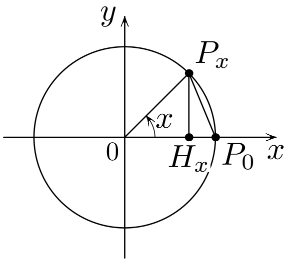

Рис. 3.14

$$0 < \sin x = P_x H_x < P_x P_0 < \overset{\frown}{P_x P_0} = x. \qquad \blacksquare$$

Лемма 3.14.
1) *Функция* $y = \sin x$ *строго возрастает на* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
2) *функция* $y = \cos x$ *строго убывает на* $[0; \pi]$;
3) *функция* $y = \operatorname{tg} x$ *строго возрастает на* $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;
4) *функция* $y = \operatorname{ctg} x$ *строго убывает на* $(0; \pi)$.

□ 1) Пусть $-\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\sin x_2 - \sin x_1 = 2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2} > 0$$

(так как $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $\sin \frac{x_2 - x_1}{2} > 0$; $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2}$ и $\cos \frac{x_1 + x_2}{2} > 0$).

3) Пусть $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_2 \cos x_1} > 0$$

(так как $0 < x_2 - x_1 < \pi$ и $\sin(x_2 - x_1) > 0$; $\cos x_1 > 0$; $\cos x_2 > 0$).

Пункты 2) и 4) рассматриваются аналогично. ■

Теорема 3.18. *Функции* $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ *непрерывны каждая на своей области определения.*

□ В силу леммы 3.13

$$|\sin x - \sin a| = \left| 2 \sin \frac{x - a}{2} \cos \frac{x + a}{2} \right| \leqslant 2 \cdot \left| \frac{x - a}{2} \right| \cdot 1 = |x - a|.$$

Поэтому для любого $a \in \mathbb{R}$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, \delta(\varepsilon) = \varepsilon : \quad \forall\, x, |x-a| < \delta \to |\sin x - \sin a| < \varepsilon;$$

функция $y = \sin x$ непрерывна в любой точке a. Непрерывность функции $y = \cos x$ в любой точке доказывается аналогично.

Функция $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ непрерывна в любой точке, где $\cos x \neq 0$, т.е. при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (по теореме о непрерывности частного двух непрерывных функций). Аналогично, функция $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывна в любой точке $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. ■

Теорема 3.19 (первый замечательный предел).

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

□ Функция $\frac{\sin x}{x}$ определена при $x \neq 0$. Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\sin x < x$ (по лемме 3.13), кроме того, $x < \operatorname{tg} x$ (см. рис. 3.15).

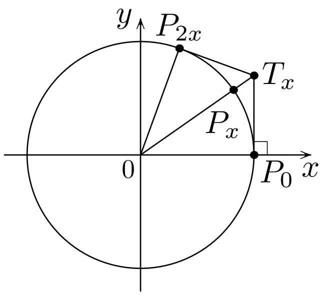

Рис. 3.15

В самом деле, $\operatorname{tg} x = P_0T_x$ (прямая P_0T_x — касательная к окружности). Далее, $P_0T_x + T_xP_{2x} > \overset{\frown}{P_0P_{2x}}$ (длина ломаной, объемлющей дугу окружности, больше длины этой дуги). В силу очевидной симметрии относительно прямой OP_x, имеет место неравенство для «половинок»: $P_0T_x > \overset{\frown}{P_0P_x}$, т.е. $\operatorname{tg} x > x$.

Итак, при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ имеет место неравенство $\sin x < x < \operatorname{tg} x$. Делим все части неравенства на положительное число $\sin x$:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \text{т.е.} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

В силу чётности функций $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ последнее неравенство выполнено при $|x| < \frac{\pi}{2}$, $x \neq 0$, т.е. в $\mathring{U}_\delta(0)$, $\delta = \frac{\pi}{2}$. Так как функция $y = \cos x$ непрерывна в точке $x = 0$, то $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$, и по теореме 3.4 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. ■

Определим теперь обратные тригонометрические функции.

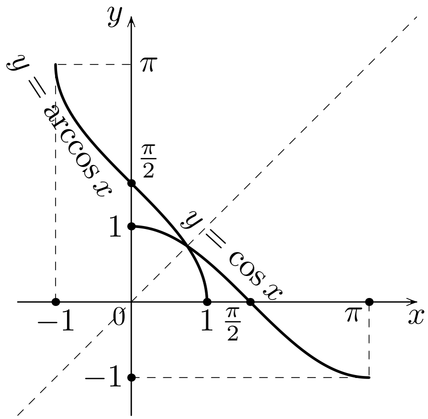

Рис. 3.16

Так как функция $f(x) = \sin x$ непрерывна и строго возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, причём всегда $|\sin x| \leqslant 1$, то множество значений функции $\sin x$, которое является промежутком, может быть только отрезком $[-1; 1]$. Поэтому по теореме об обратной функции на $[-1; 1]$ определена, строго возрастает и непрерывна обратная функция $(f^{-1}(x) \equiv \equiv \arcsin x)$; $D(f^{-1}) = [-1; 1]$; $E(f^{-1}) = \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Так как функция $f(x) = \cos x$ непрерывна и строго убывает на $[0; \pi]$, $f(0) = 1$, $f(\pi) = -1$, причём всегда $|\cos x| \leqslant 1$, то $E(f) = [-1; 1]$. Поэтому по теореме об обратной функции на $[-1; 1]$ определена, строго убывает и непрерывна обратная функция $(f^{-1}(x) \equiv \arccos x)$, $D(f^{-1}) = [-1; 1]$, $E(f^{-1}) = [0; \pi]$. Построим график функции $y = \arccos x$ (см. рис. 3.16).

Лемма 3.15. *Для всех* $x \in [-1; 1]$ *имеет место равенство* $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

$\square$ Пусть $a = \arcsin x$, $b = \frac{\pi}{2} - \arccos x$. Ясно, что $a \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$; так как $\arccos x \in [0; \pi]$, то $b \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Имеем далее $\sin a = x$, $\sin b = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x = \sin a$. Так как

a и b лежат на $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, то из равенства $\sin b = \sin a$ следует $b = a$. ■

Так как функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна и строго возрастает на $\left(-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right)$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \frac{\sin x}{\cos x} = +\infty$ (так как $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \cos x = +0$), $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} f(x) = -\infty$ (аналогично), то $E(f)$ — промежуток, неограниченный как сверху, так и снизу. Значит, $E(f) = (-\infty; +\infty)$. Поэтому по теореме об обратной функции на $(-\infty; +\infty)$ определена, строго возрастает и непрерывна обратная функция ($f^{-1}(x) \equiv \operatorname{arctg} x$); $D(f^{-1}) = (-\infty; +\infty)$; $E(f^{-1}) = \left(-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right)$.

Так как функция $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывна и строго убывает на $(0; \pi)$, $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\pi-0} f(x) = -\infty$, то $E(f) = (-\infty; +\infty)$. По теореме об обратной функции на $(-\infty, +\infty)$ определена, строго убывает и непрерывна обратная функция ($f^{-1}(x) \equiv \operatorname{arcctg} x$), $D(f^{-1}) = (-\infty; +\infty)$, $E(f^{-1}) = (0; \pi)$.

Аналогично лемме 3.15 доказывается

Лемма 3.16. *Для всех $x \in \mathbb{R}$ имеет место равенство*

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}\,.$$

Из школьного курса алгебры известно, что для всех x из областей определения соответствующих функций выполняются равенства:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x;$$
$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, \quad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$$

Таким образом, $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$ — функции нечётные (обратные функции к нечётным функциям, определённым на множествах, симметричных относительно точки 0); $\arccos x$ и $\operatorname{arcctg} x$ не являются ни чётными, ни нечётными функциями (это неудивительно, так как соответствующие области определения $\cos x$ и $\operatorname{ctg} x$, для которых рассматриваются обратные функции, несимметричны относительно точки 0).

Приведём некоторые примеры решения задач на пределы функций, содержащих тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

Пример 3.28. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ не существует.

☐ Рассмотрим последовательности $x'_n = \dfrac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$, $x''_n = \dfrac{1}{2\pi n - \frac{\pi}{2}}$. Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x''_n = 0$, , $x'_n > 0$, $x''_n > 0$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$. При этом $\sin\frac{1}{x'_n} = 1$, $\sin\frac{1}{x''_n} = -1$. Это значит, что не существует $\lim\limits_{x\to +0} \sin\frac{1}{x}$, а значит, и $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ (аналогично можно показать, что не существует $\lim\limits_{x\to -0} \sin\frac{1}{x}$). График функции $y = \sin\frac{1}{x}$ изображён на рис. 3.17. ■

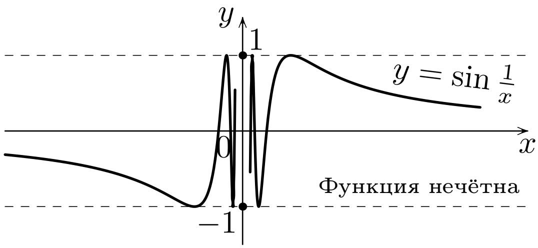

Рис. 3.17

Пример 3.29. Найти пределы функции $y = x\sin\frac{1}{x}$ при $x \to 0$ и $x \to \infty$.

☐ $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$ (произведение бесконечно малой функции x на ограниченную $\sin\frac{1}{x}$ является бесконечно малой функцией при $x \to 0$). Далее, по теореме 3.5 о замене переменной под знаком предела

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1$$

(здесь проведена замена $u = f(x) = \frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $f(x) \neq 0$; использован первый замечательный предел). График функции $y = x\sin\frac{1}{x}$ изображён на рис. 3.18. ■

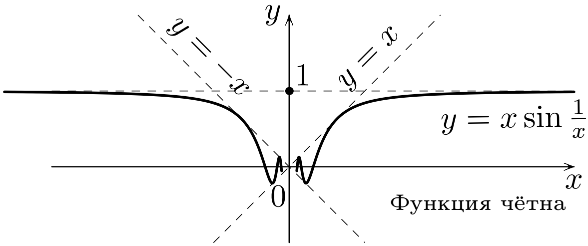

Рис. 3.18

Пример 3.30.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{\cos x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = 1$$

(здесь использованы первый замечательный предел и непрерывность функции $\cos x$ в точке $x = 0$).

Пример 3.31.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} =$$

$$= \frac{\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2}{\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)} = \frac{1^2}{1+\cos 0} = \frac{1}{2}\,.$$

Пример 3.32. Доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

□

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{u\to 0}\frac{u}{\operatorname{tg} u} = \frac{1}{\lim\limits_{u\to 0}\frac{\operatorname{tg} u}{u}} = 1$$

(здесь проведена замена $u = f(x) = \operatorname{arctg} x$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, $f(x) \neq 0$ при $x \neq 0$; использован пример 3.30).

Второе соотношение доказывается аналогично при помощи замены $u = f(x) = \arcsin x$; используется первый замечательный предел. ■

§ 8. Показательная функция и логарифмы

Определим a^x при $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, как естественное обобщение степени с рациональным показателем.

Определение 3.12. Пусть $a > 1$, $x \in \mathbb{R}$. Значение a^x определяется как $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$, где r_n — произвольная последовательность рациональных чисел такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$.

Как и для сложения и умножения действительных чисел, нужно установить корректность этого определения.

□ I) С у щ е с т в о в а н и е. Как известно, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ (пример 3.26). Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}} = 1$. Значит,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, k \in \mathbb{N}: \quad -\varepsilon < a^{-\frac{1}{k}} - 1 < a^{\frac{1}{k}} - 1 < \varepsilon \tag{3.4}$$

(в определении предела найдётся номер k_0 такой, что нужные неравенства выполняются при всех $k \geqslant k_0$, но нам сейчас достаточно взять один такой номер k).

Пусть теперь r_n — произвольная сходящаяся последовательность рациональных чисел. Докажем, что последовательность $y_n = a^{r_n}$ также сходится. Имеем

$$|y_n - y_m| = |a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_m}|a^{r_n - r_m} - 1|. \tag{3.5}$$

Так как последовательность r_n сходится, то она ограничена сверху: $\exists\, C \in \mathbb{N}$: $\forall\, m \to r_m \leqslant C$, значит, $a^{r_m} \leqslant a^C$. Так как последовательность r_n фундаментальна, то для числа k, определённого в (3.4),

$$\exists\, n_0: \quad \forall\, n, m \geqslant n_0 \to |r_n - r_m| < \frac{1}{k}, \quad \text{т.е.} \quad -\frac{1}{k} < r_n - r_m < \frac{1}{k}.$$

Отсюда следует, что

$$a^{-\frac{1}{k}} - 1 < a^{r_n - r_m} - 1 < a^{\frac{1}{k}} - 1,$$

и в силу (3.4) $-\varepsilon < a^{r_n - r_m} - 1 < \varepsilon$.

Окончательно из (3.5) имеем

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, n_0: \quad \forall\, n, m \geqslant n_0 \to |y_n - y_m| < a^C \cdot \varepsilon.$$

Так как a^C — постоянная величина, то последовательность y_n фундаментальна, следовательно, сходится.

II) Единственность. Доказано, что для любой последовательности рациональных чисел r_n такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$, существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$. Пусть существуют две последовательности $r_n' \in \mathbb{Q}$ и $r_n'' \in \mathbb{Q}$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n' = \lim\limits_{n\to\infty} r_n'' = x$, а $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n'} = y \neq z = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n''}$. Рассмотрим последовательность s_n, полученную «перемешиванием» последовательностей r_n' и r_n'':

$$\{r_1',\ r_1'',\ r_2',\ r_2'',\ \ldots,\ r_n',\ r_n'',\ \ldots\}.$$

Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = x$ (вне любой $U_\delta(x)$ не более конечного числа r_n' и не более конечного числа r_n'', значит, не более конечного числа s_n). Но последовательность a^{s_n} имеет два конечных частичных предела y и z, следовательно, расходится. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ один и тот же для всех рациональных последовательностей r_n таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$.

III) Преемственность. Докажем, что если $x \in \mathbb{Q}$, то a^x в смысле определения 3.12 совпадает с обычным значением a^x. В самом деле, рассмотрим последовательность r_n' такую, что $r_n' = x$ при всех $n = 1, 2, \ldots$. Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n' = x$. Поэтому, в силу доказанной единственности, для любой последовательности $r_n \in \mathbb{Q}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$, предел $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n'} = a^x$. Значит, a^x в смысле определения 3.12 совпадает с обычным значением a^x, $x \in \mathbb{Q}$. ■

Итак, для всех $x \in \mathbb{R}$ при $a > 1$ определено значение a^x. При $a = 1$ естественно определить $a^x = 1$ при всех $x \in \mathbb{R}$; при $0 < a < 1$ определим $a^x = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$ согласно определению 3.12. Это можно сделать, так как $\dfrac{1}{a} > 1$. Таким образом, при $a > 0$ определена функция $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Лемма 3.17. *При всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $a^x > 0$. Если $a > 1$, то функция a^x строго возрастает на $(-\infty; +\infty)$. Если $0 < a < 1$, то функция a^x строго убывает на $(-\infty; +\infty)$.*

□ Докажем сначала, что при $a > 1$ функция a^x строго возрастает на $(-\infty; +\infty)$. Пусть $x_1 < x_2$. Рассмотрим рациональные числа r' и r'' такие, что $x_1 < r' < r'' < x_2$. Для любого $n = 1, 2, \ldots$ выберем рациональное число $r_n \in \left(x_1; x_1 + \frac{1}{n}\right)$. По теореме 2.3 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x_1$, значит, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = a^{x_1}$. С другой стороны, так как $x_1 < r'$, то $\exists\, n_0$: $\forall\, n \geqslant n_0 \to r_n < r'$, значит, $a^{r_n} < a^{r'}$ (свойство степени с рациональным показателем). По теореме 2.2 $a^{x_1} \leqslant a^{r'}$. Аналогично, $a^{x_2} \geqslant a^{r''}$. Так как $a^{r'} < a^{r''}$, то $a^{x_1} < a^{x_2}$. Доказано, что функция a^x строго возрастает на $(-\infty; +\infty)$.

Так как $\forall\, x \in \mathbb{R} \to \exists\, k \in \mathbb{N}$: $x > -k$, то $a^x > a^{-k} > 0$. Лемма доказана полностью при $a > 1$. Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$. Значит, $a^x = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и строго убывает на $(-\infty; +\infty)$. ■

Теорема 3.20. *Функция a^x непрерывна на $(-\infty; +\infty)$ при всех $a > 0$.*

□ В силу соотношения $a^x = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$ и положительности a^x теорему достаточно доказать при $a > 1$.

Пусть x_n — любая последовательность действительных чисел такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $x_n > x_0$. Тогда найдётся стремящаяся к x_0 последовательность рациональных чисел r_n такая, что при $n = 1, 2, \ldots$, выполняются неравенства $x_0 < x_n < r_n$ (достаточно выбрать при $n = 1, 2, \ldots$ рациональную точку $r_n \in \left(x_n; x_n + \frac{1}{n}\right)$ — (см. рис. 3.19)).

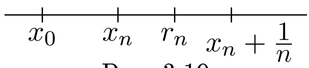

Рис. 3.19

Ясно, что $0 \leqslant r_n - x_0 < x_n - x_0 + \frac{1}{n}$; так как $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, то по теореме 2.3 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x_0$.

По лемме 3.17 $a^{x_0} < a^{x_n} < a^{r_n}$. Но $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = a^{x_0}$ по определению 3.12. Значит, по теореме 2.3 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = a^{x_0}$. Так как последовательность x_n — любая, то $\lim\limits_{x\to x_0+0} a^x = a^{x_0}$. Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{x\to x_0-0} a^x = a^{x_0}$. Значит, функция a^x непрерывна в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$. ■

Лемма 3.18.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +0$, *если* $a > 1$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$, *если* $0 < a < 1$.

$\square$ В силу соотношения $a^x = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$ достаточно доказать первую часть леммы.

Так как при $a > 1$ функция a^x строго возрастает на $(-\infty; +\infty)$, то существует $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x$ (конечный или $+\infty$). Достаточно доказать, что хотя бы для одной последовательности x_n такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = +\infty$ (тогда для любой другой также будет $+\infty$). Рассмотрим $x_n = n$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{a}\right)^n = 0$ (лемма 2.10), то $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$. Значит, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$. Аналогично, при $x_n = -n$ выполняются равенства $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{a}\right)^n = +0$, поэтому $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +0$. $\blacksquare$

Итак, при $a > 1$ функция $f(x) = a^x$ непрерывна и строго возрастает на $(-\infty; +\infty)$. Её множество значений — промежуток, состоящий из положительных чисел, неограниченный сверху и содержащий точки, сколь угодно близкие к 0; значит, $E(f) = (0; +\infty)$. Тогда по теореме об обратной функции на $(0; +\infty)$ определена, строго возрастает и непрерывна обратная функция $(f^{-1}(x) \equiv \log_a x)$, $D(f^{-1}) = (0; +\infty)$; $E(f^{-1}) = (-\infty; +\infty)$.

Если $0 < a < 1$, то функция $f(x) = a^x$ непрерывна и строго убывает на $(-\infty; +\infty)$. Аналогично, $E(f) = (0; +\infty)$. Обратная функция $f^{-1}(x) = \log_a x$ непрерывна и строго убывает, $D(f^{-1}) = (0; +\infty)$, $E(f^{-1}) = (-\infty; +\infty)$. Графики функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ изображены на рис. 3.20.

Покажем теперь, что стандартные свойства степеней сохраняются для степени с произвольным действительным показателем (соответствующие свойства степени с рациональным показателем считаются известными).

Лемма 3.19. *Для любых* $a, b > 0$ *и для любых* $x, y \in \mathbb{R}$*:*

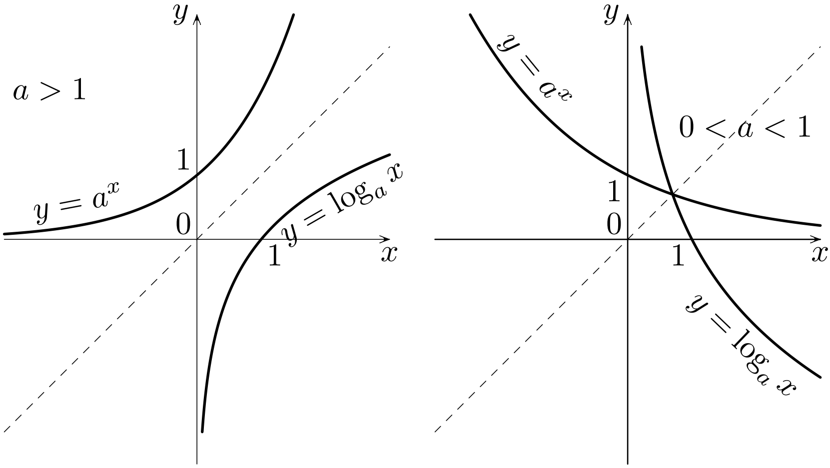

Рис. 3.20

1) $(ab)^x = a^x b^x$; 2) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$; 3) $a^{x+y} = a^x a^y$;

4) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$; 5) $(a^x)^y = a^{xy}$.

□ Докажем свойство 3. Пусть x_n, y_n — любые последовательности рациональных чисел такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Тогда $a^{x_n+y_n} = a^{x_n} \cdot a^{y_n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$. Чтобы не разбирать отдельно случаи $a > 1$ и $0 < a < 1$, сошлёмся на непрерывность функции a^x. По определению непрерывности через последовательности:

$$a^{x+y} = \lim_{n\to\infty} a^{x_n+y_n} = \lim_{n\to\infty} a^{x_n} \cdot \lim_{n\to\infty} a^{y_n} = a^x \cdot a^y.$$

Свойства 1, 2, 4 доказываются аналогично. Несколько сложнее доказывается свойство 5.

Пусть сначала $y = r \in \mathbb{Q}$. Докажем, что при всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$(a^x)^r = a^{xr}. \tag{3.6}$$

Рассмотрим произвольную последовательность x_n рациональных чисел такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n r = xr$. В силу непрерывности функции a^x:

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x, \quad \lim_{n\to\infty} a^{x_n r} = a^{xr}.$$

Но $a^{x_n r} = (a^{x_n})^r$. Поэтому, в силу непрерывности функции x^r в точке $a^x > 0$, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n r} = \lim_{n\to\infty} (a^{x_n})^r = (a^x)^r$$

(здесь мы воспользовались тем, что последовательность $y_n = a^{x_n}$ стремится к a^x). Теперь ясно, что $(a^x)^r = a^{xr}$.

Пусть теперь $y \in \mathbb{R}$. Рассмотрим произвольную последовательность рациональных чисел r_n такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = y$. В силу (3.6) $(a^x)^{r_n} = a^{xr_n}$. Так как при фиксированном x функция $f(y) = (a^x)^y$ непрерывна по y, то $\lim\limits_{n\to\infty} (a^x)^{r_n} = (a^x)^y$. Наконец, $\lim\limits_{n\to\infty} xr_n = xy$, и $\lim\limits_{n\to\infty} a^{xr_n} = a^{xy}$ в силу непрерывности функции a^x. Так как

$$\lim_{n\to\infty} (a^x)^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{xr_n}, \quad \text{то} \quad (a^x)^y = a^{xy}. \qquad \blacksquare$$

Все стандартные свойства степеней сохраняются, поэтому сохраняются (вместе с обычными доказательствами из элементарной алгебры) все свойства логарифмов.

Особую роль будут играть логарифмы по основанию e. Эти логарифмы называются натуральными; применяется обозначение $\log_e x \equiv \ln x$.

Сложная степенно-показательная функция

$$f(x) = (u(x))^{v(x)},$$

где $u(x) > 0$, преобразуется к виду

$$f(x) = e^{v(x)\ln u(x)}.$$

В таком виде она может быть рассмотрена как суперпозиция элементарных функций, и по следствию из теоремы 3.8 если $u(x)$ и $v(x)$ — непрерывные функции в точке или на промежутке, причём $u(x) > 0$, то непрерывной является и функция $(u(x))^{v(x)}$.

В математическом анализе и в прикладных науках часто применяются так называемые гиперболические функции:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{(гиперболический синус);}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{(гиперболический косинус);}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \quad \text{(гиперболический тангенс);}$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \quad \text{(гиперболический котангенс).}$$

Связь их с тригонометрическими функциями станет понятной в главе VII после введения функции комплексного переменного e^z, а пока отметим, что все формулы тригонометрии сохраняются «с точностью до знака», т.е. некоторые из них сохраняются полностью, а в некоторых где-то меняется знак, так что всё равно эти формулы нужно выводить заново. Например,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x,$$
$$2 \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} x = \operatorname{sh} 2x \quad \text{и т.д.}$$

В отличие от тригонометрических функций эти функции непериодичны; $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x = -\infty$, а вот $\operatorname{th} x$ — ограниченная функция: для всех x выполняется неравенство $|\operatorname{th} x| < 1$. Графики $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{th} x$ изображены на рис. 3.21.

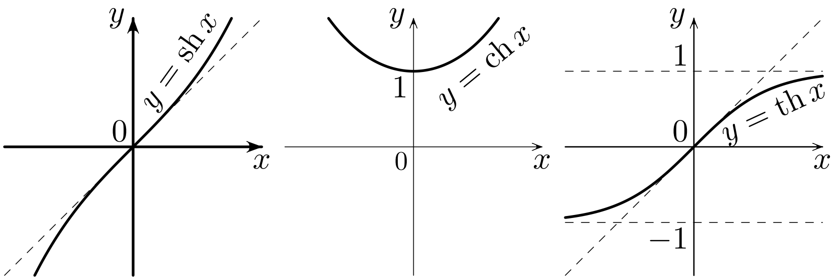

Рис. 3.21

Теорема 3.21 (второй замечательный предел)

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

□ По определению $e=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, где $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Нам предстоит доказать, что предел функции $(1+x)^{1/x}$ при $x\to 0$ равен e, т.е. вместо x можно взять любую последовательность x_n такую, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ и $x_n\neq 0$, а не только $x_n=\dfrac{1}{n}$.

Пусть n_k — произвольная (не обязательно строго возрастающая) последовательность натуральных чисел такая, что $\lim\limits_{k\to\infty}n_k=+\infty$; ε — фиксированное положительное число. Вне $U_\varepsilon(e)$ содержится не более конечного числа членов x_n. Пусть $n_0(\varepsilon)$ — наибольший из их номеров. Так как $\lim\limits_{k\to\infty}n_k=+\infty$, то среди номеров n_k лишь конечное число не превосходит $n_0(\varepsilon)$. Значит, вне $U_\varepsilon(e)$ содержится лишь конечное число членов a_{n_k}. Поэтому

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}=e. \tag{3.7}$$

Пусть теперь x_k — произвольная последовательность действительных чисел такая, что $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=0$, $x_k>0$. Рассмотрим последовательность $n_k=\left[\dfrac{1}{x_k}\right]$. Ясно, что для всех k выполняются неравенства $n_k\leqslant\dfrac{1}{x_k}<n_k+1$. В частности, отсюда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty}n_k=+\infty$, и имеет место (3.7). Также $\dfrac{1}{n_k}\geqslant x_k>\dfrac{1}{n_k+1}$, поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}<(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}<\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}. \tag{3.8}$$

Правая часть цепочки неравенств (3.8) равна $\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\times$ $\times\left(1+\frac{1}{n_k}\right)$, в силу (3.7) предел этой последовательности при $k\to\infty$ равен $e\cdot 1=e$. Левая часть цепочки неравенств (3.8) равна $\dfrac{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{1+\frac{1}{n_k+1}}$. Предел этой последовательности равен $\frac{e}{1} = e$ (в (3.7) вместо n_k можно подставить $n_k + 1$; годится любая последовательность индексов, стремящаяся к $+\infty$). По теореме 2.3 из (3.8) следует, что $\lim\limits_{k\to\infty}(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} = e$. Так как x_k — любая положительная последовательность, стремящаяся к нулю, то $\lim\limits_{x\to+0}(1+x)^{1/x} = e$.

Для нахождения предела слева дважды применим теорему 3.5. Сначала сделаем замену $y = -x$. Если $x \to -0$, то $y \to +0$ и $y \neq 0$ при $x \neq 0$. Имеем

$$\lim_{x\to-0}(1+x)^{1/x} = \lim_{y\to+0}(1-y)^{-1/y}.$$

Затем сделаем замену $z = \frac{y}{1-y}$. Если $y \to +0$, то $z \to +0$ и $z \neq 0$ при $y \neq 0$, при этом $y = \frac{z}{1+z}$. Тогда искомый предел равен $\lim\limits_{z\to+0}\left(1 - \frac{z}{1+z}\right)^{-\frac{1+z}{z}} = \lim\limits_{z\to+0}\left(\frac{1}{1+z}\right)^{-\left(1+\frac{1}{z}\right)} = \lim\limits_{z\to+0}(1+ +z)^{1/z} \cdot \lim\limits_{z\to+0}(1+z) = e\cdot 1 = e$ (использовано, что предел справа равен e). Итак, $\lim\limits_{x\to-0}(1+x)^{1/x} = e$, значит, $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{1/x} = e$. ■

В качестве примеров рассмотрим несколько следствий теоремы 3.21.

Пример 3.33. Доказать, что

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

□ Мы доказали, что $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{1/x} = e$. Так как функция $g(u) = \ln u$ непрерывна в точке e, то по теореме 3.8 о переходе к пределу под знаком непрерывной функции

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to0}\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1. \ ■$$

Если логарифм берётся по другому основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$), то $\log_a(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln a}$, и $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$. Мы начинаем замечать, что число e и натуральные логарифмы играют особую роль в математическом анализе.

Пример 3.34. Доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

$\square$ В пределе $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\ln(1+u)}{u}=1$ сделаем согласно теореме 3.5 замену $u=e^x-1$. Если $x\to 0$, то и $u\to 0$, и $u\neq 0$ при $x\neq 0$. Предел примет вид

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+e^x-1)}{e^x-1}=1,\quad \text{т.е.}\quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=1,$$

откуда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1.$ $\blacksquare$

Пример 3.35. Доказать, что при $a>0$ имеет место равенство

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a.$$

$\square$ При $a=1$ равенство очевидно. При $a>0$, $a\neq 1$, в пределе $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^u-1}{u}=1$ сделаем согласно теореме 3.5 замену $u=x\ln a$: если $x\to 0$, то $u\to 0$, $u\neq 0$ при $x\neq 0$. Предел примет вид

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}=1,\quad \text{т.е.}\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a. \qquad \blacksquare$$

§ 9. Сравнение функций

Определение 3.13. Пусть функции f и g определены в некоторой проколотой окрестности β, где β — один из 6 СПС. Тогда говорят, что:

1) $f(x)=o(g(x))$ при $x\to\beta$, если $f(x)=\alpha(x)g(x)$, где $\lim\limits_{x\to\beta}\alpha(x)=0$ (читается: f есть о малое от g);
2) $f(x)=O(g(x))$ при $x\to\beta$, если $f(x)=\alpha(x)g(x)$, где функция $\alpha(x)$ ограничена в проколотой окрестности β (читается: f есть о большое от g);

3) $f(x) = O^*(g(x))$ при $x \to \beta$, если $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$ при $x \to \beta$ одновременно (читается: f есть о со звездой от g);
4) $f(x) \sim g(x)$ при $x \to \beta$, если $f(x) = \alpha(x)g(x)$, где $\lim\limits_{x\to\beta} \alpha(x) = 1$ (читается: f эквивалентно g).

Если $g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности β, то определение 3.13 можно переписать так ($x \to \beta$):

1) $f(x) = o(g(x))$, если $\lim\limits_{x\to\beta} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$;
2) $f(x) = O(g(x))$, если $\exists\, C > 0$: $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant C$ в некоторой $\mathring{U}_\delta(\beta)$;
3) $f(x) = O^*(g(x))$, если $\exists\, C_1, C_2 > 0$: $C_1 \leqslant \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant C_2$ в некоторой $\mathring{U}_\delta(\beta)$;
4) $f(x) \sim g(x)$, если $\lim\limits_{x\to\beta} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

При этом $f(x)$ и $g(x)$ могут вести себя как угодно — стремиться к 0, к ∞, вообще не иметь предела и т.д. Аналогичные определения можно дать для последовательностей ($n \to \infty$).

Определение 3.14. Пусть x_n и y_n — две последовательности, определённые при $n \geqslant n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$. Тогда говорят, что

1) $x_n = o(y_n)$, если $x_n = \alpha_n y_n$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$;
2) $x_n = O(y_n)$, если $x_n = \alpha_n y_n$, где α_n — ограниченная последовательность;
3) $x_n = O^*(y_n)$, если $x_n = O(y_n)$ и $y_n = O(x_n)$ одновременно;
4) $x_n \sim y_n$, если $x_n = \alpha_n y_n$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 1$.

В дальнейшем в этом параграфе речь будет идти о сравнении функций, но аналогично можно говорить о сравнении последовательностей.

Определение 3.15. Если $f(x) = o(g(x))$ при $x \to \beta$ и обе функции бесконечно малые при $x \to \beta$, то говорят, что f — бесконечно малая более высокого порядка, чем g, а g — бесконечно малая более низкого порядка, чем f, при $x \to \beta$. Если $f(x) = o(g(x))$ при $x \to \beta$ и обе функции бесконечно большие при $x \to \beta$, то говорят, что g — бесконечно большая более высокого порядка, чем f, а f — бесконечно большая более низкого порядка, чем g, при $x \to \beta$.

Пример 3.36. 1) При $x \to 0$ имеем $x^2 = x \cdot x$; $x \to 0$, значит, $x^2 = o(x)$;
x^2 — бесконечно малая более высокого порядка, чем x.

2) При $x \to \infty$ имеем: $x = \frac{1}{x} \cdot x^2$; $\frac{1}{x} \to 0$, значит, $x = o(x^2)$;
x^2 — бесконечно большая более высокого порядка, чем x.

3) Более общо,

$$x^m = o(x^n) \quad \text{при} \quad x \to 0 \Longleftrightarrow m > n,$$
$$x^m = o(x^n) \quad \text{при} \quad x \to \infty \Longleftrightarrow m < n$$

(здесь $m, n \in \mathbb{Z}$; если ограничиться случаями $x \to +0$ и $x \to \to +\infty$, то всё сохраняется при любых $m, n \in \mathbb{R}$).

Заметим, что соотношения $f = O^*(g)$ и $g = O^*(f)$ равносильны. В этом случае говорят, что функции f и g — функции одного порядка при $x \to \beta$.

З а м е ч а н и е. Записи типа $f = o(g)$ не обладают всеми свойствами равенств. Например, $x^2 = o(x)$ и $x^3 = o(x)$ при $x \to 0$, но $x^2 \neq x^3$. Запись $f = o(g)$ сложилась исторически. Её следует формально воспринимать как $f \in o(g)$, т.е. принадлежность к классу $o(g)$. Тогда $x^2 \in o(x)$, $x^3 = o(x)$, и отсюда вовсе не следует, что $x^2 = x^3$.

Приведём некоторые свойства символов сравнения (везде подразумевается $x \to \beta$).

1) $f = o(g)$, $g = O(h) \Rightarrow f = o(h)$.

$\square$ $f(x) = \alpha_1(x) g(x)$, $g(x) = \alpha_2(x) h(x)$, где $\alpha_1(x)$ — бесконечно малая при $x \to \beta$, $\alpha_2(x)$ — ограничена в проколотой окрестности β. Тогда $f(x) = \alpha(x) h(x)$, где $\alpha(x) = \alpha_1(x)\alpha_2(x)$ — бесконечно малая при $x \to \beta$. Значит, $f = o(h)$. $\blacksquare$

Символически это свойство можно записать так: $o(O(h)) = = o(h)$; формально это надо понимать как включение двух классов функций: $o(O(h)) \subset o(h)$.

Отсюда следует, что $o(Ch) = o(h)$, где C — постоянная; $o(o(h)) = o(h)$ (очевидно, что $o(h) = O(h)$; любая функция $f = = o(h)$ удовлетворяет также соотношению $f = O(h)$).

2) $O(o(h)) = o(h)$.

3) $O(O(h)) = O(h)$.

4) $o(f) + o(f) = o(f)$.

□ Первое из двух «о малых» запишем как $\alpha_1(x)f(x)$, а второе как $\alpha_2(x)f(x)$, где $\lim\limits_{x\to\beta} \alpha_1(x) = \lim\limits_{x\to\beta} \alpha_2(x) = 0$. Тогда их сумма равна $\alpha(x)f(x)$, где $\alpha(x) = \alpha_1(x) + \alpha_2(x)$, и $\lim\limits_{x\to\beta} \alpha(x) = 0$, т.е. сумма также есть о малое от f. ■

5) $O(f) + O(f) = O(f)$.

6) $o(f) \cdot O(f) = o(f)$.

7) $O(f) \cdot O(f) = O(f)$.

8) $f \sim g \iff f = g + o(g)$.

□ Эквивалентность функций f и g означает, что $f(x) = \alpha(x)g(x)$, где $\lim\limits_{x\to\beta} \alpha(x) = 1$. Представим $\alpha(x)$ в виде $1+\gamma(x)$, где $\lim\limits_{x\to\beta} \gamma(x) = 0$. Тогда запись $f \sim g$ равносильна тому, что

$$f(x) = g(x) + \gamma(x)g(x), \quad \text{т.е.} \quad f = g + o(g). \qquad ■$$

Пример 3.37. 1) $\sin x \sim x$ при $x \to 0 \iff \sin x = x + o(x)$;
2) $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0 \iff \ln(1+x) = x + o(x)$;
3) $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0 \iff e^x = 1 + x + o(x)$;
4) $a^x - 1 \sim x \ln a$ при $x \to 0 \iff a^x = 1 + x\ln a + o(x)$;
5) $a^x - 1 = O^*(x)$ при $x \to 0$ $(a > 0,\ a \neq 1)$;
6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2} \iff \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$;
7) $\dfrac{e^{\sin x}}{x} = O^*\left(\dfrac{1}{x}\right)$ при $x \to \infty$, так как $\frac{1}{e} \leqslant e^{\sin x} \leqslant e$.

Теорема 3.22 (о замене числителя и знаменателя дроби на эквивалентные величины при вычислении предела). *Пусть $f \sim f_1$ и $g \sim g_1$ при $x \to \beta$. Тогда $\lim\limits_{x\to\beta} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и $\lim\limits_{x\to\beta} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ существуют одновременно (конечные или бесконечные), в случае существования они равны.*

□ $f(x) = \alpha_1(x)f_1(x)$, $g(x) = \alpha_2(x)g_1(x)$, где $\lim\limits_{x\to\beta} \alpha_1(x) = \lim\limits_{x\to\beta} \alpha_2(x) = 1$, при этом $\alpha_2(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности β. Тогда $g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности β тогда и только тогда, когда $g_1(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности β. Имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} \cdot \frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \quad \text{где} \quad \lim_{x\to\beta} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1.$$

Отсюда и следует утверждение теоремы. ■

Пример 3.38.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(2^x-1)^2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x\ln 2)^2}{\frac{x^2}{2}} = 2\ln^2 2$$

(здесь мы воспользовались тем, что $2^x \sim x\ln 2$, $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \to 0$).

З а м е ч а н и е. При вычислении пределов на эквивалентные величины можно менять числитель и знаменатель дроби. Аналогично можно менять на эквивалентные величины сомножители и основания постоянной степени (в примере 3.38 мы воспользовались тем, что если $f \sim g$, то $f^2 \sim g^2$). Нельзя менять на эквивалентные величины слагаемые и основания переменной степени. Например, $\cos x \sim 1$ при $x \to 0$. Но, если в пределе $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ заменить $\cos x$ на 1, получим в качестве ответа 0, хотя на самом деле этот предел равен $\frac{1}{2}$. Также $1 + x \sim 1$ при $x \to 0$, но, если в пределе $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$ заменить $1 + x$ на 1, получим в качестве ответа 1, хотя на самом деле этот предел равен e.

