МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А. Ю. Петрович

ЛЕКЦИИ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
Часть 2
Многомерный анализ, интегралы и ряды

Допущено
Учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Российской Федерации
по образованию в области прикладных математики и физики
в качестве учебного пособия для студентов вузов
по направлению «Прикладные математика и физика»

МОСКВА
МФТИ
2012

УДК 517(075)
ББК 22.161я73
П30

Рецензенты:
Кафедра математики и естественно-научных дисциплин Финансово-промышленной академии при правительстве Московской области (зав. кафедрой доктор физико-математических наук, профессор *К. Л. Самаров*)
Доктор физико-математических наук, профессор *В. В. Власов*

Петрович, А. Ю.
П30 Лекции по математическому анализу. В 3-х частях: учеб. пособие. – М.: МФТИ, 2012.
ISBN 978-5-7417-0437-0
Ч. 2. Многомерный анализ, интегралы и ряды. – 2012. – 268 с.
ISBN 978-5-7417-0445-5

Пособие состоит из 9 глав и содержит развёрнутое изложение курса лекций, читаемых автором студентам I курса МФТИ. Разобрано большое количество примеров, иллюстрирующих теоретический материал. К каждой главе приложен список упражнений для самостоятельной работы.

Предназначено для студентов МФТИ. Будет полезно для студентов физико-математических и инженерно-физических специальностей, изучающих математический анализ, а также для преподавателей, ведущих занятия по математическому анализу.

УДК 517(075)
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-7417-0437-0
ISBN 978-5-7417-0445-5 (ч. 2)

Оглавление

Предисловие 6

Глава IX. Функции многих переменных 8

§ 1. Точечное пространство $\mathbb{R}^n$. Некоторые классы точечных множеств 8

§ 2. Предел функции многих переменных 17

§ 3. Предел функции в точке по множеству 23

§ 4. Непрерывность функций многих переменных 25

§ 5. Свойства функций, непрерывных на множествах 27

§ 6. Равномерная непрерывность функции на множестве . . 29

Упражнения к главе IX 34

Глава X. Дифференциальное исчисление функций многих переменных 38

§ 1. Частные производные и дифференцируемость в точке . 38

§ 2. Дифференцирование сложной функции 49

§ 3. Градиент и производная по направлению 54

§ 4. Частные производные и дифференциалы высших порядков 58

§ 5. Формула Тейлора для функций многих переменных . . 65

Упражнения к главе X 72

Глава XI. Мера Жордана в $\mathbb{R}^n$ 75

§ 1. Свойства открытых и замкнутых множеств 75

§ 2. Клеточные множества 81

§ 3. Определение и основные свойства меры Жордана 85

§ 4. Конечная аддитивность меры Жордана 96

Упражнения к главе XI 102

Глава XII. Определённый интеграл Римана 105
§ 1. Суммы Дарбу и критерий интегрируемости Дарбу . . . 105
§ 2. Классы интегрируемых функций 110
§ 3. Суммы Римана и критерий интегрируемости Римана . . 114
§ 4. Свойства интегрируемых функций 117
§ 5. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона–Лейбница 125
§ 6. Геометрические приложения определённого интеграла . 132
§ 7. Применение интеграла к выводу некоторых пределов . . 138
Упражнения к главе XII 143
Глава XIII. Несобственный интеграл 147
§ 1. Определение и общие свойства 147
§ 2. Несобственные интегралы от знакопостоянных функций 156
§ 3. Несобственные интегралы от знакопеременных функций 161
Упражнения к главе XIII 171
Глава XIV. Криволинейный интеграл 175
§ 1. Криволинейный интеграл первого рода 175
§ 2. Ориентация гладкой кривой 178
§ 3. Криволинейный интеграл второго рода 181
Упражнения к главе XIV 183
Глава XV. Числовые ряды 184
§ 1. Общие свойства числовых рядов 184
§ 2. Числовые ряды со знакопостоянными членами 188
§ 3. Числовые ряды со знакопеременными членами 195
§ 4. Влияние перестановки членов на сходимость ряда 202
Упражнения к главе XV 209
Глава XVI. Функциональные последовательности и ряды 213
§ 1. Равномерная сходимость функциональных последовательностей 213

§ 2. Равномерная сходимость функциональных рядов 222
Упражнения к главе XVI 233

Глава XVII. Степенные ряды 236
§ 1. Степенные ряды с комплексными членами. Радиус сходимости 236
§ 2. Степенные ряды с действительными членами 246
§ 3. Разложение элементарных функций в степенные ряды . 252
§ 4. Разложение в степенные ряды функций e^z, $\cos z$, $\sin z$. 261
Упражнения к главе XVII 263
Литература 267

Предисловие

Настоящее учебное пособие является развёрнутым изложением второй части курса лекций, читаемых автором студентам Московского физико-технического института. Курс второго семестра в настоящее время называется «Многомерный анализ, интегралы и ряды» и содержит теорию пределов и дифференциальное исчисление функций многих переменных, теорию определённого интеграла Римана, включая несобственный интеграл, теорию числовых, функциональных и степенных рядов.

В курсе математического анализа, принятом в МФТИ, теория экстремумов функций многих переменных излагается не сразу после формулы Тейлора для функций многих переменных, как это делается обычно, а позже — в 3 семестре (необходимые сведения из линейной алгебры студенты получают только в конце 2 семестра). С точки зрения автора, в 3 семестр целесообразно перенести и теорию неявных функций. Во-первых, в случае неявных функций, заданных системой уравнений, теория эта очень громоздка и при изложении с доказательствами (что, кстати, делается не всегда) мало доступна студентам I курса. Во-вторых, на это место удобно поставить теорию меры Жордана. Традиционно мера Жордана излагается в 3 семестре перед теорией кратного интеграла Римана. При этом при изучении геометрических приложений определённого интеграла во 2 семестре приходится или произносить общие не очень строгие фразы о площадях и объёмах, или каждый раз вводить «свою» меру, что идёт в ущерб как общности, так и строгости изложения. Наконец, для студентов I курса теория неявных функций «повисает в воздухе», так как не имеет приложений, а на II курсе она сразу же начинает использоваться, например, в курсе дифференциальных уравнений. Предлагаемая автором последовательность изложения представляется на суд читателей, имеющих опыт преподавания математического анализа.

Нумерация глав второй части курса продолжает нумерацию глав первой части. В тексте имеются ссылки на теоремы, леммы, примеры и упражнения из первой части, так что при подробном знакомстве с настоящим пособием целесообразно иметь под рукой предыдущий текст.

Выражения признательности и благодарности, высказанные в предисловии к первой части курса, остаются в силе и сейчас.

ГЛАВА IX. **ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

§ 1. Точечное пространство $\mathbb{R}^n$. Некоторые классы точечных множеств

Определение 9.1. Пространством $\mathbb{R}^n$ (точечным n-мерным евклидовым пространством), $n \in \mathbb{N}$, называется множество всевозможных упорядоченных наборов из n действительных чисел $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Два таких набора $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $y = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ называются равными, если $\alpha_1 = \beta_1, \ \ldots, \alpha_n = \beta_n$. Расстоянием между x и y называется число $\rho(x,y) = \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)^2}$.

Перечислим основные свойства расстояния. Для любых $x, y, z \in \mathbb{R}^n$:

1° $\rho(x,y) \geqslant 0$; $\rho(x,y) = 0 \iff x = y$.

2° $\rho(x,y) = \rho(y,x)$.

3° $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

Множество произвольной природы, для любых двух элементов которого определено расстояние, удовлетворяющее условиям 1°, 2°, 3°, называется метрическим пространством. Более подробно об этом будет говориться в последней части курса, а пока убедимся в том, что для элементов $\mathbb{R}^n$ выполняется свойство 3° — так называемое неравенство треугольника (свойства 1° и 2° очевидны).

□ Пусть $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $y = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $z = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Докажем, что

$$\sqrt{(\alpha_1 - \gamma_1)^2 + \ldots + (\alpha_n - \gamma_n)^2} \leqslant \\ \leqslant \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)^2} + \\ + \sqrt{(\beta_1 - \gamma_1)^2 + \ldots + (\beta_n - \gamma_n)^2}.$$

Обозначим $\alpha_i - \beta_i = p_i$, $\beta_i - \gamma_i = q_i$; тогда $\alpha_i - \gamma_i = p_i + q_i$ ($i = 1, 2, \ \ldots, n$). Нужное неравенство примет вид

$$\sqrt{(p_1 + q_1)^2 + \ldots + (p_n + q_n)^2} \leqslant \\ \leqslant \sqrt{p_1^2 + \ldots + p_n^2} + \sqrt{q_1^2 + \ldots + q_n^2}.$$

Возводя в квадрат обе (неотрицательные) части последнего неравенства, получим равносильное неравенство:

$$p_1^2+2p_1q_1+q_1^2+\ \ldots+p_n^2+2p_nq_n+q_n^2\leqslant$$
$$\leqslant p_1^2+\ldots+p_n^2+q_1^2+\ldots+q_n^2+2\sqrt{p_1^2+\ \ldots+p_n^2}\cdot\sqrt{q_1^2+\ \ldots+q_n^2};$$

достаточно доказать неравенство

$$(p_1^2+\ \ldots+p_n^2)(q_1^2+\ \ldots+q_n^2)\geqslant(p_1q_1+\ \ldots+p_nq_n)^2. \qquad (9.1)$$

Последнее неравенство называется неравенством Коши–Буняковского.

Рассмотрим функцию одной переменной:

$$f(t)=(p_1t+q_1)^2+\ \ldots+(p_nt+q_n)^2=$$
$$=(p_1^2+\ \ldots+p_n^2)t^2+2(p_1q_1+\ \ldots+p_nq_n)t+(q_1^2+\ \ldots+q_n^2).$$

Так как квадратный трёхчлен $f(t)$ при всех t неотрицателен, то его дискриминант $(p_1q_1+\ \ldots+p_nq_n)^2-(p_1^2+\ \ldots+p_n^2)(q_1^2+ + \ \ldots+q_n^2)\leqslant 0$, что равносильно (9.1). ■

При $n=1,\ 2,\ 3$ пространство $\mathbb{R}^n$ допускает естественную геометрическую интерпретацию (числовая прямая $\mathbb{R}^1$ (т.е. $\mathbb{R}$), плоскость $\mathbb{R}^2$, трёхмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$).

З а м е ч а н и е. Точечное n-мерное евклидово пространство не следует путать с n-мерным векторным евклидовым пространством, изучаемым в линейной алгебре (там векторы, здесь точки; векторы можно складывать, точки — нет и т.д.).

Определение 9.2. ε-окрестностью точки $x_0\in\mathbb{R}^n$, где $\varepsilon>>0$, называется множество

$$U_\varepsilon(x_0)=\{x\in\mathbb{R}^n:\rho(x,x_0)<\varepsilon\}.$$

Проколотой ε-окрестностью точки $x_0\in\mathbb{R}^n$, где $\varepsilon>0$, называется множество

$$\mathring{U}_\varepsilon(x_0)=U_\varepsilon(x_0)\setminus\{x_0\}=\{x\in\mathbb{R}^n:0<\rho(x,x_0)<\varepsilon\}.$$

При $n=1$ для точек $x,y\in\mathbb{R}$ расстояние $\rho(x,y)=|x-y|$; понятие ε-окрестности совпадает с введённым ранее (определение 2.4). При $n=2$ $(n=3)$ ε-окрестность точки x_0 иначе называют открытым кругом (шаром) радиуса ε с центром в точке x_0, поэтому в общем случае $U_\varepsilon(x_0)$ называют открытым n-мерным шаром радиуса ε с центром в точке x_0.

Определение 9.3. Точка x_0 называется внутренней точкой множества $X \subset \mathbb{R}^n$, если она принадлежит X вместе с некоторой окрестностью (см. рис. 9.1).

Определение 9.4. Множество $G \subset \mathbb{R}^n$ называется открытым, если все его точки внутренние, т.е. $\forall\, x_0 \in G \to \exists\, \varepsilon > 0$: $U_\varepsilon(x_0) \subset G$.

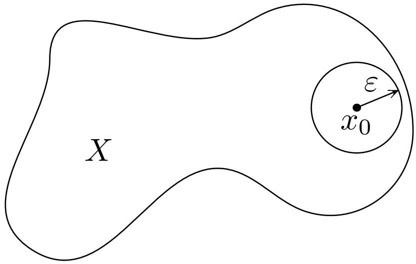

Рис. 9.1

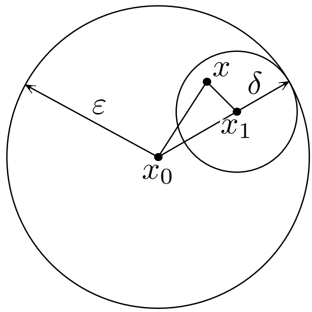

Рис. 9.2

Лемма 9.1. *$U_\varepsilon(x_0)$ — открытое множество ($x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon >$ > 0).*

$\square$ Пусть $x_1 \in U_\varepsilon(x_0)$, т.е. $\rho(x_1, x_0) < \varepsilon$. Обозначим $\delta = \varepsilon -$ $- \rho(x_1, x_0) > 0$. Тогда $\forall\, x \in U_\delta(x_1)$ (см. рис. 9.2):

$$\rho(x, x_0) \leqslant \rho(x, x_1) + \rho(x_1, x_0) < \delta + \varepsilon - \delta = \varepsilon,$$

значит, $x \in U_\varepsilon(x_0)$. Поэтому $U_\delta(x_1) \subset U_\varepsilon(x_0)$, так как x_1 — произвольная точка $U_\varepsilon(x_0)$, то $U_\varepsilon(x_0)$ — открытое множество. $\blacksquare$

Пример 9.1. Интервал $(a; b)$ ($a < b$; возможно, $a = -\infty$ или $b = +\infty$) является открытым множеством в $\mathbb{R}^1$, так как любая точка $(a; b)$ войдёт в него с некоторой окрестностью. Этот же интервал, рассматриваемый как множество в $\mathbb{R}^2$, не будет открытым множеством, так как не может содержать никакой двумерной окрестности. Отрезок $[a; b]$ не является открытым множеством в $\mathbb{R}^1$, так как никакая окрестность точки a (или точки b) не может принадлежать целиком отрезку $[a; b]$.

Последовательностью точек в $\mathbb{R}^n$ будем называть функцию, определённую на множестве натуральных чисел, множество значений которой принадлежит $\mathbb{R}^n$. Индекс члена последовательности можно обозначать любой буквой, соответствующей произвольному натуральному числу. Мы не будем обозначать его буквой n потому, что n — это размерность пространства.

Определение 9.5. Говорят, что последовательность точек x_k из $\mathbb{R}^n$ сходится к точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (обозначение $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$), если $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(x_k, x_0) = 0$, т.е.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, k_0 : \quad \forall\, k \geqslant k_0 \to \rho(x_k, x_0) < \varepsilon.$$

Лемма 9.2. *Последовательность точек $x_k = (\alpha_1^{(k)}, \ \ldots, \alpha_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$, $k = 1,\, 2,\ \ldots,$ сходится к точке $x_0 = (\alpha_1^{(0)}, \ \ldots, \alpha_n^{(0)})$ $\Longleftrightarrow$ при всех $i = 1,\, 2,\ \ldots,\, n$ выполняется равенство $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_i^{(k)} = \alpha_i^{(0)}$ (сходимость в $\mathbb{R}^n$ равносильна покоординатной сходимости).*

$\square$ ($\Rightarrow$) Так как $\rho(x_k, x_0) = \sqrt{(\alpha_1^{(k)} - \alpha_1^{(0)})^2 + \ldots + (\alpha_n^{(k)} - \alpha_n^{(0)})^2}$, то $|\alpha_i^{(k)} - \alpha_i^{(0)}| \leqslant \rho(x_k, x_0)$ при всех $i = 1,\, 2,\ \ldots,\, n$. Поэтому если $\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, k_0$: $\forall\, k \geqslant k_0 \to \rho(x_k, x_0) < \varepsilon$, то и подавно $|\alpha_i^{(k)} - \alpha_i^{(0)}| < \varepsilon$ при всех $i = 1,\, 2,\ \ldots,\, n$. Значит, $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_i^{(k)} = \alpha_i^{(0)}$ при всех $i = 1,\, 2,\ \ldots,\, n$.

($\Leftarrow$) Так как $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_i^{(k)} = \alpha_i^{(0)}$ при всех $i = 1,\, 2,\ \ldots,\, n$, то

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, k_i : \quad \forall\, k \geqslant k_i \to |\alpha_i^{(k)} - \alpha_i^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\,.$$

Тогда при $k \geqslant k_0 = \max(k_1,\ \ldots,\ k_n)$ выполняется неравенство $\rho(x_k, x_0) < \sqrt{n \cdot \left(\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} = \varepsilon$, значит, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$. $\blacksquare$

Определение 9.6. Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется ограниченным, если оно целиком принадлежит некоторой окрестности точки $O = (0, 0,\ \ldots,\ 0)$, т.е. $\exists\, C > 0$: $X \subset U_C(0)$. Последовательность x_k называется ограниченной, если множество её значений ограничено.

Теорема 9.1 (теорема Больцано–Вейерштрасса в $\mathbb{R}^n$). *Если последовательность точек x_k из $\mathbb{R}^n$ ограничена, то существует сходящаяся подпоследовательность x_{k_m} ($k_1 < k_2 < < \ldots < k_m < \ldots$; $k_m \in \mathbb{N}$).*

$\square$ Доказательство проведём для случая $\mathbb{R}^2$ (в случае произвольного n изменения очевидны, только доказательство становится более громоздким).

Пусть $x_k = (\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)})$; так как при всех $k = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $\sqrt{(\alpha_1^{(k)})^2 + (\alpha_2^{(k)})^2} \leqslant C$, то $|\alpha_1^{(k)}| \leqslant C$, $|\alpha_2^{(k)}| \leqslant C$. Последовательность $\alpha_1^{(k)}$ ограничена, поэтому по теореме Больцано–Вейерштрасса 2.8 существует сходящаяся подпоследовательность $\alpha_1^{(k_l)}$, $\lim\limits_{l\to\infty} \alpha_1^{(k_l)} = \alpha_1^{(0)}$. Далее, так как последовательность $\alpha_2^{(k_l)}$ ограничена, то по теореме 2.8 существует сходящаяся подпоследовательность $\alpha_2^{(k_{l_m})}$; $\lim\limits_{m\to\infty} \alpha_2^{(k_{l_m})} = = \alpha_2^{(0)}$. Но $\lim\limits_{m\to\infty} \alpha_1^{(k_{l_m})} = \alpha_1^{(0)}$ (предел подпоследовательности сходящейся последовательности), поэтому по лемме 9.2 $\lim\limits_{m\to\infty} x_{k_{l_m}} = (\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)})$; $x_{k_{l_m}}$ — подпоследовательность последовательности точек x_k. $\blacksquare$

Теорема 9.2 (критерий Коши сходимости последовательности точек $\mathbb{R}^n$). *Последовательность x_k точек $\mathbb{R}^n$ сходится $\iff$ $\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, k_0$: $\forall\, k, m \geqslant k_0 \to \rho(x_k, x_m) < \varepsilon$.*

$\square$ $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$. Тогда

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, k_0 : \left(\left(\forall\, k \geqslant k_0 \to \rho(x_k, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}\right) \wedge \left(\forall\, m \geqslant k_0 \to \rho(x_m, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}\right)\right).$$

Тогда для любых $k \geqslant k_0$ и $m \geqslant k_0$ выполняется неравенство

$$\rho(x_k, x_m) \leqslant \rho(x_k, x_0) + \rho(x_0, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Пусть $x_k = (\alpha_1^{(k)},\ \ldots,\ \alpha_n^{(k)})$. Тогда $\forall\, k, m \geqslant k_0$ выполняется неравенство

$$\rho(x_k, x_m) = \sqrt{(\alpha_1^{(k)} - \alpha_1^{(m)})^2 +\ \ldots + (\alpha_n^{(k)} - \alpha_n^{(m)})^2} < \varepsilon.$$

Поэтому при фиксированном $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ и подавно $|\alpha_i^{(k)} - \alpha_i^{(m)}| \leqslant \rho(x_k, x_m) < \varepsilon$. Значит при фиксированном i последовательность $\alpha_i^{(k)}$ фундаментальна, и по критерию Коши 2.13 она сходится к некоторому числу $\alpha_i^{(0)}$. По лемме 9.2 последовательность x_k сходится к $(\alpha_1^{(0)},\ \ldots,\ \alpha_n^{(0)})$. ■

Определение 9.7. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется предельной точкой множества $X \subset \mathbb{R}^n$, если существует последовательность точек x_k из $\mathbb{R}^n$ такая, что $x_k \neq x_0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$.