Записи, содержащие o малое, широко используются в разложениях функций по формуле Тейлора, которая может применяться при вычислении различных пределов, о чём пойдёт речь в главах IV и V.

Упражнения к главе III

3.1. Сформулировать на языке $\varepsilon - \delta$ (определение 3.2), что значит:

а) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b - 0$; б) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = b$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = +\infty$; г) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$;

д) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$; е) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b + 0$.

Сформулировать также отрицания этих утверждений.

3.2. Пользуясь определением 3.2, доказать, что

а) $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$; б) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

3.3. Исследовать точки разрыва функции

$$f(x) = \frac{|x|(|x|+2)}{x(x^2-4)}\,.$$

3.4. Доказать, что функция $(x^2-1)f(x)$, где $f(x)$ — функция Дирихле (см. пример 3.3) непрерывна в точках $x = 1$ и $x = -1$, разрывна в остальных точках.

3.5. Привести пример функции, непрерывной во всех точках $x = n \in \mathbb{Z}$ и разрывной в остальных точках.

3.6. Функция f непрерывна на конечном интервале $(a; b)$ и ограничена. Обязано ли её множество значений быть интервалом? Тот же вопрос при дополнительном условии:

а) монотонности f на $(a; b)$;

б) строгой монотонности f на $(a; b)$.

3.7. Функция f непрерывна на луче $[a; +\infty)$, причём существует конечный $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. Доказать, что функция f ограничена на $[a; +\infty)$.

3.8. Функция f непрерывна на $[a; b]$, и для всех $x \in [a; b]$ выполняется неравенство $f(x) > 0$. Доказать, что

$$\exists\, C > 0 : \quad \forall\, x \in [a; b] \to f(x) \geqslant C.$$

3.9. Функция f непрерывна на $(-\infty; +\infty)$ и имеет период T, т.е.

$$\exists\, T > 0 : \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \to f(x+T) = f(x).$$

Доказать, что $\exists\, x$: $f\left(x + \frac{T}{2}\right) = f(x)$.

3.10. Вычислить пределы функции $f(x) = \frac{x-1}{x^n-1}$, $n \in \mathbb{N}$:

а) при $x \to 0$; б) при $x \to 1$;

в) при $x \to \infty$; г) при $x \to -1$.

3.11. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{\sqrt{x+1}-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt[n]{x}-1}$, $n\in\mathbb{N}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2-1}}$.

3.12. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$, $m,n\in\mathbb{N}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(x^2)}{1-\cos 2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos x-1}{\sin 3x}$.

3.13. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_2(1+x)}{\operatorname{tg} 3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{\operatorname{arctg} 5x}$.

3.14. Доказать, что не существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$:

а) пользуясь определением 3.1;

б) пользуясь критерием Коши для существования конечного предела функции.

3.15. Доказать, что не существует $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cos x$.

3.16. Доказать, что функция $f(x)=\operatorname{sh} x$ обратима на всей области определения. Задать обратную функцию (гиперболический арксинус) явно — при помощи суперпозиции элементарных функций.

3.17. Доказать, что функция $f(x)=\operatorname{ch} x$ необратима на всей области определения, но если считать $D(f)=[0;+\infty)$, то обратная функция существует (гиперболический арккосинус). Задать эту обратную функцию явно.

3.18. Верны ли тождества:

а) $\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh} x\operatorname{ch} y+\operatorname{ch} x\operatorname{sh} y$;

б) $\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch} x\operatorname{ch} y-\operatorname{sh} x\operatorname{sh} y$?

3.19. Верны ли следующие соотношения для символов сравнения функций:

а) $o(f^2)=(o(f))^2$; б) $(o(f))^2=o(f^2)$;

в) $O^*(f)+O^*(f)=O^*(f)$?

3.20. Доказать, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0;$ б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1;$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$

3.21. Доказать, что многочлен чётной ($n = 2,\ 4,\ \ldots$) степени с действительными коэффициентами достигает либо наименьшего, либо наибольшего значения на $(-\infty; +\infty)$.

3.22. Доказать, что уравнение $xe^x = 1$ имеет единственное решение.

3.23. Пусть функции f и g непрерывны в точке a (или на промежутке X). Доказать, что функция $M(x) = \max(f(x), g(x))$ также непрерывна.

3.24. При каких значениях A и B функция $f(x) = \dfrac{(x+2)^3}{(x-1)^2} - Ax - B$ является бесконечно малой при $x \to \infty$?

3.25. Доказать, что если функция f непрерывна на $(-\infty; +\infty)$ и $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$, то $f(x) = kx$, где k — постоянная.

ГЛАВА IV. **ПРОИЗВОДНАЯ**

§ 1. Определение и основные свойства

Будем считать, что функция f определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$. Приращение аргумента x, равное $x - x_0$, будем обозначать Δx, при этом $x = x_0 + \Delta x$. Это приращение может обозначаться и иначе, например, t или h. Приращение функции в точке x_0, равное $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, будем обозначать $\Delta f(x_0)$.

Определение 4.1. Производной функции f в точке x_0 называется предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, если этот предел конечен или равен $+\infty$ или $-\infty$. Обозначается этот предел $f'(x_0)$.

Другие записи:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$$

(по теореме 3.5 о замене переменной под знаком предела, $t = x - x_0$, при этом $t \to 0$ при $x \to x_0$, $t \neq 0$ при $x \neq x_0$).

З а м е ч а н и е. Функция $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ не определена при $x = x_0$, но определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0.

Пример 4.1. 1) Если $f(x) \equiv C$ (постоянная функция), то в любой точке x_0

$$f'(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{C - C}{t} = 0.$$

2) Если $f(x) = x$, то в любой точке x_0

$$f'(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{x_0 + t - x_0}{t} = 1.$$

Определение 4.2. Правой (левой) производной функции f в точке x_0 называется

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{t \to +0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$$

(соответственно $\lim\limits_{x\to x_0-0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{t\to -0} \dfrac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$), если этот предел конечен или равен $+\infty$ или $-\infty$. Обозначается этот предел $f'_+(x_0)$ (соответственно $f'_-(x_0)$).

Из леммы 3.5 следует, что $f'(x_0) = A$ тогда и только тогда, когда $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = A$.

Заметим также, что если две функции f и g совпадают в некоторой окрестности точки x_0, то $f'(x_0)$ и $g'(x_0)$ существуют одновременно. В случае существования они равны (это следует из соответствующих свойств предела функции). Аналогично, если f и g совпадают в некоторой правой (левой) окрестности точки x_0, то $f'_+(x_0)$ и $g'_+(x_0)$ (соответственно $f'_-(x_0)$ и $g'_-(x_0)$) существуют одновременно, в случае существования они равны.

Теорема 4.1. *Если функция f имеет конечную производную (правую производную, левую производную) в точке x_0, то эта функция непрерывна (соответственно непрерывна справа, непрерывна слева) в этой точке.*

□ Доказательство проведём для обычной производной (для односторонних производных доказательство аналогично).

Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A \in \mathbb{R}$, то $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$. Тогда $f(x) = f(x_0) + (A+\alpha(x))(x-x_0)$. Ясно, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, т.е. f непрерывна в точке x_0. ■

Обратное утверждение неверно.

Пример 4.2. Рассмотрим функцию $f(x) = |x|$. Если $x_0 > 0$, то в некоторой окрестности точки x_0 имеет место равенство $f(x) = x$, значит, $f'(x_0) = 1$. Аналогично, если $x_0 < 0$, то $f'(x_0) = -1$. Поэтому $(|x|)' = \operatorname{sign} x$ при $x \neq 0$. Если же $x_0 = 0$, то в некоторой правой окрестности точки 0 имеет место равенство $f(x) = x$, значит, $f'_+(0) = 1$. Аналогично, $f'_-(0) = -1$. Поэтому $f'(0)$ не существует. Но функция $f(x) = |x|$ непрерывна в точке 0, так как $f(+0) = f(-0) = 0 = f(0)$.

Пример 4.3. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Функция непрерывна в точке $x = 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ (см. пример 3.29, там же изображён график этой функции). С другой стороны,

$$f'_+(0) = \lim_{t\to+0} \frac{f(0+t) - f(0)}{t} = \lim_{t\to+0} \sin\frac{1}{t}\,.$$

Этот предел не существует (см. пример 3.28). Аналогично не существует $f'_-(0)$. Итак, непрерывная функция может не иметь даже односторонних производных в точке.

Теорема 4.2. *Пусть функции f и g имеют конечные производные в точке x_0. Тогда функции $f+g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$ имеют производные в точке x_0 (в последнем случае нужно требовать, чтобы $g(x_0)\neq 0$), причём в точке x_0 выполняются равенства*

$$(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x),$$
$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}\,.$$

□ 1) $(f(x)+g(x))'\Big|_{x=x_0} =$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t)+g(x_0+t)-f(x_0)-g(x_0)}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} + \lim_{t\to 0}\frac{g(x_0+t)-g(x_0)}{t} = f'(x_0)+g'(x_0).$$

2) $(f(x)g(x))'\Big|_{x=x_0} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(x_0+t)g(x_0+t)-f(x_0)g(x_0)}{t} =$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{f(x_0+t)g(x_0+t)-f(x_0)g(x_0+t)}{t} + \frac{f(x_0)g(x_0+t)-f(x_0)g(x_0)}{t}\right) =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}\lim_{t\to 0} g(x_0+t) + f(x_0)\lim_{t\to 0}\frac{g(x_0+t)-g(x_0)}{t} = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).$$

Здесь использовано то, что $\lim_{t\to 0} g(x_0+t) = g(x_0)$, так как по теореме 4.1 функция g непрерывна в точке x_0.

3) $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'\Bigg|_{x=x_0} = \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{f(x_0+t)}{g(x_0+t)} - \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x_0+t) + f(x_0)g(x_0)}{tg(x_0)g(x_0+t)} =$$

$$= \frac{1}{(g(x_0))^2}\left[g(x_0)\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} - \right.$$

$$\left. -f(x_0)\lim_{t\to 0}\frac{g(x_0+t)-g(x_0)}{t}\right] = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Здесь использовано то, что $\lim_{t\to 0} g(x_0+t) = g(x_0) \neq 0$. ■

Следствия. 1) $(Cf(x))' = C'f(x) + Cf'(x) = Cf'(x)$, *так как* $C' = 0$ *(постоянный множитель можно выносить за знак производной);*

2) $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$.

З а м е ч а н и е. Теорема 4.2 вместе с доказательством сохраняется для односторонних производных суммы, произведения и частного двух функций.

Теорема 4.3 (о производной сложной функции). *Пусть функция* f *имеет конечную производную в точке* x_0, *а функция* g *имеет конечную производную в точке* $u_0 = f(x_0)$. *Тогда функция* $h(x) = g(f(x))$ *имеет производную в точке* x_0, *причём* $h'(x_0) = g'(u_0)f'(x_0)$ *(иначе говоря,* $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$*).*

□ Пусть $f'(x_0) = A$, $g'(u_0) = B$. Нужно доказать, что производная $h'(x_0)$ существует и равна AB.

По определению производной

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} = A, \quad \lim_{s\to 0}\frac{g(u_0+s)-g(u_0)}{s} = B.$$

Отсюда имеем

$$f(x_0+t) = f(x_0) + At + t\alpha(t), \quad \text{где} \quad \lim_{t\to 0}\alpha(t) = 0, \qquad (4.1)$$

$$g(u_0+s) = g(u_0) + Bs + s\beta(s), \quad \text{где} \quad \lim_{s\to 0}\beta(s) = 0. \qquad (4.2)$$

Функция $\alpha(t)$ определена в некоторой $\mathring{U}_\delta(0)$, $\delta > 0$, но если доопределить $\alpha(0) = 0$, то равенство (4.1) сохранится. Поэтому можно считать, что функция $\alpha(t)$ определена в $U_\delta(0)$ и непрерывна в точке 0. Аналогично считаем, что функция $\beta(s)$ определена в $U_\varepsilon(0)$, $\varepsilon > 0$ и непрерывна в точке 0, причём $\beta(0) = 0$.

Рассмотрим функцию $s(t) = At + t\alpha(t)$; она непрерывна в точке 0, и если равенство (4.2) выполнено в $U_\varepsilon(0)$, то найдётся $U_{\delta_1}(0)$ такая, что при всех $t \in U_{\delta_1}(0)$ значение $s(t)$ можно подставить в качестве s в (4.2). Тогда

$$h(x_0 + t) = g(f(x_0 + t)) = g(f(x_0) + At + t\alpha(t)) = g(u_0 + s(t)) =$$
$$= g(u_0) + Bs(t) + s(t) \cdot \beta(s(t)) =$$
$$= h(x_0) + ABt + Bt\alpha(t) + \beta(s(t))(At + t\alpha(t)),$$

откуда

$$\frac{h(x_0 + t) - h(x_0)}{t} = AB + B\alpha(t) + \beta(s(t)) \cdot (A + \alpha(t)).$$

Так как $\lim\limits_{t\to 0} \beta(s(t)) = 0$ по следствию из теоремы 3.8, то

$$h'(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{h(x_0 + t) - h(x_0)}{t} = AB. \quad \blacksquare$$

§ 2. Производные элементарных функций

Теорема 4.4.

1) *При $a > 0$ в любой точке имеет место равенство $(a^x)' = a^x \ln a$;*
2) *в любой точке $x > 0$ имеет место равенство $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;*
3) *при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ в любой точке $x > 0$ имеет место равенство $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.*

□ 1) $(a^x)'\Big|_{x=x_0} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{a^{x_0+t} - a^{x_0}}{t} = a^{x_0} \cdot \lim\limits_{t\to 0} \frac{a^t - 1}{t} = a^{x_0} \ln a$ (см. пример 3.35); при $a = e$ имеем равенство $(e^x)' = e^x$.

2) При $x_0 > 0$

$$(\ln x)'\Big|_{x=x_0} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(x_0+t) - \ln x_0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{t}{x_0}\right)}{t} =$$
$$= \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{yx_0} = \frac{1}{x_0}$$

(здесь сделана замена $y = \frac{t}{x_0}$ и применена теорема 3.5, после этого применён пример 3.33). В качестве следствия заметим, что при $a > 0$, $a \neq 1$, в любой точке $x > 0$ имеет место равенство

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x \ln a}\,.$$

3) По теореме 4.3

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}. \qquad \blacksquare$$

З а м е ч а н и е. Если $\alpha \in \mathbb{N}$, то пункт 3 теоремы 4.4 сохраняется при всех $x \in \mathbb{R}$; если $\alpha \in \mathbb{Z}$, то пункт 3 сохраняется при всех $x \neq 0$.

$\square$ Докажем по индукции, что $(x^n)' = nx^{n-1}$ при всех x, если $n = 1, 2, \ldots$ При $n = 1$ это известно (пример 4.1, пункт 2). Пусть при некотором $k \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $(x^k)' = kx^{k-1}$. Тогда $(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = kx^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = (k+1)x^k$. Нужное равенство получено при $n = k+1$. При $\alpha \in \mathbb{N}$ утверждение доказано.

Если $\alpha = 0$, то $(x^0)' = 1' = 0$, нужное равенство верно при $x \neq 0$. Наконец, если $\alpha = -n$, где $n \in \mathbb{N}$, то при всех $x \neq 0$ имеем

$$(x^\alpha)' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1} = \alpha x^{\alpha-1}. \quad \blacksquare$$

Теорема 4.5. *В любой точке имеют место равенства*

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

$\square\quad (\sin x)'\Big|_{x=x_0} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin(x_0+t)-\sin x_0}{t} =$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2\cos\left(x_0+\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}}{t} = \lim_{t\to 0}\cos\left(x_0+\frac{t}{2}\right)\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} = \cos x_0$$

(первый предел равен $\cos x_0$ в силу непрерывности функции $\cos x$ в любой точке, второй предел после замены $t = 2u$ и применения теоремы 3.5 приводится к пределу $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}$, который равен 1).

Второе равенство доказывается аналогично. ■

Следствие. *В любой точке, где* $\cos x \neq 0$, *имеет место равенство* $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. *В любой точке, где* $\sin x \neq 0$, *имеет место равенство* $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

$\square\quad (\operatorname{tg} x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Второе равенство доказывается аналогично. ■

Для производных гиперболических функций имеют место такие же формулы, только в одной из них меняется знак:

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,$$
$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

(последняя из этих формул верна при $x \neq 0$). В самом деле,

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch} x\cdot\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x\cdot\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad \text{и т.д.}$$

Теорема 4.6 (о производной обратной функции). *Пусть функция f строго монотонна и непрерывна в некоторой δ-окрестности точки x_0, $\delta > 0$, причём существует $f'(x_0)$ (конечная, $+\infty$ или $-\infty$). Тогда обратная функция $g(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, причём $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$. Равенство формально сохраняется, если $f'(x_0) = 0$, $+\infty$ или $-\infty$*

(если $f'(x_0) = 0$ и f строго возрастает в $U_\delta(x_0)$, то $g'(y_0) = +\infty$, если $f'(x_0) = 0$ и f строго убывает в $U_\delta(x_0)$, то $g'(y_0) = -\infty$, если $f'(x_0) = +\infty$ или $-\infty$, то $g'(y_0) = 0$).

$\square$ Пусть $I = U_\delta(x_0)$. По теореме об обратной функции, на промежутке $J = f(I)$ определена, строго монотонна в ту же сторону и непрерывна обратная функция $g(y) = f^{-1}(y)$. При этом существует $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(y_0) \subset J$. В самом деле, $y_0 \in J$. Рассмотрим $x_1 = x_0 - \frac{\delta}{2}$, $x_2 = x_0 + \frac{\delta}{2}$, $x_1, x_2 \in I$; тогда $y_1 = f(x_1) \in J$, $y_2 = f(x_2) \in J$. Для определённости считаем, что f строго возрастает, тогда $y_1 < y_0 < y_2$, а так как J — промежуток, то $[y_1; y_2] \subset J$, т.е. найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(y_0) \in J$ (см. рис. 4.1).

Для нахождения предела

$$g'(y_0) = \lim_{s\to 0} \frac{g(y_0+s) - g(y_0)}{s}$$

сделаем замену $s(t) = f(x_0 + t) - f(x_0)$ (применяем теорему 3.5); в силу непрерывности функции f в точке x_0 имеет место равенство $\lim\limits_{t\to 0} s(t) = 0$, в силу строгой монотонности функции $s(t) \neq 0$ при $t \neq 0$.

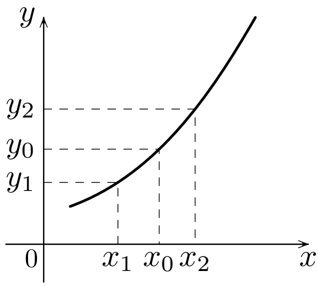

Рис. 4.1

Далее, $g(y_0) = x_0$; $g(y_0+s) = g(f(x_0)+f(x_0+t)-f(x_0)) = g(f(x_0+t)) = x_0 + t$; $g(y_0+s) - g(y_0) = t$. Поэтому

$$g'(y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{t}{f(x_0+t) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}\,.$$

Если $f'(x_0) = 0$ и f строго возрастает, то $\operatorname{sign}(f(x_0+t) - f(x_0)) = \operatorname{sign} t$, дробь под знаком последнего предела положительна, и $g'(y_0) = +\infty$. Аналогично разбирается случай убывания функции f. Наконец, если $f'(x_0) = +\infty$ или $-\infty$, то из доказательства видно, что $g'(y_0) = 0$. $\blacksquare$

З а м е ч а н и е. Теорема 4.5 вместе с доказательством сохраняется для случая, когда f строго монотонна и непрерывна в некоторой правой (левой) окрестности точки x_0, причём существует $f'_+(x_0)$ (соответственно $f'_-(x_0)$). Тогда обратная функция имеет соответствующую одностороннюю производную, и выполняется нужное равенство.

Пример 4.4. Рассмотрим функцию $f(x) = x^n$, где n — нечётное натуральное число. Функция строго возрастает на $(-\infty; +\infty)$. Обратная функция $g(y) = f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$.

Тогда в любой точке

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{nx_0^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{y_0})^{n-1}}\,.$$

Таким образом, для производной обратной функции имеет место равенство

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}\,. \tag{4.3}$$

Формально равенство сохраняется и при $x = 0$, т.е. при нечётном натуральном n

$$(\sqrt[n]{x})'\Big|_{x=0} = +\infty,$$

Отметим, что при $x > 0$ равенство (4.3) можно переписать так:

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}\cdot x^{\frac{1}{n}-1}, \tag{4.4}$$

что является частным случаем выведенной ранее формулы $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, справедливой при любом действительном α в любой точке $x > 0$.

З а м е ч а н и е. Равенство (4.3) верно при всех $x \in \mathbb{R}$, равенство (4.4) — только при $x > 0$. Тем не менее при вычислении производных часто бывает удобно формально применять равенство (4.4) вместо (4.3) для всех $x \in \mathbb{R}$. Полученные результаты будут справедливы. И вообще равенство

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n}\,x^{\frac{m}{n}-1}$$

можно формально применять при всех $x \in \mathbb{R}$, если m и n — натуральные числа, причём n нечётно. Например, $(x^{2/3})' = \frac{2}{3}\,x^{-1/3}$, и т.д.

Пример 4.5. Рассмотрим функцию $f(x) = x^n$, где n — чётное натуральное число. Функция строго возрастает на $[0; +\infty)$, обратная функция $g(y) = f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$. Аналогично примеру 4.4, в любой точке $y_0 > 0$ имеет место равенство $g'(y_0) = \dfrac{1}{n(\sqrt[n]{y_0})^{n-1}}$, т.е. для производной обратной функции имеет место равенство (4.3), что равносильно (4.4). Формально равенство (4.3) сохраняется и для правой производной в точке $x = 0$, т.е. при чётном натуральном n:

$$(\sqrt[n]{x})'_+\big|_{x=0} = +\infty.$$

Теорема 4.7. 1) *В каждой точке* $x \in (-1;1)$ *имеют место равенства* $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. *Равенства эти формально сохраняются для односторонних производных в точках 1 и* -1, *т.е.*

$$(\arcsin x)'_-|_{x=1} = +\infty, \quad (\arcsin x)'_+|_{x=-1} = +\infty,$$
$$(\arccos x)'_-|_{x=1} = -\infty, \quad (\arccos x)'_+|_{x=-1} = -\infty.$$

2) *В каждой точке имеют место равенства*

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}\,, \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}\,.$$

$\square$ 1) Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$. Функция строго возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$; обратная функция $g(y) = f^{-1}(y) = \arcsin y$. В любой точке $y_0 \in (-1;1)$

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\cos x_0} = \frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}$$

(здесь учтено, что $\cos x_0 > 0$). Таким образом, $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ при всех $x \in (-1;1)$, равенство формально сохраняется для односторонних производных в точках 1 и -1. В случае функции $\arccos x$ нужно применить тождество $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$.

2) Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{tg} x$. Функция строго возрастает на $\left(-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right)$; обратная функция $g(y) = f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$. В любой точке y_0

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \cos^2 x_0 = \frac{1}{1+y_0^2}\,.$$

Таким образом, $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ для всех $x \in \mathbb{R}$. В случае функции $\operatorname{arcctg} x$ нужно применить тождество $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$. ■

Итак, все элементарные функции имеют производные во всех точках областей определения (в концах соответствующих промежутков — односторонние производные).

§ 3. Кривые, заданные параметрически

Определение 4.3. Пусть x и y — две функции переменной t, где $t \in I$ (I — некоторый промежуток). Тогда множество точек плоскости $\Gamma = \{(x; y)\colon\ x = x(t),\ y = y(t),\ t \in I\}$ называется кривой (параметрически заданной) на плоскости. Если x и y — непрерывные функции на промежутке I, то кривая Γ называется непрерывной.

Пример 4.6. $x = x_0 + \alpha t$, $y = y_0 + \beta t$, $t \in (-\infty; +\infty)$, где $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ — прямая линия. Если $t \in [t_1; t_2]$, то кривая является отрезком прямой.

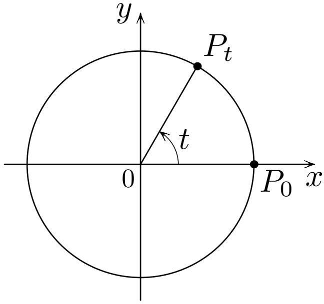

Рис. 4.2

Пример 4.7. $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $t \in (-\infty; +\infty)$ — окружность с центром в начале координат радиуса a (см. рис. 4.2). Геометрический смысл параметра t — угол поворота радиуса-вектора текущей точки кривой P_t против часовой стрелки от радиуса-вектора точки $P_0 = (1; 0)$.

Пример 4.8. $x = t$, $y = f(t)$, $t \in I$ — график функции $y = f(x)$, $x \in I$.

Отметим, что в примерах 4.6 и 4.8 отображение $I \to \Gamma$, задающее кривую, является взаимно однозначным, в примере 4.7 — нет (значения t, отличающиеся на 2π, задают одну и ту же точку кривой).

Теорема 4.8 (о локальном представлении параметрически заданной кривой). *Пусть функции x и y перемен-*

ной t непрерывны в $U_\delta(t_0)$, $\delta > 0$, причём функция x строго монотонна в этой окрестности. Тогда кривая $\Gamma = \{(x; y) : x = x(t),\ y = y(t),\ t \in U_\delta(t_0)\}$ является графиком непрерывной функции $y = f(x)$. Если при этом существуют конечные $x'(t_0)$и $y'(t_0)$, причём $x'(t_0) \neq 0$, то в точке $x_0 = x(t_0)$ существует $f'(x_0) = \dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$ (иными словами, $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$).

□ Так как функция x переменной t непрерывна и строго монотонна на $I = U_\delta(t_0)$, то по теореме об обратной функции на промежутке $J = x(I)$ определена и непрерывна обратная функция $t = t(x)$. Поэтому $(x; y) \in \Gamma \iff y = y(t(x))$, где $x \in J$, т.е. кривая является графиком функции $y = f(x)$ на промежутке J. Функция $y = f(x)$ непрерывна как суперпозиция непрерывных функций $y(t)$ и $t(x)$. Далее по теореме о производной обратной функции в точке $x_0 = x(t_0)$ существует $t'(x_0) = \dfrac{1}{x'(t_0)}$, а по теореме о производной сложной функции существует $f'(x_0) = y'(t_0) \cdot t'(x_0) = \dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$. ■

Пример 4.9. Для окружности $x = \cos t$, $y = \sin t$ имеем: $x'_t = -\sin t$, $y'_t = \cos t$. Если $x'_t \neq$ $\neq 0$, т.е. $t \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то в некоторой окрестности значения параметра t дуга окружности является графиком функции $y =$ $= f(x)$, причём $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = -\operatorname{ctg} t$ (см. рис. 4.3). Точки окружности, соответствующие «запрещённым» значениям параметра $t = \pi k$, обозначены крестиками. Ни в какой окрестности таких значений t дуга окружности не является графиком функции $y = f(x)$. Из других соображений (например, при $y > 0$, т.е. при $0 < t < \pi$) производную y'_x можно вычислить как производную явно заданной функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ $(-1 < x < 1)$:

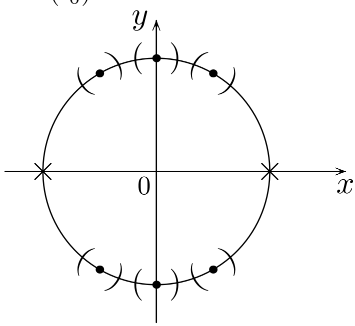

Рис. 4.3

$$y'_x = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\,\frac{x}{y} = -\operatorname{ctg} t.$$

З а м е ч а н и е. Переменные x и y равноправны. Поэтому имеет место

Теорема 4.8′. *Пусть функции y и x переменной t непрерывны в $U_\delta(t_0)$, $\delta > 0$, причём функция y строго монотонна в этой окрестности. Тогда кривая $\Gamma = \{(x;y)\colon\ x = x(t),\ y = y(t),\ t \in U_\delta(t_0)\}$ является графиком непрерывной функции $x = g(y)$. Если при этом существуют конечные $y'(t_0)$ и $x'(t_0)$, причём $y'(t_0) \neq 0$, то в точке $y_0 = y(t_0)$ существует $g'(y_0) = \dfrac{x'(t_0)}{y'(t_0)}$ (иными словами, $x'_y = \dfrac{x'_t}{y'_t}$).*

§ 4. Производная и дифференциал. Геометрический смысл

Определение 4.4. Функция f, определённая в некоторой окрестности точки x_0, называется дифференцируемой в точке x_0, если её приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta f(x_0) \equiv f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot \Delta x, \quad A \in \mathbb{R},$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$, т.е.

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0.$$

При этом линейная часть приращения $A \cdot \Delta x$ называется дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$.

Теорема 4.9. *Функция f дифференцируема в точке x_0 $\iff$ существует конечная $f'(x_0)$, при этом в случае дифференцируемости $A = f'(x_0)$.*

$\square$ ($\Rightarrow$) Если $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, то

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x), \quad \text{т.е. существует}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A,$$

так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

($\Leftarrow$) Пусть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A$. Тогда

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A+\alpha(\Delta x),$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$. Поэтому $\Delta f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$ при $\Delta x\to 0$. ■

З а м е ч а н и е. Дифференциалом независимой переменной x называют приращение Δx, т.е. $dx=\Delta x$. Запись $df(x_0)=A\cdot\Delta x$ может быть переписана так: $df(x_0)=f'(x_0)dx$, т.е. $f'=\frac{df}{dx}$. Отсюда возникает обозначение производной в виде $y'=\dfrac{dy}{dx}$ (отношение двух дифференциалов); $f'(x_0)$ — коэффициент пропорциональности в формуле прямо пропорциональной зависимости между df и dx.

Пусть u и v — две дифференцируемые функции в точке x_0. Тогда в этой точке $(u+v)'=u'+v'$, $(uv)'=u'v+uv'$, $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2}$ (в последнем случае нужно требовать, чтобы $v(x_0)\neq 0$). Умножая эти равенства на dx, получим

$$d(u+v)=du+dv,\quad d(uv)=v\,du+u\,dv,\quad d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}\,.$$

Пусть теперь функция $u(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $f(u)$ дифференцируема в точке $u_0=u(x_0)$. Тогда $(f(u(x)))'\Big|_{x=x_0}=f'(u_0)\cdot u'(x_0)$. Умножая это равенство на dx, имеем

$$df(u(x))=f'(u_0)\cdot u'(x_0)\,dx=f'(u_0)\,du.$$

Иными словами,

$$df(u)=f'(u)\,du,$$

если u — произвольная дифференцируемая функция одной переменной. Таким образом, в равенстве $df(x)=f'(x)\,dx$, где x — независимая переменная, можно вместо x подставить любую дифференцируемую функцию u. Внешний вид равенства не изменится. Этот факт называется инвариантностью формы дифференциала относительно замены переменной.

Пример 4.10. Если x — независимая переменная, то $d(\operatorname{arctg}x)=\frac{dx}{1+x^2}$. Подставляя вместо x функцию $\frac{u}{v}$, где u

и v — дифференцируемые функции, причём $v \neq 0$, получим

$$d\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{v}\right) = \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{1+\frac{u^2}{v^2}} = \frac{v\,du - u\,dv}{u^2+v^2}\,.$$

Пусть теперь функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Рассмотрим точки графика этой функции $M_0(x_0; y_0)$ и $M_x(x; y)$, где $x = x_0 + \Delta x$, $y_0 = f(x_0)$, $y = f(x)$. Через точки M_0 и $M_x (x \neq x_0)$ можно провести единственную прямую (не параллельную оси ординат) (см. рис. 4.4). Её угловой коэффициент $k = \frac{y-y_0}{x-x_0}$. Эта прямая называется хордой (или секущей) графика функции $y = f(x)$.

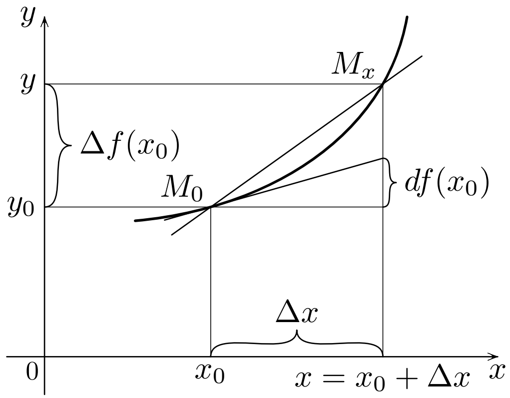

Рис. 4.4

Определение 4.5. Пусть $k(x)$ — угловой коэффициент хорды графика функции $y = f(x)$, проходящей через точки $M_0(x_0; y_0)$ и $M_x(x; y)$. Если существует $k = \lim\limits_{x\to x_0} k(x)$ (конечный, $+\infty$ или $-\infty$), то прямая с угловым коэффициентом k, проходящая через точку M_0, называется касательной к графику в точке M_0.

Так как $\lim\limits_{x\to x_0} k(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$, то существование касательной равносильно существованию производной $f'(x_0)$, причём угловой коэффициент касательной $k = f'(x_0)$.

Если $f'(x_0) = 0$, то $k = 0$ (горизонтальная касательная, её уравнение $y = y_0$). Если $f'(x_0) = +\infty$ или $-\infty$, то $k = +\infty$ или $-\infty$ (вертикальная касательная, её уравнение $x = x_0$). В общем случае уравнение невертикальной касательной $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$.

Отметим, что в случае существования бесконечной производной (т.е. вертикальной касательной) функция f не обязана быть непрерывной в точке x_0.

Пример 4.11. Функция

$$y = \operatorname{sign} x + \sqrt[3]{x} = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{x}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ -1 + \sqrt[3]{x}, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

имеет в точке 0 производную, равную $+\infty$, но не является непрерывной в этой точке (график изображён на рис. 4.5).

Если функция f определена в правой (левой) окрестности точки x_0, то можно рассматривать точки M_x при $x > x_0$ (соответственно при $x < x_0$) и исследовать аналогичные пределы при $x \to x_0 + 0$ (соответственно при $x \to x_0 - 0$). Точно так же определяются правая и левая односторонние касательные в точке M_0, их угловые коэффициенты равны соответственно $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$.

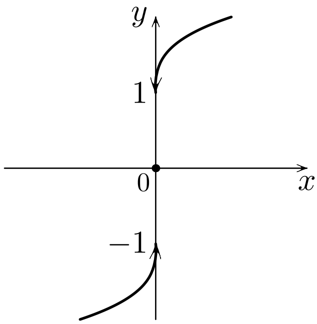

Рис. 4.5

Пример 4.12. 1) Для функции $y = \sin x$ в точке $(0;0)$ имеем: $y' = \cos x$; $\cos 0 = 1$; уравнение касательной $y = x$.

2) Для функции $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $(0;0)$ имеем $y'(0) = +\infty$, уравнение касательной $x = 0$ (вертикальная касательная, рис. 4.6).

3) Для функции $y = \sqrt{x}$ в точке $(0;0)$ имеем: $y'_+(0) = +\infty$; уравнение касательной $x = 0$ (вертикальная правая касательная, рис. 4.7).

4) Для функции $y = \sqrt{|x|}$ в точке $(0;0)$ имеем: $y'_+(0) = +\infty$; $y'_-(0) = -\infty$; есть правая и левая вертикальные касательные, но нет касательной в смысле определения 4.5; $y'(0)$ не существует (см. рис. 4.8).

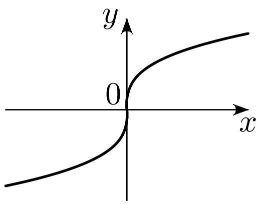

Рис. 4.6

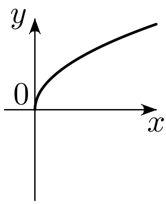

Рис. 4.7

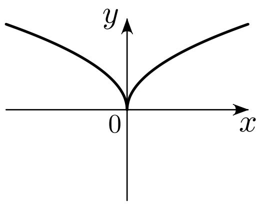

Рис. 4.8

Если $k = f'(x_0) \in \mathbb{R}$, то $df(x_0) = k\Delta x$ — приращение линейной функции, соответствующей уравнению касательной в точке x_0, если приращение аргумента равно Δx (см. рис. 4.4).

§ 5. Производные и дифференциалы высших порядков

Производная n-го порядка функции f в точке x_0 ($n = 0, 1, 2, \ldots$) естественно определяется при помощи рекуррентного соотношения
$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})', \quad \text{где} \quad f^{(0)} = f,$$
при условии, что $f^{(n-1)}$ определена и конечна в некоторой окрестности точки x_0. Ясно, что $f^{(1)} = f'$, применяются также обозначения $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f'''$. Для производных более высокого порядка нет специальных символов, пишут $f^{(4)}$, $f^{(5)}$ и т.д. Ясно также, что при всех $n, m = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется равенство
$$(f^{(n)})^{(m)} = f^{(n+m)}.$$

Приведём некоторые формулы для производных n-го порядка.

1) $(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, в частности, $(e^x)^{(n)} = e^x$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;
2) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, во всех точках $x > 0$.

Если $\alpha \in \mathbb{Z}$, то формула верна во всех точках $x \neq 0$, если $\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, то формула верна во всех точках $x \in \mathbb{R}$, но $(x^\alpha)^{(n)} = 0$ при $n > \alpha$ (уже при $n = \alpha + 1$ появляется множитель $\alpha - n + 1$, равный 0). Для удобства обозначений вводятся обобщённые биномиальные коэффициенты

$$C_\alpha^n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!},\ \alpha \in \mathbb{R},\ n = 1, 2,\ \ldots,\ \ C_\alpha^0 = 1.$$

Если $\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, то $C_\alpha^n = 0$ при $n > \alpha$, при остальных α коэффициенты C_α^n образуют бесконечную последовательность ненулевых чисел. В этих обозначениях

$$(x^\alpha)^{(n)} = n! C_\alpha^n x^{\alpha-n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Последняя формула часто употребляется при $\alpha = -1$ и $\alpha = -2$. Так как $C_{-1}^n = \dfrac{(-1)(-2)\ldots(-n)}{n!} = (-1)^n$; $C_{-2}^n = \dfrac{(-2)(-3)\ldots(-n-1)}{n!} = (-1)^n(n+1)$, то $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$; $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n(n+1)!}{x^{n+2}}$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

3) Так как $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, то

$$(\ln x)^{(n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

во всех точках $x > 0$. Отсюда следует, что $(\log_a x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$, во всех точках $x > 0$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

4) Так как $(\sin x)' = \cos x$, $(\sin x)'' = -\sin x$, $(\sin x)''' = -\cos x$, $(\sin x)^{(4)} = \sin x$, то значения последовательных производных функции $\sin x$ повторяются через четыре. Легко записать этот факт одной формулой $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, во всех точках x. Аналогично, $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, во всех точках x.

Записать в общем виде n-ю производную от каждой элементарной функции невозможно. Ясно, что если $f^{(n)}(x)$ и $g^{(n)}(x)$

существуют и конечны, то в соответствующих точках

$$(f(x)+g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x); \quad (Cf(x))^{(n)} = Cf^{(n)}(x),$$

где C — постоянная.

А вот для n-й производной сложной функции нет общей формулы. Можно заметить лишь то, что в случае, когда внутренняя функция линейна, n-я производная сложной функции вычисляется так:

$$(f(kx+b))^{(n)} = k^n \cdot f^{(n)}(kx+b), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Этот результат очень просто устанавливается методом индукции.