Определение 9.8. Множество $F \subset \mathbb{R}^n$ называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

Определение 9.9. Замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ называется компактом.

Пример 9.2. Интервал $(a; b)$ не является замкнутым множеством в $\mathbb{R}^1$, так как концы a и b являются его предельными точками ($\lim\limits_{k\to\infty} \left(a + \frac{1}{k}\right) = a$, $a + \frac{1}{k} \in (a; b)$ при $k \geqslant k_0$, $a + \frac{1}{k} \neq a$; $\lim\limits_{k\to\infty} \left(b - \frac{1}{k}\right) = b$; $b - \frac{1}{k} \in (a; b)$ при $k \geqslant k_0$, $b - \frac{1}{k} \neq b$). Отрезок $[a; b]$ является замкнутым множеством в $\mathbb{R}^1$ (кстати, и в $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 1$), так как пределы последовательностей точек из $[a; b]$ лежат на $[a; b]$. Но отрезок — ограниченное множество, значит это — компакт. Примерами замкнутых неограниченных множеств в $\mathbb{R}^1$ (и в $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 1$) являются замкнутые лучи $(-\infty; b]$ и $[a; +\infty)$, а также вся прямая $\mathbb{R}^1$.

Определение 9.10.

Точка x_0 множества $X \subset \mathbb{R}^n$ называется изолированной, если найдётся её проколотая окрестность, не имеющая общих точек с X (т.е. $\exists\, \varepsilon > 0$: $\mathring{U}_\varepsilon(x_0) \cap X = \varnothing$).

Определение 9.11. Точками прикосновения множества $X \subset \mathbb{R}^n$ называются все его предельные и изолированные точки.

Лемма 9.3. *Если точка x_0 множества $X \subset \mathbb{R}^n$ не является изолированной, то она является предельной точкой X.*

$\square$ Если точка x_0 не является изолированной точкой X, то

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, x \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0) \cap X.$$

Рассмотрим $\varepsilon = \frac{1}{k}$, $k = 1,\ 2,\ \ldots$ Тогда найдётся последовательность точек $x_k \in X$ такая, что $0 < \rho(x_k, x_0) < \frac{1}{k}$. Это значит, что $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(x_k, x_0) = 0$, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$, и при этом $x_k \neq x_0$. Поэтому x_0 — предельная точка X. $\blacksquare$

Таким образом, все точки множества — либо предельные, либо изолированные, т.е. любое множество в $\mathbb{R}^n$ является подмножеством множества своих точек прикосновения. При этом предельные точки множества могут ему не принадлежать (изолированные точки принадлежат множеству).

Определение 9.12. Пусть $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\ldots$, $\alpha_n(t)$ — непрерывные функции одной переменной $t \in I$ (I — промежуток числовой прямой). Тогда множество точек из $\mathbb{R}^n$

$$\Gamma = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n): \quad \alpha_1 = \alpha_1(t), \ \ldots, \ \alpha_n = \alpha_n(t), \quad t \in I\}$$

называется непрерывной кривой. Если $I = [a; b]$ — отрезок ($a < b$), то говорят, что кривая Γ соединяет точки

$$x_1 = (\alpha_1(a), \ldots, \alpha_n(a)) \quad \text{и} \quad x_2 = (\alpha_1(b), \ldots, \alpha_n(b)).$$

Это определение обобщает определения непрерывной кривой в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ (определения 4.3 и 6.8).

Определение 9.13. Непустое множество точек $X \subset \mathbb{R}^n$ называется связным, если для любых различных точек $x_1, x_2 \in X$ найдётся непрерывная кривая Γ, соединяющая точки x_1 и x_2, все точки которой принадлежат X. Множество, состоящее из одной точки, по определению является связным.

Определение 9.14. Открытое связное множество $G \subset \mathbb{R}^n$ называется областью.

Пример 9.3. Непрерывная кривая в $\mathbb{R}^1$ — это множество точек $\Gamma = \{x\colon\ x = x(t),\ t \in I\}$, где $x(t)$ — функция, непрерывная на промежутке I. Это — множество значений функции, непрерывной на промежутке I, т.е. промежуток или единственная точка (лемма 3.11).

Пример 9.4. Докажем, что множество точек $X \subset \mathbb{R}^1$, состоящее более чем из одной точки, связно $\iff$ X является промежутком.

$\square$ ($\Leftarrow$) Для любых двух точек $x_1, x_2 \in X$ отрезок с концами в x_1 и x_2 целиком принадлежит X, а отрезок — это непрерывная кривая в $\mathbb{R}^1$.

($\Rightarrow$) Любые две различные точки $x_1, x_2 \in X$ можно соединить непрерывной кривой $\Gamma = \{x : x = x(t),\ t \in [a; b]\}$; при этом $x(a) = x_1$, $x(b) = x_2$. Кривая Γ является множеством значений функции x на отрезке $[a; b]$, которое содержит отрезок $[x_1; x_2]$ (теорема 3.14), поэтому $[x_1; x_2] \subset X$. Так как x_1 и x_2 — любые точки X, то X — промежуток. $\blacksquare$

Следствие. *Областями в $\mathbb{R}^1$ являются открытые промежутки и только они.*

Определение 9.15. Отрезком прямой, соединяющим различные точки $x_1 = (\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_n^{(1)})$ и $x_2 = (\alpha_1^{(2)}, \ldots, \alpha_n^{(2)})$ в $\mathbb{R}^n$, называется непрерывная кривая

$$\Gamma = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n): \quad \alpha_i = \alpha_i^{(1)} + (\alpha_i^{(2)} - \alpha_i^{(1)})t, \\ t \in [0; 1], \quad i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Ясно, что при $t = 0$ получим точку x_1, а при $t = 1$ — точку x_2.

Определение 9.16. Непустое множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется выпуклым, если для любых различных точек $x_1, x_2 \in X$ найдётся отрезок прямой, соединяющий x_1 и x_2, все точки которого принадлежат X.

Так как отрезок является непрерывной кривой, то выпуклое множество всегда связно.

Лемма 9.4. *$U_\varepsilon(x_0)$ — выпуклое множество ($x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$).*

$\square$ Пусть $x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0)$, т.е. $\rho(x_0, x_1) < \varepsilon$, $\rho(x_0, x_2) < \varepsilon$. Рассмотрим произвольную точку x, принадлежащую отрезку, соединяющему точки x_1 и x_2 (см. рис. 9.3). Имеем:

$$x_1 = (\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_n^{(1)}), \quad x_2 = (\alpha_1^{(2)}, \ldots, \alpha_n^{(2)});$$
$$x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \text{где} \quad \alpha_i = \alpha_i^{(1)} + (\alpha_i^{(2)} - \alpha_i^{(1)})t,$$
$$t \in [0; 1], \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad x_0 = (\alpha_1^{(0)}, \ldots, \alpha_n^{(0)}).$$

Запишем уравнение отрезка прямой, соединяющего x_0 и x_2:

$$\beta_i = \alpha_i^{(0)} + (\alpha_i^{(2)} - \alpha_i^{(0)})u, \quad u \in [0; 1], \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

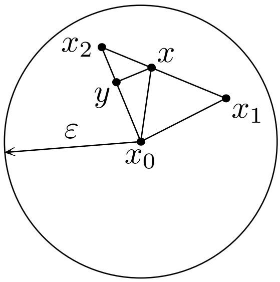

Рис. 9.3

Возьмём на этом отрезке точку $y = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, соответствующую значению $u = t$, где t — значение параметра, соответствующее точке x на отрезке, соединяющем x_1 и x_2 (см. рис. 9.3). Тогда

$$\rho(x_0, x) \leqslant \rho(x_0, y) + \rho(y, x). \qquad (9.2)$$

Но $\rho(x_0, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} ((\alpha_i^{(2)} - \alpha_i^{(0)})t)^2} = t \cdot \rho(x_0, x_2)$;

$$\rho(y, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} ((\alpha_i - \alpha_i^{(0)}) - (\alpha_i^{(2)} - \alpha_i^{(0)})t)^2} =$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} ((\alpha_i^{(1)} - \alpha_i^{(0)}) + (\alpha_i^{(2)} - \alpha_i^{(1)})t - (\alpha_i^{(2)} - \alpha_i^{(0)})t)^2} =$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} ((\alpha_i^{(1)} - \alpha_i^{(0)})(1 - t))^2} = (1 - t) \cdot \rho(x_0, x_1).$$

Из (9.2) теперь легко заметить, что

$$\rho(x_0, x) \leqslant t \cdot \varepsilon + (1 - t) \cdot \varepsilon = \varepsilon,$$

поэтому $x \in U_\varepsilon(x_0)$. Так как x — произвольная точка отрезка, то $U_\varepsilon(x_0)$ — выпуклое множество. ■

З а м е ч а н и е. Доказательство достаточно громоздко, так как мы старались не прибегать к геометрической наглядности; двумерный рис. 9.3 служит лишь иллюстрацией. На практике в таких рассуждениях значительно более свободно применяют геометрические соображения и пользуются известными утверждениями геометрии и векторной алгебры.

Например, приведём более простое доказательство леммы 9.4.

□ Точка x делит отрезок, соединяющий x_1 и x_2, в отношении $t : (1-t)$, поэтому $\overrightarrow{x_0x} = (1-t)\overrightarrow{x_0x_1} + t\,\overrightarrow{x_0x_2}$, и $\rho(x_0, x) \leqslant (1-t)\rho(x_0, x_1) + t\rho(x_0, x_2)$. Так как $\rho(x_0, x_1) < \varepsilon$ и $\rho(x_0, x_2) < \varepsilon$, то $\rho(x_0, x) \leqslant (1-t)\varepsilon + t \cdot \varepsilon = \varepsilon$. ■

В дальнейшем мы будем иногда применять подобные геометрические соображения, стараясь, впрочем, не злоупотреблять геометрической наглядностью.

§ 2. Предел функции многих переменных

Функцией нескольких переменных называется функция, область определения которой $D(f) \subset \mathbb{R}^n$, а множество значений $E(f) \subset \mathbb{R}$. Аргумент такой функции — точка n-мерного евклидова пространства $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, т.е. $f(\bar{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Во избежание путаницы в §§ 2, 3, 4 этой главы если точка $\mathbb{R}^n$ обозначается малой буквой, то мы будем ставить над этой буквой черту; если черты нет — это действительное число, т.е. точка числовой прямой $\mathbb{R}^1$. Определения предела функции многих переменных при $\bar{x} \to \bar{x}_0$ совершенно аналогичны соответствующим определениям предела функции одной переменной (здесь β — один из 6 СПС, см. § 6 главы II).

Определение 9.17 (по Гейне). Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$. Тогда говорят, что $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = \beta$, если для любой последовательности $\bar{x}_k$ такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{x}_k = \bar{a}$ и $\bar{x}_k \neq \bar{a}$, выполняется равенство $\lim\limits_{k\to\infty} f(\bar{x}_k) = \beta$.

Определение 9.18 (по Коши). Говорят, что $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = \beta$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для всех $\bar{x} \in \overset{\circ}{U}_\delta(\bar{a})$ соответствующие значения $f(\bar{x})$ принадлежат $U_\varepsilon(\beta)$.

Сохраняются вместе с доказательствами следующие утверждения главы III: эквивалентность определений предела функции по Гейне и по Коши, лемма о сохранении знака, теорема об арифметических действиях с пределами, теорема о предельном переходе в неравенстве, «теорема о двух милиционерах», теорема о замене переменной под знаком предела ($\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^n$, каждый из символов β и γ — один из 6 СПС), критерий Коши для существования конечного предела функции и т.д. Функция f называется бесконечно малой при $\bar{x} \to \bar{a}$, если $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = 0$. Если функция f бесконечно малая при $\bar{x} \to \bar{a}$, а функция g ограничена в некоторой проколотой окрестности $\bar{a}$, то функция fg является бесконечно малой при $\bar{x} \to \bar{a}$.

Говорят, что $f(\bar{x}) = o(g(\bar{x}))$ при $\bar{x} \to \bar{a}$, если $f(\bar{x}) = \alpha(\bar{x})g(\bar{x})$, где $\alpha(\bar{x})$ — бесконечно малая при $\bar{x} \to \bar{a}$. Если $g(\bar{x}) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности $\bar{a}$, то это определение равносильно равенству $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} \dfrac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} = 0$.

Несмотря на общность определения, исследование существования предела для функций многих переменных принципиально сложнее, чем в одномерном случае. Например, если функция одной переменной по-разному определяется при $x > a$ и $x < a$, то достаточно исследовать существование односторонних пределов справа и слева. На числовой прямой к точке можно «подобраться» двумя способами, а вот уже на плоскости таких способов бесконечно много. При этом в случае $n \geqslant 3$ картина не усложняется качественно. Принципиальным является именно переход от $n = 1$ к $n = 2$. В этом параграфе мы в дальнейшем будем считать, что $n = 2$, т.е. $\bar{x} = (x, y)$, $f(\bar{x}) = f(x, y)$.

Предел функции двух переменных называется двойным пределом и обозначается

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y).$$

Определение по Гейне: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = \beta$, если функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки (x_0, y_0) и для любой последовательности точек (x_k, y_k) такой, что $\lim\limits_{k\to\infty}(x_k, y_k) = (x_0, y_0)$, но $(x_k, y_k) \neq (x_0, y_0)$, выполняется равенство $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = \beta$.

Условие $(x_k, y_k) \neq (x_0, y_0)$ означает несовпадение точек; при этом возможно, например, что $x_k = x_0$ (но тогда обязательно $y_k \neq y_0$).

Определение по Коши: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = \beta$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, \delta > 0 :$$
$$\forall\, (x,y), \quad 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \to f(x,y) \in U_\varepsilon(\beta).$$

Естественно возникает желание свести понятие двойного предела к уже изученным пределам функции одной переменной. Рассмотрим повторный предел

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right). \tag{9.3}$$

Существование такого предела означает, что при всех x, принадлежащих некоторой проколотой окрестности точки x_0, существует конечное значение $\varphi(x) = \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$; затем оказывается, что существует $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = \beta$. Этот СПС β и называется повторным пределом (9.3). Аналогично можно определить повторный предел

$$\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right). \tag{9.4}$$

Нетрудно привести пример, когда оба повторных предела существуют и совпадают, а двойной предел не существует.

Пример 9.5. Рассмотрим функцию $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$, $x^2 + y^2 > 0$. Для любого $x \neq 0$ существует $\varphi(x) = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = \dfrac{x^2}{x^2} = 1$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right) = 1$. Аналогично для любого $y \neq 0$ существует $\psi(y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = \dfrac{y^2}{y^2} = 1$ и $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right) = 1$. Тем не менее двойной предел не существует. В самом деле, $f(x,x) = 2$, $f(x,-x) = 0$. Если бы двойной предел существовал и равнялся b, то для любой последовательности $(x_k, y_k) \neq (0,0)$, такой, что $\lim\limits_{k\to\infty}(x_k, y_k) = (0,0)$, выполнялось бы равенство $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = b$. Но если $x_k \neq 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$, то $f(x_k, x_k) = 2$, а $f(x_k, -x_k) = 0$, т.е. $b = 2 = 0$. Полученное противоречие доказывает отсутствие двойного предела при $x \to 0$, $y \to 0$.

Ещё одна попытка свести двойной предел к пределам функций одной переменной — это пределы по направлениям.

Определение 9.19. Пусть $\vec{e} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ — единичный вектор. Если функция двух переменных f определена в некоторой проколотой окрестности точки (x_0, y_0), то её пределом при $x \to x_0$, $y \to y_0$ по направлению вектора $\vec{e}$ (или по направлению, определяемому углом φ) называется предел функции одной переменной ρ:

$$\lim_{\rho\to+0} f(x_0 + \rho\cos\varphi, y_0 + \rho\sin\varphi).$$

З а м е ч а н и е. В этом случае фактически вводятся полярные координаты на плоскости с центром в точке (x_0, y_0). Фиксированное значение φ говорит о том, что функция рассматривается лишь на луче, выходящем из точки (x_0, y_0) под углом φ к положительному лучу прямой, параллельной оси Ox. При $\varphi = 0$ получаем предел справа функции одной переменной $f(x, y_0)$ в точке x_0:

$$\lim_{x_0\to x_0+0} f(x, y_0),$$

при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ получаем $\lim\limits_{y\to y_0+0} f(x_0, y)$ и т.д.

Лемма 9.5. *Если* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = \beta$, *то предел по любому направлению при* $x \to x_0$, $y \to y_0$ *равен* β.

□ Рассмотрим произвольную последовательность ρ_k положительных чисел такую, что $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_k = 0$. Тогда последовательность точек $(x_k, y_k) = (x_0 + \rho_k \cos\varphi, y_0 + \rho_k \sin\varphi)$ стремится к точке (x_0, y_0) (это следует из того, что $\rho((x_k, y_k), (x_0, y_0)) = \rho_k$), причём $(x_k, y_k) \neq (x_0, y_0)$. Значит, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_0 + \rho_k \cos\varphi, y_0 + \rho_k \sin\varphi) = \beta$, а отсюда следует, что $\lim\limits_{\rho\to+0} f(x_0 + \rho\cos\varphi, y_0 + \rho\sin\varphi) = \beta$ (здесь использованы определения предела по Гейне функции двух переменных x, y и функции одной переменной ρ). ■

Поэтому если пределы функции по двум разным направлениям в точке различны, то двойной предел не существует. Так, в примере 9.5

$$f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = \frac{(\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi)^2}{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = (\cos\varphi + \sin\varphi)^2,$$

при $\varphi = \frac{\pi}{4}$ имеем 2, при $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ имеем 0. По различным направлениям разные пределы, значит, двойной предел при $x \to 0$, $y \to 0$ не существует.

Оказывается, что если по любому направлению функция имеет в точке один и тот же предел β, то это ещё не гарантирует наличия двойного предела.

Пример 9.6. Рассмотрим функцию $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$, $x^2 + y^2 > 0$. Переходим к полярным координатам с центром в точке $(0, 0)$:

$$f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = \frac{\rho^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^4\cos^4\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = \frac{\rho\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^2\cos^4\varphi + \sin^2\varphi}\,.$$

Если $\sin\varphi = 0$, то последнее выражение равно 0 при любом $\rho > 0$. Если $\sin\varphi \neq 0$, то всё равно $\lim\limits_{\rho\to+0} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = 0$. Итак, по любому направлению предел функции при $x \to 0$, $y \to 0$ равен 0. Но легко видеть, что $f(x, x^2) = \frac{1}{2}$. Аналогично рассуждению в примере 9.5 если $x_k \neq 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$, то $f(x_k, 0) = 0$, а $f(x_k, x_k^2) = \frac{1}{2}$. Двойной предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ не существует.