Например, $\left(\dfrac{1}{3x-5}\right)^{(n)} = \dfrac{3^n \cdot (-1)^n \cdot n!}{(3x-5)^{n+1}}$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

Для n-й производной произведения имеет место

Теорема 4.10 (формула Лейбница). *Пусть при натуральном n в точке x_0 существуют $u^{(n)}(x_0)$ и $v^{(n)}(x_0)$. Тогда произведение $u(x)v(x)$ имеет в точке x_0 производную порядка n, причём в этой точке*

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \equiv$$
$$\equiv C_n^0 u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + C_n^2 u^{(n-2)} v'' + \ldots + C_n^n u v^{(n)}$$

(сумма составляется аналогично формуле бинома Ньютона).

☐ Доказательство проведём методом индукции (аналогично можно доказать по индукции и формулу бинома Ньютона).

При $n = 1$ имеем известную формулу $(uv)' = u'v + uv'$; кстати, при $n = 0$ формула тоже верна. Пусть формула Лейбница верна для некоторого натурального n, докажем её для следующего числа $n+1$. Имеем по предположению индукции:

$$(uv)^{(n+1)} = ((uv)^{(n)})' = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}\right)' =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (u^{(n-k)} v^{(k)})' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k+1)} v^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k+1)}.$$

Во второй сумме произведём сдвиг индекса, т.е. заменим k на $m-1$. Вторая сумма примет вид

$$\sum_{m=1}^{n+1} C_n^{m-1} u^{(n-m+1)} v^{(m)} = \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} u^{(n-k+1)} v^{(k)}$$

(для удобства m снова обозначим через k, какой буквой обозначать индекс суммирования — не имеет значения). Тогда

$$(uv)^{(n+1)} = C_n^0 u^{(n+1)} v + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) u^{(n+1-k)} v^{(k)} + C_n^n u v^{(n+1)}.$$

Известно, что $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$ (это соотношение легко доказывается непосредственно из выражения для C_n^k и является основой так называемого треугольника Паскаля). Так как $C_n^0 = C_{n+1}^0$, $C_n^n = C_{n+1}^{n+1}$, то окончательно получим

$$(uv)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(n+1-k)} v^{(k)},$$

т.е. формула Лейбница доказана по индукции. ■

Формулу Лейбница удобно применять, если одна из двух функций u и v — многочлен. Например, если v — многочлен степени m, то при $n > m$ в формуле будет не $n+1$ слагаемое, а всего лишь $m+1$, потому что $v^{(k)} = 0$ при $k \geqslant m+1$.

Пример 4.13.

$$(x^3 e^{2x})^{(n)} = C_n^0 x^3 (e^{2x})^{(n)} + C_n^1 (x^3)' (e^{2x})^{n-1} + \\ + C_n^2 (x^3)'' (e^{2x})^{(n-2)} + C_n^3 (x^3)''' (e^{2x})^{(n-3)} + 0.$$

Здесь $u = e^{2x}$, $v = x^3$.

Так как $(e^{2x})^{(k)} = 2^k e^{2x}$ при $k = 0, 1, 2, \ \ldots$, то

$$(x^3 e^{2x})^{(n)} = x^3 \cdot 2^n e^{2x} + n \cdot 3x^2 \cdot 2^{n-1} e^{2x} + \\ + \frac{n(n-1)}{2} 6x \cdot 2^{n-2} e^{2x} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot 6 \cdot 2^{n-3} \cdot e^{2x}.$$

Фактически равенство доказано для $n - 3 \geqslant 0$, т.е. при $n = 3, 4, 5, \ \ldots$, но сохраняется и при $n = 0, 1, 2, \ \ldots$ (можно проверить непосредственно).

Если найденная n-я производная нигде не используется в дальнейшем, то упрощать полученное выражение вряд ли имеет смысл.

Пример 4.14.

$$
\begin{aligned}
&((x^2+1)\ln(3x+1))^{(n)} = \\
&\quad = (x^2+1)(\ln(3x+1))^{(n)} + n(x^2+1)'(\ln(3x+1))^{(n-1)} + \\
&\qquad + \frac{n(n-1)}{2}(x^2+1)''(\ln(3x+1))^{(n-2)} = \\
&= (x^2+1)\cdot\frac{3^n(-1)^{n-1}(n-1)!}{(3x+1)^n} + n\cdot 2x\cdot\frac{3^{n-1}(-1)^{n-2}(n-2)!}{(3x+1)^{n-1}} + \\
&\qquad + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot\frac{3^{n-2}(-1)^{n-3}(n-3)!}{(3x+1)^{n-2}}\,.
\end{aligned}
$$

Равенство доказано для $n-2 \geqslant 1$, т.е. при $n = 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$ Если $n = 0,\ 1,\ 2$, то искомая n-я производная записывается иначе (содержит логарифм).

Наряду с производными высших порядков можно рассматривать дифференциалы высших порядков. Заметим, что $df(x) = f'(x)\,dx$ — функция от x и dx. Если считать приращение dx фиксированным, а точку x переменной, то можно рассмотреть дифференциал от этой функции переменной x:

$$
d(df(x)) = d(f'(x)dx) = dx\cdot d(f'(x)) = dx\cdot f'(x)\,dx = f''(x)\,dx^2.
$$

Это выражение называют вторым дифференциалом функции f в точке x (обозначают $d^2f(x)$). Выполненные действия допустимы, если f' имеет конечную производную в данной точке, т.е. если существует конечная $f''(x)$. Принято писать dx^2 вместо $(dx)^2$, т.е. опускать скобки. Таким образом,

$$
d^2f(x) = f''(x)\,dx^2 \quad \text{или} \quad f'' = \frac{d^2f}{dx^2}\,.
$$

Определение 4.6. Дифференциал n-го порядка функции f в точке x определяется по индукции. При $n = 1$:

$$
d^1f = df = f'(x)\,dx
$$

— функция от x и dx. Тогда если $d^{n-1}f$ — функция от x и dx, то, считая dx фиксированным, а x — переменным, $d^n f$ — это дифференциал от $d^{n-1}f$ как функции от переменной x.

Легко доказать, что если в точке x существует конечная $f^{(n)}$, то $d^n f(x) = f^{(n)}(x)\,dx^n$, где $dx^n \equiv (dx)^n$.

□ При $n = 1$ получаем обычную формулу для $df(x)$. Пусть $d^{n-1}f(x) = f^{(n-1)}(x)\,dx^{n-1}$. Тогда dx^{n-1} считаем постоянным, и $d^n f(x) = d(f^{(n-1)}(x)\,dx^{n-1}) = dx^{n-1}\,d(f^{(n-1)}(x)) = = dx^{n-1}f^{(n)}(x)\,dx = f^{(n)}(x)\,dx^n$. ■

Итак, $f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$.

Дифференциал второго порядка (а значит, и n-го порядка при $n \geqslant 2$) не обладает инвариантностью формы относительно замены переменной. В самом деле, если x — независимая переменная, то

$$d^2 f(x) = f''(x)\,dx^2. \tag{4.5}$$

Пусть теперь $u = u(x)$ — функция от x, имеющая конечную вторую производную. Тогда du уже нельзя считать постоянной величиной, и

$$\begin{aligned}
&d^2 f(u) = d(df(u)) = d(f'(u)\,du) = \\
&\quad = du \cdot d(f'(u)) + f'(u) \cdot d(du) = du \cdot f''(u)\,du + f'(u)\,d^2u = \\
&\qquad\qquad = f''(u)\,du^2 + f'(u)d^2u.
\end{aligned}$$

Здесь применена инвариантность формы первого дифференциала к $d(f'(u))$. Полученная формула

$$d^2 f(u) = f''(u)\,du^2 + f'(u)\,d^2u \tag{4.6}$$

называется формулой второго дифференциала сложной функции. Сравнивая её с (4.5), мы замечаем наличие дополнительного слагаемого $f'(u)\,d^2u$, которое обращается в нуль, если u — независимая переменная или линейная функция от независимой переменной. В общем случае это слагаемое присутствует, что и обуславливает отсутствие инвариантности формы второго дифференциала относительно замены переменной.

Пример 4.15. Пусть $f(x) = x^4 + \ln x$, где x — независимая переменная. Тогда $df(x) = \left(4x^3 + \frac{1}{x}\right)\,dx$; $d^2 f(x) =$

$= \left(12x^2 - \frac{1}{x^2}\right) dx^2$, если $x > 0$. В конкретной точке: $df(1) = 5\,dx$; $d^2 f(1) = 11\,dx^2$.

Пусть теперь функция u имеет конечную первую (или вторую) производную в соответствующей точке. Тогда в силу инвариантности формы первого дифференциала, $df(u) = \left(4u^3 + \frac{1}{u}\right) du$. По формуле (4.6) имеем

$$d^2 f(u) = \left(12u^2 - \frac{1}{u^2}\right) du^2 + \left(4u^3 + \frac{1}{u}\right) d^2 u.$$

З а м е ч а н и е. Не следует путать следующие 3 выражения:

$$dx^2 = (dx)^2, \quad d(x^2) = 2x\,dx, \quad d^2 x = 0$$

(здесь x — независимая переменная).

§ 6. Теоремы о среднем для дифференцируемых функций

Определение 4.7. Точка x_0 называется точкой строгого (или нестрогого) локального максимума функции f, если функция определена в некоторой окрестности точки x_0 и $\exists\,\delta > 0$: $\forall\,x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \to f(x) < f(x_0)$ (соответственно $f(x) \leqslant f(x_0)$). Точка x_0 называется точкой строгого (или нестрогого) локального минимума функции f, если функция определена в некоторой окрестности точки x_0 и $\exists\,\delta > 0$: $\forall\,x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \to f(x) > f(x_0)$ (соответственно $f(x) \geqslant f(x_0)$). Все точки локального максимума и локального минимума называются точками локального экстремума функции f.

Теорема 4.11 (Ферма). *Если в точке локального экстремума x_0 функции f (вообще говоря, нестрогого) существует производная (конечная или равная $+\infty$ или $-\infty$), то она обязательно конечна и равна* 0.

□ Пусть для определённости x_0 — точка локального минимума (для точки максимума доказательство аналогично).

Тогда

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0,$$

так как $f(x) \geqslant f(x_0)$ при $x \in (x_0; x_0 + \delta)$.

Аналогично, $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0-0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$, так как $f(x) \geqslant f(x_0)$ при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$. Так как $f'(x_0) = f'_+(x_0) \geqslant 0$ и $f'(x_0) = f'_-(x_0) \leqslant 0$, то $f'(x_0)$ не может равняться $+\infty$ или $-\infty$, и $f'(x_0) = 0$. ■

З а м е ч а н и е 1. Теорема Ферма даёт необходимое условие точки локального экстремума для функций, имеющих производную. Это необходимое условие не является достаточным (функция $f(x) = x^3$ имеет в точке $x_0 = 0$ производную $f'(x_0) = 3x_0^2 = 0$, но в то же время функция f строго возрастает на $(-\infty; +\infty)$ и не имеет точек локального экстремума).

З а м е ч а н и е 2. В точке локального экстремума функция, пусть даже непрерывная, может не иметь производной. Например, функция $f(x) = |x|$ в точке $x_0 = 0$ имеет локальный минимум, но $f'(0)$ не существует (пример 4.2). Функция $f(x) = \sqrt{|x|}$ в точке $x_0 = 0$ имеет локальный минимум (см. рис. 4.8), но $f'_+(0) = +\infty$, $f'_-(0) = -\infty$, и $f'(0)$ не существует (пример 4.12, 4).

Для дальнейшего изложения нам понадобится понятие функции, дифференцируемой на промежутке.

Определение 4.8. Функция f называется дифференцируемой на промежутке I, если она имеет конечную производную в каждой внутренней точке I, а в концах промежутка (если они ему принадлежат) — соответствующие конечные односторонние производные. Функция f называется дифференцируемой в широком смысле на промежутке I, если она непрерывна на I, в каждой внутренней точке I существует $f'(x_0)$ (конечная, $+\infty$ или $-\infty$), а в концах промежутка (если они ему принадлежат) — соответствующие конечные односторонние производные (конечные, $+\infty$ или $-\infty$).

Пример 4.16. Функции $f(x) = x^2$ и $f(x) = x^3$ дифференцируемы на $[-1; 1]$. Функция $f(x) = \sqrt{x}$ дифференцируема в широком смысле на $[0;1]$. Функция $f(x) = \sqrt[3]{x}$ дифференцируема в широком смысле на $[-1;1]$. Функция $f(x) = \sqrt{|x|}$ не является дифференцируемой даже в широком смысле на $[-1;1]$.

Теорема 4.12 (Ролля). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема в широком смысле на интервале $(a;b)$, причём $f(a) = f(b)$, то найдётся точка $\xi \in (a;b)$ такая, что $f'(\xi) = 0$.*

□ По теоремам 3.11 и 3.12 функция f ограничена на $[a;b]$, причём $m = \inf\limits_{[a;b]} f(x)$ и $M = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$ достигаются. Если обе точные грани достигаются в концах отрезка, то $M = m$ (так как $f(a) = f(b)$), и функция постоянна на $[a;b]$, значит, $f'(x) = 0$ во всех точках $(a;b)$. Пусть теперь хотя бы одна из точных граней, для определённости, M, достигается во внутренней точке $\xi \in (a;b)$. Тогда ξ — точка локального максимума f (вообще говоря, нестрогого), и существует $f'(\xi)$ (конечная, $+\infty$ или $-\infty$). По теореме Ферма $f'(\xi) = 0$. ■

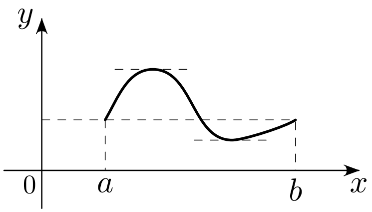

Рис. 4.9

Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в том, что для функции f в условиях теоремы 4.12 найдётся точка на интервале $(a;b)$, в которой касательная горизонтальна (см. рис. 4.9). Таких точек может быть много.

З а м е ч а н и е. Если функция имеет производную не во всех точках $(a;b)$, то теорема Ролля не обязана выполняться, пусть даже f непрерывна на $[a;b]$ и $f(a) = f(b)$ (например, $f(x) = |x|$ или $f(x) = \sqrt{|x|}$ на $[-1;1]$).

Теорема 4.13 (Коши). *Пусть функции f и g непрерывны на отрезке $[a;b]$; f дифференцируема в широком смысле на $(a;b)$; g дифференцируема на $(a;b)$, причём $g'(x) \neq 0$ на $(a;b)$. Тогда существует точка $\xi \in (a;b)$ такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,.$$

□ Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) + \lambda g(x)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$. Подберём λ так, чтобы $\varphi(a) = \varphi(b)$: $f(a) + \lambda g(a) = f(b) + \lambda g(b)$, откуда $\lambda = -\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$. Отметим, что из условий теоремы следует, что $g(b) \neq g(a)$, потому что если $g(b) = g(a)$, то по теореме Ролля существует точка $x \in (a; b)$, в которой $g'(x) = 0$, а это не так. Функция φ при любом $\lambda \in \mathbb{R}$ непрерывна на $[a; b]$ и дифференцируема в широком смысле на $(a; b)$, так как функция g во всех точках $(a; b)$ имеет конечную производную, а функция f имеет производную конечную или равную $+\infty$ или $-\infty$.

При найденном выше значении λ для функции φ выполнены все условия теоремы Ролля. По этой теореме найдётся точка $\xi \in (a; b)$ такая, что $\varphi'(\xi) = 0$, т.е. $f'(\xi) + \lambda g'(\xi) = 0$. Это означает, что $\lambda = -\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Приравнивая это значение λ к найденному выше, получаем нужное равенство. ■

Теорема 4.14 (Лагранжа). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема в широком смысле на интервале $(a; b)$. Тогда найдётся точка $\xi \in (a; b)$ такая, что $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.*

□ Применим теорему Коши при $g(x) = x$ $(g'(x) = 1 \neq 0)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(\xi)}{1}, \quad \text{где} \quad \xi \in (a; b).$$ ■

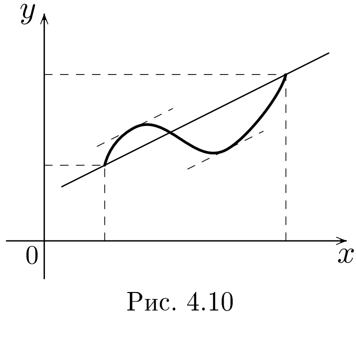

Рис. 4.10

Геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в том, что для функции f в условиях теоремы 4.14 найдётся точка на интервале $(a; b)$, в которой касательная параллельна хорде, соединяющей концы графика — точки $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$ (см. рис. 4.10).

Теорема Лагранжа является важнейшей теоремой дифференциального исчисления функций одной переменной — той части математического анализа, которая изучает производную и её применения. Многие утверждения, которые с точки зрения здравого смысла очевидны, но требуют логического доказательства, доказываются именно с помощью теоремы Лагранжа. Докажем несколько таких следствий из теоремы Лагранжа.

Теорема 4.15. *Если функция f непрерывна на промежутке I и во всех внутренних точках I существует $f'(x) = 0$, то f постоянна на I.*

☐ Пусть $x_1 < x_2$; $x_1, x_2 \in I$. Тогда на $[x_1; x_2]$ функция непрерывна, а на $(x_1; x_2)$ дифференцируема. Применим к функции f на отрезке $[x_1, x_2]$ теорему Лагранжа:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1),$$

здесь $\xi \in (x_1; x_2)$, поэтому $f'(\xi) = 0$.

Значит, для любых точек $x_1, x_2 \in I$ выполняется равенство $f(x_1) = f(x_2)$, т.е. f постоянна на I. ■

Следствие. *Если функции f и g непрерывны на промежутке I и во всех внутренних точках I существуют $f'(x)$ и $g'(x)$, причём $f'(x) = g'(x)$ во внутренних точках I, то во всех точках I имеет место равенство $f(x) = g(x) + C$, где C — постоянная.*

☐ Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - g(x)$, $x \in I$. Функция φ непрерывна на I, и во всех внутренних точках I существует $\varphi'(x) = 0$, поэтому $\varphi(x) = C$ на I, т.е. $f(x) = g(x) + C$. ■

Это следствие играет важнейшую роль при вычислении неопределённых интегралов, о чём пойдёт речь в главе VIII.

Теорема 4.16. *Пусть функция f непрерывна на $[x_0; x_0+\delta)$, $\delta > 0$, и дифференцируема на $(x_0; x_0 + \delta)$, причём существует $\lim\limits_{x \to x_0+0} f'(x) = A$ (конечный, $+\infty$ или $-\infty$). Тогда существует $f'_+(x_0) = A$.*

☐ По теореме Лагранжа при всех $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ имеет место равенство $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$, где $\xi = \xi(x) \in (x_0; x)$. Так как $x_0 < \xi(x) < x$, то по теореме 3.4 $\lim\limits_{x \to x_0+0} \xi(x) = x_0 + 0$. Тогда $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi(x))$. Согласно теореме 3.5 в пределе, приводящем к $f'_+(x_0)$, сделаем замену $u = \xi(x)$, $u \to x_0 + 0$ при $x \to x_0 + 0$, причём $u \neq x_0$ при $x > x_0$. Имеем теперь

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \\ = \lim_{x \to x_0+0} f'(\xi(x)) = \lim_{u \to x_0+0} f'(u) = A. \quad \blacksquare$$

З а м е ч а н и е. Аналогичное утверждение можно доказать для $f'_-(x_0)$ (и как следствие для $f'(x_0)$). Таким образом, если функция f непрерывна в $U_\delta(x_0)$ и дифференцируема в $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, причём $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = A$, то существует $f'(x_0) = A$, где A — конечно или равно $+\infty$ или $-\infty$. Обратное утверждение неверно, $f'(x_0)$ может существовать, а $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ — нет.

Пример 4.17. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Ясно, что $f'(0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(0+t) - f(0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} t \sin\frac{1}{t} = 0$ (пример 3.29). Поэтому функция f дифференцируема в любой точке, и

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Но $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$, а $\lim\limits_{x \to 0} \cos\frac{1}{x}$ не существует (аналогично примеру 3.28), поэтому не существует $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ (если он существовал бы, то из существования $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x}$ следовало бы и существование $\lim\limits_{x \to 0} \cos\frac{1}{x}$). Итак, $f'(0)$ существует, а $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ не существует. Отсюда, кстати, следует, что $f'(x)$ не является непрерывной в точке $x = 0$, хотя существует всюду.

§ 7. Формула Тейлора

Определение 4.9. Пусть функция $f(x)$ такова, что при некотором $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ существует конечная $f^{(n)}(x_0)$.

Тогда многочлен $P_n(f, x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x_0) + $ $+ f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ называется многочленом Тейлора порядка n функции f в точке x_0, разность $r_n(f, x) = f(x) - P_n(f, x)$ называется остаточным членом формулы Тейлора, а равенство $f(x) = P_n(f, x) + r_n(f, x)$ — формулой Тейлора для функции f в точке x_0.

При $n = 1$ (т.е. когда f дифференцируема в точке x_0) имеем: $P_1(f, x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Так как для дифференцируемой функции $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, где $\Delta x = x - x_0$, то $f(x) = P_1(f, x) + o(x - x_0)$ при $x \to x_0$, т.е. $r_1(f, x) = o(x - x_0)$. Этот факт обобщается следующим образом.

Теорема 4.17 (остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано). *Пусть при некотором $n = 1, 2, 3, \ldots$ существует конечная $f^{(n)}(x_0)$. Тогда остаточный член формулы Тейлора*

$$r_n(f, x) = o((x - x_0)^n) \quad \textit{при} \quad x \to x_0.$$

Предварительно докажем две леммы.

Лемма 4.1. *В любой точке x при $n = 1, 2, 3, \ldots$*

$$P_n'(f, x) = P_{n-1}(f', x);\ r_n'(f, x) = r_{n-1}(f', x).$$

$\square$ $$P_n'(f, x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + \frac{f'''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} = P_{n-1}(f', x).$$

$$r_n'(f, x) = (f(x) - P_n(f, x))' = f'(x) - P_n'(f, x) = f'(x) - P_{n-1}(f', x) = r_{n-1}(f', x). \quad \blacksquare$$

Лемма 4.2. *При всех $k = 0, 1, 2, \ldots, n$*

$$P_n^{(k)}(f, x_0) = f^{(k)}(x_0); \quad r_n^{(k)}(f, x_0) = 0.$$

□ Так как $P_n(f,x) = \sum\limits_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$, то при $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$:

$$P_n^{(k)}(f,x) = \sum_{j=k}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)\cdot j(j-1)\cdot\ \ldots\cdot(j-k+1)(x-x_0)^{j-k}}{j!};$$

$$P_n^{(k)}(f,x_0) = f^{(k)}(x_0)$$

(остаётся только один член при $j = k$, члены с $j > k$ обращаются в нуль).

Значит, $r_n^{(k)}(f,x_0) = 0$. ■

Теперь докажем теорему 4.17.

□ Применим метод индукции. При $n = 1$ утверждение теоремы проверено выше. Предположим, что теорема верна для некоторого $n = 1,\ 2,\ \ldots$ Докажем её для следующего значения $n+1$.

Если f имеет $(n+1)$-ю конечную производную в точке x_0, то f' имеет n-ю конечную производную в точке x_0, и по предположению индукции $r_n(f',x) = o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$.

Так как существует конечная $f^{(n+1)}(x_0)$, то при некотором $\delta > 0$ при всех $x \in U_\delta(x_0)$ существует конечная $f^{(n)}(x)$, и, во всяком случае, функция f дифференцируема в $U_\delta(x_0)$. Значит функция $r_{n+1}(f,x)$ дифференцируема в $U_\delta(x_0)$. При фиксированном значении $x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ применим к функции $r(x) = r_{n+1}(f,x)$ теорему Лагранжа на отрезке $[x_0;x]$ (или на $[x;x_0]$, смотря что больше):

$$r(x)-r(x_0) = r'(\xi)(x-x_0), \quad \text{где } \ x_0 < \xi < x \quad (\text{или } x < \xi < x_0).$$

В любом случае $\xi = \xi(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\xi(x) = x_0$, $\xi(x) \neq x_0$. Но $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{r'(x)}{(x-x_0)^n} = 0$; по теореме 3.5

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r'(\xi(x))}{(\xi(x)-x_0)^n} = \lim_{u\to x_0}\frac{r'(u)}{(u-x_0)^n} = 0,$$

и подавно

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r'(\xi(x))}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0}\frac{r'(\xi(x))}{(\xi(x)-x_0)^n}\cdot\left(\frac{\xi(x)-x_0}{x-x_0}\right)^n = 0$$

как произведение бесконечно малой функции на ограниченную; второй сомножитель под знаком предела по модулю не превосходит 1. Тогда, так как $r(x_0) = 0$, имеем окончательно

$$r(x) = r'(\xi(x))(x - x_0) = o((x - x_0)^n) \cdot (x - x_0) = o((x - x_0)^{n+1}).$$

Утверждение теоремы верно для значения $n + 1$. ■

Докажем теперь единственность многочлена, приближающего функцию в окрестности точки до $o((x - x_0)^n)$.

Лемма 4.3. *Пусть при некотором* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *существует конечная* $f^{(n)}(x_0)$. *Тогда если* $f(x) = Q(x) + o((x - x_0)^n)$ *при* $x \to x_0$, *где* $Q(x)$ *— многочлен степени не выше* n, *то* $Q(x) = P_n(f, x)$.

□ Опустим для удобства индекс n. Тогда по теореме 4.17 $f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n)$, а значит, $T(x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$, где $T(x) = P(x) - Q(x)$. Остаётся доказать, что $T(x)$ — нулевой многочлен.

Так как $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{T(x)}{(x - x_0)^n} = 0$, то по теореме 3.5

$$\lim_{t \to 0} \frac{T(x_0 + t)}{t^n} = 0$$

($x = x_0 + t$; $x \to x_0$ при $t \to 0$, $x \neq x_0$ при $t \neq 0$).

Пусть $T(x_0 + t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ (также многочлен степени не выше n). Докажем, что все коэффициенты этого многочлена равны 0. Так как $\lim\limits_{t \to 0} T(x_0 + t) = 0$, то $a_0 = 0$. Тогда $a_1 t + \ldots + a_n t^n = o(t^n)$. После деления на t получим $a_1 + a_2 t + \ldots + a_n t^{n-1} = o(t^{n-1})$. В пределе при $t \to 0$ получим $a_1 = 0$ и т.д. Последовательно все коэффициенты многочлена оказываются равными 0. ■

З а м е ч а н и е. Таким образом, многочлен Тейлора лучше других многочленов степени не выше n приближает данную функцию при $x \to x_0$ (с точностью до $o((x - x_0)^n)$). При $n = 1$ многочлен Тейлора — линейная функция, соответствующая уравнению касательной.

При $x_0 = 0$ формула Тейлора называется формулой Маклорена: $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$ при $x \to 0$ (если существует конечная $f^{(n)}(0)$). Приведём примеры разложения элементарных функций по формуле Маклорена.

1) $f(x) = e^x$; $f^{(k)}(x) = e^x$, $f^{(k)}(0) = 1$ при $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$
$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0.$$
При $n = 1$ получим: $e^x = 1 + x + o(x)$, т.е. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ (пример 3.34). Но не следует думать, что мы получили новый вывод предела из примера 3.34. Дело в том, что этот предел используется при выводе производной от функции e^x (теорема 4.4).

2) Заменив в предыдущем разложении x на $-x$, получим (применяя теорему 3.5)
$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + o(x^n), \quad \text{так как} \quad o((-x)^n) = o(x^n).$$
Тогда
$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1 + (-1)^k}{2k!}\, x^k + o(x^n);$$
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1 - (-1)^k}{2k!}\, x^k + o(x^n),$$
так как $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$.
В силу леммы 4.3 это и есть разложения $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ по формуле Маклорена. Поскольку в разложении $\operatorname{ch} x$ присутствуют только чётные степени, а в разложении $\operatorname{sh} x$ — только нечётные степени, то разложения удобно записать в виде
$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}),$$
так как $P_{2n}(f, x) = P_{2n+1}(f, x)$;
$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n}),$$

так как $P_{2n-1}(f,x) = P_{2n}(f,x)$.

3) $f(x) = \cos x$; $f^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}k\right)$, $f^{(0)}(0) = 1$, $f^{(1)}(0) = 0$, $f^{(2)}(0) = -1$, $f^{(3)}(0) = 0$, далее повторение с периодом 4. Поэтому разложение содержит лишь чётные степени, и

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \\ = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0.$$

4) $f(x) = \sin x$; $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}k\right)$, $f^{(0)}(0) = 0$, $f^{(1)}(0) = 1$, $f^{(2)}(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1$, далее повторение с периодом 4. Поэтому разложение содержит лишь нечётные степени, и

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n}), \quad x \to 0.$$

Разложения $\cos x$ и $\sin x$ отличаются от разложений $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ лишь знаками.

5) $f(x) = \ln(1+x)$; $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$, $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ при $k = 1, 2, \ldots$; $f(0) = 0$.

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n) = \\ = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n), \quad x \to 0.$$

6) $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$; $f^{(k)}(x) = C_\alpha^k k!(1+x)^{\alpha-k}$, $f^{(k)}(0) = C_\alpha^k k!$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Поэтому

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n), \quad x \to 0.$$

При $\alpha = 0, 1, 2, 3, \ \ldots$ получим обычную формулу бинома Ньютона без $o(x^n)$. При $\alpha = -1$ получим

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n), \quad x \to 0.$$

После замены x на $-x$ получим

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n), \quad x \to 0.$$

7) Для функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ общей формулы для $f^{(k)}(x)$ не существует. Поступим следующим образом:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n})$$

(после замены x на x^2 в разложении $\frac{1}{1+x}$ здесь применена теорема 3.5; в дальнейшем при выполнении подобных замен в разложениях по формуле Тейлора мы не будем для краткости ссылаться явно на теорему 3.5). В силу леммы 4.3 мы получили разложение $f'(x)$ по формуле Маклорена до $o(x^{2n})$. Понизим точность:

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{2k} + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}) = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n-1}).$$

Последняя сумма перед $o(x^{2n-1})$ есть $P_{2n-1}(f', x) = P'_{2n}(f, x)$ (лемма 4.1). Так как $P'_{2n}(f, x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{2k}$, то по следствию из теоремы 4.15 $P_{2n}(f, x) = C + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$. Постоянную C найдём как $P_{2n}(f, 0) = f(0) = 0$ (лемма 4.2). Поэтому

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n}) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n}), \quad x \to 0.$$

8) $f(x) = \arcsin x$. Имеем: $f'(x) = (1-x^2)^{-1/2}$. Воспользуемся разложением

$$(1+u)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{n} C_{-1/2}^{k} u^k + o(u^n), \quad u \to 0,$$

где $C_{-1/2}^{k} = \dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-k\right)}{k!}$, $k = 1,\ 2,\ \ldots$; $C_{-1/2}^{0} = 1$. Аналогично разложению $\operatorname{arctg} x$, подставим $u = -x^2$:

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} C_{-1/2}^{k}(-x^2)^k + o(x^{2n}) = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} C_{-1/2}^{k}(-1)^k x^{2k} + o(x^{2n-1}).$$

Последняя сумма перед $o(x^{2n-1})$ есть $P_{2n-1}(f', x) = P'_{2n}(f, x)$. По следствию из теоремы 4.15

$$P_{2n}(f, x) = C + \sum_{k=0}^{n-1} C_{-1/2}^{k} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}; \quad C = f(0) = 0.$$

Окончательно имеем

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{n-1} C_{-1/2}^{k} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n}), \quad x \to 0.$$

При $n = 3$ легко вычислить

$$C_{-1/2}^{0} = 1, \quad C_{-1/2}^{1} = -\frac{1}{2}, \quad C_{-1/2}^{2} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2} = \frac{3}{8},$$

поэтому

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6), \quad x \to 0.$$

Из рассмотренных примеров видно, что разложение по формуле Маклорена чётных функций содержит только чётные степени, нечётных функций — только нечётные степени. Для доказательства этого факта докажем сначала вспомогательное утверждение.

Лемма 4.4. 1) *Пусть функция f определена на $(-a; a)$, где $a > 0$, и при всех $x \in (-a; a)$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$ (чётная функция). Тогда если f дифференцируема в точке $x_0 \in (-a; a)$, то она дифференцируема и в точке $(-x_0)$, причём $f'(-x_0) = -f'(x_0)$ (производная чётной функции нечётна).*

2) *Пусть функция f определена на $(-a; a)$, где $a > 0$, и при всех $x \in (-a; a)$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$ (нечётная функция). Тогда если f дифференцируема в точке $x_0 \in (-a; a)$, то она дифференцируема и в точке $(-x_0)$, причём $f'(-x_0) = f'(x_0)$ (производная нечётной функции чётна).*

□ Докажем первую часть леммы, вторая доказывается аналогично.

Имеем: $f'(x_0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t}$. В аналогичном пределе для вычисления $f'(-x_0)$ сделаем замену $s = -t$, по теореме 3.5

$$f'(-x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(-x_0+t) - f(-x_0)}{t} = \lim_{s\to 0} \frac{f(-x_0-s) - f(-x_0)}{-s} = -\lim_{s\to 0} \frac{f(x_0+s) - f(x_0)}{s} = -f'(x_0). \quad \blacksquare$$

Теорема 4.18. *Пусть при некотором $n = 1, 2, \ldots$ существует конечная $f^{(n)}(0)$. Тогда если функция f чётна на некотором интервале $(-a; a)$, где $a > 0$, то многочлен Маклорена f содержит лишь чётные степени, а если нечётна — лишь нечётные степени.*

□ Пусть f чётна. По лемме 4.4 функция $f^{(k)}$ нечётна при нечётном k. Следовательно, $f^{(k)}(0) = 0$ при k нечётном, и многочлен Маклорена содержит лишь чётные степени. Аналогично доказательство для нечётной функции f. ■

Приведём пример разложения функции с фиксированной точностью (разложить в общем виде до $o(x^n)$ или $o(x^{2n})$ здесь не удастся).

Пример 4.18. Разложить функцию $f(x) = \operatorname{tg} x$ по формуле Маклорена до $o(x^6)$ при $x \to 0$.

$\square$ Так как функция нечётна, то коэффициент при x^6 равен 0, и достаточно разложить до $o(x^5)$. Тогда

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}.$$

Основное разложение $(1+u)^{-1}$ нужно записать с точностью до $o(u^2)$, так как $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, $u = O^*(x^2)$ при $x \to 0$, $u^2 = O^*(x^4)$, а $u^3 = O^*(x^6) = o(x^5)$, члены с u^3 уйдут в остаточный член. Имеем

$$(1+u)^{-1} = 1 - u + u^2 + o(u^2),$$

$$\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^{-1} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^5) =$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^5) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)$$

(вместо $o(x^4)$ сразу пишем $o(x^5)$, так как функция чётна, и члена с x^5 в разложении нет; при раскрытии скобок чётные степени выше четвёртой не учитываем, они уйдут в остаточный член).

Имеем окончательно

$$\operatorname{tg} x = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)\right) =$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{5}{24}x^5 + o(x^5) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

(вместо $o(x^5)$ сразу пишем $o(x^6)$, так как функция нечётна, и члена с x^6 в разложении нет). $\blacksquare$

Итак, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$, $x \to 0$.

Аналогично, $\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$, $x \to 0$.

Теорема 4.19 (остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа). *Пусть функция f имеет $(n+1)$-ю конеч-*

ную производную в $U_\delta(x_0)$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \delta > 0$. Тогда для любого $x \in U_\delta(x_0)$ остаточный член формулы Тейлора

$$r_n(f,x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}, \quad \text{где} \quad \xi \in (x_0, x)$$

(или $\xi \in (x, x_0)$, смотря что больше). В развёрнутом виде формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}.$$

□ При $x = x_0$ формула имеет вид $f(x_0) = f(x_0)$ и верна для всех ξ. Пусть $x > x_0$, т.е. $x \in (x_0; x_0+\delta)$ (при $x < x_0$ доказательство аналогично).

Рассмотрим функцию $r(x) = r_n(f,x)$. Она имеет $(n+1)$-ю конечную производную в $U_\delta(x_0)$, причём $r(x_0) = r'(x_0) = \ldots = r^{(n)}(x_0) = 0$ (по лемме 4.2). Рассмотрим также функцию $s(x) = (x-x_0)^{n+1}$. Она имеет производные всех порядков, причём $s(x_0) = s'(x_0) = \ldots = s^{(n)}(x_0) = 0$; $s^{(n+1)}(x) = (n+1)!$ в любой точке x. Кроме того понятно, что при всех $x \neq x_0$ выполняются неравенства $s'(x) \neq 0$, $s''(x) \neq 0$, $\ldots$, $s^{(n)}(x) \neq 0$.

По теореме Коши 4.13:

$$\frac{r(x)}{s(x)} = \frac{r(x)-r(x_0)}{s(x)-s(x_0)} = \frac{r'(\xi_1)}{s'(\xi_1)}, \quad \text{где} \quad \xi_1 \in (x_0; x).$$

Далее применим теорему Коши к функциям $r'(x)$ и $s'(x)$:

$$\frac{r(x)}{s(x)} = \frac{r'(\xi_1)-r'(x_0)}{s'(\xi_1)-s'(x_0)} = \frac{r''(\xi_2)}{s''(\xi_2)}, \quad \text{где} \quad \xi_2 \in (x_0; \xi_1).$$

Продолжим цепочку:

$$\frac{r(x)}{s(x)} = \frac{r''(\xi_2)-r''(x_0)}{s''(\xi_2)-s''(x_0)} = \frac{r'''(\xi_3)}{s'''(\xi_3)} = \frac{r'''(\xi_3)-r'''(x_0)}{s'''(\xi_3)-s'''(x_0)} =$$
$$= \frac{r^{(4)}(\xi_4)}{s^{(4)}(\xi_4)} = \ldots = \frac{r^{(n)}(\xi_n)}{s^{(n)}(\xi_n)} = \frac{r^{(n)}(\xi_n)-r^{(n)}(x_0)}{s^{(n)}(\xi_n)-s^{(n)}(x_0)} = \frac{r^{(n+1)}(\xi)}{s^{(n+1)}(\xi)},$$

где $x_0 < \xi < \xi_n < \ldots < \xi_1 < x$, т.е. $\xi \in (x_0; x)$.

Но $P_n^{(n+1)} = 0$, значит, $r^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi)$. Так как $s^{(n+1)}(x) = (n+1)!$, то $r(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}$. ■

З а м е ч а н и е. Теорема 4.19 выводится при более жёстких условиях на функцию f, чем теорема 4.17. Теорема 4.17 имеет предельный характер и позволяет лишь оценить скорость убывания остаточного члена при $x \to x_0$, но не позволяет сделать его конкретные оценки в фиксированных точках. Теорема 4.19 верна в каждой фиксированной точке $x \in U_\delta(x_0)$ и позволяет сделать конкретные оценки остаточного члена.

Пример 4.19. Разложим функцию $f(x) = \sin x$ по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа при $n = 4$.

Имеем: $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$. Здесь $r_4(f,x)$ записан в форме Пеано. Запишем его в форме Лагранжа. Так как $(\sin x)^{(5)} = \cos x$, то $r_4(f,x) = \frac{\cos\xi}{120}\,x^5$. Формула Тейлора имеет вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{\cos\xi}{120}\,x^5, \quad \text{где} \quad 0 < \xi < x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Такой вид остаточного члена позволяет оценить его в каждой точке:

$$|r_4(f,x)| \leqslant \frac{|x|^5}{120}\,.$$

При $n = 0$ теорема 4.19 приобретает вид: $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$, если $f(x)$ дифференцируема в $U_\delta(x_0)$ — это теорема Лагранжа 4.14.

Формулу Тейлора можно записать при помощи дифференциалов. В самом деле, $x - x_0 = \Delta x = dx$; $f'(x_0)(x-x_0) = df(x_0)$; $\ldots$; $f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n = d^n f(x_0)$; $f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1} = d^{n+1} f(\xi)$.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(x_0)}{k!} + o(dx^n), \quad dx \to 0.$$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(x_0)}{k!} + \frac{d^{n+1} f(\xi)}{(n+1)!}, \quad x \in U_\delta(x_0), \quad \xi \in (x_0; x).$$

Упражнения к главе IV

4.1. В каких точках имеет производную функция $f(x) = |x(x-1)^2(x-2)^3|$?

4.2. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

дифференцируема в точке $x = 0$, а функция

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

недифференцируема, хотя и непрерывна, в точке $x = 0$.

4.3. Вычислить производные функций $f(x) = x^x$ и $g(x) = (\sin x)^{\cos x}$ во всех точках их областей определения.

4.4. Вывести формулу для производной функции $f(x) = \ln x$ как производной функции, обратной к e^x.

4.5. Вычислить производные функций, обратных к $f(x) = \operatorname{ch} x$, $x > 0$, и к $g(x) = \operatorname{sh} x$.

4.6. Доказать, что параметрически заданная кривая $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in \mathbb{R}$, является графиком непрерывной функции $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Вычислить $f'(x)$ как функцию от t в точках, где эта производная существует.

4.7. Вычислить $d(u^v)$ и $d^2(u^v)$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — дифференцируемые (соответственно дважды дифференцируемые) функции переменной x, причём $u(x) > 0$.

4.8. Вывести формулу для третьего дифференциала сложной функции $d^3 f(u)$, аналогичную (4.6).

4.9. Выполняется ли теорема Лагранжа для функций $f(x) = \sqrt[3]{x}$ и $g(x) = \sqrt{|x|}$ на отрезке $[-1; 1]$?

4.10. Верна ли теорема, обратная к теореме Лагранжа, т.е. верно ли, что если $f(x)$ дифференцируема на интервале I, то

$$\forall\,\xi \in I \to \exists\, x_1, x_2 \in I :$$
$$(x_1 < \xi < x_2) \wedge (f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1))?$$

4.11. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\frac{1}{x}\,, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

имеет непрерывную производную на $(-\infty; +\infty)$, но не имеет второй производной в точке $x = 0$.

4.12. Разложить по формуле Маклорена:

а) $f(x) = \operatorname{th} x$ до $o(x^6)$;

б) $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ до $o(x^5)$;

в) $f(x) = e^{\sin x}$ до $o(x^4)$;

г) $f(x) = e^{\cos x}$ до $o(x^4)$;

д) $f(x) = \sin(x + 3)$ до $o(x^3)$;

е) $f(x) = \operatorname{arctg}(1 + x)$ до $o(x^3)$.

4.13. Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x)$ до $o(x - x_0)^n$, $x \to x_0$:

а) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 2$;

б) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 6x + 8}$, $x_0 = 1$;

в) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, $x_0 = 0$;

г) $f(x) = e^{x^2+6x+10}$, $x_0 = -3$.

4.14. Разложить по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа функцию $f(x) = e^{x-2}$ до $r_4(f, x)$; $x_0 = 1$.

4.15. Сколько конечных производных имеет в точке $x_0 = 0$ функция

а) $f(x) = |x^3|$;

б) $f(x) = \begin{cases} x - \sin x, & \text{если } x \geqslant 0; \\ \operatorname{sh} x - x, & \text{если } x < 0; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} x^{5/2}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \leqslant 0; \end{cases}$

г) $f(x) = \begin{cases} x^4 \sin\frac{1}{x}\,, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$

д) $f(x) = \begin{cases} x^{100}, & \text{если } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q}; \end{cases}$

е) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 1, & \text{если } x = 0? \end{cases}$

4.16. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^n)$, $x \to 0$, где n — максимально возможное натуральное число, все функции из упражнения 4.15.

4.17. Вычислить $f^{(n)}(x)$ для функций:

а) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 5}{x^2 - 3x + 2}$;

б) $f(x) = \ln \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$;

в) $f(x) = x^2 \cos^2 \dfrac{x}{5}$;

г) $f(x) = (3x^2 - 4x + 1) \cdot 3^{3x} \cdot 5^x$;

д) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1 + 3x}}$;

е) $f(x) = e^x \sin x$.

4.18. Доказать, что если функция f имеет n конечных производных на интервале $(a; b)$ и обращается на нём в нуль в $n + 1$ точке, то найдётся точка $\xi \in (a; b)$ такая, что $f^{(n)}(\xi) = 0$.

4.19. Доказать, что если функция f дифференцируема и неограничена на конечном интервале $(a; b)$, то производная f' также неограничена на $(a; b)$.

4.20. Доказать, что если функция f дифференцируема на отрезке $[1; 2]$, то существует точка $\xi \in (1; 2)$ такая, что $f(2) - f(1) = \dfrac{\xi^2}{2} f'(\xi)$.

4.21. Доказать, что если функция f дифференцируема на луче $(a; +\infty)$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$, то $f(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$. Верно ли обратное утверждение?

4.22. Применяя формулу Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа, вычислить число e с точностью до 10^{-7}. Почему для этой цели нельзя применить остаточный член в форме Пеано?

ГЛАВА V. **ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ В РАЗЛИЧНЫХ ВОПРОСАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА**

§ 1. Раскрытие неопределённостей при помощи формулы Тейлора

Определение 5.1. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$ и при $x \to x_0 + 0$

$$f(x) \sim C(x - x_0)^p, \quad \text{где} \quad p \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0.$$

Тогда функция $C(x - x_0)^p$ называется главной частью степенного вида функции f при $x \to x_0 + 0$, а число p — порядком функции f при $x \to x_0 + 0$. Если $p \in \mathbb{Z}$, то аналогично определяются главная часть степенного вида и порядок функции f при $x \to x_0$ и при $x \to x_0 - 0$.

Пример 5.1. 1) Так как $\sin x \sim x$, $\ln(1 + x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$, то функции $\sin x$, $\ln(1 + x)$, $e^x - 1$ имеют порядок 1 при $x \to 0$.

2) $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \to 0$, поэтому функция $1 - \cos x$ имеет порядок 2 при $x \to 0$.

3) $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \sim \frac{1}{x}$ при $x \to 0$, поэтому функция $\operatorname{ctg} x$ имеет порядок -1 при $x \to 0$.

4) $\lim\limits_{x \to +0} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\lim\limits_{x \to +0} \frac{\sin x}{x}} = 1$ (в силу непрерывности справа функции $\sqrt{x}$ в точке 0). Поэтому функция $\sqrt{\sin x}$ имеет порядок $\frac{1}{2}$ при $x \to +0$.

Если при $x \to x_0 + 0$

$$f(x) \sim C_1(x - x_0)^p, \quad g(x) \sim C_2(x - x_0)^q,$$

где $p, q \in \mathbb{R}$, $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$, то по теореме 3.22

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{C_1(x - x_0)^p}{C_2(x - x_0)^q} =$$

$$= \frac{C_1}{C_2} \lim_{x \to x_0 + 0} (x - x_0)^{p-q} = \begin{cases} 0, & \text{если } p > q; \\ \dfrac{C_1}{C_2}, & \text{если } p = q; \\ \infty, & \text{если } p < q. \end{cases}$$

Если $p, q \in \mathbb{Z}$, то аналогичный результат имеет место при $x \to$ $\to x_0$ и $x \to x_0 - 0$.

Приведём примеры раскрытия неопределённостей типа $\frac{0}{0}$ и 1^∞ при помощи выделения главной части степенного вида с образцами оформления решения.

Пример 5.2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \arcsin x}{e^{\sin x} - 1 + \ln(1-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{-\frac{x^3}{3} + o(x^3)} = -\frac{1}{2}\,.$$

$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$; $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$;
числитель $= \frac{x^3}{6} + o(x^3)$;
$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$; $e^{\sin x} = e^{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) +$ $+ \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3) = 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} +$ $+ o(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$;
$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$; знаменатель $= -\frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

При написании разложения сложной функции $e^{\sin x}$ нужно заранее определить, до какого порядка нужно раскладывать внешнюю функцию. Так как разложение сложной функции нужно до $o(x^3)$, а внутренняя функция $\sin x$ имеет порядок 1 по x, то разложение внешней функции e^u нужно брать до $o(u^3)$. Дать универсальный рецепт, до какого порядка нужно сразу раскладывать данные функции, нельзя. В настоящем примере сразу видно, что разложения $\operatorname{tg} x$ и $\arcsin x$ начинают различаться на члене 3-й степени, поэтому числитель нужно раскладывать до $o(x^3)$. Значит, до такого порядка нужно пытаться раскладывать и знаменатель. В более сложных примерах нужно начинать действовать наугад, возможно, попытку придётся повторить с другим порядком. Большое значение при этом имеют опыт и интуиция.

Пример 5.3.

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{e}\,(1+x)^{1/x} + \frac{2x}{4+5x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1}{e}(1+x)^{1/x}+\frac{2x}{4+5x}\right)}{\operatorname{tg}^2 x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{6}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}} = e^{-\frac{1}{6}}$$

(при раскрытии неопределённостей типа 1^∞ нужно применить преобразование $(u(x))^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$ и воспользоваться теоремой 3.8 о переходе к пределу под знаком непрерывной функции).

$\operatorname{tg}^2 x \sim x^2$; знаменатель $= x^2 + o(x^2)$;

$\dfrac{2x}{4+5x} = \frac{2x}{4}\left(1+\frac{5}{4}x\right)^{-1} = \frac{x}{2}\left(1-\frac{5}{4}x+o(x)\right) = \frac{x}{2}-\frac{5}{8}x^2+o(x^2)$;

$$(1+x)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^{\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)} = e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)} =$$

$$= e\cdot e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}; \quad e^u = 1+u+\frac{1}{2}u^2+o(u^2);$$

$$(1+x)^{1/x} = e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)^2+o(x^2)\right) =$$

$$= e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{8}+o(x^2)\right) = e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{11}{24}x^2+o(x^2)\right);$$

$$\text{числитель } = \ln\left(1-\frac{x}{2}+\frac{11}{24}x^2+\frac{x}{2}-\frac{5}{8}x^2+o(x^2)\right) =$$

$$= \ln\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{6}+o(x^2).$$

Так как разложение $\ln(1+x)$ не имеет свободного члена и делится в дальнейшем на x, то при написании разложения сложной функции $e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$ до $o(x^2)$ разложение функции $\ln(1+x)$ нужно взять с запасом на 1, т.е. до $o(x^3)$.

Определение 5.2. Пусть при $x \to +\infty$ $f(x) \sim Cx^p$, где $p \in \mathbb{R}$, $C \neq 0$. Тогда функция Cx^p называется главной частью степенного вида функции f при $x \to +\infty$, а число p — порядком функции f при $x \to +\infty$. Если $p \in \mathbb{Z}$, то аналогично определяются главная часть степенного вида и порядок функции f при $x \to \infty$ и при $x \to -\infty$.

Пример 5.4. 1) $\sqrt{x^4+1} \sim x^2$ при $x \to \infty$, поэтому функция $\sqrt{x^4+1}$ имеет порядок 2 при $x \to \infty$.

2) $\sqrt{x^2+1} \sim x$ при $x \to +\infty$, $\sqrt{x^2+1} \sim -x$ при $x \to -\infty$. Поэтому функция $\sqrt{x^2+1}$ имеет порядок 1 при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

3) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ при $x \to +\infty$. Поэтому функция $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ имеет порядок $\left(-\frac{1}{2}\right)$ при $x \to \to +\infty$.

Для вычисления главной части степенного вида при $x \to \to \infty$ часто бывает удобно применить разложение по формуле Тейлора по степеням $\dfrac{1}{x}$.

Если при $x \to +\infty$

$$f(x) \sim C_1 x^p, \quad g(x) \sim C_2 x^q, \quad \text{где} \quad p, q \in \mathbb{R}, \quad C_1 \neq 0,\ C_2 \neq 0,$$

то по теореме 3.22

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{C_1 x^p}{C_2 x^q} = \frac{C_1}{C_2} \lim_{x \to +\infty} x^{p-q} = \begin{cases} 0, & \text{если } p < q; \\ \dfrac{C_1}{C_2}, & \text{если } p = q; \\ \infty, & \text{если } p > q. \end{cases}$$

Если $p, q \in \mathbb{Z}$, то аналогичный результат имеет место при $x \to \to \infty$ и $x \to -\infty$.

§ 2. Раскрытие неопределённостей по правилам Лопиталя

Теорема 5.1 (первое правило Лопиталя для раскрытия неопределённости $\mathbf{\frac{0}{0}}$). *Пусть функции f и g дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности α, где α — один из 6 СПС, причём $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = 0$. Тогда если $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$, где β — один из 6 СПС, то также $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \beta$.*

$\square$ Отметим, что функция $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ определена в некоторой проколотой окрестности α, следовательно, $g'(x) \neq 0$ в этой проколотой окрестности α. Докажем сначала теорему для случая $\alpha = a$, $a \in \mathbb{R}$. Доопределим $f(a) = g(a) = 0$. Тогда функции f

и g дифференцируемы в $\mathring{U}_\delta(a)$ и непрерывны в $U_\delta(a)$. Для любых $x > a$ таких, что $g'(x) \neq 0$ на $(a; x)$, по теореме Коши 4.13 имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \text{где} \quad \xi = \xi(x).$$

Так как $a < \xi(x) < x$, то по теореме 3.4 $\lim\limits_{x\to a+0} \xi(x) = a + 0$. По теореме 3.5 $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{u\to a+0} \dfrac{f'(u)}{g'(u)} = \beta$. Аналогично, $\lim\limits_{x\to a-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \beta$, и для $\alpha = a \in \mathbb{R}$ теорема доказана.

Для $\alpha = a + 0$ и $\alpha = a - 0$ доказательство аналогично.

Пусть теперь $\alpha = \infty$. Так как $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$, то по теореме 3.5 после замены $x = \frac{1}{t}$ имеем: $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \beta$. Тогда после замены $x = \frac{1}{t}$ получим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right)'} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \beta$$

(здесь мы применили теорему 5.1 для уже разобранного случая $t \to a$, где $a = 0$). Для $\alpha = +\infty$ и $\alpha = -\infty$ доказательство аналогично. ■

Теорема 5.2 (второе правило Лопиталя для раскрытия неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$). *Пусть функции f и g дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности α, где α — один из 6 СПС, причём $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \infty$. Тогда если $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$, где β — один из 6 СПС, то также $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \beta$.*

Доказательство второго правила Лопиталя значительно сложнее, чем первого, так как невозможно применить теорему

Коши на отрезке $[a; x]$. Приходится вместо α рассматривать некоторую переменную точку. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 5.1. *Пусть* $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \infty$, *где* α *— один из 6 СПС. Тогда для всех* x *из некоторой проколотой окрестности* α *определена функция* $\varphi(x)$ *такая, что* $\lim\limits_{x\to\alpha} \varphi(x) = \alpha$, *и при этом* $f(\varphi(x)) = o(f(x))$, $g(\varphi(x)) = o(g(x))$, $x \to \alpha$.

$\square$ Пусть сначала $\alpha = a$, $a \in \mathbb{R}$. Так как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(a) = \infty$, то найдётся $\delta_1 \in (0; 1)$ такое, что $|f(x)| > 1$ и $|g(x)| > 1$ при $x \in \mathring{U}_{\delta_1}(a)$. При этом $f(a \pm \delta_1) \neq 0$, $g(a \pm \delta_1) \neq 0$.

Далее, $\exists\, \delta_2 > 0$, $\delta_2 < \min\left(\delta_1; \frac{1}{2}\right)$ такое, что $\forall\, x \in \mathring{U}_{\delta_2}(a)$
$$\left|\frac{f(x)}{f(a \pm \delta_1)}\right| > 1, \quad \left|\frac{g(x)}{g(a \pm \delta_1)}\right| > 1 \quad \text{(для обоих знаков } \pm).$$
Аналогично, $\exists\, \delta_3 > 0$, $\delta_3 < \min\left(\delta_2; \frac{1}{3}\right)$ такое, что $\forall\, x \in \mathring{U}_{\delta_3}(a)$
$$\left|\frac{f(x)}{f(a \pm \delta_2)}\right| > 2, \quad \left|\frac{g(x)}{g(a \pm \delta_2)}\right| > 2.$$
Строим таким образом последовательность δ_n, $n = 1, 2, \ldots$ такую, что $\delta_{n+1} < \min\left(\delta_n, \frac{1}{n+1}\right)$ и при всех $x \in \mathring{U}_{\delta_{n+1}}(a)$
$$\left|\frac{f(x)}{f(a \pm \delta_n)}\right| > n, \quad \left|\frac{g(x)}{g(a \pm \delta_n)}\right| > n. \tag{5.1}$$
Ясно, что последовательность δ_n строго убывает, и $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$ (так как $0 < \delta_n < \frac{1}{n}$ при всех n). Для любого $x \in \mathring{U}_{\delta_2}(a)$ найдётся единственное натуральное число $n = n(x)$ такое, что $\delta_{n+2} \leqslant |x - a| < \delta_{n+1}$ (см. рис. 5.1). Пусть $\varphi(x) = a \pm \delta_{n(x)}$ (знак $+$, если $x > a$; знак $-$, если $x < a$). Ясно, что функция $n(x)$ положительна, нестрого убывает на $(a; a + \delta_2)$ и нестрого возрастает на $(a - \delta_2; a)$.

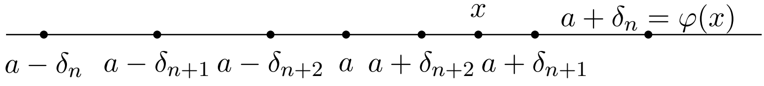

Рис. 5.1

Так как функция $n(x)$ неограничена на $(a; a+\delta_2)$ и на $(a-$ $-\delta_2; a)$, то $\lim\limits_{x\to a+0} n(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to a-0} n(x) = +\infty$ (по теореме 3.9 о пределах монотонных функций). При всех $x \in \mathring{U}_{\delta_{n+1}}(a)$ из (5.1) следует, что

$$\left|\frac{f(\varphi(x))}{f(x)}\right| < \frac{1}{n(x)}, \quad \left|\frac{g(\varphi(x))}{g(x)}\right| < \frac{1}{n(x)},$$

поэтому $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(\varphi(x))}{f(x)} = 0$, т.е. $f(\varphi(x)) = o(f(x))$ при $x \to a$. Аналогично, $g(\varphi(x)) = o(g(x))$ при $x \to a$. Наконец, так как $0 < \delta_{n(x)} < \dfrac{1}{n(x)}$, то $\lim\limits_{x\to a} \delta_{n(x)} = 0$, значит, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = a$. Лемма доказана для случая $\alpha = a \in \mathbb{R}$. Для $\alpha = a+0$ и $\alpha = a-0$ упрощения в доказательстве очевидны.

Если $\alpha = \infty$, то доказательство аналогично, только $\delta_1 > 1$, $\delta_2 > \max(\delta_1, 2)$, $\delta_3 > \max(\delta_2, 3)$ и т.д., $\delta_{n+1} > \max(\delta_n, n+1)$ при всех $n = 1, 2, \ldots$ Последовательность δ_n строго возрастает и $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = +\infty$ (так как $\delta_n > n$ при всех n). Неравенство (5.1) примет вид

$$\left|\frac{f(x)}{f(\pm\delta_n)}\right| > n, \quad \left|\frac{g(x)}{g(\pm\delta_n)}\right| > n \quad \text{при} \quad |x| > \delta_{n+1}.$$

Функция $n(x)$ определяется так: $\delta_{n+1} < |x| \leqslant \delta_{n+2}$, $\varphi(x) =$ $= \pm\delta_{n(x)}$ (знак $+$, если $x > 0$; знак $-$, если $x < 0$) (см. рис. 5.2).

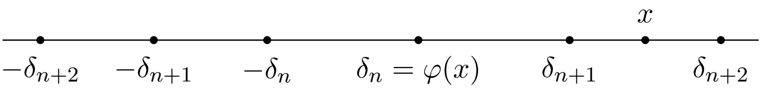

Рис. 5.2

Упрощения в доказательстве при $\alpha = +\infty$ и $\alpha = -\infty$ очевидны. ■

Доказательство теоремы 5.2.

□ Определим $\varphi(x)$, как в лемме 5.1. Так как $f(\varphi(x)) = o(f(x))$ при $x \to \alpha$, то $f(x) - f(\varphi(x)) \sim f(x)$; аналогично $g(x) -$ $- g(\varphi(x)) \sim g(x)$. Тогда по теореме 3.22

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x) - f(\varphi(x))}{g(x) - g(\varphi(x))}.$$

Функция $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ определена в некоторой проколотой окрестности α, следовательно, $g'(x) \neq 0$ в этой проколотой окрестности α. Применим к функциям f и g теорему Коши 4.13 на отрезке $[\varphi(x); x]$ (или на $[x; \varphi(x)]$, смотря что больше):

$$\frac{f(x) - f(\varphi(x))}{g(x) - g(\varphi(x))} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \text{где} \quad \xi = \xi(x), \quad \varphi(x) < \xi(x) < x.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\alpha} \varphi(x) = \alpha$, то по теореме 3.4 (или её аналогу лемме 3.2 в случае бесконечного символа α) $\lim\limits_{x\to\alpha} \xi(x) = \alpha$. Тогда по теореме 3.5

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim_{u\to\alpha} \frac{f'(u)}{g'(u)} = \beta. \qquad \blacksquare$$

Пример 5.5. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty$, если $a > 1$, $p \in \mathbb{R}$.

$\square$ Если $p \leqslant 0$, то утверждение очевидно (при $p < 0$ — произведение двух бесконечно больших положительных функций). При $p > 0$ имеем неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$. Достаточно доказать утверждение для $p = k \in \mathbb{N}$, так как если для $p = k \in \mathbb{N}$ утверждение доказано, то для любого $p > 0$ при $x > 1$ выполняется неравенство

$$\frac{a^x}{x^p} > \frac{a^x}{x^{[p]+1}},$$

и по лемме 3.2 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty$.

При $p = k$ применим k раз правило Лопиталя. По теореме 5.2

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^k} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x \cdot \ln a}{kx^{k-1}} = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x (\ln a)^k}{k!} = +\infty$$

(после 1-го, 2-го, $\ldots$, $k-1$ шага остаётся неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$, и мы продолжаем применять правило Лопиталя. После k-го шага неопределённость исчезает, и доказательство завершено).

$\blacksquare$

Пример 5.6. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = 0$, если $\varepsilon > 0$.

$\square$ Это — неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$. По теореме 5.2

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\varepsilon x^{\varepsilon-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\varepsilon x^\varepsilon} = 0. \qquad \blacksquare$$

Неопределённости других типов можно сводить к неопределённостям $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, после чего применять правило Лопиталя.

Пример 5.7. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+0} x^\varepsilon \ln x = 0$, если $\varepsilon > 0$.

$\square$ Это — неопределённость $0 \cdot \infty$. Преобразуем выражение к виду $\frac{\ln x}{x^{-\varepsilon}}$, получим неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$. По теореме 5.2

$$\lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{x^{-\varepsilon}} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\varepsilon x^{-\varepsilon-1}} = -\frac{1}{\varepsilon} \lim_{x\to+0} x^\varepsilon = 0. \qquad \blacksquare$$

Пример 5.7 можно вывести из примера 5.6 заменой $x = \frac{1}{t}$.

Пример 5.8. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+0} x^x = 1$.

$\square$ Это — неопределённость 0^0. Преобразуем выражение к виду $e^{x\ln x}$, предел показателя уже найден в примере 5.7. По теореме 3.8

$$\lim_{x\to+0} x^x = e^{\lim\limits_{x\to+0} x\ln x} = e^0 = 1. \qquad \blacksquare$$

Пример 5.9. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)^x$.

$\square$ Это — неопределённость 1^∞. По теореме 3.8 предел равен $e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)}$. В показателе — неопределённость $\infty \cdot 0$; выражение в показателе преобразуем к виду $\dfrac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)}{x^{-1}}$, что даёт неопределённость $\frac{0}{0}$. По теореме 5.1

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)}{x^{-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}}{-x^{-2}} =$$
$$= -\frac{2}{\pi} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = -\frac{2}{\pi}.$$

Искомый предел равен $e^{-2/\pi}$. ■

Необходимо сделать предостережения о неверном применении правил Лопиталя.

Пример 5.10. Если формально применить правило Лопиталя, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{1+x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1}=1$. В то же время очевидно, что данный предел равен 0. Ошибка состоит в том, что правило Лопиталя применяется к неопределённостям $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$; если неопределённостей нет, то эти правила применять нельзя.

Пример 5.11. Легко видеть, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)=1$. В то же время это — неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$, и по теореме 5.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}$ — не существует. Дело в том, что правило Лопиталя даёт лишь достаточные условия существования $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, оно работает «в одну сторону». Если $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ не существует, ни конечный, ни бесконечный, то о существовании $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ничего сказать нельзя.

§ 3. Доказательство неравенств

Теорема 5.3. *Пусть функции f и g непрерывны на $[a;b)$, где b — конечно или $+\infty$, и дифференцируемы на $(a;b)$, причём $f(a)=g(a)$, а $f'(x)>g'(x)$ при всех $x\in(a;b)$. Тогда $f(x)>$ $>g(x)$ при всех $x\in(a;b)$.*

□ Рассмотрим функцию $\varphi(x)=f(x)-g(x)$; она непрерывна на $[a;b)$ и дифференцируема на $(a;b)$, $\varphi(a)=0$, а $\varphi'(x)>0$ при всех $x\in(a;b)$. Тогда при всех $x\in(a;b)$ по теореме Лагранжа $\varphi(x)=\varphi(x)-\varphi(a)=\varphi'(\xi)(x-a)>0$, так как $\xi\in(a;x)$ и $\varphi'(\xi)>0$, и $x>a$. Значит, при всех $x\in(a;b)$ выполняется неравенство $f(x)>g(x)$. ■

Пример 5.12. Доказать, что при всех $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ имеет место неравенство $\operatorname{tg}x>x+\frac{x^3}{3}$.

□ Рассмотрим функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ и $g(x) = x + \frac{x^3}{3}$ на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Ясно, что $f(0) = g(0)$. Далее, неравенство $f'(x) > g'(x)$, т.е. $\dfrac{1}{\cos^2 x} > 1 + x^2$, равносильно $\operatorname{tg}^2 x > x^2$. При $0 < x < \frac{\pi}{2}$ имеет место неравенство $\operatorname{tg} x > x > 0$. Значит, $f'(x) > g'(x)$. По теореме 5.3 $f(x) > g(x)$ при всех $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. ■

Пример 5.13. Доказать, что при всех $x \neq 0$ имеет место неравенство $e^x > 1 + x$.

□ Рассмотрим функции $f(x) = e^x$ и $g(x) = 1 + x$ при $x > 0$. Ясно, что $f(0) = g(0)$. Неравенство $f'(x) > g'(x)$, т.е. $e^x > 1$, выполняется при $x > 0$. По теореме 5.3 $e^x > 1 + x$ при всех $x > 0$.

Слева от точки a теорема 5.3 не выполняется. Поэтому при $x < 0$ сделаем замену $t = -x$. Нужно доказать, что при $t > 0$ имеет место неравенство $e^{-t} > 1 - t$. Рассмотрим функции $f(t) = e^{-t}$ и $g(t) = 1 - t$. Ясно, что $f(0) = g(0)$. Неравенство $f'(t) > g'(t)$, т.е. $-e^{-t} > -1$, равносильно $e^{-t} < 1$; оно выполняется при всех $t > 0$. По теореме 5.3 $e^{-t} > 1-t$ при всех $t > 0$, что равносильно нужному неравенству при $x < 0$. ■

Следствие. *Логарифмируя неравенство $1 + x < e^x$, справедливое при всех $x \neq 0$, получим*

$$\ln(1 + x) < x, \quad \textit{если} \quad x > -1, \quad x \neq 0$$

(пришлось учесть область определения функции $\ln(1 + x)$).

§ 4. Исследование монотонности и точек экстремума

Теорема 5.4 (необходимые условия монотонности). *Пусть функция f дифференцируема на интервале $(a; b)$, конечном или бесконечном. Тогда если $f(x)$ возрастает на $(a; b)$, то $f'(x) \geqslant 0$ на $(a; b)$; если $f(x)$ убывает на $(a; b)$, то $f'(x) \leqslant 0$ на $(a; b)$ (монотонность, вообще говоря, нестрогая).*

□ Пусть функция f возрастает на $(a; b)$ (для убывающей функции доказательство аналогично). В произвольной точке

$x_0 \in (a;b)$

$$f'_+(x_0) = \lim_{t \to +0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t} \geqslant 0,$$

так как $f(x_0+t) \geqslant f(x_0)$ при $t > 0$. Значит, $f'(x_0) = f'_+(x_0) \geqslant 0$. ■

З а м е ч а н и е. Если функция строго возрастает (убывает), то её производная не обязана быть строго положительной (отрицательной) во всех точках $(a;b)$. Например, функция $f(x) = x^3$ строго возрастает на $(-\infty;+\infty)$, а $f'(x) = 3x^2 = 0$ при $x = 0$.

Теорема 5.5 (достаточные условия монотонности). *Пусть функция f непрерывна на промежутке I и дифференцируема во всех внутренних точках I. Тогда если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) во всех внутренних точках I, то функция f строго возрастает (соответственно строго убывает) на I. Если $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$) во всех внутренних точках I, то функция f нестрого возрастает (соответственно нестрого убывает) на I.*

□ Пусть $x_1 < x_2$; $x_1, x_2 \in I$. Тогда по теореме Лагранжа $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, где $\xi \in (x_1;x_2)$. Если $f'(x) > 0$ во всех внутренних точках I, то $f(x_2) > f(x_1)$. Так как точки x_1, x_2 — любые такие, что $x_1 < x_2$, то функция строго возрастает на I. Аналогично доказываются остальные утверждения. ■

Необходимое условие для точки локального экстремума даёт теорема Ферма 4.11 (если в точке локального экстремума существует производная, то она равна 0). Там же отмечалось, что это условие не является достаточным, а также то, что в точке локального экстремума производная может не существовать.

Теорема 5.6 (достаточные условия локального экстремума). *Пусть существует $\delta > 0$ такое, что функция f непрерывна в $U_\delta(x_0)$ и дифференцируема в $\mathring{U}_\delta(x_0)$, причём:*

1) $f'(x) > 0$ *при* $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ *и* $f'(x) < 0$ *при* $x \in (x_0; x_0 + \delta)$;
2) $f'(x) < 0$ *при* $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ *и* $f'(x) > 0$ *при* $x \in (x_0; x_0 + \delta)$;
3) $f'(x) > 0$ *в* $\mathring{U}_\delta(x_0)$ *или* $f'(x) < 0$ *в* $\mathring{U}_\delta(x_0)$.

Тогда в случае 1) *точка* x_0 — *точка строгого локального максимума, в случае* 2) *точка* x_0 — *точка строгого локального минимума, а в случае* 3) *точка* x_0 *не является точкой локального экстремума.*

□ 1) По теореме 5.5 функция f строго возрастает на $(x_0 - \delta; x_0]$ и строго убывает на $[x_0; x_0+\delta)$. Тогда $f(x) < f(x_0)$ при $x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$, т.е. x_0 — точка строгого локального максимума.

2) Доказательство аналогично.

3) Аналогично случаю 1), при $f'(x) > 0$ функция f строго возрастает на $(x_0 - \delta; x_0]$ и на $[x_0; x_0 + \delta)$. Значит, $f(x) < f(x_0)$ при $x < x_0$ и $f(x) > f(x_0)$ при $x > x_0$, т.е. в точке x_0 нет локального экстремума. Аналогично разбирается случай $f'(x) < 0$. ■

Таким образом, при исследовании точек локального экстремума нужно найти «критические точки», где $f'(x) = 0$ или не существует, и исследовать знак $f'(x)$ на интервалах между этими точками.

Пример 5.14. Исследуем на точки локального экстремума функцию $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$.

Имеем: $f'(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x = (x^2 - 1)(x^2 - x) = x(x - 1)^2(x + 1)$. Производная обращается в нуль в точках $x = 0$, 1, -1. Изобразим схему знаков f' на интервалах между этими точками (см. рис. 5.3).

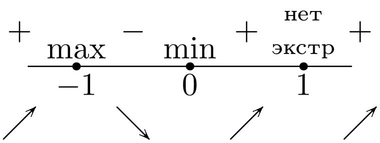

Рис. 5.3

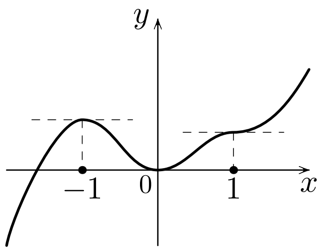

Рис. 5.4

Вычислив значения функции в этих точках ($f(0) = 0$, $f(1) = \frac{7}{60}$, $f(-1) = \frac{23}{60}$), мы можем построить график функции $y = f(x)$ с точностью до интервалов монотонности и точек локального экстремума (см. рис. 5.4). Обращаем внимание на то, что в точке $x = 1$ график имеет горизонтальную касательную (хотя локального экстремума нет).

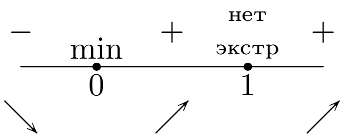

Рис. 5.5

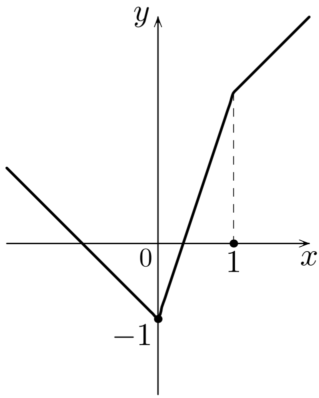

Рис. 5.6

Пример 5.15. Исследуем на точки локального экстремума функцию $f(x) = 2|x| - |x - 1|$.

Так как $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{если } x \geqslant 1; \\ 3x - 1, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ -x - 1, & \text{если } x \leqslant 0, \end{cases}$ то $f'(x) =$

$$= \begin{cases} 1, & \text{если } x > 1; \\ 3, & \text{если } 0 < x < 1; \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Производная не существует в точках $x = 0$ и $x = 1$, в нуль нигде не обращается. Изобразим схему знаков f' на интервалах между этими точками (см. рис. 5.5).

Вычислив значения функции в этих точках ($f(0) = -1$, $f(1) = 2$), мы можем построить график функции $y = f(x)$ с точностью до интервалов монотонности и точек экстремума (см. рис. 5.6). Конечно же, график функции $f(x) = 2|x| - |x - 1|$ естественно строится и без применения производной.

З а м е ч а н и е 1. В теореме 5.6 требование непрерывности функции в точке x_0 существенно. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \neq 0; \\ 1, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

имеет локальный максимум в точке $x = 0$, хотя по схеме знаков f' должен был бы быть локальный минимум (график функции изображён на рис. 5.7).

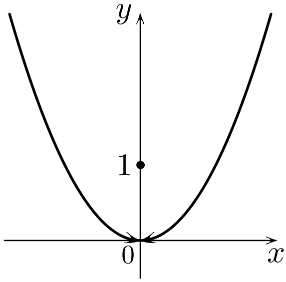

Рис. 5.7

З а м е ч а н и е 2. Обращаем внимание на то, что необходимые условия монотонности и точек локального экстремума (теоремы 5.4 и 4.11) доказываются с использованием определения производной, достаточные (теоремы 5.5 и 5.6) — при помощи теоремы Лагранжа.

При исследовании достаточных условий точки локального экстремума можно применять производные высших порядков.

Теорема 5.7. *Пусть* $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \in \mathbb{R}$, $f''(x_0) \neq 0$. *Тогда*

1) *если* $f''(x_0) > 0$, *то* x_0 *— точка строгого локального минимума;*
2) *если* $f''(x_0) < 0$, *то* x_0 *— точка строгого локального максимума.*

□ Применим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (так как существует $f''(x_0)$, то можно раскладывать до $o((x-x_0)^2)$).

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \\ + o((x - x_0)^2), \quad x \to x_0.$$

Так как $f'(x_0) = 0$, то $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^2 \left(\frac{f''(x_0)}{2} + \alpha(x)\right)$, где $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$. Поскольку $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f''(x_0)}{2} + \alpha(x)\right) = \frac{f''(x_0)}{2}$, то по лемме о сохранении знака

$$\exists\, \delta > 0 : \quad \forall\, x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \to \operatorname{sign}(f(x) - f(x_0)) = \operatorname{sign} f''(x_0).$$

Таким образом, если $f''(x_0) > 0$, то $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \to f(x) > f(x_0)$, т.е. x_0 — точка строгого локального минимума, если $f''(x_0) < 0$ — точка строгого локального максимума. ■

В случае $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$ теорема 5.7 не даёт ответа на вопрос о наличии и характере экстремума в точке $x = x_0$.

Пример 5.16. Исследуем функцию из примера 5.14 при помощи теоремы 5.7.

Имеем: $f'(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x$ (критические точки $x = 0$, $x = \pm 1$), $f''(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1$. Так как $f''(0) = 1 > 0$, $f''(-1) = -4 < 0$, то $x = 0$ — точка локального минимума, $x = -1$ — точка локального максимума. Так как $f''(1) = 0$, то вопрос о наличии и характере экстремума в точке $x = 1$ является открытым.

Теорема 5.8 (обобщение теоремы 5.7). *Пусть при некотором $n = 2, 3, 4, \ldots$: $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда*

1) *если n чётно, то в случае $f^{(n)}(x_0) > 0$ точка x_0 является точкой строгого локального минимума, а в случае $f^{(n)}(x_0) < 0$ точка x_0 является точкой строгого локального максимума;*
2) *если n нечётно, то точка x_0 не является точкой локального экстремума.*

□ Применим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (разложение до $o((x - x_0)^n)$):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \\ + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \\ + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0.$$

Так как $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, то

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x) \right),$$

где $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Поскольку $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x) \right) = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, то по лемме о сохранении знака при чётном n

$$\exists\, \delta > 0 : \quad \forall\, x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \to \operatorname{sign}(f(x) - f(x_0)) = \operatorname{sign} f^{(n)}(x_0),$$

и доказательство завершается как в теореме 5.7. Пусть теперь n нечётно. Рассмотрим для определённости случай $f^{(n)}(x_0) > > 0$. Тогда

$$\exists\, \delta > 0 : \quad \forall\, x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \to \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x) > 0,$$

и, следовательно,

$$\operatorname{sign}(f(x) - f(x_0)) = \operatorname{sign}(x - x_0).$$

Поэтому точка x_0 не может быть точкой локального экстремума. ■

Пример 5.17. Исследуем наличие экстремума в точке $x = = 1$ для функции из примеров 5.14 и 5.16 при помощи теоремы 5.8.

Так как $f'(1) = f''(1) = 0$, то рассмотрим производные высших порядков. Имеем: $f'''(x) = 12x^2 - 6x - 2$, $f'''(1) = = 4 \neq 0$. Значит, точка $x = 1$ не является точкой локального экстремума.

§ 5. Выпуклость и точки перегиба

Определение 5.3. Функция f называется строго выпуклой вверх на промежутке I, если для всех $x_1, x_2 \in I$ таких, что $x_1 \neq x_2$, выполняется неравенство $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$. Функция f называется строго выпуклой вниз на промежутке I, если для всех $x_1, x_2 \in I$ таких, что $x_1 \neq x_2$, выполняется неравенство $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$. Если соответствующие неравенства нестрогие, то можно говорить о нестрогой выпуклости вверх или вниз.

Функция, график которой изображён на рис. 5.8, выпукла вверх, а на рис. 5.9 — выпукла вниз.