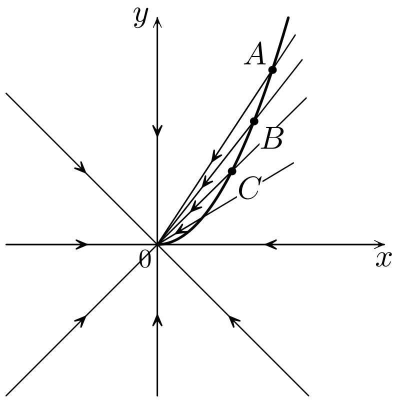

Рис. 9.4

Как же могло произойти так, что по каждому направлению предел равен 0 (вроде бы, как ни идти к точке, всё равно 0), а по параболе получаем другой предел $\frac{1}{2}$? Возьмём, например, точку A на рис. 9.4. Значение $f(A) = \frac{1}{2}$, но предел $f(x, y)$ по направлению вектора $\overrightarrow{OA}$ равен 0. То же самое можно сказать про точки B, C, …, лежащие на параболе. Во всех этих точках функция принимает значение $\frac{1}{2}$. Чем ближе такая точка к началу координат, тем короче отрезок, на котором функция должна «упасть» от значения $\frac{1}{2}$ до значения 0, но такой отрезок имеет положительную длину, и стремление функции к нулю вдоль этого отрезка ничему не противоречит («стремление к нулю по всем направлениям, но неравномерно по направлениям» — смысл этой фразы станет понятен позже).

Таким образом, понятие двойного предела нельзя свести исключительно к пределам функции одной переменной. Нужны другие методы исследования.

Лемма 9.6 (достаточное условие существования конечного двойного предела). *Пусть* $\exists\, \rho_0 > 0$*:* $\forall\, \rho \in (0; \rho_0) \to |f(x_0 + \rho\cos\varphi, y_0 + \rho\sin\varphi) - b| \leqslant F(\rho)$, *где* $\lim\limits_{\rho\to+0} F(\rho) = 0$. *Тогда* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = b$.

В этом случае предел равен b «равномерно по направлениям», функция F не зависит от φ.

☐ Из условия следует, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, \delta > 0 : \quad \forall\, \rho \in (0; \delta) \to F(\rho) < \varepsilon.$$

Для произвольной точки (x, y) плоскости определим числа

ρ и φ так, что $x = x_0 + \rho\cos\varphi$, $y = y_0 + \rho\sin\varphi$. Тогда $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. Поэтому для всех точек (x, y) таких, что $0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta_1 \equiv \min(\rho_0, \delta)$, выполняется неравенство $|f(x,y) - b| = |f(x_0 + \rho\cos\varphi, y_0 + \rho\sin\varphi) - b| \leqslant F(\rho) < \varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = b$. ■

Пример 9.7. Рассмотрим функцию $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$, $x^2 + y^2 > 0$. Так как $f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = \dfrac{\rho^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} = \rho\cos^2\varphi\sin\varphi$, то $|f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)| \leqslant \rho \to 0$, и $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$.

З а м е ч а н и е. Грубо ошибочным является рассуждение: $\lim\limits_{\rho\to+0} \rho\cos^2\varphi\sin\varphi = 0$, следовательно, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$. Доказано лишь то, что предел по каждому направлению равен 0. Этого ещё недостаточно для наличия двойного предела.

§ 3. Предел функции в точке по множеству

Определение 9.20. Пусть $\bar a$ — предельная точка множества $X \subset \mathbb{R}^n$, причём при некотором $\delta > 0$ функция f определена в $\overset{\circ}{U}_\delta(\bar a) \cap X$. Тогда говорят, что $\lim\limits_{\substack{\bar x\to\bar a\\ \bar x\in X}} f(\bar x) = \beta$, если для любой последовательности $\bar x_k$ такой, что $\bar x_k \in X$, $\bar x_k \neq \bar a$, $\lim\limits_{k\to\infty} \bar x_k = \bar a$, выполняется равенство $\lim\limits_{k\to\infty} f(\bar x_k) = \beta$ (определение по Гейне).

Определение 9.21. Пусть $\bar a$ — предельная точка множества $X \subset \mathbb{R}^n$. Тогда говорят, что $\lim\limits_{\substack{\bar x\to\bar a\\ \bar x\in X}} f(\bar x) = \beta$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для всех $\bar x \in \overset{\circ}{U}_\delta(\bar a) \cap X$ соответствующие значения $f(\bar x)$ принадлежат $U_\varepsilon(\beta)$ (определение по Коши).

В этих определениях β — один из 6 СПС. Напомним, что предельная точка может принадлежать множеству, а может и не принадлежать. Предел по множеству в изолированной точке не определяется.

Односторонние пределы функции одной переменной могут рассматриваться как пределы по множеству: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in(a;b)}} f(x)$ — предел по интервалу с левым концом в точке a; $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x\in(a;b)}} f(x)$ — предел по интервалу с правым концом в точке b.

Сохраняются вместе с доказательствами эквивалентность определений предела по Гейне и по Коши, а также другие утверждения, перечисленные после определения 9.18. Приведём, например, формулировку и доказательство теоремы о замене переменной под знаком предела.

Теорема 9.3. *Пусть* $\lim\limits_{\substack{\bar{x}\to\bar{a}\\ \bar{x}\in X}} f(\bar{x}) = \beta$, *и* $f(\bar{x}) \neq \beta$ *в некоторой* $\overset{\circ}{U}_\delta(\bar{a})$. *Пусть, далее,* $\lim\limits_{u\to\beta} g(u) = \gamma$ *(*g *— функция одной переменной; каждый из символов* β *и* γ *— один из 6 СПС). Тогда* $\lim\limits_{\substack{\bar{x}\to\bar{a}\\ \bar{x}\in X}} g(f(\bar{x})) = \gamma$.

$\square$ Пусть $\bar{x}_k$ — произвольная последовательность точек X такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{x}_k = \bar{a}$, $\bar{x}_k \neq \bar{a}$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} f(\bar{x}_k) = \beta$. Рассмотрим последовательность $u_k = f(\bar{x}_k)$; $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = \beta$. Далее найдётся номер k_0 такой, что $\forall\, k \geqslant k_0 \to \bar{x}_k \in \overset{\circ}{U}_\delta(\bar{a})$, значит, $u_k = f(\bar{x}_k) \neq \beta$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} g(u_k) = \gamma$, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} g(f(\bar{x}_k)) = \gamma$. Так как последовательность $\bar{x}_k$ — любая, то $\lim\limits_{\substack{\bar{x}\to\bar{a}\\ \bar{x}\in X}} g(f(\bar{x})) = \gamma$. $\blacksquare$

Пример 9.8. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |xy|^{xy}$.

$\square$ Областью определения функции является множество X, полученное удалением из плоскости координатных осей. Поэтому в любой проколотой окрестности $(0,0)$ найдутся точки, где функция не определена, и, строго говоря, нужно найти предел по множеству X. Тем не менее значок $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}$ можно употреблять и в этом случае, имея в виду предел по области определения функции.

Применим теорему 9.3 при $f(x,y) = xy$; $g(u) = |u|^u$.

Имеем: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$ (после перехода к полярным координатам $|f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)| = |\rho^2\cos\varphi\sin\varphi| \leqslant \rho^2 \to 0$), значит, $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\ y\to 0\\ (x,y)\in X}} f(x,y) = 0$; $f(x,y) \neq 0$ при $(x,y) \in X$. Далее, $\lim\limits_{u\to 0} g(u) = 1$. В самом деле, $\lim\limits_{u\to +0} g(u) = \lim\limits_{u\to +0} u^u = 1$ (пример 5.8); $\lim\limits_{u\to -0} g(u) = \lim\limits_{u\to -0} (-u)^u = \lim\limits_{t\to +0} t^{-t} = \dfrac{1}{\lim\limits_{t\to +0} t^t} = 1$; значит, и предел при $u \to 0$ равен 1. Тогда по теореме 9.3 $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\ y\to 0\\ (x,y)\in X}} g(f(x,y)) = 1$. ■

§ 4. Непрерывность функций многих переменных

Определение 9.22. Функция f называется непрерывной в точке $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, если она определена в некоторой окрестности точки $\bar{a}$ и $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = f(\bar{a})$.

Определение 9.23. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{a} \in X$ и функция f определена в $U_\delta(\bar{a}) \cap X$ при некотором $\delta > 0$. Тогда:

1) если $\bar{a}$ — предельная точка множества X, то функция f называется непрерывной в точке $\bar{a}$ по множеству X, если $\lim\limits_{\substack{\bar{x}\to\bar{a}\\ \bar{x}\in X}} f(\bar{x}) = f(\bar{a})$;
2) если $\bar{a}$ — изолированная точка множества X, то функция f по определению считается непрерывной в точке $\bar{a}$ по множеству X.

Определения 9.22 и 9.23 можно сформулировать на языке Гейне и на языке Коши (уже без оговорки $\bar{x}_k \neq \bar{a}$ и с применением $U_\delta(\bar{a})$ вместо $\mathring{U}_\delta(\bar{a})$).

Напомним, что предел по множеству в изолированной точке не определяется. Непрерывность же определяется естественно. В самом деле, если функция f непрерывна в точке $\bar{a}$ по множеству X, то для любой последовательности $\bar{x}_k \in X$ такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{x}_k = \bar{a}$, выполняется равенство $\lim\limits_{k\to\infty} f(\bar{x}_k) = f(\bar{a})$. Если $\bar{a}$ — изолированная точка X, то члены такой последовательности совпадают с $\bar{a}$ при $k \geqslant k_0$, и $f(\bar{x}_k) = f(\bar{a})$ при $k \geqslant k_0$, т.е. непрерывность имеет место автоматически.

Определение 9.24. Функция f называется непрерывной на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, если она непрерывна в любой точке $\bar{a} \in X$ по множеству X.

З а м е ч а н и е. В $\mathbb{R}^1$ определение 3.10 непрерывности функции на промежутке I совпадает с определением 9.24 для $X = I$.

Теорема о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций (в точке и по множеству) ничем не отличается от теоремы 3.7 для функций одной переменной.

Теорема 9.4 (непрерывность суперпозиции непрерывных функций). *Пусть функция f непрерывна по множеству $X \subset \mathbb{R}^n$ в точке $\bar{a}$, а функция одной переменной g непрерывна в точке $b = f(\bar{a})$. Тогда сложная функция $g(f)$ непрерывна в точке $\bar{a}$ по множеству X.*

□ Если $\bar{a}$ — предельная точка множества X, то доказательство ничем не отличается от доказательства теоремы 9.3 и соответствующих одномерных утверждений — теорем 3.5 и 3.8. В изолированной точке множества любая функция, определённая в этой точке, непрерывна по этому множеству по определению. ■

Из непрерывности суперпозиции непрерывных функций и непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций следует непрерывность сложных элементарных функций во всех точках, в которых эти функции определены. Например, функция двух переменных $\varphi(x, y) = \operatorname{tg}(\sin(x+y^2) - \ln\cos x)$ непрерывна во всех точках, где $\cos x > 0$ и $\sin(x + y^2) - \ln\cos x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Функция трёх переменных $\varphi(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ непрерывна на шаре $\{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$. В этом случае внешняя функция $g(u) = \sqrt{u}$ непрерывна справа в точке 0; применяются теорема 9.4 и её вариант для односторонней непрерывности функции g, что не усложняет доказательства.

До сих пор при исследовании сложных функций мы рассматривали случай, когда внешняя функция зависит от одной переменной. Перейдём теперь к более общему случаю (для упрощения не будем говорить о непрерывности по множеству; ограничимся обычной непрерывностью в смысле определения 9.22).

Теорема 9.5. *Пусть функции k переменных $x_1(t_1,\,\ldots,\,t_k)$, $\ldots,\,x_n(t_1,\,\ldots,\,t_k)$ непрерывны в точке $(t_1^0,\,\ldots,\,t_k^0)$, а функция n переменных $f(x_1,\,\ldots,\,x_n)$ непрерывна в точке $(x_1^0,\,\ldots,\,x_n^0)$, где $x_j^0 = x_j(t_1^0,\,\ldots,\,t_k^0)$, $j = 1,\ \ldots,\,n$. Тогда сложная функция $f(x_1(t_1,\,\ldots,\,t_k),\,\ldots,\,x_n(t_1,\,\ldots,\,t_k))$ непрерывна в точке $(t_1^0,\,\ldots,\,t_k^0)$.*

□ Доказательство аналогично доказательствам теорем 3.5, 3.8, 9.3, 9.4 и не осложняется непрерывностью по множеству. ■

§ 5. Свойства функций, непрерывных на множествах

Теорема 9.6 (о промежуточных значениях непрерывной функции). *Пусть функция f непрерывна в области $G \subset \mathbb{R}^n$, причём $x_1, x_2 \in G$. Тогда если $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, то для любого значения $y_0 \in [y_1; y_2]$ найдётся точка $x_0 \in G$ такая, что $f(x_0) = y_0$.*

□ Рассмотрим непрерывную кривую

$$\Gamma = \{(\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_n):\ \alpha_1 = \alpha_1(t),\,\ldots,\,\alpha_n = \alpha_n(t),\ t \in [a;b]\},$$

соединяющую точки x_1 и x_2 и лежащую в области G (это можно сделать в силу связности G). Так как G — открытое множество, то все точки кривой Γ — внутренние точки G, и в каждой такой точке функция f непрерывна в смысле определения 9.22.

Функция одной переменной $\varphi(t) = f(\alpha_1(t),\,\ldots,\,\alpha_n(t))$ непрерывна в каждой точке $t \in [a;b]$ по теореме 9.5, при этом $\varphi(a) = y_1$, $\varphi(b) = y_2$. По теореме 3.14 о промежуточных значениях непрерывной функции одной переменной, $\exists\, t_0 \in [a;b]$: $\varphi(t_0) = y_0$, т.е.

$$\exists\, x_0 = (\alpha_1(t_0),\,\ldots,\,\alpha_n(t_0)) \in G: \quad f(x_0) = y_0. \qquad \blacksquare$$

З а м е ч а н и е. Теорема сохраняет силу для функций, непрерывных на любом связном множестве, но при доказательстве возникают сложности, связанные с тем, что точки кривой Γ не обязаны быть внутренними точками множества X, и вместо теоремы 9.5 нужно применять её усложнённый вариант, связанный с непрерывностью по множеству.

Теорема 9.7 (обобщение теорем Вейерштрасса 3.11 и 3.12). *Если функция f непрерывна на компакте $F \subset \mathbb{R}^n$, то:* 1) f *ограничена на* F; 2) $\exists\, x_1, x_2 \in F$: $f(x_1) = \sup\limits_F f(x)$, $f(x_2) = \inf\limits_F f(x)$.

□ Доказательство аналогично одномерному случаю. Приведём доказательство первой части; изменения в доказательстве второй части по сравнению с одномерным случаем те же самые.

Пусть функция f неограничена на F. Тогда $\forall\, E > 0 \to \to \exists\, x \in F$: $|f(x)| > E$. Рассмотрим $E = k$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\forall\, k \to \exists\, x_k \in F$: $|f(x_k)| > k$. Так как F — ограниченное множество, то последовательность x_k ограничена. По теореме 9.1 Больцано–Вейерштрасса в $\mathbb{R}^n$ существует сходящаяся подпоследовательность x_{k_m}; $\lim\limits_{m\to\infty} x_{k_m} = x_0$. Если при $m \geqslant m_0$ все $x_{k_m} = x_0$, то $x_0 \in F$; если нет, то x_0 — предельная точка F, и, в силу замкнутости F, всё равно $x_0 \in F$. Так как функция f непрерывна в точке x_0 по множеству F, то $\lim\limits_{m\to\infty} f(x_{k_m}) = = f(x_0)$. С другой стороны, так как при всех m выполняется неравенство $|f(x_{k_m})| > k_m$, то $\lim\limits_{m\to\infty} f(x_{k_m}) = \infty$ — противоречие. Значит, функция f ограничена на F. ■

Докажем ещё одно свойство непрерывных функций, являющееся аналогом леммы о сохранении знака.

Теорема 9.8. *Пусть функция f непрерывна на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$. Тогда при всех $c \in \mathbb{R}$ множества $A_c = \{x \in \in G\colon f(x) > c\}$ и $B_c = \{x \in G\colon f(x) < c\}$ открыты.*

□ Проведём доказательство для A_c (для B_c — аналогично). Если $A_c = \varnothing$, то это — открытое множество. Если $A_c \neq \varnothing$, то рассмотрим произвольную точку $x_0 \in G$ такую, что $f(x_0) > c$.

Но G — открытое множество, значит $\exists\,\delta_1 > 0$: $U_{\delta_1}(x_0) \subset G$. Пусть $\varepsilon = f(x_0) - c > 0$. Так как функция f непрерывна в точке x_0 по открытому множеству G, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Тогда

$$\exists\,\delta \in (0;\delta_1): \quad \forall\,x \in U_\delta(x_0) \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

откуда следует, что $f(x) > f(x_0) - \varepsilon = c$, т.е. $x \in A_c$. Итак, $\exists\,\delta > 0$: $U_\delta(x_0) \subset A_c$. Значит, A_c — открытое множество. ■

З а м е ч а н и е. При $c = 0$ открытость множеств $\{x \in G\colon\ f(x) > 0\}$ и $\{x \in G\colon\ f(x) < 0\}$ является другой формулировкой леммы о сохранении знака для непрерывных функций.

§ 6. Равномерная непрерывность функции на множестве

Определение 9.25. Функция f называется равномерно непрерывной на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, если для любого положительного числа ε найдётся такое положительное число δ, что для всех точек $x', x'' \in X$ таких, что $\rho(x', x'') < \delta$, выполняется неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

На языке кванторов:

$$\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\,\delta > 0: \\ \forall\,x', x'' \in X,\ \rho(x', x'') < \delta \to |f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \tag{9.5}$$

Определение по Коши непрерывности функции f на множестве X записывается так:

$$\forall\,x' \in X \quad \forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\,\delta > 0: \\ \forall\,x'' \in X,\ \rho(x', x'') < \delta \to |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \tag{9.6}$$

(т.е. $\forall\,x' \in X \to \lim\limits_{\substack{x''\to x' \\ x''\in X}} f(x'') = f(x')$).

В записи (9.6) $\delta = \delta(\varepsilon, x')$; в записи (9.5) $\delta = \delta(\varepsilon)$; эти две записи отличаются перестановкой фрагмента «$\forall\,x' \in X$». Так как зависимость только от ε является частным случаем зависимости от ε и от x', то (9.6) следует из (9.5), т.е. равномерно непрерывная на множестве функция является непрерывной на нём. Как мы увидим позже, обратное неверно.

Теорема 9.9 (Кантора). *Если функция f непрерывна на компакте $F \subset \mathbb{R}^n$, то она равномерно непрерывна на нём.*

$\square$ Пусть функция f не является равномерно непрерывной на F. Тогда

$$\exists\, \varepsilon > 0: \quad \forall\, \delta > 0 \to \exists\, x', x'' \in F, \quad \rho(x', x'') < \delta: \quad |f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon.$$

Возьмём $\delta = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \ \ldots$ Тогда можно построить две последовательности x'_k и x''_k точек из F таких, что $\rho(x'_k, x''_k) < \frac{1}{k}$, но $|f(x'_k) - f(x''_k)| \geqslant \varepsilon$. Так как F — ограниченное множество, то по теореме 9.1 из последовательности x'_k можно выделить сходящуюся подпоследовательность x'_{k_m}; $\lim\limits_{m\to\infty} x'_{k_m} = x_0$. Если при $m \geqslant m_0$ все $x'_{k_m} = x_0$, то $x_0 \in F$; если нет, то x_0 — предельная точка F и в силу замкнутости F всё равно $x_0 \in F$.