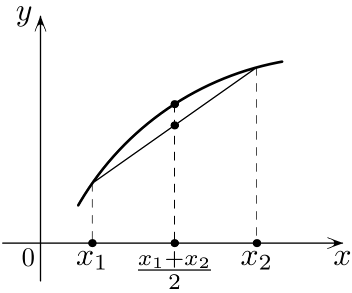

Рис. 5.8

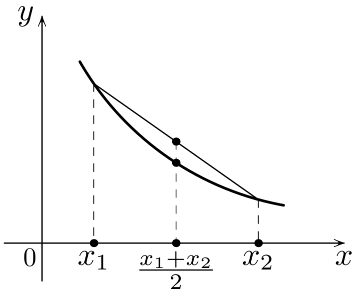

Рис. 5.9

Определение 5.4. Точка x_0 называется точкой перегиба функции f, если существует $f'(x_0)$ (конечная, $+\infty$ или $-\infty$) и при некотором $\delta > 0$ на $(x_0 - \delta; x_0)$ функция выпукла вверх, а на $(x_0; x_0 + \delta)$ выпукла вниз (или, наоборот, на $(x_0 - \delta; x_0)$ функция выпукла вниз, а на $(x_0; x_0 + \delta)$ выпукла вверх).

З а м е ч а н и е. Можно говорить о точках строгого или нестрогого перегиба в зависимости от того, какая выпуклость рассматривается в определении 5.3.

Лемма 5.2. *Если в точке x_0 существует конечная $f''(x_0)$, то*

$$f''(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2f(x_0)}{t^2}\,. \tag{5.2}$$

☐ Применим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \\ + o((x - x_0)^2), \quad x \to x_0.$$

По теореме 3.5 (сначала делаем замену $x = x_0 + t$, $t \to 0$, затем $x = x_0 - t$, $t \to 0$)

$$f(x_0 + t) = f(x_0) + f'(x_0)t + \frac{f''(x_0)}{2}t^2 + o(t^2), \quad t \to 0.$$

$$f(x_0 - t) = f(x_0) - f'(x_0)t + \frac{f''(x_0)}{2}t^2 + o(t^2), \quad t \to 0.$$

Складывая последние два равенства, получим

$$f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2f(x_0) = f''(x_0)t^2 + o(t^2), \quad t \to 0,$$

откуда следует утверждение леммы. ■

З а м е ч а н и е. Равенство (5.2) не может служить определением второй производной, так как предел может существовать для функций, не имеющих второй производной в точке x_0. Например, для любой нечётной функции в точке $x_0 = 0$ такой предел равен 0.

Теорема 5.9 (необходимые условия выпуклости). *Если функция f выпукла (вообще говоря, нестрого) вверх (вниз) на интервале I, конечном или бесконечном, причём на этом интервале существует конечная $f''(x)$, то для всех $x \in I$ выполняется неравенство $f''(x) \leqslant 0$ (соответственно $f''(x) \geqslant 0$).*

□ Пусть функция f выпукла вверх на I. Тогда для любой точки $x_0 \in I$ и для любого t такого, что $x_0 + t \in I$ и $x_0 - t \in I$, имеем

$$f(x_0) = f\left(\frac{x_0 + t + x_0 - t}{2}\right) \geqslant \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{2},$$

следовательно, $f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2f(x_0) \leqslant 0$. Тогда в силу леммы 5.2

$$f''(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2f(x_0)}{t^2} \leqslant 0.$$

Аналогично проводится доказательство в случае функции, выпуклой вниз. ■

З а м е ч а н и е. Если функция f строго выпукла вверх (вниз) на интервале I, то в некоторых точках I вторая производная f'' может обращаться в нуль. Например, функция $f(x) = x^4$ строго выпукла вниз на $(-\infty; +\infty)$, но $f''(x) = 12x^2$ и $f''(0) = 0$.

Теорема 5.10 (достаточные условия выпуклости). *Пусть функция f непрерывна на промежутке I и во всех внутренних точках I существует конечная $f''(x)$. Тогда если $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) во всех внутренних точках I, то функция f строго выпукла вниз (соответственно строго выпукла вверх) на I. Если $f''(x) \geqslant 0$ ($f''(x) \leqslant 0$) во всех внутренних точках I,* *то функция f нестрого выпукла вниз (соответственно нестрого выпукла вверх) на I.*

$\square$ Пусть x_1 и x_2 — две различные точки из I, для определённости $x_1 < x_2$. Обозначим $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $t = \frac{x_2 - x_1}{2} > 0$. Тогда $x_2 = x_0 + t$, $x_1 = x_0 - t$. Имеем

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} - f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2f(x_0)}{2} =$$
$$= \frac{(f(x_0 + t) - f(x_0)) - (f(x_0) - f(x_0 - t))}{2} =$$
$$= \frac{f'(\xi_2) \cdot t - f'(\xi_1) \cdot t}{2} = \frac{f''(\xi_3) \cdot (\xi_2 - \xi_1)t}{2},$$

где $x_0 < \xi_2 < x_0 + t$, $x_0 - t < \xi_1 < x_0$, $\xi_1 < \xi_3 < \xi_2$ (три раза применена теорема Лагранжа; использовано то, что f' непрерывна во внутренних точках I, так как существует конечная f'').

Если $f''(x) > 0$ во внутренних точках I, то $f''(\xi_3) > 0$. Так как $\xi_2 - \xi_1 > 0$, то $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ и $f(x)$ строго выпукла вниз на I. Аналогично разбираются остальные случаи. $\blacksquare$

Теорема 5.11 (достаточные условия точки перегиба). *Пусть функция f имеет в точке x_0 производную (конечную, $+\infty$ или $-\infty$), а $f''(x)$ конечна в некоторой $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, $\delta > 0$. Тогда*

1) *если $f''(x) > 0$ на $(x_0 - \delta; x_0)$ и $f''(x) < 0$ на $(x_0; x_0 + \delta)$ (или, наоборот, $f''(x) < 0$ на $(x_0 - \delta; x_0)$ и $f''(x) > 0$ на $(x_0; x_0 + \delta)$), то x_0 — точка строгого перегиба функции f;*
2) *если $f''(x) > 0$ в $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ (или $f''(x) < 0$ в $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$), то x_0 не является точкой перегиба функции f.*

$\square$ Доказательство сразу следует из определения 5.4 и теоремы 5.10. $\blacksquare$

Пример 5.18. Исследуем функцию из примеров 5.14, 5.16 и 5.17 на выпуклость и точки перегиба.

Имеем

$$f''(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(4x^2 + x - 1).$$

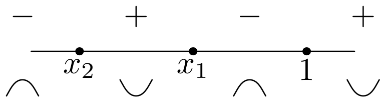

Рис. 5.10

Вторая производная обращается в нуль в точках $x = 1$ и $x = x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}$; $x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{17}}{8} \in (-1; 0)$, $x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{17}}{8} \in (0; 1)$. Изобразим схему знаков f'' на интервалах между этими точками (см. рис. 5.10)

Все три точки являются перегибами. График функции изображён на рис. 5.4. Там ещё до вычисления f'' было видно наличие трёх перегибов, один из которых — точка $x = 1$ (перегиб с горизонтальной касательной). Координаты двух остальных перегибов теперь мы в состоянии вычислить при помощи второй производной.

З а м е ч а н и е 1. В определении 5.4 точки перегиба не требуется непрерывность функции f в точке x_0 (если $f'(x_0)$ конечна, то непрерывность следует из условия, если же $f'(x_0) = +\infty$ или $-\infty$, то непрерывности может и не быть, касательная в этой точке всё равно вертикальна, и по разные стороны от этой касательной график функции имеет разные направления выпуклости; такая функция рассматривается в примере 4.11, график её изображён на рис. 4.5).

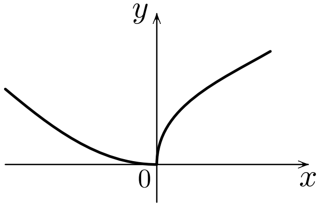

Рис. 5.11

З а м е ч а н и е 2. Разные направления выпуклости слева и справа от точки x_0 ещё не означают наличие точки перегиба даже при условии непрерывности функции f в точке x_0; обязательно наличие $f'(x_0)$, конечной или бесконечной определённого знака.

Функция, график которой изображён на рис. 5.11, не имеет перегиба в точке $x = 0$, хотя она выпукла вверх на $(0; +\infty)$ и выпукла вниз на $(-\infty; 0)$; не существует производной в точке

$x = 0$ (ни конечной, ни бесконечной), и рис. 5.11 явно не соответствует нашим интуитивным представлениям о точке перегиба.

Теорема 5.12. *Пусть на интервале I (конечном или бесконечном) существует конечная $f''(x)$, причём $f''(x) > 0$ во всех точках I ($f''(x) < 0$, $f''(x) \geqslant 0$, $f''(x) \leqslant 0$). Тогда если $l(x)$ — линейная функция, соответствующая уравнению касательной в точке $x_0 \in I$, то для всех $x \in I \setminus \{x_0\}$ выполняется неравенство $f(x) > l(x)$ (соответственно $f(x) < l(x)$, $f(x) \geqslant l(x)$, $f(x) \leqslant l(x)$), т.е. график функции лежит выше (соответственно ниже, не ниже, не выше) касательной к графику в точке x_0.*

□ Применим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2,$$

где $\xi \in (x_0; x)$ или $\xi \in (x; x_0)$ (смотря, что больше). Так как $l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, то $f(x) - l(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2$. Если $f''(x)$ сохраняет знак на I, то такой же знак имеет разность $f(x) - l(x)$ при $x \in I \setminus \{x_0\}$. ■

З а м е ч а н и е. Из формулировки теоремы 4.19 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа) явно следует лишь то, что полученное равенство верно в любой $U_\delta(x_0) \subset I$. Но фактически теорема 4.19 доказывалась отдельно для правой и левой окрестности точки x_0, и равенство верно для всех $x \in I$.

§ 6. Построение графиков функций

При построении графиков функций нас в первую очередь будут интересовать промежутки монотонности и точки локального экстремума, промежутки выпуклости и точки перегиба, поведение функции в окрестностях точек разрыва самой функции и её производной, а также поведение при стремлении аргумента к бесконечности. Значения функции в «обычных» точках, где функция имеет непрерывные и не равные нулю первую и вторую производные, не очень существенны. При необходимости можно вычислить побольше таких значений, но мы этим заниматься не будем. Не будет нас также интересовать и идеальное соблюдение масштаба — нам нужно общее чёткое понятие об изменениях поведения функции. Вот какой общей схемы построения графиков мы будем придерживаться.

1) Найти область определения функции, точки разрыва, точки пересечения графика с осями координат, интервалы знакопостоянства функции. Если функция чётна, нечётна или периодична — отметить это и использовать при построении графика (достаточно построить часть графика, и оставшуюся часть получить при помощи отражения или параллельных переносов).
2) Исследовать асимптоты графика.
3) На основании этих данных построить (пока без нахождения производной) эскиз графика. Производная — это не орудие построения графика, а орудие шлифовки графика, уже построенного предварительно из других соображений.
4) Вычислить y' и y''. Найти критические точки, где y' или y'' обращаются в нуль или не существуют.
5) Построить схемы знаков y' и y'' на интервалах, на которые эти точки разбивают область определения функции. Найти интервалы возрастания и убывания и точки экстремума, интервалы выпуклости вверх и вниз и точки перегиба. Если в точке перегиба касательная вертикальна или горизонтальна — обязательно отметить это.
6) Вычисление значений функции в точках экстремума и перегиба обязательно в случаях, когда это вычисление не слишком сложно. В случае громоздких значений нет необходимости их приближённо вычислять, достаточно грубо указать интервалы, на которых они находятся. Это же относится и к абсциссам нулей функции и критических точек, которые могут не находиться точно. Обязательно находить значения функции и угловые коэффициенты односторонних касательных в точках разрыва y и y'.
7) Окончательно вычертить график.

Необходимо более подробно остановиться на пункте 2) этой схемы.

Определение 5.5. Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ (или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \infty$).

Определение 5.6. Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx - b) = 0$ (или $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx - b) = 0$, или $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - kx - b) = 0$). При $k = 0$ такая прямая $y = b$ называется горизонтальной асимптотой.

Теорема 5.13. *Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ $\iff$ существуют конечные $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ и $b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx)$ (аналогично для случаев $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$).*

□ ($\Rightarrow$) Если $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b) = 0$, то $f(x) = kx+b+\alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0$. Поэтому $\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}$, и $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k$. Равенство

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) \tag{5.3}$$

очевидно из определения наклонной асимптоты.

($\Leftarrow$) Уже из (5.3) очевидно, что $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx - b) = 0$. ■

З а м е ч а н и е. Только из существования конечного $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ ещё не следует наличие асимптоты. Например, для функции $f(x) = \sin x$ имеем $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$; $b = \lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ — не существует.

Приведём пример построения графика по общей схеме.

Пример 5.19. Построить график функции

$$y = (x - 2)e^{-1/x}.$$

□ Функция определена при всех $x \neq 0$, обращается в нуль при $x = 2$.

Интервалы знакопостоянства:

$$f(x) > 0 \quad \text{при} \quad x > 2, \quad f(x) < 0 \quad \text{при} \quad x < 2, \quad x \neq 0.$$

Далее, $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-0} f(x) = -\infty$. Прямая $x = 0$ является левосторонней вертикальной асимптотой. Так как $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, то возможно наличие наклонной асимптоты. Имеем

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) e^{-1/x} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\infty} ((x-2)e^{-1/x} - x) = \\ = \lim_{t\to 0} \left(\left(\frac{1}{t} - 2\right) e^{-t} - \frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{(1-2t)e^{-t} - 1}{t}$$

(здесь мы сделали замену $x = \frac{1}{t}$ и применили теорему 3.5).

В последнем пределе выделим главную часть в числителе при помощи формулы Тейлора:

$$(1-2t)e^{-t} - 1 = (1-2t)(1 - t + o(t)) - 1 = \\ = 1 - 2t - t - 1 + o(t) = -3t + o(t).$$

Отсюда видно, что $b = -3$. График имеет наклонную асимптоту $y = x - 3$ при $x \to \infty$. На основании этих данных можно построить эскиз графика.

Из эскиза видно, что при $x < 0$ имеется локальный максимум, а при $x \in (0; 2)$ — локальный минимум. Возможны ещё и другие интересные точки. Существенных уточнений требует поведение функции при $x \to +0$. Вычислим для выяснения этого y' и y'':

$$y' = \frac{(x+2)(x-1)}{x^2}\, e^{-1/x}, \quad y'' = \frac{5x-2}{x^4}\, e^{-1/x}$$

(выкладки опускаем). Возникли критические точки $x = 1$, $x = -2$, $x = \frac{2}{5}$, а также $x = 0$. Построим схемы знаков y' и y'' на интервалах, на которые эти точки разбивают числовую прямую (см. рис. 5.12):

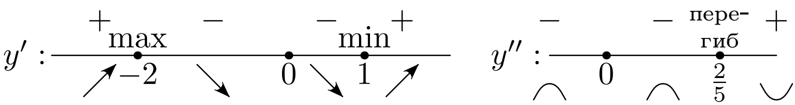

Рис. 5.12

$x = 1$ — локальный минимум $\left(y = -\frac{1}{e}\right)$; $x = -2$ — локальный максимум ($y = -4\sqrt{e}$), $x = \frac{2}{5}$ — перегиб ($y = -\frac{8}{5}\,e^{-5/2}$).

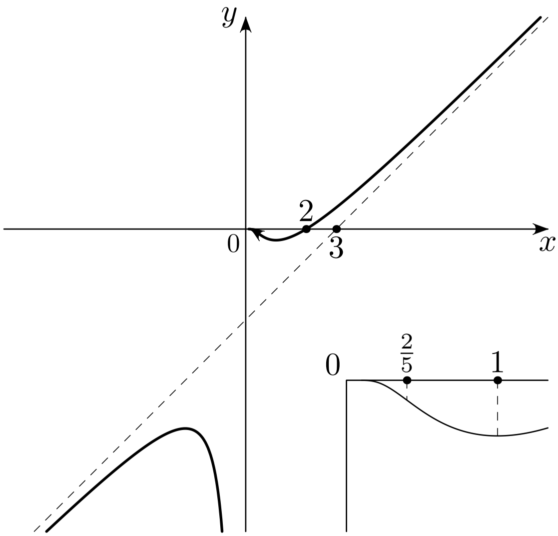

Рис. 5.13

Для исследования поведения функции при $x \to +0$ найдём $\lim\limits_{x\to+0} y'$. Для этого сделаем в соответствующем пределе замену $x = \frac{1}{t}$ и 2 раза применим правило Лопиталя для раскрытия неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to+0} y' = \lim_{x\to+0} \frac{(x+2)(x-1)}{x^2}\,e^{-1/x} = \\ = \lim_{t\to+\infty} t^2\left(\frac{1}{t}+2\right)\left(\frac{1}{t}-1\right)e^{-t} = \\ = \lim_{t\to+\infty} \frac{1+t-2t^2}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1-4t}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{-4}{e^t} = 0.$$

Будем считать, что $y(0) = 0$. В этом случае, по теореме 4.16, существует $y'_+(0) = 0$. График имеет правостороннюю горизонтальную касательную в точке $x = 0$. Этот факт существенно влияет на вид графика. Окончательный график функции изображён на рис. 5.13. Для лучшего представления о ходе графика масштаб не везде соблюдается. Правая окрестность точки $x = 0$ вынесена отдельно крупным планом. ∎

Упражнения к главе V

5.1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch} 3x + \cos 3x - 2}{x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + \ln(1-\sin x) - 1}{\sqrt[3]{8 - x^4} - 2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\ln\cos x + x \operatorname{sh} x}{\sin \frac{x^2}{2} - \operatorname{sh} \frac{x^2}{2}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{1+\operatorname{tg} x} - e^{\sqrt{1+2x}}}{\sin \frac{x^2}{7} - \frac{x}{3}\ln(1-x)}$.

5.2. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sqrt{1+x} - x\right)^{\frac{1}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{\operatorname{arctg} x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\operatorname{sh} x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sh}(x+\sin x)}{\sin x + \arcsin x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

5.3. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2}{\pi} \arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to +0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^{100}}{e^{x^2}}$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\,(\pi - 2\operatorname{arctg} x)$;

д) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+0} \dfrac{\ln\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg} x}$.

5.4. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

имеет в точке $x = 0$ производные всех порядков, равные 0.

5.5. Доказать неравенства:

а) $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$, $x > 0$;

б) $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x)$, $x > 0$;

в) $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$, $x \neq 0$;

г) $\operatorname{arctg} x > x - \dfrac{x^3}{3}$, $x > 0$.

5.6. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(2+\cos\dfrac{1}{x}\right), & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

имеет строгий локальный минимум в точке $x = 0$, но не является возрастающей ни на каком интервале $(0; a)$, где $a > 0$, и не является убывающей ни на каком интервале $(-a; 0)$, где $a > 0$.

5.7. Исследовать функции на локальный экстремум:

а) $f(x) = x^x$;

б) $f(x) = |x^2 - 1| \cdot e^{|x|}$;

в) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \leqslant 0; \\ x \ln x, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

5.8. Исследовать точки перегиба функции:

а) $f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$; б) $f(x) = x^2 \ln x$; в) $f(x) = x + \sin x$.

5.9. Найти наибольший член последовательности:

а) $x_n = \dfrac{n^{10}}{2^n}$; б) $x_n = \sqrt[n]{n}$; в) $x_n = \dfrac{n^2}{n^4+81}$.

5.10. Доказать, что многочлен нечётной степени $n \geqslant 3$ имеет хотя бы одну точку перегиба.

5.11. Доказать, что многочлен чётной степени $n \geqslant 2$ с положительными коэффициентами не имеет точек перегиба.

5.12. Пусть функция f дважды дифференцируема на интервале I, и в точке $x_0 \in I$ производная функции f имеет строгий локальный экстремум. Обязана ли точка x_0 быть точкой перегиба функции f?

5.13. Исследовать интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = f(x)$, заданной параметрически:

$$x = \frac{e^{-t}}{t-1}, \quad y = \frac{e^t}{t-1}, \quad t > 1.$$

5.14. Функция f дифференцируема в некоторой окрестности $+\infty$. Верно ли, что: 1) если существует конечный $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$, то график функции имеет наклонную (или горизонтальную) асимптоту при $x \to +\infty$; 2) если график функции имеет наклонную (или горизонтальную) асимптоту при $x \to \to +\infty$, то существует конечный $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$?

5.15. Через какую точку эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ с положительными координатами нужно провести касательную, чтобы площадь треугольника, ограниченная этой касательной и осями координат, была наименьшей?

5.16. Круговой сектор сворачивают в воронку в форме конуса. При каком значении центрального угла сектора объём этого конуса максимален?

5.17. Внутреннее сопротивление источника тока равно r. При каком значении сопротивления внешнего участка цепи мощность тока во внешней цепи будет наибольшей?

5.18. Ширина реки равна a, а ширина канала, перпендикулярного реке, равна b. Найти наибольшую возможную длину бревна, которое можно провести из канала в реку (толщиной бревна пренебречь).

ГЛАВА VI. ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Вектор-функции

Определение 6.1. Вектор-функцией в трёхмерном пространстве векторов $\mathbb{R}^3$ (или на плоскости $\mathbb{R}^2$) называется функция f такая, что $D(f) \subset \mathbb{R}$, $E(f) \subset \mathbb{R}^3$ (соответственно $E(f) \subset \subset \mathbb{R}^2$).

Если аргумент вектор-функции обозначить через t, то вектор-функцию можно записать как $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

В дальнейшем мы будем рассматривать трёхмерный случай, но везде, где не упоминаются векторное и смешанное произведения векторов, все без изменений сохраняется для двумерного случая.

Если в $\mathbb{R}^3$ задан базис $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, то вектор-функцию можно представить координатами в этом базисе; при этом будем употреблять запись $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — обычные числовые («скалярные») функции. Напомним, что в линейной алгебре вектор представляется столбцом его координат в некотором базисе. Запись столбца координат нам сейчас неудобна, поэтому будем записывать строку с последующим транспонированием (T). Если в другом базисе $\tilde{e} = eS$, где S — матрица перехода от базиса e к базису $\tilde{e}$, эта же вектор-функция имеет координатный столбец $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t))^T$, то

$$(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t))^T = S^{-1}(x(t), y(t), z(t))^T. \tag{6.1}$$

Определение 6.2. Говорят, что $\lim\limits_{t\to\alpha} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$, где α — один из 6 СПС, если в некотором базисе $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$, и

$$\lim_{t\to\alpha} x(t) = x_0, \quad \lim_{t\to\alpha} y(t) = y_0, \quad \lim_{t\to\alpha} z(t) = z_0.$$

Определение 6.3. Вектор-функция $\vec{r}$ называется непрерывной в точке $t_0 \in \mathbb{R}$, если существует $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

Определение 6.4. Пусть $n = 1,\ 2,\ \ldots$ Если вектор-функция $\vec{r}$ имеет в некотором базисе координатный столбец $(x(t), y(t), z(t))^T$, причём существуют конечные $x^n(t_0)$, $y^{(n)}(t_0)$, $z^{(n)}(t_0)$, то вектор, имеющий в том же базисе координатный столбец $(x^{(n)}(t_0), y^{(n)}(t_0), z^{(n)}(t_0))^T$, называется n-й производной вектор-функции $\vec{r}$ в точке t_0; применяется обозначение $\vec{r}^{(n)}(t_0)$. В этом случае вектор-функция $\vec{r}$ называется n раз дифференцируемой в точке t_0 (дифференцируемой при $n = 1$, дважды дифференцируемой при $n = 2$, и т.д.).

З а м е ч а н и е. Определения 6.2 и 6.4 формально зависят от выбора базиса. Покажем, что определение 6.4 даёт тот же вектор $\vec{r}^{(n)}(t_0)$, если выбрать другой базис $\tilde{e} = eS$. Если функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ имеют конечную n-ю производную в точке t_0, то из (6.1) следует, что то же можно сказать про функции $\tilde{x}(t)$, $\tilde{y}(t)$, $\tilde{z}(t)$, причём

$$(\tilde{x}^{(n)}(t_0),\ \tilde{y}^{(n)}(t_0),\ \tilde{z}^{(n)}(t_0))^T = \\ = S^{-1}(x^{(n)}(t_0),\ y^{(n)}(t_0),\ z^{(n)}(t_0))^T. \quad (6.2)$$

Таким образом, координатный столбец вектора $\vec{r}^{(n)}(t_0)$ по определению 6.4 в базисе $\tilde{e}$ (левая часть 6.2) получается из координатного столбца этого же вектора по определению 6.4 в базисе e (в правой части (6.2)) по обычным формулам перехода от базиса e к базису $\tilde{e}$, что означает независимость определения 6.4 от выбора базиса. Аналогично можно доказать независимость от выбора базиса определения 6.2.

Лемма 6.1. *Если числовые функции f_1 и f_2 и вектор-функции $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ непрерывны в точке t_0, то в этой точке непрерывны также следующие функции (скалярные и векторные):*

$$1)\ \alpha_1\vec{r}_1 + \alpha_2\vec{r}_2; \quad 2)\ (\vec{r}_1, \vec{r}_2); \quad 3)\ |\vec{r}_1|; \quad 4)\ [\vec{r}_1, \vec{r}_2].$$

$\square$ Докажем, например, утверждение 4). В силу замечания о независимости определения 6.2 от выбора базиса, достаточно доказать непрерывность всех координатных функций вектор-функции $[\vec{r}_1, \vec{r}_2]$ в некотором ортонормированном правом базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Но в этом базисе

$$[\vec{r}_1, \vec{r}_2] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

и все координатные функции $y_1z_2 - z_1y_2$, $z_1x_2 - x_1z_2$, $x_1y_2 - - y_1x_2$ непрерывны в точке t_0, значит, непрерывной является и вектор-функция $[\vec{r}_1, \vec{r}_2]$. ■

Лемма 6.2. *Если числовые функции f_1 и f_2 и вектор-функции $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ дифференцируемы в точке t_0, то в этой точке:*

1) $(f_1\vec{r}_1 + f_2\vec{r}_2)' = f_1\vec{r}_1{}' + f_1'\vec{r}_1 + f_2\vec{r}_2{}' + f_2'\vec{r}_2$;
2) $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)' = (\vec{r}_1{}', \vec{r}_2) + (\vec{r}_1, \vec{r}_2{}')$;
3) $[\vec{r}_1, \vec{r}_2]' = [\vec{r}_1{}', \vec{r}_2] + [\vec{r}_1, \vec{r}_2{}']$;
4) $|\vec{r}_1|' = \dfrac{(\vec{r}_1, \vec{r}_1{}')}{|\vec{r}_1{}'|}$, если $\vec{r}_1(t_0) \neq \vec{0}$.

□ 2) В координатах в ортонормированном базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$:

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2)' = (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)' =$$
$$= x_1'x_2 + y_1'y_2 + z_1'z_2 + x_1x_2' + y_1y_2' + z_1z_2' = (\vec{r}_1{}', \vec{r}_2) + (\vec{r}_1, \vec{r}_2{}').$$

Утверждения 1) и 3) доказываются аналогично.

4) $|\vec{r}_1|' = (\sqrt{(\vec{r}_1, \vec{r}_1)})' = \dfrac{(\vec{r}_1{}', \vec{r}_1) + (\vec{r}_1, \vec{r}_1{}')}{2\sqrt{(\vec{r}_1, \vec{r}_1)}} = \dfrac{(\vec{r}_1, \vec{r}_1{}')}{|\vec{r}_1|}$. ■

Лемма 6.3. *Если вектор-функция $\vec{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0, то*

$$\vec{r}\,'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}.$$

□ Соответствующее равенство справедливо для всех координатных функций, значит, и для вектор-функции. ■

Определение 6.5. Числовая функция f называется непрерывно дифференцируемой на промежутке I, если она дифференцируема на I, а её производная f', дополненная соответствующими значениями односторонних производных в концах I (если они принадлежат I), непрерывна на этом промежутке (см. определения 4.8 и 3.10).

Определение 6.6. Числовая функция f называется дважды дифференцируемой на промежутке I, если во всех внутренних точках I существует конечная f'', а в концах промежутка (если они ему принадлежат) f' имеет соответствующие односторонние производные. При этом под значениями f' в концах промежутка понимаются соответствующие односторонние производные. Например, для отрезка $[a;b]$

$$(f')'_+|_{x=a} = \lim_{t\to+0} \frac{f'(a+t)-f'_+(a)}{t};$$

$$(f')'_-|_{x=b} = \lim_{t\to-0} \frac{f'(b+t)-f'_-(b)}{t}.$$

Аналогично даётся определение трижды и т.д. дифференцируемой функции на промежутке I.

Определение 6.7. Вектор-функция $\vec{r}$ называется непрерывной (дифференцируемой, непрерывно дифференцируемой, дважды дифференцируемой и т.д.) на промежутке I, если таковыми же являются все её координатные функции в некотором базисе.

Аналогично определениям 6.2 и 6.4, определение 6.7 не зависит от выбора базиса.

Отметим, что для вектор-функций теорема Лагранжа, вообще говоря, неверна. Например, пусть в ортонормированном базисе в $\mathbb{R}^2$ вектор-функция имеет координатный столбец $\vec{r}(t) = (\cos t; \sin t)^T$. Тогда $\vec{r}\,'(t) = (-\sin t; \cos t)^T$, $|\vec{r}\,'(t)| = 1$, $\vec{r}(2\pi) - \vec{r}(0) = \vec{0}$. Поэтому равенство $\vec{r}(2\pi) - \vec{r}(0) = \vec{r}\,'(\xi)\cdot(2\pi - 0)$ невозможно ни при каком значении ξ, так как модуль вектора в правой части этого равенства при любом ξ равен 2π.

Лемма 6.4 (заменитель теоремы Лагранжа для вектор-функций). *Если вектор-функция $\vec{r}$ непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$, то существует точка $\xi \in (a;b)$ такая, что*

$$|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| \leqslant |\vec{r}\,'(\xi)|\cdot(b-a).$$

□ Рассмотрим числовую функцию $\varphi(t) = (\vec{r}(b)-\vec{r}(a), \vec{r}(t))$. По леммам 6.1 и 6.2 она непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$. Тогда по теореме Лагранжа существует точка $\xi \in (a;b)$ такая, что $\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)\cdot(b-a)$, т.е.

$$(\vec{r}(b)-\vec{r}(a), \vec{r}(b)-\vec{r}(a)) = (\vec{r}(b)-\vec{r}(a), \vec{r}\,'(\xi))(b-a).$$

Так как для любых векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ выполняется неравенство

$$|(\vec{x}, \vec{y})| \leqslant |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|, \quad \text{то}$$

$$|\vec{r}(b)-\vec{r}(a)|^2 \leqslant |\vec{r}(b)-\vec{r}(a)| \cdot |\vec{r}\,'(\xi)| \cdot (b-a).$$

Если $\vec{r}(b) = \vec{r}(a)$, то лемма верна для любого значения ξ. Если $\vec{r}(b) \neq \vec{r}(a)$, то из последнего неравенства получаем: $|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| \leqslant |\vec{r}\,'(\xi)| \cdot (b-a)$. ■

Для числовых функций во многих случаях фактически применяется не сама теорема Лагранжа, а лишь неравенство, аналогичное только что доказанному. Для вектор-функций ничего другого мы не имеем.

§ 2. Кривые в пространстве

Аналогично определению 4.3 кривой на плоскости, даётся определение кривой в трёхмерном пространстве.

Определение 6.8. Пусть x, y, z — три функции переменной t, где $t \in I$ (I — некоторый промежуток). Тогда множество точек пространства $\Gamma = \{(x, y, z)\colon\ x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in I\}$ называется кривой в пространстве (если не оговорено противное, координаты точек рассматриваются в прямоугольной правой системе координат). Кривая Γ называется непрерывной (дифференцируемой, непрерывно дифференцируемой, дважды дифференцируемой и т.д.), если таковой же является вектор-функция $\vec{r}$ с координатным столбцом $(x(t),\ y(t),\ z(t))^T$ на промежутке I.

Следует отметить, что во многих курсах дифференциальной геометрии под кривой понимают не множество точек Γ, а отображение $I \to \Gamma$ по закону $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Для множества точек Γ применяют другие названия, например, «носитель кривой». Мы не будем усложнять изложение основ дифференциальной геометрии кривых такими тонкостями.

Кривую в пространстве можно рассматривать как множество концов векторов для данной вектор-функции $\vec{r}$, начала которых помещены в начало координат («годограф вектор-функции» $\vec{r}$). Физический смысл — траектория движущейся точки (t — время, x, y, z — координаты точки в момент t).

Определение 6.9. Кривая Γ называется простой, если соответствие между I и Γ, осуществляемое функцией $\vec{r}$, является взаимно однозначным.

Кривую можно записать в векторном виде:

$$\Gamma = \{\vec{r}:\ \vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in I\}.$$

Пусть t_0 — внутренняя точка I, M_0 — точка кривой, соответствующая значению параметра t_0, M — точка, соответствующая значению параметра t. Если кривая простая, то при $t \neq t_0$ точки M и M_0 не совпадают. Проведём через точки M и M_0 прямую (хорда кривой). Она имеет направляющий вектор $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)$.

Определение 6.10. Пусть $\vec{a}(t)$ — единичный направляющий вектор хорды простой кривой Γ: $\{\vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in I\}$, проходящей через точки $M_0(t_0)$ и $M(t)$, направленный в сторону возрастания t (от M_0 к M, если $t > t_0$, и от M к M_0, если $t < t_0$); здесь t_0 — внутренняя точка промежутка I. Если существует $\vec{a} = \lim\limits_{t \to t_0} \vec{a}(t)$, то прямая с направляющим вектором $\vec{a}$, проходящая через точку M_0, называется касательной к кривой Γ в точке M_0 (см. рис. 6.1)

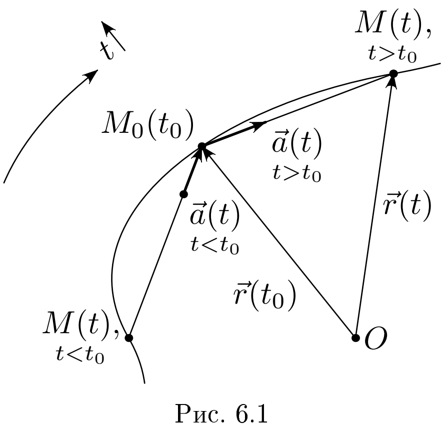

Рис. 6.1

Касательную интуитивно можно представить как «предельное положение» хорды при $t \to t_0$.

Отметим, что вектор $\vec{a}(t)$, введённый в определении 6.10, определяется равенством

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{|\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)|} \cdot \operatorname{sign}(t - t_0). \tag{6.3}$$

Теорема 6.1. *Если для простой кривой* Γ: $\{\vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in I\}$ *существует* $\vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$ *во внутренней точке* t_0 *промежутка* I, *то кривая имеет касательную в точке, соответствующей значению параметра* t_0. *Вектор* $\vec{r}\,'(t_0)$ *является направляющим вектором касательной, направленным в сторону возрастания* t.

☐ Равенство (6.3) можно переписать в виде

$$\vec{a}(t) = \frac{\dfrac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}}{\left|\dfrac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}\right|}.$$

Так как по лемме 6.3 $\vec{r}\,'(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}$, то по лемме 6.1 $\lim\limits_{t \to t_0} \left|\dfrac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}\right| = |\vec{r}\,'(t_0)|$, и если $\vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$, то существует $\vec{a} = \lim\limits_{t \to t_0} \vec{a}(t) = \dfrac{\vec{r}\,'(t_0)}{|\vec{r}\,'(t_0)|}$. Так как вектор $\vec{a}(t)$ направлен в сторону возрастания t, то это же можно сказать и о «предельном» векторе $\vec{a}$. Векторы же $\vec{a}$ и $\vec{r}\,'(t_0)$ одинаково направлены. ■

Пример 6.1. Рассмотрим дугу окружности $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in (a; b)$, где $b - a < 2\pi$. Это — простая кривая, и вектор $\vec{r}\,'(t) = (-\sin t; \cos t)^T$ направлен по касательной к окружности против часовой стрелки (в сторону возрастания t); так как $|\vec{r}\,'(t)| = 1$, то $\vec{a} = (-\sin t, \cos t)^T$ (см. рис. 6.2).

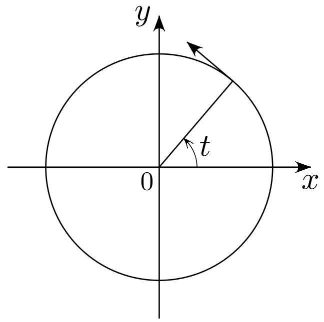

Рис. 6.2

Физический смысл: если точка описывает траекторию $\vec{r} = \vec{r}(t)$, то вектор мгновенной скорости в момент t_0 направлен по касательной к кривой в точке $M_0(t_0)$ в сторону возрастания t.

Отметим, что если дифференцируемая кривая на плоскости задаётся уравнением $y = f(x)$, то её можно параметризовать так: $x = t$, $y = f(t)$. Направляющий вектор касательной имеет координатный столбец $(1; f'(t_0))^T \neq \vec{0}$. Касательная к этой кривой в смысле определения 4.5 (определение касательной к графику функции $y = f(x)$) имеет угловой коэффициент $k = f'(x_0)$, т.е. тот же направляющий вектор.

Определение 6.11. Кривая Г: $\{\vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in I\}$ называется гладкой, если она непрерывно дифференцируема на I и $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ при всех $t \in I$ (в концах I рассматриваются односторонние производные, определяемые как векторы, координаты которых — соответствующие односторонние производные координатных функций).

З а м е ч а н и е. Если t_0 — конец I, принадлежащий этому промежутку, то аналогично определяется соответствующая односторонняя касательная к кривой и доказывается аналог теоремы 6.1 для односторонней производной $\vec{r}'_+(t_0)$ или $\vec{r}'_-(t_0)$.

Гладкая кривая в любой точке имеет касательную, векторное уравнение которой $\vec{r} = \vec{r}(t_0) + \vec{r}'(t_0)(t - t_0)$, $t \in \mathbb{R}$. Непрерывно дифференцируемая кривая, имеющая в любой точке касательную, не обязана быть гладкой в смысле определения 6.11. Так, парабола $y = x^2$ на плоскости, имеющая касательную в каждой точке, может быть параметризована следующим образом: $x = t^3$, $y = t^6$, при этом в точке $t = 0$ вектор $\vec{r}' = (3t^2; 6t^5)^T$ — нулевой и кривая не является гладкой.

В определении касательной 6.10 вектор $\vec{a}(t)$, хотя он и выражается через параметр, имеет чисто геометрическую природу, при другой параметризации кривой он может разве что измениться на противоположный.

Поэтому касательная не зависит от параметризации кривой. Но если одна и та же кривая (как множество точек на плоскости или в пространстве) задаётся по разному параметрическими уравнениями, то при одной параметризации она может быть гладкой, а при другой — нет.

Пример 6.2. Рассмотрим кривую $x = t$, $y = t^2$ на плоскости. Это — парабола $y = x^2$. Производная вектор-функции $\vec{r}'(t) = (1; 2t)^T$, $\vec{r}'(0) = (1; 0)^T \neq \vec{0}$. Кривая является гладкой, она в точке $t = 0$ имеет касательную с направляющим вектором $(1; 0)^T$. Это понятно и из геометрического определения (см. рис. 6.3). Ясно, что единичный вектор $\vec{a}(t)$, направленный в сторону возрастания t, имеет «предельное значение» $(1; 0)^T$. Кривая $x = t^3$, $y = t^6$ задаёт ту же параболу, поэтому для нас опять-таки $\lim\limits_{t\to 0} \vec{a}(t) = (1; 0)^T$, но гладкой она не является; как мы уже видели, $\vec{r}'(0) = (0; 0)^T$.