Далее $\rho(x''_{k_m}, x_0) \leqslant \rho(x''_{k_m}, x'_{k_m}) + \rho(x'_{k_m}, x_0) < \dfrac{1}{k_m} + \rho(x'_{k_m}, x_0)$. Так как $k_1 < k_2 < \ \ldots < k_m < \ \ldots$, то $k_m \geqslant m$, и $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{1}{k_m} = 0$. Также $\lim\limits_{m\to\infty} \rho(x'_{k_m}, x_0) = 0$. Поэтому

$$\lim_{m\to\infty} \rho(x''_{k_m}, x_0) = 0,$$

т.е. $\lim\limits_{m\to\infty} x''_{k_m} = x_0$. Но функция f непрерывна в точке x_0 по множеству F, поэтому

$$\lim_{m\to\infty} f(x'_{k_m}) = \lim_{m\to\infty} f(x''_{k_m}) = f(x_0),$$

и

$$\lim_{m\to\infty} |f(x'_{k_m}) - f(x''_{k_m})| = 0,$$

что противоречит неравенству $|f(x'_{k_m}) - f(x''_{k_m})| \geqslant \varepsilon$, выполненному для всех $m = 1, 2, \ \ldots$ $\blacksquare$

Следствие. *Функция одной переменной f, непрерывная на отрезке $[a; b]$, равномерно непрерывна на нём.*

Теорема 9.10. *Функция одной переменной f, непрерывная на конечном интервале $(a; b)$, равномерно непрерывна на нём $\iff$ существуют конечные $f(a+0)$ и $f(b-0)$.*

□ $\Leftarrow$ Доопределим функцию f в точках a и b: $f(a) = f(a+0)$, $f(b) = f(b-0)$. Полученная функция непрерывна на отрезке $[a;b]$; по теореме Кантора она равномерно непрерывна на $[a;b]$, а значит, и на его подмножестве $(a;b)$.

$\Rightarrow$ $\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\,\delta > 0$: $\forall\,x', x'' \in (a;b)$, $|x' - x''| < \delta \to$ $\to |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Если $x', x'' \in (a; a+\delta)$, то $|x' - x''| < \delta$. Поэтому

$$\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\,\delta > 0 : \quad \forall\,x', x'' \in (a; a+\delta) \to |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Значит, выполнено условие Коши (критерий Коши существования конечного предела $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$), и по теореме 3.6 существует конечный предел $f(a+0)$. Аналогично существует конечный $f(b-0)$. ■

Естественно, необходимым и достаточным условием равномерной непрерывности на конечном полуинтервале $(a;b]$ или $[a;b)$ функции f, непрерывной на нём, является существование конечного предела f в том конце полуинтервала, который ему не принадлежит. Для бесконечного промежутка нет работающих на практике одновременно необходимых и достаточных условий равномерной непрерывности; можно привести некоторые только необходимые или только достаточные условия (теоремы 9.11 и 9.12, упражнение 9.19).

Теорема 9.11. *Если функция одной переменной f непрерывна на промежутке I и имеет ограниченную производную на промежутке I_1, который получается из I удалением концов (если они принадлежат I), то функция f равномерно непрерывна на I.*

□ Пусть $\forall\,x \in I_1 \to |f'(x)| \leqslant M$, где $M > 0$. Тогда по теореме Лагранжа

$$\forall\,x', x'' \in I \to f(x') - f(x'') = f'(\xi)(x' - x''),$$

где $\xi \in (x'; x'') \subset I_1$, поэтому $|f(x') - f(x'')| \leqslant M|x' - x''|$. Значит,

$$\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\,\delta = \frac{\varepsilon}{M} : \quad \forall\,x', x'' \in I,\ |x' - x''| < \delta \Rightarrow \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Функция f равномерно непрерывна на I. ■

Пример 9.9. Является ли функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ равномерно непрерывной: а) на $(0;1)$; б) на $(1;+\infty)$?

□ а) Существуют конечные $f(+0) = 1$ и $f(1-0) = \frac{\sin 1}{1}$, поэтому функция f равномерно непрерывна на $(0;1)$ по теореме 9.10.

б) Так как $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$, то при всех $x > 1$ выполняется неравенство $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} < 2$.

Производная f' ограничена на $(1;+\infty)$, поэтому функция f равномерно непрерывна на $(1;+\infty)$ по теореме 9.11. ■

Пример 9.10. Является ли функция $f(x) = \ln x$ равномерно непрерывной: а) на $(0;1)$; б) на $(1;+\infty)$?

□ а) Так как $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = -\infty$, то по теореме 9.10 функция f не является равномерно непрерывной на $(0;1)$.

б) Заметим, что $f'(x) = \frac{1}{x}$ и при $x > 1$ выполняется неравенство $|f'(x)| < 1$, значит функция f равномерно непрерывна на $(1;+\infty)$ по теореме 9.11. ■

Пример 9.11. Является ли функция $f(x) = x^2$ равномерно непрерывной: а) на $(0;1)$; б) на $(1;+\infty)$?

□ а) Так как существуют конечные $f(+0) = 0$ и $f(1-0) = 1$, то функция f равномерно непрерывна на $(0;1)$ по теореме 9.10.

б) Теорема 9.11 в этом случае неприменима, так как $f'(x) = 2x$ неограничена на $(1;+\infty)$. Докажем, что функция f не является равномерно непрерывной на $(1;+\infty)$ непосредственно по определению, т.е. покажем, что

$$\exists\,\varepsilon > 0: \quad \forall\,\delta > 0 \to \exists\,x', x'' > 1,\ |x' - x''| < \delta : |x'^2 - x''^2| \geqslant \varepsilon. \tag{9.7}$$

Возьмём $x' = n + \frac{1}{n}$, $x'' = n$, $n = 2,\ 3,\ \ldots$ Тогда $x' > x'' > 1$; $|x' - x''| = \frac{1}{n}$, и за счёт выбора n это выражение может быть сделано меньше произвольного положительного числа δ. При этом $|x'^2 - x''^2| = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} > 2$. Поэтому условие (9.7) выполняется при $\varepsilon = 2$. ■

З а м е ч а н и е. Отсутствие равномерной непрерывности f на $(1;+\infty)$ следует также из того, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ (упражнение 9.19).

Теорема 9.12. *Если функция одной переменной f, непрерывная на луче $[a;+\infty)$, имеет конечный предел $f(+\infty)$, то она равномерно непрерывна на $[a;+\infty)$.*

$\square$ Запишем условие Коши существования конечного $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (теорема 3.6):

$$\forall\,\varepsilon>0\to\exists\,\Delta>0:\quad \forall\,x',x''\geqslant\Delta\to|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (9.8)$$

(вместо $\forall\,x',x''>\Delta$ записано нестрогое неравенство — это не имеет значения). Не уменьшая общности, можно считать, что $\Delta>a$. Так как функция f непрерывна на отрезке $[a;\Delta]$, то по теореме Кантора она равномерно непрерывна на нём. Значения $\varepsilon>0$ и $\Delta=\Delta(\varepsilon)$ уже фиксированы:

$$\exists\,\delta>0:\quad \forall\,x',x''\in[a;\Delta],\ |x'-x''|<\delta\to \to|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}\,. \qquad (9.9)$$

Полученное значение δ зависит от ε. Докажем, что

$$\forall\,x',x''\in[a;+\infty),\ |x'-x''|<\delta\to|f(x')-f(x'')|<\varepsilon \qquad (9.10)$$

(этим будет доказано, что функция f равномерно непрерывна на $[a;+\infty)$). Если $x',x''\in[a;\Delta]$, то (9.10) следует из (9.9). Если $x',x''\in[\Delta;+\infty)$, то (9.10) следует из (9.8) (здесь даже не нужно выполнение неравенства $|x'-x''|<\delta$). Наконец, если одна из точек x' и x'' лежит на $[a;\Delta]$, а другая на $[\Delta;+\infty]$ (не уменьшая общности, $a\leqslant x''\leqslant\Delta\leqslant x'$; см. рис. 9.5), то из выполнения неравенства $|x'-x''|<\delta$ следует также, что $|x'-\Delta|<\delta$ и $|x''-\Delta|<\delta$, поэтому

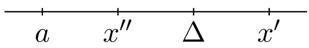

Рис. 9.5

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-f(\Delta)|+|f(\Delta)-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon;$$

сначала применим (9.8) для точек x' и Δ, затем (9.9) для точек Δ и x''. Итак, $\forall\,\varepsilon>0\to\exists\,\delta>0$: $\forall\,x',x''\in[a;+\infty)$, $|x'-x''|<$

$< \delta \to |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, функция f равномерно непрерывна на $[a; +\infty)$. ■

Теорема, очевидно, сохраняется для функций f, непрерывных на $(-\infty; b]$ и имеющих конечный предел $f(-\infty)$.

Пример 9.12. Функция $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{\sqrt{x}}$ равномерно непрерывна на $[1; +\infty)$, так как существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Здесь не помогут ни теорема 9.11, так как $f'(x) = 2\sqrt{x}\cos x^2 - \dfrac{\sin x^2}{2x^{3/2}}$ не является ограниченной на $(1; +\infty)$, ни результат упражнения 9.19, так как f' не является бесконечно большой при $x \to +\infty$.

Упражнения к главе IX

9.1. Доказать, что непустое открытое множество в $\mathbb{R}^1$ является конечным или счётным объединением непересекающихся открытых промежутков.

9.2. Доказать, что множества точек в $\mathbb{R}^n$:

$$\overline{U}_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \rho(x, x_0) \leqslant \varepsilon\} \quad \text{— замкнутый шар;}$$
$$S_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \rho(x, x_0) = \varepsilon\} \quad \text{— сфера}$$

— являются компактами (здесь $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$).

9.3. Является ли в $\mathbb{R}^1$ множество рациональных точек отрезка $[0; 1]$:

а) открытым; б) замкнутым; в) связным?

9.4. Доказать, что график непрерывной функции одной переменной $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, является замкнутым множеством в $\mathbb{R}^2$.

9.5. Построить пример функции двух переменных $f(x, y)$, для которой:

а) $\lim\limits_{x\to0}(\lim\limits_{y\to0} f(x, y))$ и $\lim\limits_{y\to0}(\lim\limits_{x\to0} f(x, y))$ существуют и различны;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x, y)$ существует, но $\lim\limits_{x\to0}(\lim\limits_{y\to0} f(x, y))$ и $\lim\limits_{y\to0}(\lim\limits_{x\to0} f(x, y))$ не существуют;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ и $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))$ существуют, но $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y))$ не существует.

9.6. Доказать, что если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = \beta$ и при любом $y \in \overset{\circ}{U}_\delta(y_0)$, $\delta > 0$, существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, то существует $\lim\limits_{y\to y_0}(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)) = \beta$; здесь β — один из 6 СПС.

9.7. Существуют ли при $x \to 0$, $y \to 0$ для функции $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $x^2+y^2>0$:

а) повторные пределы;

б) пределы по различным направлениям;

в) двойной предел?

9.8. Существуют ли при $x \to 0$, $y \to 0$ для функции $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$, $x^2+y^2>0$:

а) пределы по различным направлениям;

б) двойной предел?

9.9. Доказать, что:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{y^5}{x^4+y^4} = 0$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(1+\sqrt[5]{x^2y^4})}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x\sin y + y\sin x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$;

г) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^6+y^6}} = 0$.

9.10. Доказать, что не существует:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy^3}{x^4+x^2y^2+y^4}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2}$;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x\sin y + y\sin x}{x^2+y^2}$;

г) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3y}{x^6+y^4}$.

9.11. Доказать теорему о переходе к пределу под знаком непрерывной функции одной переменной. Пусть функция n переменных f имеет предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b \in \mathbb{R}$, а функция g одной переменной y непрерывна в точке b. Тогда существует предел сложной функции n переменных $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = g(b)$.

9.12. Вычислить:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{\sqrt[3]{xy}}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (\cos\sqrt{x^2+y^2})^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$.

9.13. Пусть функция f непрерывна на $\mathbb{R}^n$. Доказать, что для любого $c \in \mathbb{R}$ множества $\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ f(x) \geqslant c\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n\colon f(x) \leqslant c\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ f(x) = c\}$ замкнуты.

9.14. Найти множества точек $\mathbb{R}^2$, в которых непрерывны следующие функции:

а) $f(x,y) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}, & \text{если } y \neq 0;\\ 0, & \text{если } y = 0;\end{cases}$

б) $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2, & \text{если } x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{Q};\\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q} \text{ или } y \notin \mathbb{Q};\end{cases}$

в) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{x^2}, & \text{если } x \neq 0;\\ 0, & \text{если } x = 0;\end{cases}$

г) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y-x^2y^2}{x^3-y^3}, & \text{если } x \neq y;\\ 0, & \text{если } x = y.\end{cases}$

9.15. Пусть функция одной переменной f равномерно непрерывна на промежутках I_1 и I_2 таких, что правый конец a промежутка I_1 совпадает с левым концом промежутка I_2, причём точка a принадлежит обоим промежуткам. Доказать, что функция f равномерно непрерывна на промежутке $I_1 \cup I_2$.

9.16. Доказать, что:

а) функция $f(x) = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на $[0;+\infty)$;

б) функция $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } |x| \leqslant 1;\\ \dfrac{1}{x}, & \text{если } |x| > 1\end{cases}$ — равномерно непрерывна на $(-\infty;+\infty)$.

9.17. Теорема 9.11 даёт достаточное условие равномерной непрерывности функции. Доказать, что условие не является необходимым, т.е. существует равномерно непрерывная функция с неограниченной производной.

9.18. Теорема 9.12 даёт достаточное условие равномерной непрерывности функции. Доказать, что условие не является необходимым, т.е. существует равномерно непрерывная на $[a;+\infty)$ функция, не имеющая конечного предела при $x \to +\infty$.

9.19. Доказать, что если функция одной переменной f непрерывна на луче $[a;+\infty)$ и дифференцируема на $(a;+\infty)$, причём $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \infty$, то функция f не является равномерно непрерывной на $[a;+\infty)$.

9.20. Доказать, что следующие функции не являются равномерно непрерывными на $[0;+\infty)$:

а) $f(x) = \sin x^2$; б) $f(x) = x\sin x$.

9.21. Упражнение 9.19 даёт необходимое условие равномерной непрерывности функции. Доказать, что условие не является достаточным, т.е. существует не являющаяся равномерно непрерывной на $[a;+\infty)$ функция, производная которой не является бесконечно большой при $x \to +\infty$.

9.22. Привести пример функции, равномерно непрерывной на $[1;+\infty)$, бесконечно большой при $x \to +\infty$ и имеющей неограниченную производную на $[1;+\infty)$.

9.23. Модулем непрерывности функции f на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ называется функция одной переменной $\delta > 0$:

$$\omega(\delta) = \sup_{\substack{x',x''\in X\\ \rho(x',x'')<\delta}} |f(x'') - f(x')|.$$

Доказать, что функция f равномерно непрерывна на $X \iff \lim\limits_{\delta\to+0} \omega(\delta) = 0$.

9.24. Доказать, что:

а) для функции $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \in (0;1)$ модуль непрерывности $\omega(\delta) \equiv 2$;

б) для функции $f(x) = \sin x$, $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ модуль непрерывности $\omega(\delta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \delta \geqslant \frac{\pi}{2};\\ \sin\delta, & \text{если } 0 < \delta < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

9.25. Является ли функция $f(x,y) = \sin\dfrac{1}{x^2+y^2+2y}$ равномерно непрерывной в области, заданной неравенством $x^2 + y^2 + y < 0$?

ГЛАВА X. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Частные производные и дифференцируемость в точке

Определение 10.1. Частной производной по x функции двух переменных $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) называется производная функции $f(x, y_0)$ одной переменной x в точке x_0 (обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ или $f'_x(x_0, y_0)$; при этом предполагается, что функция $f(x, y_0)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и её производная в точке x_0 конечна). Частной производной по y функции двух переменных $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) называется производная функции $f(x_0, y)$ одной переменной y в точке y_0 (обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ или $f'_y(x_0, y_0)$; при этом предполагается, что функция $f(x_0, y)$ определена в некоторой окрестности точки y_0 и её производная в точке y_0 конечна).

Эти определения могут быть записаны так:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{d}{dx} f(x, y_0)\Big|_{x=x_0};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{d}{dy} f(x_0, y)\Big|_{y=y_0}.$$

Таким образом, для вычисления $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ нужно зафиксировать значение переменной $y = y_0$, и полученную функцию одной переменной x продифференцировать в точке x_0 (операция дифференцирования функции одной переменной x обозначается символом $\frac{d}{dx}$). Аналогично происходит вычисление $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Если вспомнить определение производной функции одной переменной, то можно записать:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

В общем случае функции нескольких переменных частная производная функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ по переменной x_i в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ определяется как

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \frac{d}{dx_i} f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)\Big|_{x_i = x_i^0}.$$

В отличие от функции одной переменной, из существования в точке частных производных по всем переменным не следует непрерывность функции в точке.

Пример 10.1. Рассмотрим функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2>0; \\ 1, & \text{если } x=y=0. \end{cases}$$

Она не является непрерывной в точке $(0,0)$, так как не существует $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ (пример 9.5). Но $f(x,0) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ т.е. $f(x,0) = 1$ при всех x. Поэтому $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dx} f(x,0)\Big|_{x=0} = \frac{d}{dx}(1)\Big|_{x=0} = 0$; аналогично $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Как же могло произойти так, что функция, имеющая частные производные в точке, не является непрерывной? Дело в том, что наличие частных производных означает «хорошее» поведение функции двух переменных $f(x,y)$ лишь при фиксированном x и фиксированном y. Геометрически это соответствует кресту из двух прямых, параллельных координатным осям и проходящих через точку (x_0, y_0). В остальных точках из окрестности (x_0, y_0) функция может вести себя «плохо», даже может стремиться к ∞ по направлениям, не совпадающим с направлениями координатных осей. Непрерывность же функции в точке (x_0, y_0) означает «хорошее» поведение функции во всей «толстой» окрестности точки.

Пример 10.2. Функция $f(x,y) = |x| + |y|$ непрерывна в точке $(0,0)$, но $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dx} f(x,0)\Big|_{x=0} = \frac{d}{dx}(|x|)\Big|_{x=0}$ — не существует. Аналогично не существует $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Таким образом, непрерывная в точке функция не обязана иметь частные производные в этой точке. Это не противоречит нашим сложившимся «одномерным» представлениям.

Если в некоторой окрестности точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ функция n переменных $f(x_1, \ldots, x_n)$ является суперпозицией элементарных функций, то частную производную по каждой из переменных можно вычислять по обычным формулам дифференцирования, считая остальные переменные параметрами.

Пример 10.3. Вычислить $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ во всех точках $\mathbb{R}^2$ для функции

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & \text{если } x = y = 0. \end{cases}$$

$\square$ Так как $f(x,0) = 0$ при всех x, то $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{d}{dx} f(x,0)\Big|_{x=0} = 0$; аналогично $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Если точка (x,y) не совпадает с началом координат, то $f(x,y) = \dfrac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2}$, и можно применить обычные формулы дифференцирования

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2)(3x^2 y - y^3) - 2x(x^3 y - x y^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x^2 + y^2)(x^3 - 3xy^2) - 2y(x^3 y - x y^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - x y^4}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Ответ: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{если } x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & \text{если } x = y = 0; \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{x^5 - 4x^3 y^2 - x y^4}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{если } x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & \text{если } x = y = 0. \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Определение 10.2. Функция n переменных f называется дифференцируемой в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если её приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta f(x_1^0, \ldots, x_n^0) \equiv f(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0) =$$
$$= A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n + \alpha(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \times$$

$$\times\sqrt{(\Delta x_1)^2+\ \ldots+(\Delta x_n)^2}, \qquad (10.1)$$

где $A_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, а предел функции n переменных $\alpha(\Delta x_1,\ \ldots,\ \Delta x_n)$ равен 0 при $(\Delta x_1,\ \ldots,\ \Delta x_n) \to (0, 0,\ \ldots,\ 0)$. При этом линейная часть приращения $A_1\Delta x_1 +\ \ldots + A_n\Delta x_n$ называется дифференциалом функции f в точке $(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ и обозначается $df(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)$.

Иначе равенство (10.1) можно записать так:

$$\Delta f(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0) = A_1\Delta x_1 +\ \ldots + A_n\Delta x_n + o(\rho)$$

при $(\Delta x_1,\ \ldots,\ \Delta x_n) \to (0,\ \ldots,\ 0)$, где

$$\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2+\ \ldots+(\Delta x_n)^2}.$$

Как и в одномерном случае, $o(\varphi(x_1,\ \ldots,\ x_n))$ понимается как $\alpha(x_1,\ \ldots,\ x_n)\cdot\varphi(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, где предел функции $\alpha(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ равен 0 при соответствующем стремлении $x_1,\ \ldots,\ x_n$.