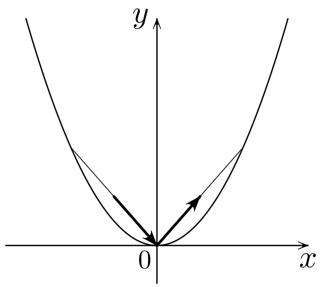

Рис. 6.3

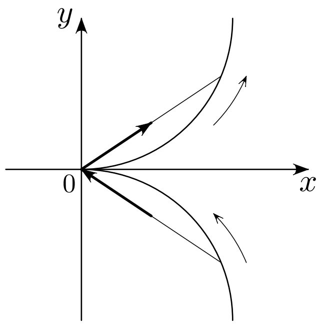

Рис. 6.4

Пример 6.3. Рассмотрим кривую $x = t^2$, $y = t^3$. Она не является гладкой, так как $\vec{r}'(t) = (2t; 3t^2)^T$ и $\vec{r}'(0) = (0; 0)^T$. Касательной в точке $t = 0$ она не имеет, так как $\lim\limits_{t\to +0} \vec{a}(t) = $ $= (1; 0)^T$, а $\lim\limits_{t\to -0} \vec{a}(t) = (-1; 0)^T$ (см. рис. 6.4). Есть только односторонние касательные (совпадающие) в этой точке, кривая имеет характерную форму клюва.

Определение 6.12. Пусть одна и та же кривая параметризуется двумя способами: $x = x_1(t)$, $y = y_1(t)$, $z = z_1(t)$ (т.е. $\vec{r} = \vec{r}_1(t)$), $t \in I_1$, и $x = x_2(u)$, $y = y_2(u)$, $z = z_2(u)$ (т.е. $\vec{r} = $ $= \vec{r}_2(u)$), $u \in I_2$, причём функция $u = u(t)$ отображает промежуток I_1 на множество I_2. Если функция $u(t)$ непрерывно дифференцируема на I_1 и $u'(t) \neq 0$ при всех $t \in I_1$, то функция $u(t)$ называется допустимой заменой параметра (ДЗП).

Лемма 6.5. *При ДЗП простая непрерывно дифференцируемая кривая остаётся простой непрерывно дифференцируемой, гладкая кривая остаётся гладкой, касательная к кривой в данной точке не изменится.*

□ Так как $u(t)$ — непрерывная непостоянная функция на промежутке I_1, то из леммы 3.11 следует, что I_2 — также промежуток. Но $x_1(t) = x_2(u(t))$ при всех $t \in I_1$, поэтому $x_1'(t) = x_2'(u) \cdot u'(t)$. Аналогично, $y_1'(t) = y_2'(u) \cdot u'(t)$, $z_1'(t) = z_2'(u) \cdot u'(t)$, т.е. $\vec{r}_1'(t) = u'(t) \cdot \vec{r}_2'(u)$. Значит, непрерывно дифференцируемая кривая остаётся непрерывно дифференцируемой, и, так как $u'(t) \neq 0$, гладкая кривая остаётся гладкой.

Функция $u'(t)$ непрерывна и отлична от нуля на I_1. Значит, либо $u'(t) > 0$ для всех $t \in I_1$, либо $u'(t) < 0$ (если функция u' принимает два значения разного знака, то по теореме Больцано–Коши 3.13 найдётся точка, где $u'(t) = 0$). Поэтому по теореме 5.5 функция u строго монотонна на I_1, значит, она осуществляет взаимно однозначное соответствие между I_1 и I_2. И если соответствие между I_1 и Γ было взаимно однозначным, то соответствие между I_2 и Γ также будет взаимно однозначным. Простая кривая остаётся простой.

Наконец, рассмотрим некоторую точку кривой с радиусом-вектором $\vec{r}_1(t_0) = \vec{r}_2(u_0)$, где $u_0 = u(t_0)$. Так как $\vec{r}_1'(t_0) = u'(t_0) \cdot \vec{r}_2'(u_0)$, $u'(t_0) \neq 0$, то направляющие векторы касательной в двух параметризациях коллинеарны. Значит, касательная в фиксированной точке остаётся той же. ■

Пример 6.4. Рассмотрим верхнюю полуокружность единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$. Её можно параметризовать двумя способами:

1) $x_1 = \cos t$, $y_1 = \sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$;
2) $x_2 = u$, $y_2 = \sqrt{1 - u^2}$, $-1 \leqslant u \leqslant 1$.

При этом $u = \cos t$, $u'(t) = -\sin t$, $u'(t) = 0$ при $t = 0$ и $t = \pi$, замена не является допустимой. А вот если $0 < t < \pi$ (соответственно $-1 < u < 1$), замена уже будет допустимой. Кстати, в первой параметризации $\vec{r}_1'(t) = (-\sin t; \cos t)^T$; $\vec{r}_1'(t) \neq \vec{0}$ ни при одном значении t, и кривая будет гладкой на любом промежутке изменения t.

Так как $y'_-(1) = -\infty$, $y'_+(-1) = +\infty$, то во второй параметризации кривая не будет даже дифференцируемой на $[-1; 1]$, но является гладкой на $(-1; 1)$. Направляющий вектор касательной в точке кривой при $0 < t_0 < \pi$ (или, что то же, $-1 < u_0 < 1$) равен

$$\vec{r}_1'(t_0) = (-\sin t_0; \cos t_0)^T = (-y_0; x_0)^T;$$

$$\vec{r}_2'(u_0) = \left(1; -\frac{u_0}{\sqrt{1-u_0^2}}\right)^T = \left(1; -\frac{x_0}{y_0}\right)^T$$

— векторы коллинеарны, но противоположно направлены. Это говорит о том, что при возрастании t и при возрастании u кривая пробегается в разные стороны (при возрастании t против часовой стрелки, т.е. налево по x, а при возрастании u — направо по x).

Определение 6.13. Кривая Γ: $\{\vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [a; b]\}$ называется простой замкнутой, если она простая при $t \in [a; b)$ и $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.

Например, окружность $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ — простая замкнутая кривая.

§ 3. Длина кривой

Пусть $t_0 = a$, $t_n = b$, $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Рассмотрим на кривой Γ: $\{\vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [a; b]\}$ точки $M_i(t_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ и построим из отрезков прямых M_0M_1, M_1M_2, $\ldots$, $M_{n-1}M_n$ ломаную линию, вписанную в кривую Γ. Длина её определяется как сумма длин входящих в неё отрезков. Если кривая не является простой, то возможно совпадение соседних точек M_i и M_{i+1}. Тогда длина соответствующего отрезка равна 0.

Определение 6.14. Длиной кривой Γ: $\{\vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [a; b]\}$, называется точная верхняя грань множества длин ломаных, вписанных в кривую Γ. Если длина кривой конечна, то кривая называется спрямляемой.

Будем обозначать длину кривой Γ: $\{\vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [a;b]\}$ через $l_\Gamma[a;b]$.

Лемма 6.6. *Если* $[c;d] \subset [a;b]$, *то* $l_\Gamma[c;d] \leqslant l_\Gamma[a;b]$. *В частности, если кривая* Γ *спрямляема при* $t \in [a;b]$, *то она спрямляема и при* $t \in [c;d]$.

□ Пусть $l = l_\Gamma[a;b] \leqslant +\infty$ (т.е. либо конечна, либо бесконечна). Рассмотрим любую ломаную, вписанную в Γ при $t \in [c;d]$, и продолжим её до ломаной, вписанной в Γ при $t \in [a;b]$. Длина меньшей ломаной не превосходит длины большей, следовательно, не превосходит l. Тогда и $l_\Gamma[c;d] \leqslant l$ (как точная верхняя грань, см. лемму 1.3). Если $l = +\infty$, то доказывать нечего. ■

Лемма 6.7. *Если кривая* Γ *спрямляема при* $t \in [a;b]$, *то при любом* $c \in (a;b)$ *имеет место равенство*

$$l_\Gamma[a;c] + l_\Gamma[c;b] = l_\Gamma[a;b].$$

□ Спрямляемость Γ при $t \in [a;c]$ и при $t \in [c;b]$ следует из леммы 6.6. Обозначим $l_1 = l_\Gamma[a;c]$, $l_2 = l_\Gamma[c;b]$, $l = l_\Gamma[a;b]$.

Рассмотрим произвольную ломаную γ_1, вписанную в Γ при $t \in [a;c]$, и произвольную ломаную γ_2, вписанную в Γ при $t \in [c;b]$ (см. рис. 6.5). Их объединение — ломаная γ, вписанная в Γ на $[a;b]$. Так как $l_{\gamma_1} + l_{\gamma_2} = l_\gamma$, то $l_{\gamma_1} + l_{\gamma_2} \leqslant l$. Зафиксируем ломаную γ_2. Переходя в последнем неравенстве к точной верхней грани по всем γ_1, в силу леммы 1.3 получим: $l_1 + l_{\gamma_2} \leqslant l$. Переходя затем к точной верхней грани по γ_2, получим: $l_1 + l_2 \leqslant l$.

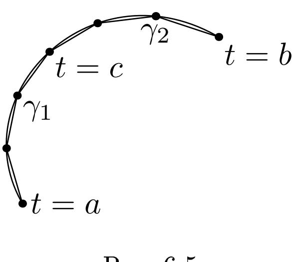

Рис. 6.5

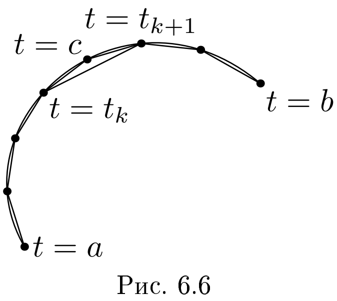

Рис. 6.6

Рассмотрим теперь произвольную ломаную γ, вписанную в Г. Если одна из её вершин соответствует значению параметра $t = c$ (как на рис. 6.5), то $l_\gamma = l_{\gamma_1} + l_{\gamma_2} \leqslant l_1 + l_2$. Если ни одна из вершин не соответствует $t = c$, то существует номер $k = 0$, $1, \ \ldots, n-1$ такой, что $t_0 = a < t_1 < \ \ldots < t_k < c < t_{k+1} < \ < \ldots < t_n = b$ (вершины ломаной γ соответствуют значениям параметра $t_0, t_1, \ \ldots, t_n$). Рассмотрим ломаную γ_1, вписанную в Г при $t \in [a; c]$, такую, что первые её k звеньев совпадают с первыми k звеньями ломаной γ, а последнее звено — отрезок, соединяющий точки, соответствующие $t = t_k$ и $t = c$ (см. рис. 6.6). Рассмотрим также ломаную γ_2, вписанную в Г при $t \in [c; b]$, такую, что первое её звено — отрезок, соединяющий точки, соответствующие $t = c$ и $t = t_{k+1}$, остальные совпадают с оставшимися звеньями γ. Тогда $l_\gamma \leqslant l_{\gamma_1} + l_{\gamma_2} \leqslant l_1 + l_2$. Итак, для любой ломаной γ, вписанной в данную кривую Г, $l_\gamma \leqslant l_1 + \ + l_2$. Переходя к точной верхней грани, получим: $l \leqslant l_1 + l_2$. Получаем неравенства в обе стороны, значит, $l = l_1 + l_2$. ■

З а м е ч а н и е. Если не требовать спрямляемость Г (т.е. $l \leqslant +\infty$), то лемма сохраняет силу.

Следствие. *Если кривая* Г *спрямляема при* $t \in [a; c]$ *и* $t \in \ \in [c; b]$, *то она спрямляема и при* $t \in [a; b]$.

Лемма 6.8. *Непрерывно дифференцируемая кривая* $\Gamma = \ = \{\vec{r} \colon \vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [a; b]\}$ *спрямляема, и её длина* $l_\Gamma \leqslant M(b-a)$, *где* $M = \max\limits_{[a;b]} |\vec{r}\,'(t)|$.

□ По лемме 6.1 $|\vec{r}\,'(t)|$ — непрерывная функция на $[a; b]$. По теоремам 3.11 и 3.12 она ограничена и достигает своей точной верхней грани. Поэтому можно рассматривать $M = \max\limits_{[a;b]} |\vec{r}\,'(t)|$, $M \in \mathbb{R}$.

Длина любой ломаной, вписанной в кривую Г, равна

$$l_\gamma = \sum_{k=1}^{n} |\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\vec{r}\,'(\xi_k)|(t_k - t_{k-1})$$

(здесь применена лемма 6.4, $\xi_k \in (t_{k-1}; t_k)$, $k = 1, \ \ldots, n$). Поэтому $l_\gamma \leqslant M \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) = M(b-a)$. Переходя к точной верхней грани, получим: $l_\Gamma \leqslant M(b-a)$. ■

Теорема 6.2. *Пусть кривая* $\Gamma = \{\vec{r}\colon\ \vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [a;b]\}$ *непрерывно дифференцируема, и* $s(t)$ *— длина той части кривой* Γ, *которая соответствует изменению параметра от* a *до* t. *Тогда функция* $s(t)$ *непрерывно дифференцируема на* $[a;b]$, *причём* $s'(t) = |\vec{r}\,'(t)|$ *при всех* $t \in [a;b]$ *(в точках* $t = a$ *и* $t = b$ *рассматриваются соответствующие односторонние производные).*

□ Из лемм 6.6, 6.7, 6.8 следует, что кривая Γ спрямляема, функция $s(t)$ определена при всех $t \in [a;b]$ и возрастает на $[a;b]$ (вообще говоря, нестрого), причём если $\Delta t > 0$, то $l_\Gamma[t_0; t_0 + \Delta t] = s(t_0+\Delta t) - s(t_0)$, а если $\Delta t < 0$, то $l_\Gamma[t_0+\Delta t; t_0] = s(t_0) - s(t_0 + \Delta t)$. В любом случае длина кривой при $t \in [t_0; t_0 + \Delta t]$ равна $|s(t_0+\Delta t) - s(t_0)|$. Длина отрезка, соединяющего концы кривой, не превосходит длины кривой, поэтому

$$|s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)| \geqslant |\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)|.$$

По лемме 6.8

$$|s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)| \leqslant \max_{t\in[t_0;t_0+\Delta t]} |\vec{r}\,'(t)| \cdot |\Delta t| = |\vec{r}\,'(\xi)| \cdot |\Delta t|,$$

где $\xi = \xi(\Delta t) \in [t_0; t_0 + \Delta t]$, так как непрерывная на отрезке функция принимает наибольшее значение в некоторой точке отрезка. После деления всех частей двойного неравенства на $|\Delta t|$ получим

$$\left|\frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}\right| \leqslant \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} \leqslant |\vec{r}\,'(\xi(\Delta t))| \qquad (6.4)$$

(здесь использовано то, что функция $s(t)$ возрастает, и, следовательно, при любом знаке Δt знак выражения $s(t_0+\Delta t) - s(t_0)$ такой же). Далее,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}\right| = |\vec{r}\,'(t_0)|$$

(в силу лемм 6.3 и 6.1). Так как $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \xi(\Delta t) = t_0$, то по теореме 3.8, применённой к каждой из компонент вектора $\vec{r}\,'(\xi(\Delta t))$, имеем: $\lim\limits_{\Delta t\to 0} |\vec{r}\,'(\xi(\Delta t))| = |\vec{r}\,'(t_0)|$. Тогда по теореме 3.4 из (6.4) следует, что существует $s'(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = |\vec{r}'(t_0)|$. ■

З а м е ч а н и е. Гладкость кривой в условии теоремы 6.2 не требуется.

Дифференциал функции $s(t)$ обычно называют дифференциалом дуги кривой ds, из теоремы 6.2 следует, что $ds = |\vec{r}'(t)|\,dt$.

Вектор, компоненты которого — дифференциалы координатных функций вектор-функции $\vec{r}$, т.е. вектор

$$(dx(t),\ dy(t),\ dz(t))^T = (x'(t),\ y'(t),\ z'(t))^T dt,$$

называют дифференциалом вектор-функции $\vec{r}$:

$$d\vec{r}(t) = \vec{r}'(t)\,dt.$$

Тогда $|d\vec{r}| = |\vec{r}'(t)| \cdot |dt| = s'(t)|dt|$, т.е. $ds = |d\vec{r}| \cdot \operatorname{sign} dt$.

Если кривая не только непрерывно дифференцируема, но ещё и гладкая, то в каждой её точке $s'(t) = |\vec{r}'(t)| > 0$, т.е. функция $s(t)$ строго возрастает на $[a;b]$. Тогда замена параметра $s = s(t)$ является ДЗП. На любой гладкой кривой можно ввести параметр, равный переменной длине дуги кривой (так называемый натуральный параметр). Уравнения кривой в такой параметризации называют натуральными уравнениями кривой. Обычно полагают $s(a) = 0$. Можно положить $s(t_0) = 0$ для некоторого другого значения t_0, но если при этом $t_0 > a$, то возникнут оговорки о знаке $s(t)$ (при $t < t_0$ выполняется неравенство $s(t) < 0$).

Пример 6.5. Составить натуральные уравнения прямой линии $x = x_0 + \alpha t$, $y = y_0 + \beta t$, $z = z_0 + \gamma t$, где $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0$.

□ Так как $\vec{r}'(t) = (\alpha, \beta, \gamma)^T$, то $s(t) = |\vec{r}'(t)| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$. По следствию из теоремы 4.15 $s(t) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}t + C$. Если положить $s(0) = 0$, то $s(t) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}t$. Натуральные уравнения прямой имеют вид

$$x = x_0 + \frac{\alpha s}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, \quad y = y_0 + \frac{\beta s}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}},$$

$$z = z_0 + \frac{\gamma s}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, \qquad ■$$

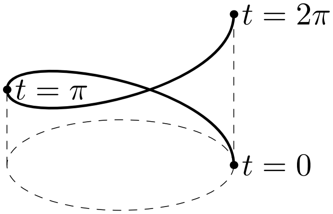

Рис. 6.7

Пример 6.6. Составить натуральные уравнения винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, где $a, b > 0$ ($t \in [0; 2\pi]$) (см. рис. 6.7).

□ Так как

$$\vec{r}\,'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)^T,$$

то $s'(t) = |\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{a^2+b^2}$; по следствию из теоремы 4.15: $s(t) = \sqrt{a^2+b^2}t + C$. Если положить $s(0) = 0$, то $s(t) = \sqrt{a^2+b^2}t$. Натуральные уравнения винтовой линии имеют вид

$$x = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,, \quad y = a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,,$$
$$z = \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\,, \quad 0 \leqslant s \leqslant 2\pi\sqrt{a^2+b^2}. \qquad \blacksquare$$

Пример 6.7. График непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, на плоскости можно параметризовать так: $x = t$, $y = f(t)$. Тогда $\vec{r}\,'(t) = (1, f'(t))^T$, и $s(t) = \sqrt{1+(f'(t))^2} > 0$. Натуральные уравнения можно написать явно, если известна функция, производная от которой равна $\sqrt{1+(f'(t))^2}$.

§ 4. Дважды дифференцируемые гладкие кривые. Кривизна кривой

Определение 6.15. Пусть Γ: $\{\vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in I\}$ — дважды дифференцируемая гладкая кривая. Тогда кривизной кривой в точке с радиусом-вектором $\vec{r}(t_0)$, где t_0 — внутренняя точка промежутка I, называется модуль вектора второй производной вектор-функции $\vec{r}$ по натуральному параметру s при значении $s = s(t_0)$.

Производные по натуральному параметру принято обозначать точками (вместо штрихов). В этих обозначениях кривизна

$$k = |\ddot{\vec{r}}|.$$

Лемма 6.9. *Пусть* Γ*:* $\{\vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in I\}$ *— дважды дифференцируемая гладкая кривая. Тогда для производных вектор-функции* $\vec{r}$ *по натуральному параметру в точках, соответствующих внутренним точкам промежутка* I*, имеют место равенства*

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{r}\,'(t)}{s'(t)}\,, \quad \ddot{\vec{r}} = \frac{s'(t)\vec{r}\,''(t) - s''(t)\vec{r}\,'(t)}{(s'(t))^3}\,.$$

□ Пусть $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))^T$. Тогда $x'(t) = \dot{x} \cdot s'(t)$, $y'(t) = \dot{y} \cdot s'(t)$, $z'(t) = \dot{z} \cdot s'(t)$. Значит, $\vec{r}\,'(t) = \dot{\vec{r}} \cdot s'(t)$, откуда следует первое из утверждений леммы. Далее,

$$\ddot{\vec{r}} = (\dot{\vec{r}})^{\cdot} = \frac{(\dot{\vec{r}})'_t}{s'(t)} = \frac{\left(\dfrac{\vec{r}\,'(t)}{s'(t)}\right)'}{s'(t)} = \frac{s'(t)\vec{r}\,''(t) - s''(t)\vec{r}\,'(t)}{(s'(t))^3}$$

(формула производной дроби применяется покоординатно). Отметим, что $s'(t) = |\vec{r}\,'(t)| \neq 0$, и $s''(t)$ существует по лемме 6.2. ■

Лемма 6.10. *Если* $\vec{r}(t)$ *— непрерывно дифференцируемая вектор-функция на интервале* I *и числовая функция* $|\vec{r}(t)|$ *постоянна при* $t \in I$*, то* $(\vec{r}(t), \vec{r}\,'(t)) = 0$ *при всех* $t \in I$*.*

□ Доказательство очевидно из равенства $|\vec{r}(t)|' = \dfrac{(\vec{r}(t), \vec{r}\,'(t))}{|\vec{r}(t)|}$, выполненного по лемме 6.2 везде, где $\vec{r}(t) \neq \vec{0}$. Если $\vec{r}(t) \equiv 0$, то утверждение и так очевидно. ■

Теорема 6.3. *Кривизна* k *дважды дифференцируемой гладкой кривой* Γ*:* $\{\vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in I\}$ *во всех внутренних точках промежутка* I *вычисляется по формуле*

$$k = \frac{|[\vec{r}\,'(t), \vec{r}\,''(t)]|}{|\vec{r}\,'(t)|^3}\,.$$

□ Из леммы 6.9 следует, что $|\dot{\vec{r}}| = \dfrac{|\vec{r}\,'(t)|}{s'(t)} = 1$. Тогда по лемме 6.10 $(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}) = 0$ в точках, соответствующих внутренним точкам промежутка I, и, следовательно, $\left|[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}]\right| = |\dot{\vec{r}}| \cdot |\ddot{\vec{r}}| = k$. Применяя снова лемму 6.9, получим

$$k = \left|[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}]\right| = \left|\left[\frac{\vec{r}\,'}{s'}, \frac{s'\vec{r}\,'' - s''\vec{r}\,'}{s'^3}\right]\right| = \left|\frac{s'[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']}{s'^4}\right| = \frac{|[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']|}{|\vec{r}\,'|^3}. \quad ■$$

Пример 6.8. Вычислим кривизну винтовой линии (см. пример 6.6). Имеем

$$\vec{r}\,' = (-a\sin t, a\cos t, b)^T, \quad \vec{r}\,'' = (-a\cos t, -a\sin t, 0)^T,$$

откуда ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ — ортонормированный правый базис):

$$[\vec{r}\,', \vec{r}\,''] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = (ab\sin t, -ab\cos t, a^2)^T,$$

$$|[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']| = \sqrt{a^2b^2 + a^4}, \quad |\vec{r}\,'| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Тогда $k = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$, т.е. винтовая линия имеет постоянную кривизну. Кстати, окружность радиуса a можно рассматривать как винтовую линию при $b = 0$. Поэтому кривизна окружности $k = \dfrac{1}{a}$ — величина, обратная радиусу.

Пример 6.9. Вычислим кривизну плоской дважды дифференцируемой гладкой кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Так как $[\vec{r}\,', \vec{r}\,''] = (0, 0, x'y'' - x''y')^T$, то $k = \dfrac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$.

Пример 6.10. Вычислим кривизну графика дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$.

График можно параметризовать так: $x = t$, $y = f(t)$. Тогда, подставляя в формулу примера 6.9 $x' = 1$, $x'' = 0$, имеем

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Например, для графика $y = e^x$ кривизна равна $k(x) = \dfrac{e^x}{(1 + e^{2x})^{3/2}}$. Откуда видно, кстати, что $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} k(x) = 0$.

Выясним геометрический смысл кривизны кривой. Единичный направляющий вектор касательной, направленный в сторону возрастания параметра, равен (теорема 6.1 и лемма 6.9)

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|} = \dot{\vec{r}}.$$

Если данная точка кривой соответствует значению параметра $t = t_0$ и значению натурального параметра s_0, то

$$\ddot{\vec{r}}(s_0) = \dot{\vec{\tau}}(s_0) = \lim_{s \to s_0} \frac{\vec{\tau}(s) - \vec{\tau}(s_0)}{s - s_0}$$

— мгновенная скорость изменения единичного касательного вектора, а кривизна $k = \left|\ddot{\vec{r}}(s_0)\right|$ — модуль этой мгновенной скорости. Пусть $\Delta\varphi(s)$ — угол поворота единичного касательного вектора при изменении дуги от s_0 до s (см. рис. 6.8).

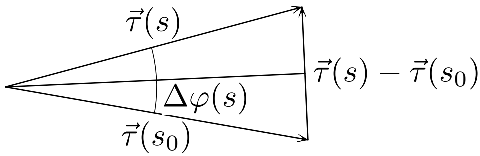

Рис. 6.8

Так как $\vec{\tau}(s)$ — дифференцируемая вектор-функция, то

$$k = \lim_{s \to s_0} \left| \frac{\vec{\tau}(s) - \vec{\tau}(s_0)}{s - s_0} \right| = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{2 \sin \frac{\Delta\varphi(s)}{2}}{\Delta s} \right|;$$

числитель дроби — бесконечно малая величина при $\Delta s \to 0$, поэтому $\sin \frac{\Delta\varphi(s)}{2} \sim \frac{\Delta\varphi(s)}{2}$, и $k = \left| \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi(s)}{\Delta s} \right|$, т.е. кривизна кривой в данной точке — это модуль мгновенной скорости вращения единичного касательного вектора.

Определение 6.16. Радиусом кривизны дважды дифференцируемой гладкой кривой называется величина, обратная значению её кривизны в соответствующей точке (если $k > 0$, то радиус кривизны $R = \frac{1}{k} > 0$; если $k = 0$, то $R = +\infty$).

Из примера 6.8 и замечания к нему следует, что радиус кривизны окружности в любой точке равен её радиусу.

§ 5. Кривые с положительной кривизной. Сопровождающий трёхгранник кривой

Как уже отмечалось в §4, единичный вектор касательной к кривой, направленный в сторону возрастания параметра, обозначают $\vec{\tau}$. Тогда кривизна кривой в точке, соответствующей значению натурального параметра $s = s_0$, равна $k = |\ddot{\vec{r}}(s_0)| = |\dot{\vec{\tau}}(s_0)|$.

Будем теперь рассматривать дважды дифференцируемые гладкие кривые с положительной кривизной, т.е. такие, для которых $\dot{\vec{\tau}} \neq \vec{0}$. Пусть $\vec{\nu}$ — единичный вектор, сонаправленный с $\dot{\vec{\tau}}$. Тогда из определения кривизны следует, что

$$\dot{\vec{\tau}} = k\vec{\nu}. \tag{6.5}$$

Это равенство называется первой формулой Френе.

Определение 6.17. Пусть Г: $\{\vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in I\}$ — дважды дифференцируемая гладкая кривая, имеющая в некоторой точке, соответствующей внутренней точке промежутка I, положительную кривизну (т.е. $\ddot{\vec{r}} \neq \vec{0}$). Тогда прямая, проходящая через эту точку с направляющим вектором $\ddot{\vec{r}}$, называется главной нормалью к кривой в данной точке, а прямая, проходящая через точку перпендикулярно касательной и главной нормали, называется бинормалью. Плоскость, проходящая через касательную и главную нормаль, называется соприкасающейся плоскостью. Плоскость, проходящая через касательную и бинормаль, называется спрямляющей плоскостью. Плоскость, проходящая через главную нормаль и бинормаль, называется нормальной плоскостью. Такая конструкция называется сопровождающим трёхгранником (трёхгранником Френе) данной кривой в данной точке (см. рис. 6.9).

З а м е ч а н и е. Так как $|\vec{\tau}| = 1$, то из леммы 6.10 следует, что $(\vec{\tau}, \dot{\vec{\tau}}) = 0$, т.е. векторы $\vec{\tau}$ и $\vec{\nu}$ ортогональны (это уже отмечено в доказательстве теоремы 6.3). Поэтому касательная, главная нормаль и бинормаль — это три взаимно пер-

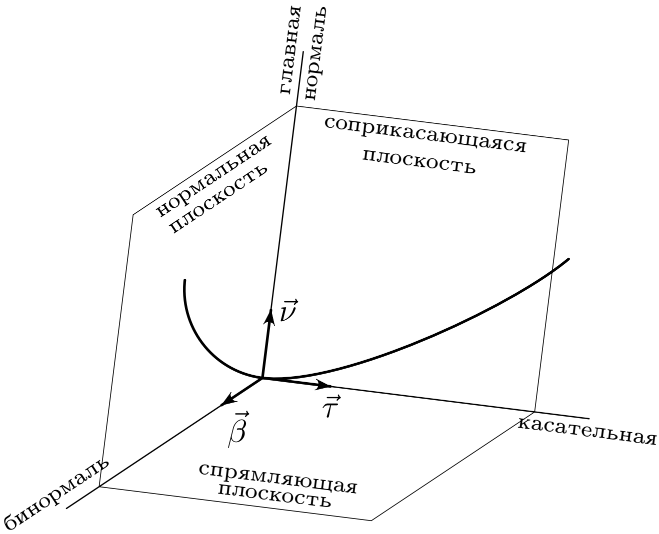

Рис. 6.9

пендикулярные прямые, а нормальная плоскость —плоскость, проходящая через точку перпендикулярно касательной в данной точке (так можно определить нормальную плоскость для произвольной гладкой кривой). Вектор $\vec{\beta} = [\vec{\tau}, \vec{\nu}]$ является единичным направляющим вектором бинормали.

Напишем уравнения прямых и плоскостей сопровождающего трёхгранника в параметризации кривой при помощи параметра t.

Как мы уже отмечали, векторное уравнение касательной в точке, соответствующей значению параметра t_0:

$$\vec{r} = \vec{r}(t_0) + \vec{r}'(t_0)(t - t_0).$$

Векторное уравнение нормальной плоскости:

$$(\vec{r} - \vec{r}(t_0), \vec{r}'(t_0)) = 0.$$

Далее, так как $\ddot{\vec{r}} \neq \vec{0}$, то векторы $\vec{r}'$ и $\vec{r}''$ не коллинеарны (по лемме 6.9 $\ddot{\vec{r}}$ — линейная комбинация $\vec{r}'$ и $\vec{r}''$, и если $\vec{r}'$ и $\vec{r}''$ коллинеарны, то они коллинеарны $\ddot{\vec{r}}$, поэтому векторы $\dot{\vec{r}}$ и $\ddot{\vec{r}}$ — ненулевые коллинеарные векторы, что противоречит ортогональности). Но если $\vec{r}'' = \vec{0}$, то из леммы 6.9 опять-таки следует коллинеарность векторов $\dot{\vec{r}}$ и $\ddot{\vec{r}}$. Значит, $\vec{r}'' \neq 0$, и векторы $\vec{r}'$ и $\vec{r}''$ образуют базис в соприкасающейся плоскости. Векторное уравнение соприкасающейся плоскости:

$$(\vec{r} - \vec{r}(t_0), \vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)) = 0.$$

Единичный вектор бинормали $\vec{\beta}$ коллинеарен $[\vec{r}', \vec{r}'']$, а единичный вектор главной нормали $\vec{\nu} = [\vec{\beta}, \vec{\tau}]$ коллинеарен вектору $[[\vec{r}', \vec{r}''], \vec{r}']$. Векторное уравнение главной нормали:

$$\vec{r} = \vec{r}(t_0) + [[\vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)], \vec{r}'(t_0)](t - t_0).$$

Векторное уравнение бинормали:

$$\vec{r} = \vec{r}(t_0) + [\vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)](t - t_0).$$

Векторное уравнение спрямляющей плоскости:

$$(\vec{r} - \vec{r}(t_0), \vec{r}'(t_0), [\vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)]) = 0.$$

Для трижды непрерывно дифференцируемых гладких кривых первая формула Френе (6.5) может быть дополнена ещё двумя:

$$\dot{\vec{\nu}} = -k\vec{\tau} + \varkappa\vec{\beta}, \quad \dot{\vec{\beta}} = -\varkappa\vec{\nu}$$

(вторая и третья формулы Френе). Коэффициент $\varkappa$ называется кручением кривой и вычисляется по формуле

$$\varkappa = \frac{(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{|[\vec{r}', \vec{r}'']|^2}$$

(доказательство этих утверждений мы проводить не будем). Плоские кривые имеют нулевое кручение. Винтовая линия имеет постоянную кривизну (пример 6.8), её кручение также постоянно и в каждой точке равно $\varkappa = \dfrac{b}{a^2 + b^2}$.

§ 6. Центр кривизны и эволюта

Определение 6.18. Пусть кривая Γ: $\{\vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in I\}$ имеет в точке M_0 с радиусом-вектором $\vec{r}(t_0)$, где t_0 — внутренняя точка промежутка I, положительную кривизну. Тогда центром кривизны кривой в точке M_0 называется точка, радиус-вектор которой равен $\vec{\rho} = \vec{r}(t_0) + R\vec{\nu}$ (т.е. точка, лежащая на главной нормали в направлении вектора $\ddot{\vec{r}}$, удалённая от точки M_0 на расстояние, равное радиусу кривизны).

Определение 6.19. Окружность, лежащая в соприкасающейся плоскости кривой, центр которой совпадает с центром кривизны, а радиус — с радиусом кривизны кривой в данной точке, называется окружностью, соприкасающейся с кривой в данной точке.

Приведём без доказательства и без аккуратных формулировок следующие интересные утверждения, которые показывают, что соприкасающаяся окружность «теснее других» прилегает к кривой.

1) Из всех прямых и окружностей, проходящих через данную точку кривой, соприкасающаяся окружность «теснее других» прилегает к кривой (при $s \to s_0$ расстояние между точкой кривой и соответствующей точкой окружности, т.е. точкой, длина дуги окружности от которой до данной общей точки кривой и окружности также равно s, есть $o((\Delta s)^2)$). Если $k = 0$, то такой порядок близости даёт касательная прямая, т.е. касательная — это вырожденный случай соприкасающейся окружности, если $R = +\infty$. В общем случае такое расстояние для касательной есть $o(\Delta s)$, и касательная прилегает к кривой «теснее» всех прямых, проходящих через данную точку кривой.

2) Если через три точки кривой, соответствующих значениям параметра t_0, $t_0 + h$ и $t_0 - h$, провести окружность, то в пределе при $h \to +0$ радиус окружности будет стремиться к радиусу кривизны в точке с радиусом-вектором $\vec{r}(t_0)$, а координаты центра окружности — к соответствующим координатам центра кривизны. Образно говоря, предельным положением такой окружности будет соприкасающаяся окружность. Если $k(t_0) = 0$, то радиус окружности будет стремиться к $+\infty$, предельным положением окружности будет касательная прямая.

Определение 6.20. Если дважды дифференцируемая гладкая кривая в каждой точке имеет положительную кривизну, то множество центров кривизны, соответствующих всем точкам кривой, называется эволютой данной кривой. Кривая по отношению к своей эволюте называется эвольвентой.

Пример 6.11. Найти эволюту винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ $(a, b > 0)$.

□ Натуральные уравнения винтовой линии (см. пример 6.6):

$$\vec{r} = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^T.$$

Тогда

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{a}{a^2+b^2}\left(\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,, \sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,, 0\right)^T = \\ = -\frac{1}{a^2+b^2}\,(x, y, 0)^T.$$

Далее, $k = \frac{a}{a^2+b^2}$ (пример 6.8), поэтому $R = \dfrac{a^2+b^2}{a}$. Тогда $\vec{\nu} = \frac{1}{k}\,\ddot{\vec{r}} = R\ddot{\vec{r}} = -\frac{1}{a}\,(x, y, 0)^T$. Радиус-вектор центра кривизны

$$\vec{\rho} = \vec{r} + R\vec{\nu} = (x, y, z)^T - \frac{a^2+b^2}{a^2}\,(x, y, 0)^T = \\ = \left(-\frac{b^2}{a^2}\,x, -\frac{b^2}{a^2}\,y, z\right)^T = \left(-\frac{b^2}{a}\cos t, -\frac{b^2}{a}\sin t, bt\right)^T = \\ = \left(\frac{b^2}{a}\cos(t+\pi), \frac{b^2}{a}\sin(t+\pi), bt\right)^T.$$

Множество центров кривизны — тоже винтовая линия, у которой та же ось z, тот же шаг винта b, но другой радиус окружности — проекции на плоскость Oxy ($\frac{b^2}{a}$ вместо a). Кроме того, винтовая линия и её эволюта «смещены по фазе» на угол π. ■

Пример 6.12. Найти эволюту плоской дважды дифференцируемой гладкой кривой, заданной уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$.

□ Для плоской кривой $k = \dfrac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$ (пример 6.9).

Тогда $\vec{\rho} = \vec{r} + R\vec{\nu} = \vec{r} + R^2\ddot{\vec{r}}$. По лемме 6.9 (штрихом обозначаем производную по t; учитываем также, что $s' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$,

$s'' = \dfrac{x'x'' + y'y''}{s'}$):

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{s'\vec{r}\,'' - s''\vec{r}\,'}{s'^3} =$$

$$= \frac{s'\vec{r}\,'' - \dfrac{x'x'' + y'y''}{s'}\,\vec{r}\,'}{s'^3} = \frac{s'^2\vec{r}\,'' - (x'x'' + y'y'')\vec{r}\,'}{s'^4} =$$

$$= \frac{1}{s'^4}\left((x'^2 + y'^2)(x'', y'')^T - (x'x'' + y'y'')(x', y')^T\right) =$$

$$= \frac{x'y'' - x''y'}{s'^4}\,(-y', x')^T.$$

Тогда

$$R^2\ddot{\vec{r}} = \frac{s'^6}{(x'y'' - x''y')^2} \cdot \frac{x'y'' - x''y'}{s'^4}\,(-y, x')^T = \\ = \frac{s'^2}{x'y'' - x''y'}\,(-y', x')^T.$$

Параметрические уравнения эволюты (текущие координаты точки эволюты, соответствующие значению параметра t, обозначим ξ и η):

$$\xi(t) = x(t) - y'(t) \cdot \frac{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}\,;$$

$$\eta(t) = y(t) + x'(t) \cdot \frac{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}\,.$$

Если плоская кривая является графиком дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$, то её можно параметризовать так: $x = t$, $y = f(t)$. Тогда $x' = 1$, $x'' = 0$, и

$$\xi = x - \frac{1 + y'^2}{y''}\,y', \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}\,. \qquad \blacksquare$$

Пример 6.13. Найти эволюту эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(a > b > 0)$.

$\square$ Имеем по формулам примера 6.12

$$\xi(t) = a\cos t - b\cos t \cdot \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab} = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t;$$

$$\eta(t) = b\sin t - a\sin t \cdot \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab} = \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 t.$$

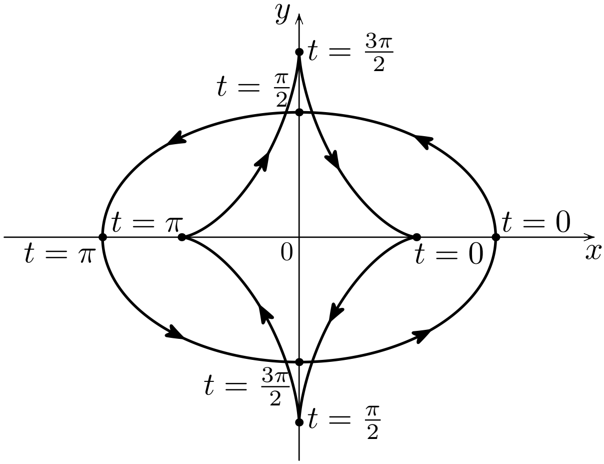

Рис. 6.10

Это — астроида (см. рис. 6.10). ■

Упражнения к главе VI

6.1. Доказать, что для дифференцируемых вектор-функций $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ имеет место равенство

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)' = (\vec{r}_1{}', \vec{r}_2, \vec{r}_3) + (\vec{r}_1, \vec{r}_2{}', \vec{r}_3) + (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3{}').$$

6.2. Доказать, что при ДЗП простая замкнутая кривая остаётся простой замкнутой.