Для функции двух переменных равенство (10.1) запишется так:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}),$$

т.е. $\Delta f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + o(\rho)$, при $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Теорема 10.1 (необходимые условия дифференцируемости). *Если функция n переменных f дифференцируема в точке $(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)$, то:*

1) *f непрерывна в точке $(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)$;*

2) *при $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ существуют конечные $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)$, соответственно равные коэффициентам A_i в линейной части приращения.*

□ 1) Так как $f(x_1,\ \ldots,\ x_n) = f(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0) + A_1\Delta x_1 + \ldots + A_n\Delta x_n + \alpha(\Delta x_1,\ \ldots,\ \Delta x_n)\cdot\sqrt{(\Delta x_1)^2+\ \ldots+(\Delta x_n)^2}$, где $\Delta x_i = x_i - x_i^0$, $i = 1,\ \ldots,\ n$, а предел функции $\alpha(\Delta x_1,\ \ldots,\ \Delta x_n)$ равен 0 при $(\Delta x_1,\ \ldots,\ \Delta x_n) \to (0,\ \ldots,\ 0)$, то предел функции $f(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ при $(x_1,\ \ldots,\ x_n) \to (x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ равен $f(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)$, т.е. функция эта непрерывна в точке $(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)$.

2) Проведём доказательство при $i = 1$ (для остальных i доказательство аналогично). Положим в (10.1) $\Delta x_2 = \Delta x_3 = \ldots = \Delta x_n = 0$. Тогда

$$f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = \\ = A_1 \Delta x_1 + \alpha(\Delta x_1, 0, \ldots, 0) \cdot |\Delta x_1|.$$

Но если предел функции $\alpha(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ равен 0 при $(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \to (0, \ldots, 0)$, то и $\lim\limits_{\Delta x_1 \to 0} \alpha(\Delta x_1, 0, \ldots, 0) = 0$ (при $n = 2$ это предел по направлению вектора $(1, 0)^T$, при $n \geqslant 3$ рассуждения аналогичны доказательству леммы 9.5). Тогда если $\beta(\Delta x_1) = \alpha(\Delta x_1, 0, \ldots, 0) \cdot \operatorname{sign} \Delta x_1$, то $\lim\limits_{\Delta x_1 \to 0} \beta(\Delta x_1) = 0$, и, так как $f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = A_1 \Delta x_1 + \beta(\Delta x_1) \cdot \Delta x_1$, то функция $f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ как функция одной переменной x_1 дифференцируема в точке x_1^0, и её производная по x_1 в этой точке равна A_1, т.е. существует $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = A_1$. ■

Таким образом, дифференциал дифференцируемой функции записывается в виде

$$df(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \\ = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, \ldots, x_n^0)\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1^0, \ldots, x_n^0)\Delta x_n.$$

Дифференциалами независимых переменных $x_1, \ \ldots, x_n$ называются их приращения: $dx_1 = \Delta x_1, \ \ldots, dx_n = \Delta x_n$, поэтому $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$ (координаты точки в этой записи для удобства опускаются).

Первое необходимое условие дифференцируемости в теореме 10.1 не является достаточным, так как непрерывная функция не обязана иметь частные производные в соответствующей точке (пример 10.2). Аналогично не является достаточным и второе условие (пример 10.1). Более интересен пример функции, которая в некоторой точке и непрерывна, и имеет частные производные, но не является дифференцируемой.

Пример 10.4. Функция $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ непрерывна в точке $(0, 0)$ по теореме 9.5 о суперпозиции непрерывных функций (внешняя функция $g(u) = \sqrt{|u|}$ — одной переменной, внутренняя функция $\varphi(x, y) = xy$ — двух переменных). Так как $f(x, 0) = 0$ при всех x, то $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{d}{dx} f(x, 0)\Big|_{x=0} = 0$; аналогично $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Покажем, что функция f не дифференцируема в точке $(0, 0)$.

$\square$ Дифференцируемость означает, что

$$f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$$

при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Но в случае дифференцируемости $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $B = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$, поэтому если функция f была бы дифференцируема в точке $(0, 0)$, то двойной предел $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$ равнялся бы нулю. Переходя к полярным координатам $\Delta x = \rho \cos \varphi$, $\Delta y = \rho \sin \varphi$, мы видим, что последнее выражение не зависит от ρ и равно $|\cos \varphi \sin \varphi|$. Это значит, что по разным направлениям пределы различны, двойной предел не существует, и функция f не дифференцируема в точке $(0, 0)$. $\blacksquare$

Для функции n переменных при $n \geqslant 2$ нет одновременно необходимых и достаточных условий дифференцируемости, выраженных через частные производные.

Теорема 10.2 (достаточное условие дифференцируемости). *Если функция n переменных f имеет частные производные по всем переменным $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\ldots$, $\frac{\partial f}{\partial x_n}$, непрерывные в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ (как функции n переменных), то функция f дифференцируема в этой точке.*

$\square$ Проведём доказательство для случая $n = 2$ (в общем случае доказательство аналогично, только более громоздко). Так как f'_x и f'_y непрерывны в точке (x_0, y_0), то существует $\delta > 0$ такое, что f'_x и f'_y (а следовательно, и функция f) определены в $U_\delta(x_0, y_0)$. Пусть $(x, y) \in U_\delta(x_0, y_0)$; $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$. Тогда $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} < \delta$.

Рассмотрим приращение функции в точке (x_0, y_0):

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0,y_0) \equiv f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = \\ = (f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0)) + \\ +(f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)) = \\ = f'_y(x_0+\Delta x, \tilde{y})\cdot\Delta y + f'_x(\tilde{x}, y_0)\cdot \Delta x.\end{aligned}$$

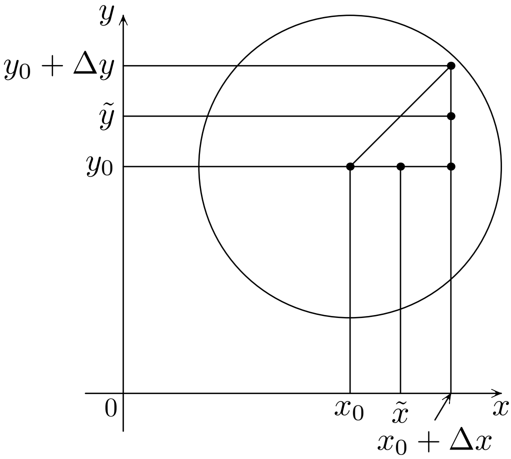

Рис. 10.1

Здесь применена теорема Лагранжа сначала к функции одной переменной $\varphi(y) = f(x_0+\Delta x, y)$ (так как f'_y существует в $U_\delta(x_0,y_0)$, то $\varphi(y)$ дифференцируема на $[y_0; y_0+\Delta y]$, $\tilde{y} \in$ $\in (y_0; y_0+\Delta y)$; если $\Delta y < 0$, то концы промежутка идут в другом порядке), а затем к функции одной переменной $\psi(x) =$ $= f(x, y_0)$ (так как f'_x существует в $U_\delta(x_0,y_0)$, то $\psi(x)$ дифференцируема на $[x_0; x_0+\Delta x]$, $\tilde{x} \in (x_0; x_0+\Delta x)$) (см. рис. 10.1).

Ясно, что $\tilde{x} = \tilde{x}(\Delta x, \Delta y)$, $\tilde{y} = \tilde{y}(\Delta x, \Delta y)$; $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y \to 0}} \tilde{x}(\Delta x, \Delta y) =$ $= x_0$, $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y \to 0}} \tilde{y}(\Delta x, \Delta y) = y_0$. Если доопределить $\tilde{x}(0,0) = x_0$, $\tilde{y}(0,0) = y_0$, то функции $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ станут непрерывными в точке $(0,0)$.

По теореме 9.5 о суперпозиции непрерывных функций функции $f'_x(\tilde{x}(\Delta x, \Delta y), y_0)$ и $f'_y(x_0+\Delta x, \tilde{y}(\Delta x, \Delta y))$ как функции от Δx, Δy непрерывны в точке $(0,0)$ и

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f'_x(\tilde{x}, y_0) = f'_x(x_0, y_0) = A;$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f'_y(x_0+\Delta x, \tilde{y}) = f'_y(x_0, y_0) = B.$$

Поэтому $f'_x(\tilde{x}, y_0) = A + \alpha(\Delta x, \Delta y)$, $f'_y(x_0+\Delta x, \tilde{y}) = B + {}$ $+ \beta(\Delta x, \Delta y)$, где $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0$.

Тогда $\Delta f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\cdot\Delta x + {}$ $+ \beta(\Delta x, \Delta y)\cdot\Delta y$. Но $|\alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y| \leqslant (|\alpha|+|\beta|)\cdot\rho = o(\rho)$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Следовательно, функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0). ■

Это достаточное условие дифференцируемости функции в точке не является необходимым.

Пример 10.5. Докажем, что функция $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2y^2}$ дифференцируема в точке $(0,0)$, но её частные производные не являются непрерывными функциями в этой точке.

□ Так как $f(x,0)=0$ при всех x, то

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dx} f(x,0)\Big|_{x=0} = 0.$$

Аналогично $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Покажем, что

$$f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) = 0\cdot\Delta x + 0\cdot\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$$

при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, т.е., что

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0. \tag{10.2}$$

Перейдём к полярным координатам $\Delta x = \rho\cos\varphi$, $\Delta y = \rho\sin\varphi$ и оценим по модулю последнее выражение:

$$\left|\frac{\sqrt[3]{\rho^2\cos^2\varphi\cdot\rho^2\sin^2\varphi}}{\rho}\right| \leqslant \rho^{1/3} \to 0 \quad \text{при} \quad \rho \to 0.$$

Из леммы 9.6 следует выполнение равенства (10.2). Функция f дифференцируема в точке $(0,0)$.

При этом не существует ни одной окрестности точки $(0,0)$, во всех точках которой определены $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Значит, не может быть речи о непрерывности $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в точке $(0,0)$.

В самом деле, при $y_0 \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0) = \frac{d}{dx}\, f(x,y_0)\Big|_{x=0} = \frac{d}{dx}\,(\sqrt[3]{x^2y_0^2})\Big|_{x=0} =$$
$$= \sqrt[3]{y_0^2}\,\frac{d}{dx}\,(\sqrt[3]{x^2})\Big|_{x=0} = \sqrt[3]{y_0^2}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x},$$

а последний предел бесконечен. Поэтому в каждой точке оси y, кроме $(0,0)$, не существует $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Аналогично в каждой точке оси x, кроме $(0,0)$, не существует $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. ■

Для запоминания необходимых условий и достаточных условий дифференцируемости, а также соответствующих контрпримеров полезна следующая схема (см. рис. 10.2):

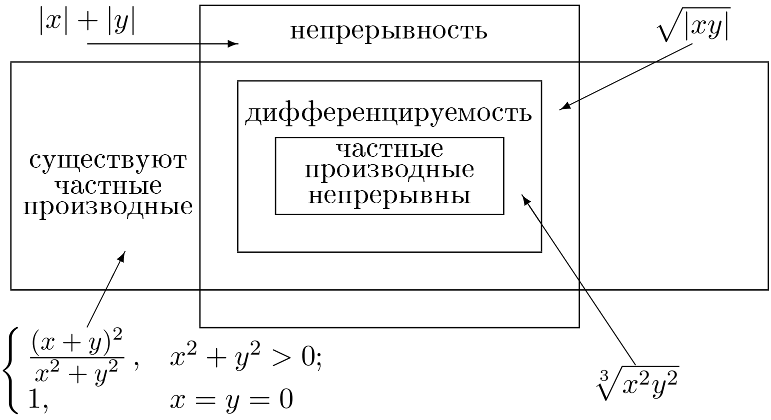

Рис. 10.2

Определение 10.3. Функция n переменных f называется непрерывно дифференцируемой в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если все её частные производные непрерывны в этой точке. Функция n переменных f называется непрерывно дифференцируемой в области $G \subset \mathbb{R}^n$, если она непрерывно дифференцируема в каждой точке этой области.

Из теоремы 10.2 следует, что если функция f непрерывно дифференцируема в некоторой точке, то она дифференцируема в этой точке.

Применяются следующие обозначения. Множество функций, непрерывно дифференцируемых в области G, обозначается $C^1(G)$. Множество функций, непрерывных в области G (или на произвольном множестве X), обозначается $C(G)$ (соответственно $C(X)$). Из первой части теоремы 10.1 и теоремы 10.2 следует, что $C^1(G) \subset C(G)$.

Эти обозначения естественно применяются и в одномерном случае для множеств функций, непрерывных или непрерывно дифференцируемых на промежутках, например, $C[a;b]$ или $C^1[a;b]$.

При исследовании функции (для определённости двух переменных) на дифференцируемость в точке (x_0, y_0) следует пользоваться такой схемой.

1) Если f'_x и f'_y заведомо непрерывны в точке, то функция f дифференцируема в этой точке.
2) В более сложных случаях выясним, существуют ли $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ и $B = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Если хоть одна из них не существует — функция f не дифференцируема в точке (x_0, y_0).
3) Если обе частные производные существуют, то проверим, равен ли 0 двойной предел
$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) - A\cdot\Delta x - B\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}.$$
Если да — функция дифференцируема в точке (x_0, y_0), нет — не дифференцируема.

Пример 10.6. Исследуем дифференцируемость функции $f(x,y) = \cos\sqrt[3]{xy}$ в точке $(0,0)$.

□ Так как $f(x,0) = 1$ при всех x, то
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dx}\, f(x,0)\Big|_{x=0} = 0;$$

аналогично $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Проверим, равен ли нулю

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\cos\sqrt[3]{\Delta x\Delta y} - 1 - 0\cdot\Delta x - 0\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}\,. \tag{10.3}$$

Перейдём к полярным координатам $\Delta x = \rho\cos\varphi$, $\Delta y = \rho\sin\varphi$ и, пользуясь тождеством $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ и неравенством $|\sin\alpha| \leqslant |\alpha|$, оценим выражения под знаком предела в (10.3) по модулю:

$$\left|\frac{\cos\sqrt[3]{\rho\cos\varphi\cdot\rho\sin\varphi} - 1}{\rho}\right| = \frac{1 - \cos\sqrt[3]{\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}}{\rho} =$$

$$= \frac{2\left(\sin\dfrac{\sqrt[3]{\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}}{2}\right)^2}{\rho} \leqslant \frac{2\left(\dfrac{\sqrt[3]{\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}}{2}\right)^2}{\rho} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\rho^{\frac{1}{3}} \to 0 \quad \text{при} \quad \rho \to +0.$$

Из леммы 9.6 следует выполнение равенства (10.3). Функция f дифференцируема в точке $(0,0)$. ■

Аналогично уравнению касательной к графику функции $y = f(x)$ составляется уравнение касательной плоскости к графику функции двух переменных $z = f(x,y)$, определённой в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Пусть $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$. Рассмотрим точки пространства $\mathbb{R}^3$:

$$M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0)),\ M_1(x_1, y_0, f(x_1, y_0)),\ M_2(x_0, y_1, f(x_0, y_1)),$$

где $x_1 = x_0 + \Delta x$, $y_1 = y_0 + \Delta y$. Эти точки не лежат на одной прямой, так как их проекции (x_0, y_0), $(x_0+\Delta x, y_0)$ и $(x_0, y_0+\Delta y)$ не лежат на одной прямой. Точки M_0, M_1, M_2 определяют плоскость, уравнение которой

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - f(x_0, y_0) \\ \Delta x & 0 & \Delta_x f(x_0, y_0) \\ 0 & \Delta y & \Delta_y f(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0,$$

где $\Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_1, y_0) - f(x_0, y_0)$; $\Delta_y f(x_0, y_0) = f(x_0, y_1) - f(x_0, y_0)$. Раскрывая определитель по первой строке, получим после деления обеих частей уравнения на $\Delta x \Delta y$:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x}(x - x_0) + \frac{\Delta_y f(x_0, y_0)}{\Delta y}(y - y_0).$$

В пределе при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ (по множеству $\Delta x \Delta y \neq 0$, т.е. по множеству, полученному удалением из плоскости $\mathbb{R}^2_{\Delta x, \Delta y}$ координатных осей) имеем

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} = f'_x(x_0, y_0); \quad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta_y f(x_0, y_0)}{\Delta y} = f'_y(x_0, y_0)$$

(если эти частные производные существуют). В этом случае можно говорить о предельном положении плоскости $M_0 M_1 M_2$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ по множеству $\{\Delta x \Delta y \neq 0\}$, т.е. о касательной плоскости к графику функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0). Уравнение касательной плоскости

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (10.4)$$

Можно сформулировать аккуратное определение касательной плоскости аналогично определению касательной к графику функции $y = f(x)$ (определение 4.5), но мы этого сейчас делать не будем, так как в третьей части курса будет сформулировано более общее определение касательной плоскости к простой гладкой поверхности, а уравнение (10.4) пока использоваться не будет.

Отметим только, что для дифференцируемой в точке (x_0, y_0) функции уравнение (10.4) может быть записано в виде $z = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)$, где $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$. Таким образом, частные производные в точке (x_0, y_0) — это коэффициенты при x и y в уравнении (10.4) касательной плоскости, а дифференциал в точке (x_0, y_0) — это приращение линейной функции двух переменных, соответствующей уравнению касательной плоскости.

§ 2. Дифференцирование сложной функции

Теорема 10.3. *Пусть функции k переменных $x_1(t_1, \ldots, t_k)$, $\ldots$, $x_n(t_1, \ldots, t_k)$ дифференцируемы в точке $(t_1^0, \ldots, t_k^0)$, а функция n переменных $f(x_1, \ldots, x_n)$ дифференцируема* *в точке* $(x_1^0, \ \ldots, \ x_n^0)$, *где* $x_j^0 = x_j(t_1^0, \ \ldots, \ t_k^0)$, $j = 1, \ \ldots,$ n. *Тогда сложная функция* $f(x_1(t_1, \ \ldots, \ t_k), \ \ldots, x_n(t_1, \ \ldots,$ $t_k))$ *дифференцируема в точке* $(t_1^0, \ \ldots, t_k^0)$, *причём её частные производные в этой точке вычисляются по формулам* $\dfrac{\partial f}{\partial t_i} =$ $= \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \dfrac{\partial x_1}{\partial t_i} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \dfrac{\partial x_2}{\partial t_i} + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \dfrac{\partial x_n}{\partial t_i} \equiv \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \dfrac{\partial x_j}{\partial t_i}$, $i =$ $= 1, \ \ldots, k$ ($\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ *берутся в точке* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, *а* $\dfrac{\partial x_j}{\partial t_i}$ — *в точке* $(t_1^0, \ldots, t_k^0)$).

□ Рассмотрим приращение

$$\Delta f(x_1^0, \ldots, x_n^0) \equiv f(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)$$

(в дальнейшем обозначаем его Δf).

Так как функция f дифференцируема в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, то

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{n} A_j \Delta x_j + \alpha(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)\times \\ \times\sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2}, \quad (10.5)$$

где $A_j = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, $j = 1, \ \ldots, n$, а предел функции $\alpha(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ при $(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \to (0, \ldots, 0)$ равен 0. Можно доопределить $\alpha(0, \ldots, 0) = 0$; тогда функция α непрерывна в точке $(0, \ldots, 0)$, и равенство (10.5) сохраняется при $\Delta x_1 = \ldots = \Delta x_n = 0$.