6.3. Доказать, что график функции $y = \sin\frac{1}{x}$, $x \in (0; 1]$, не является спрямляемой кривой (хотя это непрерывно дифференцируемая кривая, но промежуток изменения параметра не является отрезком).

6.4. Составить натуральные уравнения циклоиды: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

6.5. Составить натуральные уравнения графика функции $y = \operatorname{ch} x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

6.6. Найти наибольшее значение кривизны графика функции $y = \ln x$.

6.7. Найти кривизну и координаты центра кривизны астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ в произвольной точке при $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

6.8. Доказать, что эволютой циклоиды (упражнение 6.4) будет кривая, полученная в результате параллельного переноса этой циклоиды.

6.9. На примере параболы $y = x^2$ в точке $x = 0$ убедиться в справедливости свойства 2) соприкасающейся окружности, приведённого без доказательства после формулировки определения 6.19.

6.10. Составить уравнения прямых и плоскостей сопровождающего трёхгранника в каждой точке винтовой линии (пример 6.6).

6.11. Для логарифмической спирали, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = e^{\varphi}$, составить натуральные уравнения и найти кривизну в каждой точке.

6.12. Доказать, что единичный вектор бинормали к плоской кривой постоянен, и, как следствие, кручение плоской кривой равно нулю.

6.13. Доказать, что кривизна кривой тождественно равна нулю тогда и только тогда, когда кривая является промежутком на прямой линии.

6.14. Верно ли, что если плоская кривая имеет асимптоту, то кривизна её при приближении точки к этой асимптоте стремится к нулю?

6.15. Доказать, что если $\xi(t)$ и $\eta(t)$ — координаты центра кривизны дважды дифференцируемой гладкой кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, на плоскости, то

$$\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} = \frac{\xi'^2 + \eta'^2}{\xi'\eta'' - \xi''\eta'}\,.$$

ГЛАВА VII. **КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА**

§ 1. Определение комплексного числа и основные функции комплексной переменной

Определение 7.1. Множеством комплексных чисел $\mathbb{C}$ называется множество пар действительных чисел (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$, на котором введены операции сложения и умножения следующим образом. Если $z_1 = (a_1, b_1) \in \mathbb{C}$, $z_2 = (a_2, b_2) \in \mathbb{C}$, то $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$, $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)$. Элементы множества $\mathbb{C}$ называются комплексными числами. Два комплексных числа $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ называются равными, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Операции сложения и умножения на множестве $\mathbb{C}$ обладают привычными свойствами (коммутативность сложения и умножения, ассоциативность сложения и умножения, дистрибутивность умножения относительно сложения).

Лемма 7.1. *Для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3 выполняются равенства*

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;
3) $z_1 z_2 = z_2 z_1$;
4) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$;
5) $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$.

□ Докажем, например, свойство 4 (свойство 5 доказывается аналогично, свойства 1, 2, 3 очевидны).

Пусть $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$, $z_3 = (a_3, b_3)$. Тогда

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2),$$
$$z_2 z_3 = (a_2 a_3 - b_2 b_3, a_2 b_3 + b_2 a_3),$$

$$(z_1 z_2) z_3 =$$
$$= ((a_1 a_2 - b_1 b_2) a_3 - (a_1 b_2 + b_1 a_2) b_3, (a_1 a_2 - b_1 b_2) b_3 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) a_3),$$
$$z_1 (z_2 z_3) =$$
$$= (a_1 (a_2 a_3 - b_2 b_3) - b_1 (a_2 b_3 + b_2 a_3), a_1 (a_2 b_3 + b_2 a_3) + b_1 (a_2 a_3 - b_2 b_3)).$$

Два последних комплексных числа совпадают. После раскрытия скобок оказывается, что оба они равны

$$(a_1a_2a_3 - b_1b_2a_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3,$$
$$a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3). \quad \blacksquare$$

Определение 7.2. Комплексное число $(a, 0)$, где $a \in \mathbb{R}$, отождествляется с действительным числом a.

Это определение оправдывается тем, что установлено взаимно однозначное соответствие между множеством пар $(a, 0)$ и множеством действительных чисел, сохраняющее операции сложения и умножения:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0), \quad (a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0).$$

Такое соответствие в высшей алгебре называется изоморфизмом.

Определение 7.3. Комплексное число $(0, 1)$ обозначается буквой i.

Легко видеть, что $i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$, т.е. $i^2 = -1$.

Далее, так как $(a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = (a, 0) + (0, b) = (a, b)$, то пару (a, b) можно записать в виде $a + bi$. В дальнейшем комплексное число так и будем записывать: $z = a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Определения операций при этом запишутся так:

$$(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i;$$
$$(a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i.$$

Иными словами, комплексные числа можно складывать и умножать, пользуясь известными законами сложения и умножения (лемма 7.1), имея в виду, что $i^2 = -1$.

Определение 7.4. Разностью двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется такое комплексное число z, что $z_1 = z_2 + z$ (обозначается $z = z_1 - z_2$). Частным двух комплексных чисел z_1 и z_2 ($z_2 \neq 0$) называется такое комплексное число z, что $z_1 = z_2 \cdot z$ (обозначается $z = \frac{z_1}{z_2}$).

Проверим, что эти операции однозначно определены.

$\square$ Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, $z = u + vi$. Для разности имеем: $(a_1 + b_1 i) = (a_2 + b_2 i) + (u + vi)$, откуда $a_1 = a_2 + u$, $b_1 = b_2 + v$. Тогда $u = a_1 - a_2$, $v = b_1 - b_2$. Разность двух комплексных чисел $z = z_1 - z_2$ определяется однозначно: $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$, т.е. вычитание можно осуществлять непосредственно.

Для частного имеем: $(a_1 + b_1 i) = (a_2 + b_2 i)(u + vi)$, откуда $a_2 u - b_2 v = a_1$, $b_2 u + a_2 v = b_1$. Так как $z_2 \neq 0$, то определитель этой системы $\Delta = a_2^2 + b_2^2 > 0$; решая систему по правилу Крамера, получим: $u = \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$, $v = \dfrac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$. Частное двух комплексных чисел $z = \frac{z_1}{z_2}$ определено однозначно:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}\,.$$

Такое деление можно осуществлять непосредственно:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \\ = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}\,. \quad \blacksquare$$

Комплексное число $\bar{z} = a - bi$ называется сопряжённым к числу z. Мы воспользовались тем, что $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$. Произведённые действия аналогичны домножению числителя и знаменателя дроби со знаменателем вида $a + b\sqrt{c}$, где $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $c > 0$, на число $a - b\sqrt{c}$, сопряжённое к знаменателю (такие действия применяются для избавления от иррациональности в знаменателе).

Определение 7.5. Пусть $z = a + bi \in \mathbb{C}$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда числа a и b называются соответственно действительной и мнимой частью числа z ($a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$). Комплексное число $\bar{z} = a - bi$ называется числом, сопряжённым к z. Действительное неотрицательное число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется модулем числа z.

Лемма 7.2. *Для любых комплексных чисел z, z_1, z_2 имеют место следующие соотношения:*

1) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$; 2) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$;

3) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$; 4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ (*если* $z_2 \neq 0$);

5) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$; 6) $z - \bar{z} = 2i \cdot \operatorname{Im} z$;

7) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$; 8) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;

9) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ (*если* $z_2 \neq 0$); 10) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

Доказать эти утверждения будет предложено самостоятельно в качестве упражнения.

Множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ геометрически интерпретируется как множество точек плоскости (комплексная плоскость $\mathbb{C}$). Если координаты точек заданы в прямоугольной системе координат 0, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ (кратчайший поворот от $\vec{e}_1$ к $\vec{e}_2$ осуществляется против часовой стрелки), то комплексное число $z = a + bi$ соответствует точке $M(z)$ с координатами $(a; b)$. Такое соответствие является взаимно однозначным. Точка $M(\bar{z})$ симметрична точке $M(z)$ относительно оси абсцисс, которая называется действительной осью, ось ординат называется мнимой осью. Расстояние от точки $M(z)$ до начала координат равно $|z|$ (см. рис. 7.1).

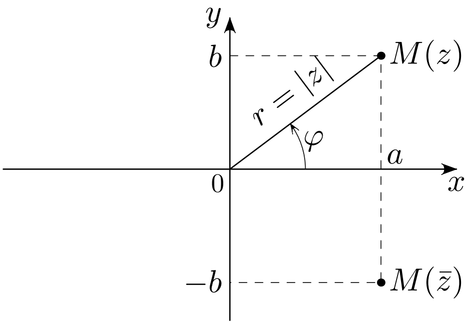

Рис. 7.1

Аргументом числа z называется угол φ поворота от положительного луча действительной оси к лучу OM (против часовой стрелки). Этот угол определён с точностью до $+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, и обозначается $\varphi = \arg z$. Аргумент нулевого комплексного числа не определён. Фактически мы ввели полярные координаты на комплексной плоскости: $r = |z|$, $\varphi = \arg z$. При этом $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, и комплексное число $z = a + bi$ можно записать в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Пример 7.1. Записать в тригонометрической форме числа $1 + i\sqrt{3}$ и $-1 + i$.

□ 1) $z = 1 + i\sqrt{3}$, $|z| = \sqrt{1+3} = 2$, $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

При записи комплексного числа в тригонометрической форме обычно берут одно фиксированное («наиболее простое») значение аргумента. Возьмём $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Тогда $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

2) $z = -1 + i$, $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Тогда $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$. ■

Комплексные числа, записанные в тригонометрической форме, удобно умножать и делить. При умножении модули чисел перемножаются, аргументы складываются. При делении модули делятся, аргументы вычитаются.

Лемма 7.3. *Пусть* $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, *где* $r_1 > 0$, $r_2 > 0$. *Тогда*

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2));$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

□ $z_1 z_2 = r_1 r_2((\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2)) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

Если $\frac{z_1}{z_2} = \rho(\cos\gamma + i\sin\gamma)$, то $z_1 = z_2 \cdot \frac{z_1}{z_2}$, и $r_1 = r_2\rho$, $\varphi_1 = \varphi_2 + \gamma$, откуда следует, что $\rho = \frac{r_1}{r_2}$, $\gamma = \varphi_1 - \varphi_2$. ■

Степень с целым показателем для комплексных чисел определяется так же, как и для действительных. Поэтому мы можем сформулировать

Следствие (формула Муавра). *Если* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r > 0$, *то при любом целом* n *имеет место равенство*

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Иными словами, при возведении комплексного числа в целую степень модуль числа возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.

Пример 7.2. Применяя формулу Муавра, получить известные формулы тригонометрии для $\cos 3\varphi$ и $\sin 3\varphi$.

$\square$ Имеем: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi$. Возводя двучлен в куб, получим: $\cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi \cdot i\sin\varphi + 3\cos\varphi(-\sin^2\varphi) - i\cdot\sin^3\varphi$ (мы воспользовались тем, что $i^2 = -1$, $i^3 = -i$). Приравнивая действительные и мнимые части двух равных выражений, имеем

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi(1-\cos^2\varphi) = \\ = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi,$$

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi = 3(1-\sin^2\varphi)\sin\varphi - \sin^3\varphi = \\ = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi. \quad \blacksquare$$

Определение 7.6. Пусть n — натуральное число, $n \geqslant 2$. Корнем n-й степени из комплексного числа z называется комплексное число w такое, что $w^n = z$ (обозначение: $w = \sqrt[n]{z}$).

Лемма 7.4. *Если $z = 0$, то $\sqrt[n]{z}$ принимает единственное значение 0 при любом $n \geqslant 2$. Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r > 0$, то $\sqrt[n]{z}$ принимает ровно n комплексных значений, имеющих одинаковый модуль $\rho = \sqrt[n]{r}$ и n различных значений аргумента $\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$, $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$.*

$\square$ Правая часть леммы очевидна, так как $0^n = 0$, и если $w \neq 0$, то $w^n \neq 0$. Пусть теперь $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = \rho(\cos\gamma + i\sin\gamma)$, $w^n = \rho^n(\cos n\gamma + i\sin n\gamma) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Комплексные числа, записанные в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а аргументы отличаются на $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (пока значение φ стояло только под знаком косинуса и синуса, неоднозначность определения φ можно было не учитывать, если сравнивать сами углы — эту неоднозначность учитывать необходимо). Итак, $\rho^n = r$, $n\gamma = \varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, откуда $\rho = \sqrt[n]{r}$ (арифметический корень n-й степени из положительного числа), $\gamma = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$.

При замене k на $k+n$ получим тот же угол, увеличенный на 2π, поэтому существенно различные значения $\sqrt[n]{z}$ дают лишь n значений γ ($k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$, далее значения корня повторяются). ■

З а м е ч а н и е. n значений $\sqrt[n]{z}$ на комплексной плоскости соответствуют n точкам, лежащим в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат.

Пример 7.3. Найти все значения $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[4]{-5}$, $\sqrt[3]{-1+i}$.

□ 1) $8 = 8(\cos 0 + i\sin 0)$, поэтому $\sqrt[3]{8} = 2\left(\cos\frac{2\pi k}{3} + i\sin\frac{2\pi k}{3}\right)$, $k = 0,\ 1,\ 2$. Получим 3 значения: 2, $-1+i\sqrt{3}$, $-1-i\sqrt{3}$ (см. рис. 7.2).

Первое из них — арифметическое значение кубического корня из положительного числа 8.

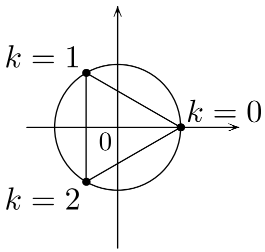

Рис. 7.2

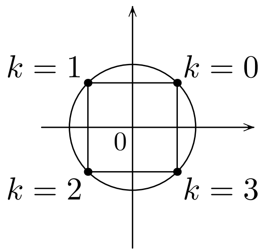

Рис. 7.3

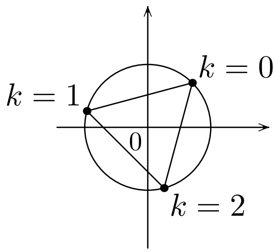

Рис. 7.4

2) $-5 = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$, поэтому

$$\sqrt[4]{-5} = \sqrt[4]{5}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Получим 4 значения:

$$\sqrt[4]{5}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \sqrt[4]{5}\cdot\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right), \quad \sqrt[4]{5}\cdot\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right), \quad \sqrt[4]{5}\cdot\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

(см. рис. 7.3). $\sqrt[4]{5}$ здесь — арифметическое значение корня 4-й степени из положительного числа 5.

3) $-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, поэтому

$$\sqrt[3]{-1+i}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right),\quad k=0,1,2.$$

Получим 3 значения:

$$\sqrt[6]{2}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}},\quad \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right),$$
$$\sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$$

(см. рис. 7.4). ■

Определение 7.7. Пусть $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$. Тогда e^z определяется как комплексное число $e^a(\cos b+i\sin b)$.

Если $z=a\in\mathbb{R}$, то $b=0$, и $e^z=e^a$ (при $z\in\mathbb{R}$ получаем обычное действительное значение e^z). Отметим, что $e^z\neq 0$ при любых z.

Лемма 7.5. *Для любых* $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ *имеют место равенства* $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$, $e^{z_1-z_2}=\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$.

□ Пусть $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$. Тогда

$$\begin{aligned}e^{z_1+z_2}&=e^{a_1}(\cos b_1+i\sin b_1)\cdot e^{a_2}(\cos b_2+i\sin b_2)=\\&=e^{a_1}\cdot e^{a_2}((\cos b_1\cos b_2-\sin b_1\sin b_2)+\\&\quad+i(\cos b_1\sin b_2+\sin b_1\cos b_2))=\\&=e^{a_1+a_2}(\cos(b_1+b_2)+i\sin(b_1+b_2))=e^{z_1+z_2}.\end{aligned}$$

Далее, так как $z_1=(z_1-z_2)+z_2$, то $e^{z_1}=e^{z_1-z_2}\cdot e^{z_2}$, откуда следует второе утверждение леммы. ■

Пример 7.4. Вычислить $e^{2\pi i}$, $e^{\pi i}$, $e^{\frac{\pi}{2}i}$, e^{2+3i}.

□ Имеем: $e^{2\pi i}=e^0(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=1$;

$$e^{\pi i}=e^0(\cos\pi+i\sin\pi)=-1,\quad e^{\frac{\pi}{2}i}=e^0\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=i;$$
$$e^{2+3i}=e^2(\cos 3+i\sin 3).$$ ■

Так как при всех z выполняются равенства $e^{z+2\pi i}= e^z\cdot e^{2\pi i}=e^z$, то функция комплексной переменной e^z имеет мнимый период $2\pi i$. Привычной взаимной однозначности отображения при помощи функции e^x уже нет.

Определение 7.8. Логарифмом комплексного числа z называется комплексное число w такое, что $e^w = z$ (обозначение: $w = \mathrm{Ln}\, z$).

Лемма 7.6. *Если $z = 0$, то $\mathrm{Ln}\, z$ не определён. Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r > 0$, то $\mathrm{Ln}\, z$ принимает бесконечно много значений, имеющих одинаковую действительную часть $a = \ln r$ (обычный натуральный логарифм положительного числа) и бесконечное число значений мнимой части $b = \varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.*

$\square$ Первая часть леммы следует из того, что $e^w \neq 0$ при любых w. Пусть теперь $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = a + bi$, $e^w = e^a(\cos b + i\sin b) = z$. Тогда $e^a = r$ (откуда $a = \ln r$), $b = \varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. $\blacksquare$

Таким образом, множество значений функции e^z, $z \in \mathbb{C}$, есть вся комплексная плоскость, кроме точки 0.

Пример 7.5. Найти все значения $\mathrm{Ln}\, 2$, $\mathrm{Ln}(-2)$, $\mathrm{Ln}(2i)$, $\mathrm{Ln}(1+i)$.

$\square$ $\mathrm{Ln}\, 2 = \ln 2 + 2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$; $\mathrm{Ln}(-2) = \ln 2 + (\pi + 2\pi k)i$, $k \in \mathbb{Z}$; $\mathrm{Ln}(2i) = \ln 2 + \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)i$, $k \in \mathbb{Z}$; $\mathrm{Ln}(1+i) = \ln\sqrt{2} + \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)i$, $k \in \mathbb{Z}$. $\blacksquare$

Определение 7.9. Для любых $z \in \mathbb{C}$ определим $\mathrm{ch}\, z$, $\mathrm{sh}\, z$, $\cos z$, $\sin z$ так:

$$\mathrm{ch}\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \mathrm{sh}\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Если $z = a \in \mathbb{R}$, то $\mathrm{ch}\, z = \mathrm{ch}\, a$, $\mathrm{sh}\, z = \mathrm{sh}\, a$, $e^{iz} = e^{ai} = \cos a + i\sin a$, $e^{-iz} = e^{-ai} = \cos a - i\sin a$. Поэтому

$$\cos z = \frac{1}{2}(\cos a + i\sin a + \cos a - i\sin a) = \cos a.$$

Аналогично, $\sin z = \sin a$.

Отметим также, что все известные формулы тригонометрии сохраняются для комплексных значений аргументов (при этом $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$, $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$). Например, для всех z

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(e^{2iz} + e^{-2iz} - 2e^{iz} \cdot e^{-iz}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{2iz} + e^{-2iz} + 2e^{iz} \cdot e^{-iz}\right).$$

Так как $e^{iz} \cdot e^{-iz} = e^0 = 1$, то $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

Легко видеть, что $\cos z = \operatorname{ch} iz$, $\sin z = \frac{\operatorname{sh} iz}{i}$. Косинус на действительной оси соответствует гиперболическому косинусу на мнимой оси и наоборот; аналогично для синусов. Поэтому формально все операции для тригонометрических и гиперболических функций проводятся одинаково с точностью до некоторых степеней числа i (если работать только с действительными числами, то всё будет происходить одинаково с точностью до степеней числа -1). Этим и объясняется сходство формул тригонометрии с соответствующими формулами для гиперболических функций, включая формулы для производных и разложения по формуле Тейлора.

§ 2. Комплекснозначные функции действительной переменной

Рассмотрим функцию f такую, что $D(f) \subset \mathbb{R}$, $E(f) \subset \mathbb{C}$. Тогда при всех $x \in D(f)$ можно рассмотреть $f_1(x) = \operatorname{Re} f(x)$ и $f_2(x) = \operatorname{Im} f(x)$:

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x), \quad \text{где} \quad f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{R}.$$

Так как $\mathbb{C}$ можно интерпретировать как плоскость $\mathbb{R}^2$, то комплекснозначная функция действительной переменной фактически есть двумерная вектор-функция, значения которой записываются как комплексные числа.

Определение 7.10. Комплекснозначная функция действительной переменной f называется непрерывной (дифференцируемой, непрерывно дифференцируемой, дважды дифференцируемой и т.д.) в точке или на промежутке, если таковыми же являются обе функции $f_1 = \operatorname{Re} f$ и $f_2 = \operatorname{Im} f$. Для дифференцируемой функции по определению $f'(x) = f_1'(x) + i f_2'(x)$.

Для комплекснозначных функций сохраняются формулы производной суммы, произведения и частного.

Лемма 7.7. *Если комплекснозначные функции действительной переменной f и g дифференцируемы в точке x_0, то функции $f+g$, fg и $\frac{f}{g}$ также дифференцируемы в этой точке, причём*

$$(f+g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

в точке x_0 (в последнем случае нужно требовать, чтобы $g(x_0) \neq 0$).

□ Докажем лемму для случая производной произведения. Утверждение для производной суммы доказывается проще, а для производной частного — несколько сложнее, но, по сути дела, аналогично.

Пусть $f = f_1 + i f_2$, $g = g_1 + i g_2$; функции f_1, f_2, g_1, g_2 дифференцируемы в точке x_0. Тогда

$$\begin{aligned}(fg)' &= ((f_1 g_1 - f_2 g_2) + i(f_1 g_2 + g_1 f_2))' = \\ &= (f_1 g_1 - f_2 g_2)' + i(f_1 g_2 + g_1 f_2)' = \\ &= (f_1' g_1 + g_1' f_1 - f_2' g_2 - g_2' f_2) + i(f_1' g_2 + g_2' f_1 + g_1' f_2 + f_2' g_1).\end{aligned}$$

Функция fg дифференцируема в точке x_0, так как существуют и конечны все производные в последнем выражении. Далее,

$$\begin{aligned}f'g + fg' &= (f_1' + i f_2')(g_1 + i g_2) + (f_1 + i f_2)(g_1' + i g_2') = \\ &= (f_1' g_1 - f_2' g_2 + f_1 g_1' - f_2 g_2') + i(f_2' g_1 + f_1' g_2 + f_2 g_1' + f_1 g_2').\end{aligned}$$

Легко видеть, что это выражение совпадает с $(fg)'$. ■

Пример 7.6. Доказать, что при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ имеет место равенство

$$(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x} \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R},$$

т.е. привычная для действительных λ формула сохраняется и при комплексных λ.

□ Пусть $\lambda = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Тогда $e^{\lambda x} = e^{ax}\cos bx + ie^{ax}\sin bx$,

$$\lambda e^{\lambda x} = (a+bi)(e^{ax}\cos bx + ie^{ax}\sin bx) =$$
$$= (ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx) + i(be^{ax}\cos bx + ae^{ax}\sin bx).$$

С другой стороны,

$$(e^{\lambda x})' = (ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx) + i(ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx),$$

что совпадает с $\lambda e^{\lambda x}$. ∎

Отметим, что производная комплекснозначной функции берётся по действительной переменной. Принципиально иная ситуация возникает при рассмотрении комплекснозначных функций комплексной переменной и при дифференцировании их по комплексной переменной. Здесь имеют место совершенно неожиданные эффекты (например, если функция дифференцируема в окрестности точки, то она имеет производные всех порядков в этой окрестности), которые студенты обычно изучают на III курсе (курс ТФКП — теория функций комплексной переменной).

§ 3. Многочлены

Функция комплексной переменной z

$$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ \ldots + a_{n-1}z + a_n,$$

где $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, 2, \ \ldots, n$; $a_0 \neq 0$; $n \in \mathbb{N}$, называется многочленом степени n от переменной z. Многочлен степени 0 — это постоянная функция a_0, где $a_0 \neq 0$. Нулевому многочлену не приписывается никакая степень (иногда удобно считать, что его степень равна $-\infty$). Если все $a_i \in \mathbb{R}$, то говорят о многочлене с действительными коэффициентами ($z \in \mathbb{C}$ или $z \in \mathbb{R}$ по смыслу задачи). Если все $a_i \in \mathbb{C}$, то говорят о многочлене с комплексными коэффициентами ($z \in \mathbb{C}$).

Если $P(z)$ — многочлен степени n, а $\alpha \in \mathbb{C}$, то многочлен $P(z)$ можно разделить с остатком на $z - \alpha$:

$$P(z) = Q(z)(z-\alpha) + r, \tag{7.1}$$

где $Q(z)$ — многочлен степени $n-1$; r — число ($r \in \mathbb{C}$).

Теорема 7.1 (Безу). *Остаток от деления многочлена $P(z)$ на двучлен $z-\alpha$ равен $P(\alpha)$.*

$\square$ Из (7.1) имеем при $z=\alpha$: $P(\alpha)=Q(\alpha)(\alpha-\alpha)+r=r$. $\blacksquare$

Следствие. *Многочлен $P(z)$ делится без остатка на $z-\alpha$ тогда и только тогда, когда число α является корнем многочлена $P(z)$, т.е. $P(\alpha)=0$.*

$\square$ Утверждение немедленно следует из теоремы Безу. $\blacksquare$

Таким образом, число α является корнем многочлена $P(z)$ тогда и только тогда, когда $P(z)=(z-\alpha)Q(z)$, где степень многочлена Q на единицу меньше степени P.

Теорема 7.2 (основная теорема алгебры). *Любой многочлен степени $n \geqslant 1$ с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.*

В настоящее время мы не располагаем математическим аппаратом для доказательства этой теоремы, поэтому примем её без доказательства. Доказана она будет очень просто в курсе ТФКП (и даже двумя способами — как простое следствие из теоремы Лиувилля или теоремы Руше).

Теорема 7.3. *Многочлен с комплексными коэффициентами*

$$P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n, \quad a_0\neq 0, \quad n=1,2,\ \ldots,$$

раскладывается в произведение линейных множителей

$$P(z)=a_0(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n),$$

где $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i=1,2,\ \ldots,\ n$ (среди чисел α_i, возможно, есть равные).

$\square$ По основной теореме алгебры $P(z)=(z-\alpha_1)P_1(z)$, где P_1 — многочлен степени $n-1$. Применяя такую же процедуру к $P_1(z)$, получим: $P(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)P_2(z)$, где $P_2(z)$ — многочлен степени $n-2$ и т.д. В конце концов дойдём до многочлена степени 0.

$$P(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)\cdot C, \tag{7.2}$$

где $P_n(z)\equiv C$ (комплексная постоянная). Здесь α_1, α_2, $\ldots$, α_n — комплексные числа, среди которых могут быть равные.

Если раскрыть скобки в правой части (7.2), то коэффициент при z^n будет равен C, т.е. $C = a_0$. ■

Определение 7.11. Комплексное число α называется корнем кратности k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) многочлена $P(z)$ степени n, если $P(z) = (z - \alpha)^k Q(z)$, где $Q(z)$ — многочлен такой, что $Q(\alpha) \neq 0$. При $k = 1$ корень называется простым, при $k \geqslant 2$ — кратным.

З а м е ч а н и е. Если $k = 0$, то число α не является корнем многочлена $P(z)$.

В общем случае, учитывая кратность корней, многочлен $P(z)$ степени $n \geqslant 1$ раскладывается на линейные множители:

$$P(z) = a_0(z - \alpha_1)^{k_1}(z - \alpha_2)^{k_2} \ldots (z - \alpha_m)^{k_m},$$

где все комплексные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ различны, корень α_i имеет кратность $k_i \geqslant 1$ ($i = 1, 2, \ldots, m$), при этом степень многочлена равна n, т.е. $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

Лемма 7.8. *Пусть* $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$, $\bar{P}(z) = \bar{a}_0 z^n + \bar{a}_1 z^{n-1} + \ldots + \bar{a}_{n-1} z + \bar{a}_n$ *(многочлен, сопряжённый к* P*). Число* $\alpha \in \mathbb{C}$ *является корнем многочлена* P *кратности* k *тогда и только тогда, когда число* $\bar{\alpha}$ *является корнем многочлена* $\bar{P}$ *той же кратности* k.

□ Так как $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$, то утверждение достаточно доказать лишь в одну сторону. Пусть $P(z) = (z - \alpha)^k Q(z)$, $Q(\alpha) \neq 0$. Тогда $\bar{P}(\bar{z}) = \bar{a}_0 \bar{z}^n + \bar{a}_1 \bar{z}^{n-1} + \ldots + \bar{a}_{n-1}\bar{z} + \bar{a}_n = \overline{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n} = \overline{P(z)} = \overline{(z - \alpha)^k Q(z)} = (\bar{z} - \bar{\alpha})^k \bar{Q}(\bar{z})$.

Так как $\bar{z}$ — любое комплексное число, то в последней записи можно заменить $\bar{z}$ на z. Получим

$$\bar{P}(z) = (z - \bar{\alpha})^k \bar{Q}(z), \quad \text{где} \quad \bar{Q}(\bar{\alpha}) = \overline{Q(\alpha)} \neq 0.$$

Это и означает, что $\bar{\alpha}$ — корень многочлена $\bar{P}$ кратности k. ■

Следствие. *Если* $P(z)$ *— многочлен с действительными коэффициентами, то числа* α *и* $\bar{\alpha}$ *одновременно являются его корнями, причём кратности их совпадают (т.е. недействительные корни появляются «парочками» — взаимно сопряжённые корни одинаковой кратности).*

□ Это очевидно из леммы 7.8, так как $P(z)$ и $\bar{P}(z)$ — один и тот же многочлен. ■

Теорема 7.4. *Многочлен степени $n \geqslant 1$ с действительными коэффициентами $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, где $a_n \neq 0$, раскладывается в произведение линейных и неприводимых квадратичных множителей:*

$$P(x) = a_0(x-\alpha_1)^{s_1}\ldots(x-\alpha_k)^{s_k}(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}\ldots(x^2+p_mx+q_m)^{t_m},$$

где $s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_m$ — целые неотрицательные числа; $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{R}$, $p_i^2 - 4q_i < 0$, $i = 1, \ldots, m$; $s_1 + \ldots + s_k + 2(t_1 + \ldots + t_m) = n$.

□ По теореме 7.3 и лемме 7.8

$$P(z) = a_0(z-\alpha_1)^{s_1}\ldots(z-\alpha_k)^{s_k}(z-\beta_1)^{t_1}(z-\bar{\beta}_1)^{t_1}\ldots \ldots(z-\beta_m)^{t_m}(z-\bar{\beta}_m)^{t_m},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — действительные корни многочлена P кратностей $s_1, \ldots, s_k$ соответственно, а $\beta_1, \bar{\beta}_1, \ldots, \beta_m, \bar{\beta}_m$ — оставшиеся корни (β_i и $\bar{\beta}_i$ имеют одинаковую кратность t_i, $i = 1, \ldots, m$). Очевидно, что степень многочлена равна $s_1 + \ldots + s_k + 2(t_1 + \ldots + t_m)$, т.е. эта сумма равна n.

Пусть $\beta = c + d\,i$, $d \neq 0$. Тогда $\bar{\beta} = c - d\,i$,

$$(z-\beta)\left(z-\bar{\beta}\right) = z^2 - (\beta+\bar{\beta})z + \beta\bar{\beta} = z^2 - 2cz + c^2 + d^2.$$

Получили квадратный трёхчлен с действительными коэффициентами z^2+pz+q, где $p = -2c$, $q = c^2+d^2$, который имеет отрицательный дискриминант $D = p^2-4q = -4d^2$. Остаётся символически заменить z на x, подчёркивая этим, что нас интересуют лишь действительные значения z, и мы получим нужное равенство. ■

Теорема 7.4 является примером утверждения, в формулировке которого отсутствуют комплексные числа (чисто действительное утверждение), а естественное доказательство его получается с выходом во множество комплексных чисел. Таких утверждений можно встретить немало в различных математических курсах и прикладных науках.

Кстати, квадратный трёхчлен с комплексными коэффициентами имеет такой же вид разложения на линейные множители, как и квадратный трёхчлен с действительными корнями в элементарной алгебре:

$$az^2 + bz + c = a(z - \alpha_1)(z - \alpha_2), \quad \text{где} \quad a, b, c \in \mathbb{Z}, \quad a \neq 0.$$

Корни α_1, α_2 — комплексные, и они обязательно существуют. Роль дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ сводится только к определению того, различны ли корни α_1 и α_2 или они совпадают (т.е. квадратный трёхчлен имеет один корень α_1 кратности 2). Если $D \neq 0$, то квадратный трёхчлен имеет два различных простых корня, если $D = 0$ — один корень кратности 2. В самом деле, решая квадратное уравнение $az^2+bz+c = 0$ методом выделения полного квадрата, получим, как и в элементарной алгебре:

$$a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0, \quad \text{т.е.} \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Если $D = 0$, то $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, и уравнение имеет один корень $\alpha_1 = -\frac{b}{2a}$ кратности 2 ($az^2+bz+c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2$). Если $D \neq 0$, то $z+\frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{2a}$ (писать $\pm$ не имеет смысла, так как $D \in \mathbb{C}$, и под $\sqrt{D}$ понимаются оба значения квадратного корня из ненулевого комплексного числа). Окончательно получим привычную формулу корней квадратного уравнения:

$$\alpha_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad D = b^2 - 4ac.$$

Пример 7.7. Решить уравнение $z^2 - (3 - 2i)z + 5 - i = 0$.
$\square$ $D = (3 - 2i)^2 - 4(5 - i) = -15 - 8i$. Найдём оба значения $\sqrt{-15 - 8i}$. Пусть $w = u + iv$, $w^2 = -15 - 8i$. Тогда $u^2 - v^2 = -15$; $2uv = -8$. Решая эту систему, получим: $v = -\frac{4}{u}$, $u^2 - \frac{16}{u^2} = -15$. Полученное биквадратное уравнение $u^4 + 15u^2 - 16 = 0$ решается при помощи замены $u^2 = t$. Квадратное уравнение $t^2 + 15t - 16 = 0$ имеет корни $t_0 = 1$, $t_2 = -16$. Так

как $u, v \in \mathbb{R}$, то $t = u^2 \geqslant 0$, т.е. $u^2 = 1$, $u = \pm 1$, $v = \mp 4$. Получили два значения квадратного корня: $\sqrt{-15-8i} = \pm(1-4i)$. Тогда корни данного уравнения равны

$$\alpha_1 = \frac{3-2i+1-4i}{2} = 2-3i, \quad \alpha_2 = \frac{3-2i-1+4i}{2} = 1+i. \quad \blacksquare$$

Пример 7.8. Найти все значения $\sqrt[3]{8}$, решая уравнение $z^3 - 8 = 0$.

$\square$ Левая часть раскладывается на множители:

$$(z-2)(z^2+2z+4) = 0.$$

Поэтому один из корней равен 2. Квадратный трёхчлен $x^2 + 2x + 4$ не имеет действительных корней ($D < 0$), поэтому $\sqrt[3]{8}$ имеет всего одно действительное значение 2. Найдём оставшиеся два комплексно-сопряжённых значения. Решаем квадратное уравнение $z^2 + 2z + 4 = 0$ по формуле чётного коэффициента:

$$z_{1,2} = -1 + \sqrt{1-4} = -1 + \sqrt{-3}.$$

Во множестве комплексных чисел $\sqrt{-3}$ имеет два значения $\pm i\sqrt{3}$, поэтому $\sqrt[3]{8}$ имеет 3 комплексных значения: 2, $-1+i\sqrt{3}$, $-1-i\sqrt{3}$ (такой же результат был получен в примере 7.3 другим способом). $\blacksquare$

§ 4. Разложение правильной дроби в сумму простейших дробей

Мы будем рассматривать действительные дробно-рациональные функции $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где P и Q — многочлены степеней соответственно m и n, где $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 0$, $n \geqslant 1$. Дробь называется правильной, если $m < n$, и неправильной, если $m \geqslant n$.

Лемма 7.9. *Если $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная дробь и α — действительный корень многочлена Q кратности $s = 1$, то*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^s} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,,$$

где $A \in \mathbb{R}$; $Q_1(x) = \dfrac{Q(x)}{x-\alpha}$ — многочлен, для которого α является корнем кратности $s-1$, а $P_1(x)$ — такой многочлен, что дробь $\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ является правильной.

$\square$ Так как α — корень Q кратности s, то $Q(x) = (x-\alpha)^s G(x)$, где $G(x)$ — многочлен такой, что $G(\alpha) \neq 0$. Рассмотрим число $A = \dfrac{P(\alpha)}{G(\alpha)}$ и многочлен $P_1(x) = \dfrac{P(x) - A\,G(x)}{x-\alpha}$ (это многочлен, так как $P(\alpha) - A\,G(\alpha) = 0$, и числитель делится нацело на $x - \alpha$).

Так как степень G меньше степени Q и степень P меньше степени Q, то степень числителя последней дроби меньше степени Q; значит, степень P_1 меньше степени Q_1, т.е. дробь $\dfrac{P_1}{Q_1}$ — правильная. Далее, $P(x) = A\,G(x) + P_1(x)(x-\alpha)$, откуда

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A\,\frac{G(x)}{Q(x)} + \frac{(x-\alpha)P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^s} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,. \qquad \blacksquare$$

З а м е ч а н и е. Утверждение леммы, очевидно, сохраняется, если все числа и многочлены считать комплексными.

Лемма 7.10. *Пусть $x^2 + px + q$ $(p, q \in \mathbb{R})$ — неприводимый квадратный трёхчлен, входящий в разложение многочлена $Q(x)$ на множители в степени $t \geqslant 1$. Тогда правильная дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ представляется в виде*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^t} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,,$$

где $A, B \in \mathbb{R}$; $Q_1(x) = \dfrac{Q(x)}{x^2+px+q}$ — многочлен, в разложение которого x^2+px+q входит в степени $t-1$, а $P_1(x)$ — такой многочлен, что дробь $\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ является правильной.

$\square$ Пусть $Q(x) = (x^2+px+q)^t G(x) = (x-\beta)^t (x-\bar\beta)^t G(x)$, где β и $\bar\beta$ — комплексно-сопряжённые корни квадратного трёхчлена x^2+px+q, а G — действительный многочлен такой, что $G(\beta) \neq$ $\neq 0$, $G(\bar\beta) \neq 0$. Рассмотрим действительные числа A и B такие,

что
$$A\beta + B = \frac{P(\beta)}{G(\beta)}\,. \tag{7.3}$$

Такие числа A и B определены единственным образом, так как если $\beta = \gamma_1 + \delta_1 i$, $\delta_1 \neq 0$, $\frac{P(\beta)}{G(\beta)} = \gamma_2 + \delta_2 i$, то равенство (7.3) перепишется так:

$$A(\gamma_1 + \delta_1 i) + B = \gamma_2 + \delta_2 i,$$

и числа A, B находятся из системы $A\gamma_1 + B = \gamma_2$, $A\delta_1 = \delta_2$, очевидно, имеющей единственное решение. Из (7.3) следует также, что $A\bar{\beta} + B = \frac{P(\bar{\beta})}{G(\bar{\beta})}$, так как P и G — многочлены с действительными коэффициентами.