Пусть теперь $\Delta x_j = x_j(t_1^0 + \Delta t_1, \ldots, t_k^0 + \Delta t_k) - x_j(t_1^0, \ldots, t_k^0)$, $j = 1, 2, \ \ldots, n$. Так как функции x_j дифференцируемы, то они и непрерывны в точке $(t_1^0, \ldots, t_k^0)$, и предел функции Δx_j равен 0 при $\Delta t_1 \to 0, \ \ldots, \Delta t_k \to 0$; $j =$ $= 1, 2, \ \ldots, n$. В силу дифференцируемости функций x_j:

$$\Delta x_j = \sum_{i=1}^{k} B_{ij} \Delta t_i + \alpha_j(\Delta t_1, \ldots, \Delta t_k)\times \\ \times\sqrt{(\Delta t_1)^2 + \ldots + (\Delta t_k)^2}, \quad j = 1, \ldots, n, \quad (10.6)$$

где $B_{ij} = \dfrac{\partial x_j}{\partial t_i}(t_1^0, \ \ldots, t_k^0)$, а пределы функций $\alpha_j(\Delta t_1, \ \ldots, \Delta t_k)$ при $(\Delta t_1, \ \ldots, \Delta t_k) \to (0, \ldots, 0)$ равны 0; здесь $i = 1, \ \ldots, k$;

$j = 1, \ldots, n$. Можно доопределить $\alpha_j(0, \ldots, 0) = 0$, тогда функции α_j непрерывны в точке $(0, \ldots, 0)$, и равенство (10.6) сохраняется при $\Delta t_1 = \ldots = \Delta t_k = 0$.

Подставляя (10.6) в (10.5), имеем (здесь $\Delta f = \Delta f(t_1^0, \ldots, t_k^0)$):

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{n} A_j \Biggl(\sum_{i=1}^{k} B_{ij}\Delta t_i + \alpha_j(\Delta t_1, \ldots, \Delta t_k)\times$$

$$\times\sqrt{(\Delta t_1)^2 + \ldots + (\Delta t_k)^2}\Biggr)+$$

$$+\alpha(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)\cdot\sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2}. \quad (10.7)$$

Обозначим $\sqrt{(\Delta t_1)^2 + \ldots + (\Delta t_k)^2} = \rho$. Так как $|\Delta t_i| \leqslant \rho$ при $i = 1, \ldots, k$ и найдётся $\delta > 0$ такое, что при $\sqrt{(\Delta t_1)^2 + \ldots + (\Delta t_k)^2} < \delta$ выполняются неравенства $|\alpha_j(\Delta t_1, \ldots, \Delta t_k)| < 1$, то $|\Delta x_j| < M\cdot\sum\limits_{i=1}^{k}|\Delta t_i| + \rho \leqslant (Mk + {}$ $+1)\rho$ при $\rho < \delta$, $j = 1, \ldots, n$ (здесь M — наибольшее из чисел $|B_{ij}|$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant n$). Тогда $\sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2} <$ $< (Mk+1)\sqrt{n}\rho \equiv C\rho$ при $\rho < \delta$.

Из (10.7) имеем теперь

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n} A_j B_{ij}\right)\Delta t_i + \left(\sum_{j=1}^{n} A_j\alpha_j(\Delta t_1, \ldots, \Delta t_k)\right)\rho +$$

$$+\alpha(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)\cdot\sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2}. \quad (10.8)$$

Так как $C_i = \sum\limits_{j=1}^{n} A_j B_{ij} = \sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \ldots, x_n^0)\cdot\frac{\partial x_j}{\partial t_i}(t_1^0, \ldots, t_k^0)$, то для доказательства дифференцируемости сложной функции в точке $(t_1^0, \ldots, t_k^0)$ с частными производными C_i, $i = 1, \ldots, k$, достаточно проверить, что последние два из трёх слагаемых в правой части (10.8) есть $o(\rho)$ при $\Delta t_1 \to 0, \ldots, \Delta t_k \to 0$. Но $\sum\limits_{j=1}^{n} A_j\alpha_j(\Delta t_1, \ldots, \Delta t_k)$ — бесконечно малая при $\Delta t_1 \to 0, \ldots, \Delta t_k \to 0$ как линейная комбинация бесконечно малых $\alpha_j(\Delta t_1, \ldots, \Delta t_k)$; значит, второе слагаемое в правой части (10.8) есть $o(\rho)$. Далее, из (10.6) следует, что $\Delta x_j(\Delta t_1, \ldots, \Delta t_k)$ — непрерывные функции от $\Delta t_1, \ldots, \Delta t_k$ в точке $(0, \ldots, 0)$. По теореме 9.5 $\alpha(\Delta x_1(\Delta t_1, \ldots, \Delta t_k), \ldots, \Delta x_n(\Delta t_1, \ldots, \Delta t_k))$ — непрерывная функция от $\Delta t_1, \ldots, \Delta t_k$ в точке $(0, \ldots, 0)$, поэтому предел этой функции при $\Delta t_1 \to 0, \ldots, \Delta t_k \to 0$ равен 0. Так как $\sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2} < C\rho$ при $\rho < \delta$, то третье слагаемое в правой части (10.8) также есть $o(\rho)$. ■

З а м е ч а н и е 1. Если внешняя функция f — дифференцируемая функция одной переменной, а внутренняя функция $x(t_1, \ldots, t_k)$ — дифференцируемая функция нескольких переменных, то формула для частных производных сложной функции имеет вид $\dfrac{\partial f}{\partial t_i} = \dfrac{df}{dx} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial t_i}$, $i = 1, \ldots, k$. Если внешняя функция f — дифференцируемая функция нескольких переменных $x_1, \ldots, x_n$, а внутренние функции — дифференцируемые функции одной переменной t, то производная сложной функции вычисляется по формуле

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}\,.$$

З а м е ч а н и е 2. Если в теореме 10.3 отказаться от дифференцируемости и требовать только наличия частных производных, то сложная функция может не иметь частных производных в соответствующей точке.

Пример 10.7. Рассмотрим внешнюю функцию от двух переменных $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$. Она имеет частные производные, но не дифференцируема в точке $(0, 0)$ (пример 10.4). Если взять $x(t) = t$, $y(t) = t$ (дифференцируемые функции одной переменной t в точке 0), то сложная функция $f(x(t), y(t)) = \sqrt{|t \cdot t|} = |t|$ не имеет производной в точке 0. Мы получили новое (косвенное) доказательство недифференцируемости функции $\sqrt{|xy|}$ в точке $(0, 0)$; если бы эта функция была дифференцируема в точке $(0, 0)$, то по теореме 10.3 сложная функция одной переменной была бы дифференцируема, т.е. имела бы производную в точке 0.

Если $f(x_1, \dots, x_n)$ — дифференцируемая функция n независимых переменных, то $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$, где $dx_1, \dots, dx_n$ — дифференциалы (т.е. приращения) независимых переменных. Пусть теперь $x_1 = x_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n = x_n(t_1, \dots, t_k)$ — дифференцируемые функции k переменных (количества аргументов каждой из этих функций фактически могут быть различными; для удобства считаем их одинаковыми, взяв в качестве k наибольшее из них). Тогда для сложной функции k переменных $f(x_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, \dots, t_k))$

$$df = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_i = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t_i} \right) dt_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial x_j}{\partial t_i} dt_i \right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j,$$

где dx_j — дифференциалы функций нескольких переменных.

Таким образом, в равенство $df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$, где $x_1, \dots, x_n$ — независимые переменные, можно вместо $x_1, \dots, x_n$ подставить любые дифференцируемые функции произвольного числа переменных; внешний вид равенства не изменится. Этот факт называется инвариантностью формы дифференциала относительно замены переменных.

Теорема 10.4. *Пусть u и v — две дифференцируемые функции переменных $x_1, \dots, x_n$ в точке $(x_1^0, \dots, x_n^0)$. Тогда в этой точке дифференцируемы также функции $u + v$, uv, $\frac{u}{v}$ (в последнем случае нужно требовать, чтобы $v(x_1^0, \dots, x_n^0) \neq 0$); при этом*

$$d(u+v) = du + dv; \quad d(uv) = u\,dv + v\,du; \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

□ Докажем, например, третье равенство (остальные доказываются аналогично, даже проще). Рассмотрим функцию двух независимых переменных $f(x,y) = \frac{x}{y}$. Для неё $f'_x = \frac{1}{y}$, $f'_y = -\frac{x}{y^2}$ (обе частные производные непрерывны при $y \neq 0$). Тогда функция f дифференцируема во всех точках, где $y \neq 0$, и $df = \frac{1}{y}\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy$. В силу инвариантности формы дифференциала относительно замены переменных вместо x и y можно подставить любые дифференцируемые функции u и v, лишь бы функция v не обращалась в нуль в соответствующей точке. Тогда $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v}\,du - \frac{u}{v^2}\,dv = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$. ■

Задачи на формальное дифференцирование (т.е. на вычисление дифференциалов функций в точках, где частные производные заведомо непрерывны) можно решать как вычисляя непосредственно частные производные, так и применяя инвариантность формы дифференциала относительно замены переменных.

Пример 10.8. Найдём $df(3,-1)$ для функции $f(x,y) = \ln(x^2+y)$.

Первый способ. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2+y}$; $\frac{\partial f}{\partial x}(3,-1) = \frac{3}{4}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(3,-1) = \frac{1}{8}$; $df(3,-1) = \frac{3}{4}\,dx + \frac{1}{8}\,dy$.

Второй способ. В силу инвариантности формы дифференциала относительно замены переменных, $d(\ln u) = \frac{du}{u}$ для произвольной дифференцируемой положительной функции нескольких переменных u. Тогда $df = \frac{d(x^2+y)}{x^2+y} = \frac{2x\,dx + dy}{x^2+y}$; $df(3,-1) = \frac{6\,dx + dy}{8} = \frac{3}{4}\,dx + \frac{1}{8}\,dy$.

З а м е ч а н и е. Второй способ тем предпочтительнее, чем большее число аргументов имеют рассматриваемые функции. Кстати, $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ можно не вычислять непосредственно, а собирать как коэффициенты при dx и dy в записи для df.

§ 3. Градиент и производная по направлению

Определение 10.4. Если функция n переменных f имеет в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ частные производные по всем переменным, причём $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0) = A_i$, $i = 1, \ldots, n$, то вектор с координатным столбцом $(A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n)^T$ называется градиентом функции f в точке $(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ (обозначается $\operatorname{grad} f(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)$).

Таким образом, $df = (\operatorname{grad} f, \overrightarrow{\Delta x})$, где $\overrightarrow{\Delta x}$ — вектор приращений независимых переменных $\overrightarrow{\Delta x} = (\Delta x_1,\ \ldots,\ \Delta x_n)^T$.

Символический вектор с координатным столбцом $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^T$ обозначается ∇ («набла»). При помощи вектора ∇ градиент может быть символически записан в виде ∇f (вектор ∇ умножается на скаляр f):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^T f; \quad \operatorname{grad} f = \nabla f.$$

При этом ∇ — дифференциальный оператор; он действует на то, что стоит справа, и порядок ∇f существенен; $f\nabla$ означает совсем другое. Если $f(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ — произвольная функция n переменных, то $f\nabla$ — это вектор с координатным столбцом $\left(f\,\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, f\,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^T$, т.е. это — оператор, который можно применять к другой функции $g(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, имеющей частные производные по всем переменным:

$$f\nabla g = \left(f\,\frac{\partial g}{\partial x_1}, \ldots, f\,\frac{\partial g}{\partial x_n}\right)^T, \quad \text{т.е.} \quad f\nabla g = f \operatorname{grad} g.$$

Пример 10.9. В $\mathbb{R}^3$ найти: а) $\operatorname{grad}(x^2+y^2+z^2)$; б) $(x^2+ y^2+z^2)\nabla(xyz)$.

□ а) $\operatorname{grad}(x^2+y^2+z^2) = (2x, 2y, 2z)^T$;
б) $\nabla(xyz) = (yz, xz, xy)^T$; $(x^2+y^2+z^2)\nabla(xyz) = ((x^2+y^2+z^2)yz,\ (x^2+y^2+z^2)xz,\ (x^2+y^2+z^2)xy)^T$. ■

Определение 10.5. Пусть f — функция n переменных, а $\vec{e} = (e_1,\ \ldots,\ e_n)^T$ — единичный вектор $(e_1^2+\ \ldots + e_n^2 = 1)$. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = f(x_1^0+te_1,\ \ldots,\ x_n^0+te_n)$ одной переменной t. Если существует конечная $\varphi'_+(0)$, то она называется производной по направлению вектора $\vec{e}$ функции f в точке $(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ и обозначается $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)$.

Пример 10.10. Для функции двух переменных $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ для любого единичного вектора $\vec{e} = (e_1, e_2)^T$ в точке $(0,0)$ имеем: $\varphi(t)=\sqrt{t^2e_1^2+t^2e_2^2}=|t|$; $\varphi'_+(0)=1$, и производная по любому направлению равна 1. При этом $f(x,0)=$ $=|x|$, и $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{d}{dx}f(x,0)\Big|_{x=0}$ — не существует; аналогично не существует $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Теорема 10.5. *Если функция n переменных f дифференцируема в точке $(x_1^0,\,\ldots,\,x_n^0)$, то для любого единичного вектора $\vec{e}=(e_1,\,\ldots,\,e_n)^T$ существует $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\cdot e_1+\ldots+\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\cdot e_n$ (все частные производные берутся в точке $(x_1^0,\,\ldots,\,x_n^0)$).*

□ Применим к функции $\varphi(t)$ (см. определение 10.5) теорему 10.3 о дифференцируемости сложной функции. По этой теореме функция φ дифференцируема в точке 0 (а не только существует $\varphi'_+(0)$), причём $\varphi'(0)=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\dfrac{d}{dt}(x_1^0+te_1)+\ldots+$ $+\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\dfrac{d}{dt}(x_n^0+te_n)=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\cdot e_1+\ldots+\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\cdot e_n$ ($\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\ \ldots,\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ берутся в точке $(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)$, производные по t — в точке 0). ■

З а м е ч а н и е 1. Если $\vec{e}=(1,0,\,\ldots,\,0)^T$, то $\varphi(t)=f(x_1^0+t,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$. Ясно, что $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0,\,\ldots,\,x_n^0)=$ $=\varphi'(0)$, поэтому если существует $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ в точке $(x_1^0,\,\ldots,\,x_n^0)$, то существует и равная ей производная по направлению вектора $(1,0,\,\ldots,\,0)^T$ (аналогично для частных производных по другим переменным).

З а м е ч а н и е 2. Если в точке существуют частные производные по всем переменным, то отсюда ещё не следует существование производных по всем направлениям. Например, для функции

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & \text{если } xy=0;\\ 1, & \text{если } xy\neq 0\end{cases}$$

частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ равны 0 (это производные по направлениям векторов $(1,0)^T$ и $(0,1)^T$), а производные по другим направлениям не существуют (в этом случае $\varphi(t)=\begin{cases}0, & \text{если } t=0;\\ 1, & \text{если } t\neq 0\end{cases}$).

З а м е ч а н и е 3. Если $\vec{e}$ — единичный вектор, то $(-\vec{e})$ — также единичный вектор. Из теоремы 10.5 следует, что для дифференцируемой функции $\dfrac{\partial f}{\partial(-\vec{e})} = -\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}$.

З а м е ч а н и е 4. Для дифференцируемой в точке функции $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}} = (\operatorname{grad} f, \vec{e})$. Если $\operatorname{grad} f = \vec{0}$, то $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}} = 0$ по любому направлению. Если $\operatorname{grad} f \neq \vec{0}$, то скалярное произведение принимает наибольшее значение, равное $|\operatorname{grad} f|$, если вектор $\vec{e}$ сонаправлен с $\operatorname{grad} f$, т.е. $\vec{e} = \dfrac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}$, и наименьшее значение, равное $(-\operatorname{grad} f)$, если вектор $\vec{e}$ противоположно направлен с $\operatorname{grad} f$, т.е. $\vec{e} = -\dfrac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}$. Таким образом, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}$ имеет наибольшее значение в направлении вектора $\operatorname{grad} f$, наименьшее (такое же по модулю, но отрицательное) — в противоположном направлении.

З а м е ч а н и е 5. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $\vec{e}$ — единичный n-мерный вектор. Обозначим через $x_0 + t\vec{e}$ точку $\mathbb{R}^n$, полученную откладыванием из точки x_0 вектора $t\vec{e}$ (ко всем координатам точки x_0 прибавляются соответствующие координаты вектора $t\vec{e}$). Из определения следует, что $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x_0) = \lim\limits_{t\to+0} \dfrac{f(x_0 + t\vec{e}) - f(x_0)}{t}$. Хотя определение 10.5 зависит от выбора прямоугольной системы координат в $\mathbb{R}^n$, но выражение под знаком последнего предела от такого выбора не зависит, поэтому существование производной $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x_0)$ и её значение также не зависят от такого выбора. Так как для дифференцируемой функции $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}$ — проекция градиента на направление $\vec{e}$, то проекция градиента на любое направление не зависит от выбора прямоугольной системы координат в $\mathbb{R}^n$, поэтому и сам вектор $\operatorname{grad} f$ не зависит от такого выбора, хотя формально он определяется через $x_1, \ \ldots, x_n$.

§ 4. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Определение 10.6. Для функции двух переменных $f(x, y)$ определяются частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

в точках, где соответствующие частные производные от частных производных существуют.

В случае смешанных производных f''_{yx} и f''_{xy} сначала выполняется то дифференцирование, которое записано «ближе к f».

Теорема 10.6 (о независимости смешанной частной производной от порядка дифференцирования). *Пусть функция двух переменных f определена в некоторой δ-окрестности точки (x_0, y_0), $\delta > 0$, вместе с f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}, причём f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны в точке (x_0, y_0). Тогда $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.*

$\square$ Пусть $(x, y) = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U_\delta(x_0, y_0)$. Рассмотрим выражение $W = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0) \equiv \varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0)$, где функция одной переменной $\varphi(y) = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y)$ дифференцируема на $[y_0; y_0 + \Delta y]$ (так как f'_y существует в $U_\delta(x_0, y_0)$), причём $\varphi'(y) = f'_y(x_0 + \Delta x, y) - f'_y(x_0, y)$.

Применим к функции $\varphi(y)$ теорему Лагранжа:

$$W = \varphi'(\tilde{y}) \cdot \Delta y,$$

где $\tilde{y} \in (y_0; y_0 + \Delta y)$, т.е.

$$W = (f'_y(x_0 + \Delta x, \tilde{y}) - f'_y(x_0, \tilde{y})) \cdot \Delta y.$$

Рассмотрим теперь функцию одной переменной $\psi(x) = f'_y(x, \tilde{y})$. Так как в $U_\delta(x_0, y_0)$ существует $f''_{yx} = (f'_y)'_x$, то функция ψ дифференцируема на $[x_0; x_0 + \Delta x]$. По теореме Лагранжа $W = (\psi(x_0 + \Delta x) - \psi(x_0))\Delta y = \psi'(\tilde{x})\Delta x \cdot \Delta y = f''_{yx}(\tilde{x}, \tilde{y}) \cdot \Delta x \cdot \Delta y$, где $\tilde{x} \in (x_0; x_0 + \Delta x)$.

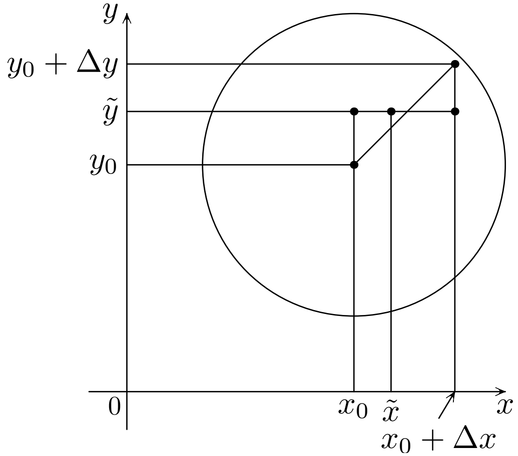

Рис. 10.3

Ясно, что $\tilde{x} = \tilde{x}(\Delta x, \Delta y)$, $\tilde{y} = \tilde{y}(\Delta x, \Delta y)$; $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \tilde{x}(\Delta x, \Delta y) = x_0$, $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \tilde{y}(\Delta x, \Delta y) = y_0$. Если доопределить $\tilde{x}(0,0) = x_0$, $\tilde{y}(0,0) = y_0$, то функции $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ станут непрерывными в точке $(0,0)$.

По теореме 9.5 о суперпозиции непрерывных функций функция $f''_{yx}(\tilde{x}(\Delta x, \Delta y), \tilde{y}(\Delta x, \Delta y))$ как функция от Δx, Δy непрерывна в точке $(0,0)$, и $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{yx}(\tilde{x}, \tilde{y}) = f''_{yx}(x_0, y_0)$. Выражение $\dfrac{W}{\Delta x \Delta y}$ как функция от Δx и Δy определено при $\Delta x \Delta y \neq 0$, т.е. на множестве, полученном удалением из плоскости $\mathbb{R}^2_{\Delta x, \Delta y}$ координатных осей. Отсюда

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0 \\ \Delta x \Delta y \neq 0}} \frac{W}{\Delta x \Delta y} = f''_{yx}(x_0, y_0). \tag{10.9}$$

Если же преобразование W начато с переменной x (т.е. $W = \Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)$, где $\Phi(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)$, и т.д.), то аналогично можно доказать, что предел в левой части (10.9) равен $f''_{xy}(x_0, y_0)$. Значит, $f''_{yx}(x_0, y_0) = f''_{xy}(x_0, y_0)$. ■

Пример 10.11. Рассмотрим функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2>0; \\ 0, & \text{если } x=y=0. \end{cases}$$

В примере 10.3 были найдены $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ во всех точках $\mathbb{R}^2$.

Так как $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$ при всех x, а $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ при всех y, то

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)\right)\Big|_{x=0} = 1;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)\right)\Big|_{y=0} = -1.$$

Смешанные частные производные в точке $(0,0)$, взятые в разном порядке, различны. Из теоремы 10.6 можно сделать вывод, что $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ не являются непрерывными в точке $(0,0)$. В самом деле, можно вычислить при $x^2+y^2>0$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\left(1+\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right).$$

После подстановки $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ легко убедиться, что это выражение не зависит от ρ, а зависит только от φ, поэтому пределы по различным направлениям в точке $(0,0)$ различны, и двойной предел при $x\to 0$, $y\to 0$ не существует.

Для функций любого числа переменных можно определить частные производные любых порядков. Например, для функций двух переменных:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right); \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right);$$

для функций трёх переменных:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^2 \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right)\right) \quad \text{и т.д.}$$

Последовательно применяя теорему 10.6, можно убедиться в том, что если смешанные частные производные любого порядка от функции любого числа переменных отличаются только порядком дифференцирования и непрерывны в некоторой точке, то они совпадают в этой точке, например, $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^2 \partial z} = \dfrac{\partial^4 f}{\partial z \partial y \partial x \partial y}$. Мы не будем доказывать это утверждение в общем виде, отметим только, что для частных производных второго порядка функций любого числа переменных оно сразу следует из теоремы 10.6, так как все переменные, кроме тех двух, по которым ведётся дифференцирование, можно зафиксировать, и останутся функции двух переменных, непрерывные в соответствующей точке.

Определение 10.7. Функция n переменных f называется k раз непрерывно дифференцируемой ($k = 1,\ 2,\ \ldots$) в области $G \subset \mathbb{R}^n$, если она имеет в любой точке этой области все частные производные порядка k, которые непрерывны в G. Множество таких функций обозначается $C^k(G)$.

З а м е ч а н и е 1. Из сказанного ранее следует, что смешанные частные производные таких функций порядка $\leqslant k$ не зависят от порядка дифференцирования.

З а м е ч а н и е 2. При $k = 1$ мы возвращаемся к определению 10.3 (множество функций, непрерывно дифференцируемых в области G, обозначается $C^1(G)$).

Определение 10.8. Пусть функция n переменных $f \in C^k(G)$, где G — область в $\mathbb{R}^n$, $k = 1,\ 2,\ \ldots$ Тогда её дифференциалом k-го порядка называется функция $2n$ переменных $x_1,\ \ldots,\ x_n,\ dx_1,\ \ldots,\ dx_n$:

$$d^k f = \sum_{j_1,\ \ldots,\ j_k = 1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_k}}\, dx_{j_1} \ldots dx_{j_k}, \tag{10.10}$$

определённая при $(x_1,\ \ldots,\ x_n) \in G$, $(x_1 + dx_1,\ \ldots,\ x_n + dx_n) \in G$.

Так как $f \in C^k(G)$, то смешанные частные производные, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, совпадают, и в правой части (10.10) имеются одинаковые слагаемые. При $k = 1$ такой вопрос не стоит, и для $f \in C^1(G)$

$$d^1 f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j = df,$$

т.е. дифференциал первого порядка совпадает с обычным дифференциалом.

При $k = 2$ для функций $f \in C^2(G)$

$$d^2 f = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\, dx_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_i\, dx_j. \tag{10.11}$$

Для функций двух переменных x и y ($n = 2$) производная в правой части (10.10) имеет вид $\frac{\partial^k f}{\partial x^j \partial y^{k-j}}$ (среди $x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}$ всего 2 различных); при ней стоит множитель $dx^j dy^{k-j}$. При фиксированном $j = 0, 1, \ldots, k$ количество таких одинаковых слагаемых равно C_k^j (всего в формуле (10.10) получается $\sum\limits_{j=0}^{k} C_k^j = 2^k$ слагаемых; при произвольном n в формуле (10.10) n^k слагаемых). Таким образом, для функций $f \in C^k(G)$, $G \subset \subset \mathbb{R}^2$,

$$d^k f = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \frac{\partial^k f}{\partial x^j \partial y^{k-j}}\, dx^j\, dy^{k-j}. \tag{10.12}$$

Эта формула напоминает формулу бинома Ньютона. Более того, её можно переписать в виде

$$d^k f = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \left(dx \frac{\partial}{\partial x}\right)^j \left(dy \frac{\partial}{\partial y}\right)^{k-j} f,$$

где $\left(dx \frac{\partial}{\partial x}\right)^j$ — степень оператора, т.е. оператор, применённый j раз подряд к выражению, которое стоит справа от него; аналогично трактуется $\left(dy \frac{\partial}{\partial y}\right)^{k-j}$. Тогда формула для $d^k f$ символически запишется так:

$$d^k f = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y}\right)^k f = (\overrightarrow{dx}, \nabla)^k f.$$

Здесь $\overrightarrow{dx} = (dx, dy)^T$; $(\overrightarrow{dx}, \nabla) = dx\,\dfrac{\partial}{\partial x} + dy\,\dfrac{\partial}{\partial y}$.

Можно показать, что в случае произвольной размерности пространства n имеет место аналогичная символическая формула

$$d^k f = \left(dx_1\,\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + dx_n\,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f = (\overrightarrow{dx}, \nabla)^k f.$$

Теорема 10.7. *Если $f \in C^{k+1}(G)$, G — область в $\mathbb{R}^n$, то $d^{k+1} f = d(d^k f)$; внешний дифференциал здесь рассматривается как дифференциал функции $d^k f$ от n переменных x_1, $\ldots$, x_n при постоянных dx_1, $\ldots$, dx_n.*

□ Дифференцируя (10.10) по $x_1, \ldots, x_n$ при постоянных dx_1, $\ldots$, dx_n имеем

$$d(d^k f) = d\left(\sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_k}}\,dx_{j_1}\ldots dx_{j_k}\right) = \\ = \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} dx_{j_1}\ldots dx_{j_k} d\left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_k}}\right) = \\ = \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} dx_{j_1}\ldots dx_{j_k} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_j \partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_k}}\,dx_j.$$

Обозначив новый индекс j через j_{k+1} и воспользовавшись независимостью смешанной частной производной от порядка дифференцирования, получим

$$d(d^k f) = \sum_{j_1,\ldots,j_k,j_{k+1}=1}^{n} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_k}\partial x_{j_{k+1}}}\,dx_{j_1}\ldots dx_{j_k} dx_{j_{k+1}} = \\ = d^{k+1} f. \quad ■$$

Наиболее часто встречается на практике формула для второго дифференциала функции двух независимых переменных $f(x,y) \in C^2(G)$:

$$d^2 f = f''_{xx} dx^2 + 2 f''_{xy}\,dx\,dy + f''_{yy}\,dy^2 \qquad (10.13)$$

(формула (10.11) при $n = 2$).

Пример 10.12. Найдём $d^2 f(3, -1)$ для $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$.

Первый способ. $f'_x = \frac{2x}{x^2 + y}$; $f'_y = \frac{1}{x^2 + y}$ (см. пример 10.8);

$$f''_{xx} = \frac{(x^2 + y) \cdot 2 - 2x \cdot 2x}{(x^2 + y)^2} = 2 \cdot \frac{y - x^2}{(x^2 + y)^2}\,;$$

$$f''_{xy} = -\,\frac{2x}{(x^2 + y)^2}\,; \quad f''_{yy} = -\,\frac{1}{(x^2 + y)^2}\,;$$

$$f''_{xx}(3, -1) = -\,\frac{20}{64}\,; \quad f''_{xy}(3, -1) = -\,\frac{6}{64}\,; \quad f''_{yy}(3, -1) = -\,\frac{1}{64}\,;$$

$$d^2 f(3, -1) = -\,\frac{20\,dx^2 + 12\,dx\,dy + dy^2}{64}\,.$$

Второй способ. $df = \frac{2x\,dx + dy}{x^2 + y}$ (см. пример 10.8);

$$d^2 f = d(df) = \frac{(x^2 + y) \cdot 2\,dx^2 - (2x\,dx + dy)(2x\,dx + dy)}{(x^2 + y)^2}\,;$$

$$d^2 f(3, -1) = \frac{16\,dx^2 - (6\,dx + dy)^2}{64} = -\,\frac{20\,dx^2 + 12\,dx\,dy + dy^2}{64}\,.$$

З а м е ч а н и е. f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy} можно не вычислять непосредственно, а находить из коэффициентов при dx^2, $dx\,dy$, dy^2 в записи для $d^2 f$.

Отсутствие инвариантности формы дифференциала порядка $k \geqslant 2$ относительно замены переменных разберём для случая $k = 2$, $n = 2$.

Пусть u, v — дважды непрерывно дифференцируемые функции произвольного числа переменных, f — дважды непрерывно дифференцируемая функция двух переменных. Тогда

$$d^2 f(u, v) = d(df(u, v)) = d(f'_u\,du + f'_v\,dv);$$

здесь мы воспользовались инвариантностью формы первого дифференциала относительно замены переменных. Так как du и dv нельзя считать постоянными, то

$$d^2 f(u, v) = du \cdot d(f'_u) + f'_u \cdot d(du) + dv \cdot d(f'_v) + f'_v \cdot d(dv).$$

Снова воспользовавшись инвариантностью формы первого дифференциала относительно замены переменных, получим

$$d^2 f(u,v) = du(f''_{uu}du + f''_{uv}dv) + f'_u\, d^2u + dv(f''_{vu}\, du + f''_{vv}\, dv) + f'_v\, d^2v.$$

Так как $f''_{uv} = f''_{vu}$, имеем окончательно

$$d^2 f(u,v) = f''_{uu}\, du^2 + 2f''_{uv}\, du\, dv + f''_{vv}\, dv^2 + f'_u d^2u + f'_v\, d^2v. \quad (10.14)$$

Это — формула второго дифференциала сложной функции от двух переменных. Сравнивая её с формулой (10.13) второго дифференциала функции двух независимых переменных, замечаем наличие дополнительных слагаемых $f'_u\, d^2u + f'_v\, d^2v$, которые обращаются в нуль, если u и v — независимые переменные. В общем случае эти слагаемые присутствуют, что и обуславливает отсутствие инвариантности формы второго дифференциала относительно замены переменных.

В случае $k = 2$, $n = 1$ аналогично получим формулу второго дифференциала сложной функции в случае, когда внешняя функция — от одной переменной, а внутренняя — от нескольких:

$$d^2 f(u) = f''(u)\, du^2 + f'(u)\, d^2u \quad (10.15)$$

(см. также формулу (4.6), где внутренняя функция — от одной переменной).

Пример 10.13. Найдём $d^2 f(3,-1)$ для $f(x,y) = \ln(x^2 + y)$ (см. пример 10.12) третьим способом — при помощи формулы (10.15). Имеем: $f(u) = \ln u$; $f'(u) = \frac{1}{u}$; $f''(u) = -\frac{1}{u^2}$; $u = x^2 + y$; $du = 2x\, dx + dy$; $d^2u = 2dx^2$; $u(3,-1) = 8$; $f'(8) = \frac{1}{8}$; $f''(8) = -\frac{1}{64}$; $du(3,-1) = 6\, dx + dy$; $d^2 f(3,-1) = -\frac{1}{64}(6\, dx + dy)^2 + \frac{1}{8}\cdot 2dx^2 = -\dfrac{20\, dx^2 + 12\, dx\, dy + dy^2}{64}$.

§ 5. Формула Тейлора для функций многих переменных

Теорема 10.8 (остаточный член в форме Лагранжа). *Пусть при некотором* $\delta > 0$ *функция* n *переменных* $f \in C^{k+1}(U_\delta(x_1^0, \ldots, x_n^0))$, *где* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *Тогда для любой* *точки* $(x_1, \ldots, x_n) \in U_\delta(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *найдётся число* $\xi \in (0;1)$ *такое, что*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1^0, \ldots, x_n^0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{d^j f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{j!} + \\ + \frac{d^{k+1} f(x_1^0 + \xi\Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \xi\Delta x_n)}{(k+1)!}, \quad (10.16)$$

где $d^j f = \left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^j f$, $j = 1, \ldots, k+1$ *— дифференциал* j*-го порядка функции* f *в соответствующей точке;* $\Delta x_i = x_i - x_i^0$, $i = 1, \ldots, n$; $\sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2} < \delta$.

З а м е ч а н и е. Последнее слагаемое в правой части (10.16) называется остаточным членом формулы Тейлора функции f (в форме Лагранжа), сумма остальных слагаемых — многочлен Тейлора порядка k.

□ Доказательство проведём для случая $n = 2$; для бо́льших n доказательство аналогично.

Пусть функция двух переменных $f \in C^{k+1}(U_\delta(x_0, y_0))$. Рассмотрим функцию одной переменной $F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$, где Δx и Δy такие, что $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} < \delta$; t — такое, что $(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \in U_\delta(x_0, y_0)$, т.е. $t \in (-1-\varepsilon; 1+\varepsilon)$, где ε — некоторое положительное число (точнее, $\varepsilon = \frac{\delta}{\rho} - 1$) (см. рис. 10.4).

По теореме 10.3 о дифференцируемости сложной функции при всех $t \in (-1-\varepsilon; 1+\varepsilon)$ существует

$$F'(t) = f'_x(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta x + f'_y(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta y = \\ = df(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y).$$

Покажем по индукции, что при $1 \leqslant j \leqslant k+1$ при всех $t \in (-1-\varepsilon; 1+\varepsilon)$ существует $F^{(j)}(t) = d^j f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$. В самом деле, при $j = 1$ это верно. Если утверждение верно для некоторого $j \leqslant k$, то $F^{(j+1)}(t) = \frac{d}{dt}\left(d^j f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\right)$. Но все частные производные функции f порядка вплоть до $k+1$ непрерывны, поэтому $d^j f(x, y)$ — непрерывно

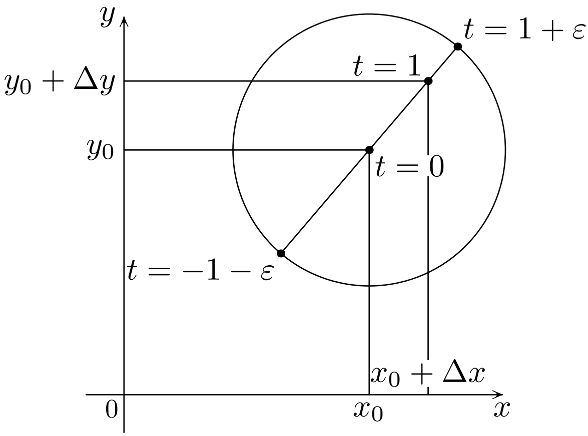

Рис. 10.4

дифференцируемая функция двух переменных в $U_\delta(x_0, y_0)$, и по теореме 10.3 при всех $t \in (-1-\varepsilon; 1+\varepsilon)$ существует

$$F^{(j+1)}(t) = (d^j f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y))'_x \cdot \Delta x + \\ + (d^j f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y))'_y \cdot \Delta y = \\ = d(d^j f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)).$$

Внешний дифференциал подразумевает дифференцирование по x, y при постоянных Δx, Δy; по теореме 10.7 он равен $d^{j+1} f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$. Индукция завершена.

Так как функция одной переменной F имеет $k+1$ производную на $(-1-\varepsilon; 1+\varepsilon)$, то по одномерной формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (теорема 4.19) при $t \in (-1-\varepsilon; 1+\varepsilon)$ существует $\xi \in (0; t)$ такое, что

$$F(t) = F(0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{F^{(j)}(0)}{j!}\, t^j + \frac{F^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}\, t^{k+1}.$$

При $t = 1$ получим

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = \\ = f(x_0, y_0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{d^j f(x_0, y_0)}{j!} + \frac{d^{k+1} f(x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \xi\Delta y)}{(k+1)!}\,,$$

где $\xi \in (0; 1)$. ■

Примечательно, что ξ — одно и то же во всех аргументах функции f.

Следствие (теорема Лагранжа для функций нескольких переменных). *Если при некотором $\delta > 0$ функция n переменных $f \in C^1(U_\delta(x_1^0, \ldots, x_n^0))$, то для любой точки $(x_1, \ldots, x_n)$ найдётся число $\xi \in (0; 1)$ такое, что*

$$f(x_1, \ldots, x_n) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0) = df(x_1^0 + \xi\Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \xi\Delta x_n) =$$
$$= f'_{x_1}(x_1^0 + \xi\Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \xi\Delta x_n) \cdot \Delta x_1 + \ldots +$$
$$+ f'_{x_n}(x_1^0 + \xi\Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \xi\Delta x_n) \cdot \Delta x_n.$$

□ Это — теорема 10.8 при $k = 0$. ■

Теорема 10.9. *Если функция n переменных $f \in C^1(G)$, где G — область в $\mathbb{R}^n$, и $\operatorname{grad} f \equiv \vec{0}$ (т.е. $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \ldots = \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \equiv 0$) в G, то функция f постоянна в области G.*

□ Доказательство проведём для случая, когда $G = U_\delta(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — открытый шар. В общем случае возникает сложность, для преодоления которой нам пока не хватает математического аппарата.

Если $(x_1, \ldots, x_n) \in U_\delta(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, то по следствию из теоремы 10.8 $f(x_1, \ldots, x_n) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0) = 0 \cdot \Delta x_1 + \ldots + 0 \cdot \Delta x_n = 0$, значит, во всех точках $(x_1, \ldots, x_n) \in U_\delta(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ значения функции равны $f(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, т.е. функция постоянна. ■

Теорема 10.10 (остаточный член в форме Пеано). *Пусть при некотором $\delta > 0$ функция n переменных $f \in C^k(U_\delta(x_1^0, \ldots, x_n^0))$, где $k = 1, 2, \ldots$ Тогда*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1^0, \ldots, x_n^0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{d^j f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{j!} + o(\rho^k),$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2}$; $o(\rho^k) = \alpha(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \cdot \rho^k$, причём предел функции $\alpha(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ равен 0 при $(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \to (0, \ldots, 0)$.