Рассмотрим многочлен $P_1(x) = \frac{P(x) - (Ax + B)G(x)}{x^2 + px + q}$ (это — многочлен, так как $P(\beta) - (A\beta + B)G(\beta) = 0$, $P(\bar{\beta}) - (A\bar{\beta} + B)G(\bar{\beta}) = 0$; значит, числитель делится нацело на $x - \beta$ и на $x - \bar{\beta}$, следовательно, делится на $x^2 + px + q$). Пусть степень Q равна n. Так как степень G не превосходит $n - 2$, то степень многочлена $(Ax + B)G(x)$ не превосходит $n - 1$, т.е. меньше степени Q. Степень P также меньше степени Q, поэтому степень числителя последней дроби меньше степени Q.

Значит, степень P_1 меньше, чем $n - 2$, т.е. меньше степени Q_1, и дробь $\frac{P_1}{Q_1}$ — правильная. Далее,

$$P(x) = (Ax + B)G(x) + (x^2 + px + q)P_1(x),$$

откуда

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(Ax + B)G(x)}{Q(x)} + \frac{(x^2 + px + q)P_1(x)}{Q(x)} = \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^t} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,. \quad \blacksquare$$

Последовательно выделяя из многочлена $Q(x)$ линейные, а затем неприводимые квадратичные множители, и применяя соответственно леммы 7.9 и 7.10, получим разложение $\frac{P(x)}{Q(x)}$ в сумму правильных дробей вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\circledast}{(x-\alpha_1)^{s_1}} + \frac{\circledast}{(x-\alpha_1)^{s_1-1}} + \ldots + \\ + \frac{\circledast}{x-\alpha_1} + \frac{\circledast}{(x-\alpha_2)^{s_2}} + \ldots + \frac{\circledast}{x-\alpha_2} + \ldots + \\ + \frac{\circledast}{(x-\alpha_k)^{s_k}} + \frac{\circledast}{(x-\alpha_k)^{s_k-1}} + \ldots + \\ + \frac{\circledast}{(x-\alpha_k)} + \frac{\circledast x + \circledast}{(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}} + \frac{\circledast x + \circledast}{(x^2+p_1x+q_1)^{t_1-1}} + \ldots + \\ + \frac{\circledast x + \circledast}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots + \frac{\circledast x + \circledast}{(x^2+p_mx+q_m)^{t_m}} + \\ + \frac{\circledast x + \circledast}{(x^2+p_mx+q_m)^{t_m-1}} + \ldots + \frac{\circledast x + \circledast}{x^2+p_mx+q_m}$$

(здесь $Q(x) = a_0(x-\alpha_1)^{s_1}\ldots(x-\alpha_k)^{s_k}(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}\ldots(x^2+ + p_mx+q_m)^{t_m}$ — как разложение многочлена в теореме 7.4).

Все слагаемые последней суммы называются простейшими дробями. Все коэффициенты, обозначенные символом $\circledast$, являются действительными числами (вообще говоря, различными). Всего их $s_1+s_2+\ldots+s_k+2(t_1+\ldots+t_m) = n$ штук. Можно доказать, что они определены единственным образом. Процесс выделения слагаемых по леммам 7.9 и 7.10 прекратится, когда в знаменателе останется ровно один множитель вида $x-\alpha$ или x^2+px+q. Но такая правильная дробь сама будет простейшей. Таким образом, доказана

Теорема 7.5. *Любая правильная рациональная дробь с действительными коэффициентами раскладывается в сумму простейших дробей.*

Пример 7.9. Разложить в сумму простейших дробей:

а) $\frac{1}{x^2-a^2}$, $a \neq 0$; б) $\frac{1}{x^3-8}$; в) $\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$.

□

а) $\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x+a)(x-a)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x-a}$. Приводя к общему знаменателю, имеем: $1 = A(x-a) + B(x+a)$. При $x =$

$= a$ получим $B = \frac{1}{2a}$; при $x = -a$ получим $A = -\frac{1}{2a}$. Окончательно имеем: $\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)$.

б) $\frac{1}{x^3 - 8} = \frac{1}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$. Приводя в общему знаменателю, имеем: $1 = A(x^2+2x+4) + (x - 2)(Bx+C)$. При $x = 2$ получим $A = \frac{1}{12}$. Приравнивая коэффициенты при x^2, получим $A + B = 0$, т.е. $B = -\frac{1}{12}$. Приравнивая свободные члены, получим $4A - 2C = 1$, откуда $C = -\frac{1}{3}$. Окончательно имеем

$$\frac{1}{x^3-8} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{x+4}{x^2+2x+4}\right).$$

в) $\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} = \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2 - x^2} = \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}$. Приводя к общему знаменателю, имеем: $x^2+1 = (Ax+B)(x^2-x+1) + (Cx+D)(x^2+x+1)$. Приравнивая коэффициенты при x^3, x^2, x, 1, получим: $A + C = 0$, $B - A + C + D = 1$, $A - B + C + D = 0$, $B + D = 1$, откуда $A = C = 0$, $B = D = \frac{1}{2}$. Окончательно имеем

$$\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{x^2-x+1}\right). \qquad \blacksquare$$

Упражнения к главе VII

7.1. Доказать утверждение 5 леммы 7.1.

7.2. Доказать утверждения 1–10 леммы 7.2.

7.3. Применяя формулу Муавра, выразить $\cos 5\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin 5\varphi$ через $\sin\varphi$.

7.4. Найти все значения $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[6]{64}$, $\sqrt[5]{-4-4i}$.

7.5. Найти все значения $\operatorname{Ln} e$, $\operatorname{Ln}(1 + i\sqrt{3})$, $\operatorname{Ln}(-3-3i)$.

7.6. Доказать, что при всех $z \in \mathbb{C}$ имеют место равенства:

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2;$$
$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 + \cos z_1 \cdot \sin z_2.$$

7.7. Доказать, что при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ имеют место равенства

$$(\sin \lambda x)' = \lambda \cos \lambda x, \quad (\cos \lambda x)' = -\lambda \sin \lambda x \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}.$$

7.8. Разложить на линейные и неприводимые квадратичные множители многочлены $x^4 + 1$ и $x^5 - 1$.

7.9. Решить в комплексных числах уравнения:

а) $z^6 - 1 = 0$; б) $z^3 + 27 = 0$;

в) $z^2 - (3+3i)z + (6+7i) = 0$.

7.10. Разложить в сумму простейших дробей:

а) $\dfrac{2x-1}{x^2-5x+6}$; б) $\dfrac{2x^2-x+1}{x^3-x^2-x+1}$;

в) $\dfrac{1}{x^6-1}$.

7.11. Записать в тригонометрической форме комплексные числа:

$$1 + \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5} \quad \text{и} \quad \frac{1 - \sin\frac{\pi}{13} + i\cos\frac{\pi}{13}}{1-i}.$$

7.12. Найти наибольшее и наименьшее значения $|z|$ и $\arg z \in [-\pi; \pi]$, если $|z - 2 + i| \leqslant 2$.

7.13. Степень комплексного числа с комплексным показателем определяется как $z^v = e^{v \operatorname{Ln} z}$, где $z, v \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Так как $\operatorname{Ln} z$ определён неоднозначно, то и z^v определяется, вообще говоря, неоднозначно.

1) Доказать, что при $v = n \in \mathbb{Z}$ значение z^n определено однозначно и совпадает с обычным (если $z \neq 0$).
2) Доказать, что при $v = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, выражение $z^{\frac{1}{n}}$ принимает n значений, совпадающих со значениями $\sqrt[n]{z}$ (если $z \neq 0$).
3) Найти все значения i^i.

7.14. Доказать, что $(e^z)^n = e^{nz}$ при $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$.

7.15. Делится ли многочлен $8z^5 + 13z^4 + 5z^3 + 5z^2 - 3z - 8$ нацело на $z^2 + 1$?

ГЛАВА VIII. **НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ**

§ 1. Первообразная и неопределённый интеграл

Определение 8.1. Функция F называется первообразной функции f на промежутке I, если для всех $x \in I$ существует $F'(x) = f(x)$ (в концах промежутка, если они принадлежат ему, производная предполагается односторонней).

З а м е ч а н и е. Функции f и F считаются, вообще говоря, комплекснозначными функциями действительной переменной x. Если существенно, что f и F принимают действительные значения, это будет специально оговариваться.

По следствию из теоремы 4.15, если F_1 и F_2 непрерывны на промежутке I и во всех внутренних точках промежутка $F_1'(x) = F_2'(x)$, то $F_1(x) = F_2(x) + C$ во всех точках I, где C — постоянная. Утверждение это сохраняется и для комплекснозначных функций, если постоянную C считать комплексной (постоянны в отдельности $\mathrm{Re}(F_1 - F_2)$ и $\mathrm{Im}(F_1 - F_2)$, значит, и вся функция $F_1 - F_2$). Значит, все первообразные одной и той же функции на данном промежутке отличаются друг от друга на постоянную.

Определение 8.2. Множество всех первообразных функции f на промежутке I называется неопределённым интегралом от f на этом промежутке. Применяется обозначение $\displaystyle\int f(x)\,dx.$

Символ dx в конце этой записи, строго говоря, не является дифференциалом. Он играет ту же роль, что и твёрдый знак в конце слова в старой русской орфографии. Его можно не писать, и ничего при этом не изменится. Но если этот символ чисто формально воспринимать как дифференциал, то возникают удобства при проведении некоторых действий с неопределёнными (а позже и с определёнными) интегралами, например, при интегрировании подстановкой. Поэтому мы будем придерживаться этой исторически сложившейся символики.

Применяются записи типа $\int 4x^3dx = x^4 + C$ (правильнее было бы писать $\int 4x^3dx = \{x^4 + C,\ C \in \mathbb{R}\}$). Отметим также, что $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$ на промежутке $(0; +\infty)$ и $\int \frac{1}{x}\,dx =$ $= \ln(-x) + C$ на промежутке $(-\infty; 0)$. Эти две записи объединяются одной формулой $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$. Понимать её нужно так:

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln x + C_1, & \text{если } x > 0; \\ \ln(-x) + C_2, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

(неопределённый интеграл вводится только для промежутка, для простоты применяется единая запись для двух промежутков сразу).

Аналогично, $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$ (своя постоянная на каждом из двух промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$); $\int \frac{dx}{\cos^2 x} =$ $= \operatorname{tg} x + C$ (своя постоянная на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$), и т.д.

Приведём так называемые табличные интегралы, которые являются обращением формул дифференцирования:

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \text{если} \quad \alpha \neq -1; \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \text{если} \quad a > 0 \text{ и } a \neq 1; \qquad \int e^x\,dx = e^x + C;$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C; \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C; \qquad \int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C; \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C, \text{ если } a \neq 0;$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \text{ если } a > 0$$

(последние два интеграла соответствуют стандартным формулам дифференцирования, если $a = 1$; в общем случае легко произвести проверку дифференцированием правой части). Все приведённые формулы справедливы на каждом промежутке области определения подынтегральной функции.

Приведём пример вычисления интеграла с применением комплекснозначных функций действительной переменной.

Пример 8.1. Вычислить $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ и $\int e^{ax}\sin bx\,dx$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 > 0$.

□ Из примера 7.6 следует, что

$$\int e^{(a+bi)x}dx = \frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi} + C = \frac{e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} + C =$$
$$= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left((a\cos bx + b\sin bx) + i(a\sin bx - b\cos bx)\right) + C,$$

где $C \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \operatorname{Re}\int e^{(a+bi)x}dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} + C,$$
$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \operatorname{Im}\int e^{(a+bi)x}dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C$$

(в последних двух случаях, строго говоря, нужно писать C_1 и C_2 — действительная и мнимая части комплексной постоянной C, но на практике постоянная всегда обозначается C, независимо от её происхождения). ■

Можно производить переобозначения постоянных для упрощения записи постоянного выражения, которое всё равно принимает произвольные действительные или комплексные значения; можно выражения типа $2C$, $-C$, $C+1$ и т.д. обозначать просто C (если только старое значение C нигде больше не встречается). Например, при $a > 0$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + \frac{\pi}{2} + C.$$

Обозначим $\frac{\pi}{2} + C$ через C (всё равно это произвольная постоянная), получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\arccos \frac{x}{a} + C$$

(что и так ясно, потому что $\left(-\arccos \frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$). Аналогично,

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C.$$

Пример 8.2. Вычислить $\displaystyle\int \frac{dx}{2x+1}$.

□ Легко видеть, что $(\ln|2x+1|)' = \frac{2}{2x+1}$, поэтому

$$\left(\frac{1}{2}\ln|2x+1|\right)' = \frac{1}{2x+1} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C.$$

С другой стороны, так как $\frac{1}{2}\ln|2x+1| = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left|x + \frac{1}{2}\right|$, то, обозначив $\frac{1}{2}\ln 2 + C$ через C, получим

$$\int \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2}\ln\left|x + \frac{1}{2}\right| + C. \qquad ■$$

§ 2. Основные приёмы интегрирования

Теорема 8.1 (линейность неопределённого интеграла). *Если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ и $\int g(x)\,dx = G(x) + C$ на промежутке I, то*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha F(x) + \beta G(x) + C,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

□ Так как во всех точках промежутка $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$, то $(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha f(x) + \beta g(x)$. ■

Пример 8.3.
1) $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$;
2) $\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$;
3) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \operatorname{tg} x - x + C$.

Теорема 8.2 (интегрирование по частям). *Пусть функции u и v дифференцируемы на промежутке I. Тогда*

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx \qquad (8.1)$$

(из существования одного из интегралов следует существование другого и выполнение равенства (8.1)*, обе части этого равенства определены с точностью до прибавления произвольной постоянной).*

□ Из формулы производной произведения двух функций следует, что при всех $x \in I$

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - v(x)u'(x). \qquad (8.2)$$

Так как $\int (u(x)v(x))'dx = u(x)v(x) + C$, то из (8.2) следует доказательство теоремы. ■

Символически теорема 8.2 записывается так:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Здесь удобна запись интеграла с dx в конце, так как для дифференциалов $dv = v'(x)\,dx$, $du = u'(x)\,dx$.

Пример 8.4. Вычислить $\displaystyle\int \ln x\,dx$.

□ Положим $u = \ln x$, $dv = dx$. Тогда $du = \frac{dx}{x}$, можно взять $v = x$ и

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x\ln x - x + C. \qquad ■$$

Пример 8.5. Вычислить $\displaystyle\int x\cos bx\,dx$, где $b \neq 0$.

$\square$ Положим $u = x$, $dv = \cos bx\,dx$. Тогда $du = dx$, можно взять $x = \dfrac{\sin bx}{b}$ и

$$\int x\cos bx\,dx = x\cdot\frac{\sin bx}{b} - \frac{1}{b}\int \sin bx\,dx =$$
$$= \frac{1}{b}\,x\sin bx + \frac{1}{b^2}\cos bx + C. \quad \blacksquare$$

Заметим, что мы ищем v как некоторую функцию такую, что $v'(x)$ известна; фактически приходится брать интеграл от «части» всей подынтегральной функции (отсюда и термин «интегрирование по частям»).

Теорема 8.3 (интегрирование подстановкой, или замена переменной в неопределённом интеграле). *Пусть $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ на промежутке I, а функция $\varphi(t)$ дифференцируема на промежутке J таком, что $\varphi(J) \subset I$. Тогда $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C$ на промежутке J (эта теорема имеет место для действительнозначных функций).*

$\square$ Функция F дифференцируема на промежутке I, причём $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in I$, функция φ дифференцируема на промежутке J. Тогда по формуле производной сложной функции (для комплекснозначных дифференцируемых функций значения внутренней функции комплексны, и формула эта не работает):

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) \quad \text{при всех} \quad t \in J,$$

откуда следует доказательство теоремы. $\blacksquare$

Пример 8.6. Из формулы $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ следует, что $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$. Пользуясь теоремой 8.3, получим отсюда табличный интеграл $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2}$, $a \neq 0$. Сделаем замену $x = at$. Тогда

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{a\,dt}{a^2t^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$
$$= \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Аналогично, обращая формулу производной функции $\arcsin x$, после замены $x = at$, $a > 0$, можно получить табличный интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

В теореме о замене переменной формальный символ dx преобразуется формально в $\varphi'(t)\,dt$, что соответствует формуле для дифференциала. Этим в первую очередь и объясняется удобство символа dx в записи для неопределённого интеграла.

Пример 8.7. Вычислить $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$, где $a > 0$.

□ Так как $x \in [-a; a]$, то можно сделать замену $x = a\sin t$, где $t \in \left[-\frac{\pi}{2}\,; \frac{\pi}{2}\right]$, т.е. $t = \arcsin\frac{x}{a}$. Тогда

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a\cos t\,dt =$$

$$= a^2 \int \cos^2 t\,dt = a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right) + C$$

(здесь мы воспользовались тем, что $\cos t \geqslant 0$, и $\sqrt{1 - \sin^2 t} = \cos t$, затем применили равенство из примера 8.3). При замене переменной в неопределённом интеграле нужно возвращаться к старой переменной (искомые первообразные — функции от x, а не от t). Так как $\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\cdot\frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{2}{a^2}\,x\sqrt{a^2 - x^2}$, то

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C. \qquad \blacksquare$$

Пример 8.8. Вычислить $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}}$, где $A \neq 0$.

□ Сделаем замену $t = x + \sqrt{x^2 + A}$ (подстановка Эйлера). Для аккуратного применения теоремы 8.3 нужно выразить x через t. Так как $t \geqslant x$, то равенство $t - x = \sqrt{x^2 + A}$ равносильно $(t - x)^2 = x^2 + A$, откуда легко получить $x = \frac{t^2 - A}{2t} = \frac{1}{2}\left(t - \frac{A}{t}\right)$;

$dx = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{A}{t^2}\right) dt = \frac{1}{2}\, \frac{t^2 + A}{t^2}\, dt$; $\sqrt{x^2 + A} = t - \frac{t^2 - A}{2t} = \frac{t^2 + A}{2t}$. Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x + \sqrt{x^2 + A}| + C.$$

Этот интеграл обычно называется «длинным логарифмом». Полученное равенство легко проверить дифференцированием функции $\ln|x + \sqrt{x^2 + A}|$. ■

Пример 8.9. Вычислить $\int \sqrt{x^2 + A}\, dx$, где $A \neq 0$.

□ Сделав ту же замену, что в примере 8.8, получим

$$\int \sqrt{x^2 + A}\, dx = \int \frac{(t^2 + A)^2}{4t^3}\, dt = \frac{1}{4} \int \left(t + \frac{2A}{t} + \frac{A^2}{t^3}\right) dt =$$

$$= \frac{t^2}{8} + \frac{A}{2} \ln|t| - \frac{A^2}{8t^2} + C = \frac{1}{8}\left(t + \frac{A}{t}\right)\left(t - \frac{A}{t}\right) + \frac{A}{2} \ln|t| + C.$$

Так как $t - \frac{A}{t} = 2x$, $t + \frac{A}{t} = 2\sqrt{x^2 + A}$, то

$$\int \sqrt{x^2 + A}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + A} + \frac{A}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + A}| + C. \quad ■$$

Интегралы из примеров 8.7–8.9 принято считать табличными.

§ 3. Интегрирование рациональных дробей

Пример 8.10. Вычислить $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$, где $a \neq 0$.

□ В примере 7.9 показано, что $\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a}\right)$. Интегралы $\int \frac{dx}{x - a}$ и $\int \frac{dx}{x + a}$ после замен соответственно $t = x - a$ и $t = x + a$ превращаются в табличный интеграл $\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$, поэтому

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\ln|x - a| - \ln|x + a| + C\right) = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C.$$

Этот интеграл принято считать табличным. Он обычно называется «высоким логарифмом». ■

В примере 8.10 мы разложили рациональную дробь $\frac{1}{x^2-a^2}$ в сумму простейших дробей, проинтегрировать каждую из которых не представило труда. Так как любая правильная рациональная дробь раскладывается в сумму простейших дробей (теорема 7.5), то для интегрирования правильной дроби достаточно научиться интегрировать простейшие дроби. А неправильная дробь после деления с остатком числителя на знаменатель представляется в виде суммы многочлена и правильной дроби, так что таким образом мы сможем проинтегрировать любую рациональную дробь. Принято различать 4 типа простейших дробей.

1) $R(x) = \frac{A}{x-\alpha}$. После замены $x - \alpha = t$ имеем

$$\int \frac{A}{x-\alpha}\, dx = A \ln|t| + C = A\ln|x-\alpha| + C.$$

2) $R(x) = \frac{A}{(x-\alpha)^n}$, $n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$ После замены $x-\alpha = t$ имеем

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^n}\, dx = A\,\frac{t^{-n+1}}{-n+1} + C = A \cdot \frac{(x-\alpha)^{-n+1}}{-n+1} + C.$$

3) $R(x) = \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, где $p^2 - 4q < 0$.

Выделим в знаменателе полный квадрат: $x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2$, где $a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$. Тогда сделаем замену $x + \frac{p}{2} = t$:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\, dx = \int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{t^2+a^2}\, dt = \\ = A\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} + B_1 \int \frac{dt}{t^2+a^2}\,, \qquad (8.3)$$

где $B_1 = B - \frac{Ap}{2}$. В первом из слагаемых сделаем замену $u = t^2 + a^2$, откуда $du = 2t\,dt$, и

$$\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(t^2+a^2) + C$$

(модуль не нужен, так как $t^2+a^2>0$). Второе слагаемое в (8.3) — табличный интеграл. Возвращаясь к старой переменной, получим

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{B_1}{a}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{2a}+C.$$

4) $R(x) = \dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, где $p^2-4q<0$, $n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots$ Аналогично случаю дроби 3-го типа выделим в знаменателе полный квадрат и сделаем замену $x+\frac{p}{2}=t$. Тогда

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,dx = A\int\frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^n}+B_1\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}\,, \quad (8.4)$$

где $a^2=q-\frac{p^2}{4}>0$, $B_1=B-\frac{Ap}{2}$. В первом из слагаемых сделаем замену $u=t^2+a^2$, откуда, как и в случае дроби 3-го типа,

$$\int\frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^n}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^n}=\frac{1}{2}\,\frac{u^{-n+1}}{-n+1}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{(x^2+px+q)^{-n+1}}{-n+1}+C.$$

Во втором слагаемом в (8.4) сделаем замену $t=a\operatorname{tg}u$, где $u\in\left(-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right)$, т.е. $u=\operatorname{arctg}\frac{t}{a}$. Тогда

$$\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}=\int\frac{\frac{a\,du}{\cos^2 u}}{(a^2+a^2\operatorname{tg}^2 u)^n}=$$

$$=\frac{a}{a^{2n}}\int\frac{du}{\cos^2 u\left(\frac{1}{\cos^2 u}\right)^n}=a^{1-2n}\int\cos^{2n-2}u\,du.$$

Но при любом чётном показателе степени ($2m=2,\ 4,\ 6,\ \ldots$) величина $\cos^{2m}x$ есть линейная комбинация функций 1, $\cos 2x$, $\cos 4x$, $\ldots$, $\cos 2mx$, интегралы от которых легко берутся. Докажем существование такого разложения методом индукции. При $m=1$ имеем: $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$. Пусть утверждение верно для фиксированного m, т.е.

$$\cos^{2m}x=\alpha_0+\alpha_1\cos 2x+\ \ldots+\alpha_m\cos 2mx.$$

Тогда

$$\cos^{2m+2} x = (\alpha_0 + \alpha_1 \cos 2x + \ \ldots + \alpha_m \cos 2mx) \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2}\,.$$

Остаётся воспользоваться тем, что

$$\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}\,,$$

$$\cos 2kx \cdot \cos 2x = \frac{1}{2}\,(\cos(2k+2)x + \cos(2k-2)x), \quad k = 2, 3, \ \ldots, \ m,$$

и нужное разложение будет получено для значения $m+1$. Выписать явно такое разложение и, следовательно, выписать в общем случае искомый интеграл не представляется возможным; доказана лишь возможность интегрирования в каждом конкретном случае.

Пример 8.11. Вычислить $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3}$, $a > 0$.

☐ После замены $x = a \operatorname{tg} t$ получим

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{1}{a^5} \int \cos^4 t \, dt$$

(выкладки были проведены выше в общем случае, сейчас $n = 3$). Так как

$$\cos^4 t = \left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t}{4} =$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{4} \cdot \frac{1 + \cos 4t}{2} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{8} \cos 4t, \quad \text{то}$$
$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{1}{a^5} \left(\frac{3}{8}\, t + \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{1}{32} \sin 4t\right) + C.$$

Так как $t \in \left(-\frac{\pi}{2}\,; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg} t = \frac{x}{a}$, то $\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1 + \dfrac{x^2}{a^2}$; $\cos t = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$; $\sin t = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$; $\sin 2t = 2 \sin t \cos t = \dfrac{2ax}{a^2 + x^2}$; $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1 = \dfrac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}$; $\sin 4t = \dfrac{4ax(a^2 - x^2)}{(a^2 + x^2)^2}$.

Окончательно

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3} =$$

$$= \frac{3}{8a^5}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^4(a^2+x^2)} + \frac{x(a^2-x^2)}{8a^4(a^2+x^2)^2} + C. \quad \blacksquare$$

Пример 8.12. Вычислить $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-8}$.

$\square$ Разложение дроби в сумму простейших найдено в примере 7.9. Тогда

$$\int \frac{dx}{x^3-8} = \frac{1}{12}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{12}\int \frac{x+4}{x^2+2x+4}\,dx. \tag{8.5}$$

Интеграл в первом слагаемом равен $\ln|x-2| + C$. Во втором слагаемом сделаем замену $x+1=t$. Тогда

$$\int \frac{x+4}{x^2+2x+4}\,dx = \int \frac{t+3}{t^2+3}\,dt = \int \frac{t\,dt}{t^2+3} + 3\int \frac{dt}{t^2+3} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln(t^2+3) + \frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+4) + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Окончательно

$$\int \frac{dx}{x^3-8} =$$
$$= \frac{1}{12}\ln|x-2| - \frac{1}{24}\ln(x^2+2x+4) - \frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C. \quad \blacksquare$$

Пример 8.13. Вычислить $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{x^6+1}$.

$\square$ Сделаем замену $t = x^6+1$, тогда $dt = 6x^5\,dx$ и

$$\int \frac{x^5\,dx}{x^6+1} = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{6}\ln|t| + C = \frac{1}{6}\ln(x^6+1) + C. \quad \blacksquare$$

Последний пример показывает, что, хотя алгоритмический способ интегрирования правильной дроби разложением в сумму простейших всегда приведёт к цели, но в каждом конкретном случае возможно более простое решение. В примере 8.13 решение алгоритмическим способом было бы чрезвычайно громоздким.

§ 4. Интегрирование некоторых иррациональных и трансцендентных функций

Во второй части курса (глава XII) будет доказано, что любая непрерывная на промежутке функция имеет первообразную. Но не всегда эта первообразная выражается через известные нам элементарные функции. Если первообразная не является суперпозицией элементарных функций, то говорят, что интеграл не берётся. Примерами неберущихся интегралов являются $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$, $\int \frac{e^x}{x}\,dx$ и т.д. В §3 было установлено, что интеграл от рациональной функции обязательно берётся, и был указан алгоритмический способ нахождения таких интегралов. Сейчас мы укажем некоторые классы иррациональных функций, первообразные от которых являются суперпозициями элементарных функций, и укажем алгоритмические способы нахождения этих интегралов (опять-таки в каждом конкретном случае возможны более простые и красивые способы решения).

Будем обозначать через $R(u_1, u_2, \ \ldots, u_n)$ выражение, полученное из $u_1, u_2, \ \ldots, u_n$ и постоянных при помощи арифметических действий — сложения, умножения и деления («рациональная функция от $u_1, u_2, \ \ldots, u_n$»).

I. $R\left(x, \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \ \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_k}\right)dx$, где $r_1, \ \ldots, r_k \in \mathbb{Q}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$.

Пусть $r_1 = \frac{m_1}{n}, \ \ldots, r_k = \frac{m_k}{n}$, где $m_1, \ \ldots, m_k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, т.е. дроби $r_1, \ \ldots, r_k$ приведены к общему знаменателю. Сделаем замену $t = \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n}$, т.е. $x = \dfrac{dt^n - b}{a - ct^n} = R_0(t)$. Тогда интеграл примет вид $\int R(R_0(t), \ t^{m_1}, \ \ldots, t^{m_k}) \cdot R_0'(t)dt$. Так как производная от рациональной функции одной переменной также является рациональной функцией, то интеграл свёлся к интегралу от рациональной функции; значит, он берётся.

Пример 8.14. Вычислить $\int \dfrac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$.

□ Так как $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, то общий алгоритм рекомендует сделать замену $t = x^{1/6}$, т.е. $x = t^6$. Интеграл примет вид

$\int \frac{1+t^3}{1+t^2}\cdot 6t^5\,dt = 6\int \frac{t^8+t^5}{t^2+1}\,dt$. Полученная дробь является неправильной. Разделим с остатком числитель на знаменатель:
$$\frac{t^8+t^5}{t^2+1} = t^6 - t^4 + t^3 + t^2 - t - 1 + \frac{t+1}{t^2+1}\,;$$
после этого получим
$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx =$$
$$= \frac{6}{7}\,t^7 - \frac{6}{5}\,t^5 + \frac{3}{2}\,t^4 + 2t^3 - 3t^2 - 6t + 3\ln(t^2+1) + 6\operatorname{arctg} t + C,$$
где $t = \sqrt[6]{x}$ (делать явно подстановку в ответ вряд ли имеет смысл). ■

II. $\displaystyle\int x^p(ax^q+b)^r\,dx$, где $p,q,r\in\mathbb{Q}$; $a,b\in\mathbb{R}$, $a,b\neq 0$, $q\neq 0$ («интеграл от дифференциального бинома»).

Сделаем замену $x^q = t$. Тогда $x = t^{1/q}$. Интеграл примет вид
$$\int t^{p/q}(at+b)^r\cdot\frac{1}{q}\,t^{\frac{1}{q}-1}dt = \frac{1}{q}\int t^s(at+b)^r\,dt,$$
где $s = \dfrac{p+1}{q} - 1 \in \mathbb{Q}$. Можно доказать (это сделал русский математик П.Л. Чебышёв в XIX в.), что интеграл этот берётся тогда и только тогда, когда выполняется одно из трёх условий.

а) $s\in\mathbb{Z}$, в этом случае имеем $\int R_0(t,(at+b)^r)\,dt$ — интеграл берётся методом, изложенным в п. I.

б) $r\in\mathbb{Z}$, в этом случае имеем $\int R_0(t,t^s)\,dt$ — интеграл берётся методом, изложенным в п. I.

в) $s+r\in\mathbb{Z}$, в этом случае интеграл преобразуется к виду $\int t^{s+r}\left(\frac{at+b}{t}\right)^r dt = \int R_0\left(t,\left(\frac{at+b}{t}\right)^r\right)dt$ — берётся методом, изложенным в п. I.

Пример 8.15. Вычислить $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

□ После замены $x^3 = t$ интеграл примет вид $\frac{1}{3}\int t^{-2/3}(1+t)^{-1/3}dt$ (т.е. это случай в); $s = -\frac{2}{3}$, $r = -\frac{1}{3}$, $s+r = -1 \in \mathbb{Z}$). Переписав интеграл в виде $\frac{1}{3}\int \frac{1}{t}\sqrt[3]{\frac{t}{1+t}}\,dt$, сделаем замену $\sqrt[3]{\dfrac{t}{1+t}} = y$, т.е. $t = \dfrac{y^3}{1-y^3}$, $dt = \dfrac{3y^2}{(1-y^3)^2}\,dy$. Интеграл свёлся к интегралу от рациональной функции

$$\int \frac{dy}{1-y^3}\,.$$

Мы уже вычисляли очень похожий интеграл (пример 8.12). Аналогично получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \frac{1}{3}\ln|1-y| + \frac{1}{6}\ln(1+y+y^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2y+1}{\sqrt{3}} + C,$$

где $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$. ■

III. $\displaystyle\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

а) Если $b^2 - 4ac = 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$, и интерес представляет лишь случай $a > 0$ (иначе $\sqrt{ax^2+bx+c}$ определён в единственной точке x_1 и нет промежутка, на котором можно рассматривать первообразную; все рассматриваемые функции должны быть действительнозначными, иначе возникают проблемы, с которыми нам справиться пока затруднительно). Тогда подынтегральная функция является рациональной на каждом из промежутков $(-\infty; x_1)$ и $(x_1; +\infty)$.

б) Если $b^2 - 4ac > 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, и если $a > 0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}(x - x_1)\sqrt{\dfrac{x-x_2}{x-x_1}}$ (знак $+$ или $-$ зависит от промежутка, на котором рассматривается первообразная). Тогда интеграл примет вид $\int R_1\left(x, \sqrt{\dfrac{x-x_2}{x-x_1}}\right)dx$, который сводится к интегралу от рациональной функции заменой $t = \sqrt{\dfrac{x-x_2}{x-x_1}}$. Если $a < 0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{-a}(x - x_1)\sqrt{\dfrac{x_2-x}{x-x_1}}$ и применяется замена $t = \sqrt{\dfrac{x_2-x}{x-x_1}}$.

в) Если $b^2 - 4ac < 0$, то интерес представляет лишь случай $a > 0$ (иначе $ax^2 + bx + c < 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$). Тогда рекомендуются подстановки Эйлера $ax^2 + bx + c = \pm\sqrt{a}x \pm t$

(годится любая комбинация знаков). При помощи такой подстановки вычислялись интегралы в примерах 8.8 и 8.9.

IV. $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)dx.$

Алгоритмическим (но, как правило, далеко не самым удобным) способом вычисления такого интеграла является универсальная тригонометрическая подстановка $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$ (последнее равенство можно формально получить из соотношения $x = 2\operatorname{arctg} t$, но здесь возникает проблема с промежутком, на котором изменяется x, поэтому лучше действовать так: $dt = \frac{1}{2}\cdot\dfrac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)dx = \dfrac{1+t^2}{2}\,dx$, откуда $dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$).

Интеграл сводится к интегралу от рациональной функции.

Пример 8.16. Вычислить $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x - 3\cos x + 5}$.

□ После универсальной подстановки интеграл примет вид

$$\int \frac{dt}{4t^2+2t+1} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{4t+1}{\sqrt{3}} + C,$$

где $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. ■

В некоторых случаях рекомендуются другие подстановки. Например, если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то применяется замена $t = \operatorname{tg} x$; если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то применяется замена $t = \cos x$; если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то применяется замена $t = \sin x$.

V. $\displaystyle\int R(e^{\alpha x})dx$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

После замены $e^{\alpha x} = t$, т.е. $x = \frac{1}{\alpha}\ln t$, интеграл приводится к виду $\frac{1}{\alpha}\int R(t)\cdot\frac{dt}{t}$, т.е. к интегралу от рациональной функции.

Пример 8.17. Вычислить $\displaystyle\int \frac{1+e^{x/2}}{(1+e^{x/4})^2}\,dx.$

□ После замены $e^{x/4} = t$ интеграл приведётся к виду

$$4 \int \frac{1+t^2}{t(1+t)^2}\, dt.$$

Рациональная функция под знаком интеграла раскладывается на простейшие дроби так: $\dfrac{1+t^2}{t(1+t)^2} = \dfrac{A}{t} + \dfrac{B}{1+t} + \dfrac{C}{(1+t)^2}$. Приводя к общему знаменателю, имеем

$$1 + t^2 = A(1+t)^2 + Bt(1+t) + Ct.$$

Подставляя $t = 0$, получим $A = 1$. Подставляя $t = -1$, получим $C = -2$. Приравнивая коэффициенты при t^2, получим $A + B = 1$, откуда $B = 0$. Интеграл примет вид

$$\int \left(\frac{4}{t} - \frac{8}{(1+t)^2} \right) dt = 4 \ln|t| + \frac{8}{1+t} + C = x + \frac{8}{1+e^{x/4}} + C. \blacksquare$$

Упражнения к главе VIII

8.1. Имеют ли следующие функции первообразную на указанном промежутке? Если да, то найти неопределённый интеграл от этих функций:

а) $f(x) = |x|$ на $(-\infty; +\infty)$;

б) $f(x) = \operatorname{sign} x$ на $(-1; 1)$;

в) $f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$ на $(-1; 1)$;

г) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$ на $(-1; 1)$;

д) $f(x) = \max(1, x^2)$ на $(-\infty; +\infty)$.

8.2. Доказать, что:

а) если нечётная функция f имеет первообразную F на интервале $(-a; a)$, $a > 0$, то F — чётная функция.

б) если чётная функция f имеет первообразную F на интервале $(-a; a)$, $a > 0$, то существует единственная первообразная $F(x) + C$, являющаяся нечётной функцией.

8.3. Доказать, что если периодическая функция f имеет первообразную F на $(-\infty; +\infty)$, то существует постоянная $k \in$

$\in \mathbb{R}$ такая, что $F(x)+kx$ — периодическая функция с тем же периодом, что и функция f.

8.4. Вычислить интегралы:

а) $\int x^3 \ln x\,dx$;

б) $\int (x^2+1)e^{3x}\,dx$;

в) $\int xe^{3x}\cos 2x\,dx$;

г) $\int \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$;

д) $\int x^2 \sin\ln x\,dx$;

е) $\int \operatorname{tg} x\,dx$;

ж) $\int \operatorname{ctg} x\,dx$;

з) $\int \dfrac{dx}{\cos x}$;

и) $\int \dfrac{dx}{\sin x}$;

к) $\int \dfrac{dx}{(x^2+1)^2}$;

л) $\int \dfrac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$;

м) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

8.5. Вычислить интегралы от рациональных функций:

а) $\int \dfrac{x^2-2x+3}{x^2+6x+8}\,dx$;

б) $\int \dfrac{2x+1}{x^3-3x+2}\,dx$;

в) $\int \dfrac{dx}{x^4+x^2+1}$;

г) $\int \dfrac{x^4}{x^3+27}\,dx$.

8.6. Вычислить интегралы от иррациональных и трансцендентных функций:

а) $\int \dfrac{dx}{\sqrt[5]{(x-2)^3(x+3)^2}}$;

б) $\int x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\,dx$;

в) $\int \dfrac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$, $a, b \neq 0$;

г) $\int \dfrac{xe^x}{(1+e^x)^2}\,dx$.

Литература

1. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Т. 1. – М.: Высшая школа, 1981. – 688 с.
2. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Т. 1. – 4-е изд. – М.: Наука, 1990. – 528 с.
3. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. – М.: Наука, 1988. – 816 с.
4. *Яковлев Г.Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. – М.: Физматлит, 2001. – 400 с.
5. *Бесов О.В.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. – М.: МФТИ, 2004. – 328 с.
6. *Иванов Г.Е.* Лекции по математическому анализу. Т. 1. – М.: МФТИ, 2004. – 359 с.
7. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – 7-е изд. – М.: Наука, 1969. – 608 с.
8. *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу. Предел, непрерывность, дифференцируемость /под ред. Л.Д. Кудрявцева. – 2-е изд. – М.: Физматлит, 2003. – 496 с.
9. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – 10-е изд. – М.: Наука, 1990. – 624 с.

Учебное издание

Петрович Александр Юрьевич

ЛЕКЦИИ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
Часть I
Введение в математический анализ

Редактор *О.П. Котова*
Корректор *И.А. Волкова*

Подписано в печать 24.02.2012. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Усл. печ. л. 17,25.
Уч.-изд. л. 17,0. Тираж 600 экз. Заказ № 45.

федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: rio@mail.mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9