□ Из теоремы 10.8 следует, что для функции f можно записать формулу Тейлора с остаточным членом в форме

Лагранжа порядка $k-1$, т.е. при всех $(x_1, \ldots, x_n) \in$ $\in U_\delta(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ имеет место равенство

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1^0, \ldots, x_n^0) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{d^j f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{j!} +$$
$$+ \frac{d^k f(x_1^0 + \xi\Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \xi\Delta x_n)}{k!}, \quad 0 < \xi < 1.$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$d^k f(x_1^0 + \xi\Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \xi\Delta x_n) = d^k f(x_1^0, \ldots, x_n^0) + o(\rho^k)$$

при $(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \to (0, \ldots, 0)$.

Проведём доказательство для случая $n = 2$ (при бо́льших n доказательство усложняется только более громоздкой формулой для $d^2 f$). В этом случае

$$d^k f(x, y) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \frac{\partial^k f}{\partial x^j \partial y^{k-j}} (\Delta x)^j (\Delta y)^{k-j}.$$

Если $x = x_0 + \xi\Delta x$, $y = y_0 + \xi\Delta y$, где $\xi = \xi(\Delta x, \Delta y)$, $\xi \in$ $\in (0;1)$, то $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} x(\Delta x, \Delta y) = x_0$, $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} y(\Delta x, \Delta y) = y_0$. Так как $x(0,0) = x_0$, $y(0,0) = y_0$, то функции $x(\Delta x, \Delta y)$ и $y(\Delta x, \Delta y)$ непрерывны в точке $(0,0)$. Так как при фиксированном j функция $\frac{\partial^k f}{\partial x^j \partial y^{k-j}}$ непрерывна в любой точке $(x, y) \in U_\delta(x_0, y_0)$, то по теореме 9.5 функция $\frac{\partial^k f}{\partial x^j \partial y^{k-j}} (x_0 + \xi(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta x, y_0 +$ $+ \xi(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta y)$ от двух переменных Δx, Δy непрерывна в точке $(0,0)$ и $\frac{\partial^k f}{\partial x^j \partial y^{k-j}} (x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \xi\Delta y) = \frac{\partial^k f}{\partial x^j \partial y^{k-j}} (x_0, y_0) +$ $+ \alpha_j(\Delta x, \Delta y)$, где $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha_j(\Delta x, \Delta y) = 0$. Поэтому

$$|d^k f(x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \xi\Delta y) - d^k f(x_0, y_0)| =$$
$$= \left| \sum_{j=0}^{k} C_k^j \alpha_j(\Delta x, \Delta y) \cdot (\Delta x)^j (\Delta y)^{k-j} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{k} C_k^j |\alpha_j(\Delta x, \Delta y)| \cdot \rho^j \rho^{k-j} = \rho^k \sum_{j=0}^{k} C_k^j |\alpha_j(\Delta x, \Delta y)|.$$

Так как все функции $|\alpha_j(\Delta x, \Delta y)|$, $j = 0, 1, \ldots, k$ — бесконечно малые при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, то таковой же является и их линейная комбинация, поэтому $d^k f(x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \xi\Delta y) = d^k f(x_0, y_0) + o(\rho^k)$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. ■

Пример 10.14. Разложить функцию $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$ по формуле Тейлора при $x \to 3$, $y \to -1$ до $o((x-3)^2+(y+1)^2)$.

□ Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано при $k = 2$ имеет вид

$$f(x, y) = \\ = f(x_0, y_0) + \frac{df(x_0, y_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0, y_0)}{2!} + o((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2), \\ (x, y) \to (x_0, y_0).$$

Поэтому, так как $f(3, -1) = \ln 8$; $df(3, -1) = \frac{3}{4}\,dx + \frac{1}{8}\,dy$; $d^2 f(3, -1) = -\frac{20dx^2 + 12\,dx\,dy + dy^2}{64}$ (примеры 10.8, 10.12, 10.13), то

$$\ln(x^2 + y) = \ln 8 + \frac{3}{4}\,(x - 3) + \frac{1}{8}\,(y + 1) - \frac{5}{32}\,(x - 3)^2 - \\ - \frac{3}{32}\,(x - 3)(y + 1) - \frac{1}{128}\,(y + 1)^2 + o((x - 3)^2 + (y + 1)^2), \\ x \to 3, y \to -1. \quad ■$$

Часто при решении подобных задач применяют известные одномерные разложения по формуле Тейлора (см. главу IV, § 7); тогда $df(x_0, y_0)$, $d^2 f(x_0, y_0)$ и т.д. можно не искать непосредственно, а найти как соответствующие слагаемые в формуле Тейлора. Разберёмся, насколько такие решения допустимы логически. В самом деле, обозначим $t = x - 3$, $s = y + 1$; тогда $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = t^2 + s^2 = \rho^2$. Имеем

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y) = \ln((t + 3)^2 + (s - 1)) = \ln(8 + 6t + s + t^2) = \\ = \ln 8 + \ln\left(1 + \frac{6t + s + t^2}{8}\right).$$

Одномерное разложение $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ запишем в виде

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \alpha(u)\cdot u^2, \quad \text{где} \quad \lim_{u\to 0}\alpha(u) = 0. \qquad (10.17)$$

Если положить $\alpha(0) = 0$, то равенство (10.17) сохранится; поэтому функцию одной переменной $\alpha(u)$ можно считать непрерывной в точке 0. Тогда $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ s\to 0}} \alpha\left(\frac{6t+s+t^2}{8}\right) = 0$ по теореме 9.5 о непрерывности суперпозиции непрерывных функций; мы учли, что функция $u(t,s) = \frac{6t+s+t^2}{8}$ непрерывна в точке $(0,0)$. Подставим $u(t,s)$ в (10.17):

$$f(x,y) = \ln 8 + \frac{6t+s+t^2}{8} - \frac{1}{2}\left(\frac{6t+s+t^2}{8}\right)^2 + \\ +\alpha\left(\frac{6t+s+t^2}{8}\right)\cdot\left(\frac{6t+s+t^2}{8}\right)^2. \qquad (10.18)$$

Так как $|t| \leqslant \rho$, $|s| \leqslant \rho$, $t^2 \leqslant \rho^2 \leqslant \rho$ (естественно считать, что $\rho < 1$), то $\left|\frac{6t+s+t^2}{8}\right| \leqslant \rho$, и последнее слагаемое в правой части (10.18) есть $o(\rho^2)$ в смысле предела функции двух переменных. Среди остальных слагаемых в правой части (10.18) некоторые имеют степень 3 или 4; они тоже являются $o(\rho^2)$ в смысле предела функции двух переменных, так как $|t^3| \leqslant \rho^3$, $|st^2| \leqslant \rho^3$, $|t^4| \leqslant \rho^4 \leqslant \rho^3$, $\rho^3 = o(\rho^2)$ в смысле предела функции двух переменных, потому что $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ s\to 0}} \frac{\rho^3}{\rho^2} = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ s\to 0}} \sqrt{t^2+s^2} = 0$; значит, меньшие по модулю функции также являются $o(\rho^2)$. Оставляя в (10.18) лишь члены степени не более 2, имеем:

$$f(x,y) = \ln 8 + \frac{3}{4}\,t + \frac{1}{8}\,s + \frac{t^2}{8} - \frac{9}{32}\,t^2 - \frac{1}{128}\,s^2 - \frac{3}{32}\,ts + o(\rho^2) = \\ = \ln 8 + \frac{3}{4}\,(x-3) + \frac{1}{8}\,(y+1) - \frac{5}{32}\,(x-3)^2 - \frac{3}{32}\,(x-3)(y+1) - \\ - \frac{1}{128}\,(y+1)^2 + o((x-3)^2 + (y+1)^2), \quad (x,y)\to(3,-1).$$

Для того чтобы полученное разложение считать разложением по формуле Тейлора до $o((x-3)^2+(y+1)^2)$, нужно доказать, что многочлен от двух переменных x, y степени не более k, приближающий функцию $f(x,y)$ с точностью до $o(\rho^k)$ при $(x,y)\to(x_0,y_0)$, является многочленом Тейлора (аналог леммы единственности 4.3 в одномерном случае). Мы не будем доказывать сейчас это утверждение; доказательство проходит по той же схеме, что и доказательство леммы 4.3, только более громоздко.

Итак, сведение разложений по формуле Тейлора функций вида $f(u(x,y))$ к одномерным разложениям функций $f(u)$ в принципе допустимо, но требует понимания сути происходящего. В случае разложений до $o(\rho^2)$, наверное, проще вычислить первый и второй дифференциалы функции и не думать об обосновании подстановок.

Упражнения к главе X

10.1. Для функции двух переменных $f(x,y)=x^y$ найти все частные производные первого и второго порядков в точке $(1,1)$, а также $df(1,1)$ и $d^2f(1,1)$. Разложить функцию по формуле Тейлора до $o((x-1)^2+(y-1)^2)$ при $x\to1$, $y\to1$.

10.2. Может ли функция двух переменных иметь в точке производные по всем направлениям, но не иметь частных производных?

10.3. Доказать, что если у функции двух переменных производные в точке по всем направлениям равны (но не равны нулю), то функция не является дифференцируемой в этой точке.

10.4. Доказать, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2>0;\\ 0, & \text{если } x=y=0,\end{cases}$$

дифференцируема в точке $(0,0)$. Вычислить f'_x и f'_y во всех точках $\mathbb{R}^2$. Являются ли f'_x и f'_y непрерывными в точке $(0,0)$?

10.5. Доказать, что функция $f(x,y)=|x|^\alpha|y|^\beta$, где $\alpha>0$, $\beta>0$, дифференцируема в точке $(0,0)\iff\alpha+\beta>1$.

10.6. Исследовать следующие функции на дифференцируемость в точке $(0,0)$:

а) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$; б) $f(x,y) = x\sqrt{1+\sqrt[3]{y^2}}$;

в) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^4+y^4}$; г) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^4+y^3}$;

д) $f(x,y) = \ln(3+\sqrt[3]{xy})$; е) $f(x,y) = \ln(3+\sqrt[3]{x^2y^2})$;

ж) $f(x,y) = \sqrt[3]{\sin^4 x + \cos^4 y}$;

з) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{\sqrt{x^6+y^6}}, & \text{если } x^2+y^2>0; \\ 0, & \text{если } x=y=0; \end{cases}$

и) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{(x^6+y^6)^{2/3}}, & \text{если } x^2+y^2>0; \\ 0, & \text{если } x=y=0; \end{cases}$

к) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2>0; \\ 0, & \text{если } x=y=0; \end{cases}$

л) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y - y\sin x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & \text{если } x^2+y^2>0; \\ 0, & \text{если } x=y=0; \end{cases}$

м) $f(x,y) = \sqrt[5]{xy} - \sin\sqrt[5]{xy}$;

н) $f(x,y) = \begin{cases} y\cdot\sin\sqrt{\dfrac{x^2}{|y|}}, & \text{если } y\neq 0; \\ 0, & \text{если } y=0. \end{cases}$

10.7. Для сложной функции $f\left(xy, \dfrac{x}{y}\right)$ найти все частные производные первого и второго порядков.

10.8. Для сложной функции $f(x\cos y, x\sin y)$ найти df и d^2f.

10.9. Для функции $f(x,y) = e^{ax+by}$ найти d^kf, $k = 1, 2, \ldots$ $(a,b\in\mathbb{R})$.

10.10. Доказать, что для k-го дифференциала произведения двух k раз непрерывно дифференцируемых функций имеет место формула Лейбница

$$d^k(uv) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j d^{k-j}u\cdot d^jv.$$

10.11. Найти производную функции $f(x,y) = \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ в точке (x_0,y_0) по направлению градиента функции в этой точке.

10.12. Найти наибольшее значение производной по всем возможным направлениям функции $f(x,y,z)=\ln(xyz)$ в точке $(1,1,1)$.

10.13. Доказать, что функция двух переменных, имеющая непрерывные ограниченные частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в выпуклой области $G\subset\mathbb{R}^2$, равномерно непрерывна в области G.

10.14. Доказать, что функция $u(x,t)=f(x+at)+g(x-at)$, где f и g — дважды непрерывно дифференцируемые функции одной переменной, $a>0$, удовлетворяет уравнению колебаний струны $u''_{tt}=a^2u''_{xx}$.

10.15. Доказать, что функция $u(x,t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$, где $a>0$, удовлетворяет уравнению теплопроводности $u'_t=a^2u''_{xx}$.

10.16. Доказать, что функция $u(x,y,z)=\frac{1}{r}$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, удовлетворяет уравнению Лапласа $u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}=0$.

10.17. Доказать, что функция $u(x,y,z)=C_1\,\dfrac{e^{-kr}}{r}+C_2\,\dfrac{e^{kr}}{r}$, где $C_1,C_2,k\in\mathbb{R}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, удовлетворяет уравнению Гельмгольца $u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}=k^2u$.

10.18. Доказать двумерный аналог леммы единственности 4.3. Пусть функция двух переменных $f\in C^k(U_\delta(x_0,y_0))$, а $Q(x,y)$ — многочлен от двух переменных степени не выше k такой, что $f(x,y)=Q(x,y)+o(\rho^k)$ при $(x,y)\to(x_0,y_0)$, $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. Тогда $Q(x,y)$ — многочлен Тейлора функции f порядка k, т.е. $Q(x,y)=f(x_0,y_0)+\sum\limits_{j=1}^{k}\dfrac{d^jf(x_0,y_0)}{j!}$.

ГЛАВА XI. МЕРА ЖОРДАНА В $\mathbb{R}^n$

§ 1. Свойства открытых и замкнутых множеств

Дополнение множества X в $\mathbb{R}^n$ будем обозначать $\hat{X}$, т.е. $\hat{X} = \mathbb{R}^n \setminus X$. Ясно, что всегда $\hat{\hat{X}} = X$.

Теорема 11.1. 1) *Если G_α, $\alpha \in A$ — какой-то набор (возможно, даже несчётный) открытых множеств, то множество $G = \bigcup_\alpha G_\alpha$ — открыто.*

2) *Если G_i, $i = 1, \ldots, k$ — открытые множества, то множество $G = \bigcap_{i=1}^k G_i$ — открыто.*

□ 1) Пусть $x_0 \in G$. Тогда $\exists\,\alpha$: $x_0 \in G_\alpha$. Так как множество G_α открыто, то $\exists\,\delta > 0$: $U_\delta(x_0) \subset G_\alpha$, значит, $U_\delta(x_0) \subset G$. Поэтому G — открытое множество.

2) Пусть $x_0 \in G$. Тогда $\forall\, i = 1, \ldots, k \to x_0 \in G_i$. Так как все G_i открыты, то $\forall\, i = 1, \ldots, k \to \exists\,\delta_i > 0$: $U_{\delta_i}(x_0) \subset G_i$. Рассмотрим положительное число $\delta = \min\limits_{i=1,\ldots,k} \delta_i$. Ясно, что $U_\delta(x_0) \subset U_{\delta_i}(x_0) \subset G_i$ для всех $i = 1, \ldots, k$. Поэтому $U_\delta(x_0) \subset G$, и G — открытое множество. ■

Теорема 11.2. *Множество G открыто $\iff$ множество $\hat{G}$ замкнуто. Множество F замкнуто $\iff$ множество $\hat{F}$ открыто.*

□ Очевидно, достаточно доказать первую часть теоремы.

($\Rightarrow$) Пусть x_0 — предельная точка множества $\hat{G}$. Если $x_0 \notin \hat{G}$, то $x_0 \in G$. Так как G открыто, то $\exists\,\delta > 0$: $U_\delta(x_0) \subset G$, т.е. $U_\delta(x_0) \cap \hat{G} = \varnothing$. Значит, в $U_\delta(x_0)$ нет точек $\hat{G}$; это противоречит тому, что x_0 — предельная точка $\hat{G}$. Поэтому $x_0 \in \hat{G}$, и множество $\hat{G}$ замкнуто.

($\Leftarrow$) Пусть $x_0 \in G$. Докажем, что $\exists\,\delta > 0$: $U_\delta(x_0) \subset G$. Если это не так, то $\forall\,\delta > 0 \to \exists\, x \in U_\delta(x_0)$: $x \in \hat{G}$. Возьмём $\delta = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда $\forall\, k \to \exists\, x_k \in U_{\frac{1}{k}}(x_0)$: $x_k \in \hat{G}$. Но $x_k \neq x_0$, так как $x_0 \in G$. Так как $\rho(x_k, x_0) < \frac{1}{k}$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(x_k, x_0) = 0$, и $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$. Значит, x_0 — предельная точка $\hat{G}$, и $x_0 \notin \hat{G}$.

Получим противоречие замкнутости множества $\hat{G}$. Тогда $\exists\,\delta >$ > 0: $U_\delta(x_0) \subset G$, и множество G открыто. ■

Следующие формулы теории множеств обычно называются формулами де Моргана.

Лемма 11.1. *Если X_α, $\alpha \in A$ — произвольный набор множеств, то*

$$\widehat{\bigcup_\alpha X_\alpha} = \bigcap_\alpha \hat{X}_\alpha; \quad \widehat{\bigcap_\alpha X_\alpha} = \bigcup_\alpha \hat{X}_\alpha.$$

□ Докажем первую из формул; вторая доказывается аналогично. Имеем: $x \in \widehat{\bigcup_\alpha X_\alpha} \iff x \notin \bigcup_\alpha X_\alpha \iff \forall\,\alpha \to x \notin$ $\notin X_\alpha \iff \forall\,\alpha \to x \in \hat{X}_\alpha \iff x \in \bigcap_\alpha \hat{X}_\alpha$. Первая из формул доказана. ■

Теорема 11.3. 1) *Если F_α, $\alpha \in A$ — какой-то набор замкнутых множеств, то множество $F = \bigcap_\alpha F_\alpha$ — замкнуто.*

2) *Если F_i, $i = 1, \ \ldots, k$ — замкнутые множества, то множество $F = \bigcup_{i=1}^k F_i$ — замкнуто.*

□ Утверждения следуют из теорем 11.1, 11.2 и леммы 11.1. ■

Пример 11.1. Для открытых множеств G_i, $i = 1, 2, \ \ldots$, их пересечение $\bigcap_{i=1}^\infty G_i$ не обязано быть открытым. Например, интервалы $G_i = \left(-\frac{1}{i}\,;\frac{1}{i}\right)$, $i = 1, 2, \ \ldots$ — открыты в $\mathbb{R}^1$, а $\bigcap_{i=1}^\infty G_i = \{0\}$ — не является открытым множеством.

Аналогично для замкнутых множеств F_i, $i = 1, 2, \ \ldots$, их объединение $\bigcup_{i=1}^\infty F_i$ не обязано быть замкнутым.

Теорема 11.4. *Если F — замкнутое, а G — открытое множество, то множество $G \setminus F$ открыто, а множество $F \setminus G$ замкнуто.*

□ Так как для любых множеств X и Y имеет место равенство $X \setminus Y = X \cap \hat{Y}$ $(x \in X \setminus Y \iff (x \in X) \wedge (x \notin Y) \iff x \in X \cap$ $\cap\, \hat{Y})$, то $G \setminus F = G \cap \hat{F}$ — открыто по теоремам 11.1 и 11.2; $F \setminus G = F \cap \hat{G}$ — замкнуто по теоремам 11.3 и 11.2. ■

Определение 11.1. Множество всех внутренних точек множества $X \subset \mathbb{R}^n$ называется внутренностью множества X и обозначается $\operatorname{int} X$.

Имеют место следующие почти очевидные утверждения.

1) $\operatorname{int} X$ — открытое множество.

$\square$ Если $x_0 \in \operatorname{int} X$, то $\exists\, \delta > 0$: $U_\delta(x_0) \subset X$. Так как $U_\delta(x_0)$ — открытое множество (лемма 9.1), то все точки $U_\delta(x_0)$ внутренние; значит, $U_\delta(x_0) \subset \operatorname{int} X$. $\blacksquare$

2) $\operatorname{int} X \subset X$.

3) $\operatorname{int} X = X \iff X$ — открыто.

Определение 11.2. Для множества $X \subset \mathbb{R}^n$ его замыканием $\overline{X}$ называется множество $\widehat{\operatorname{int} \hat{X}}$.

Имеют место следующие почти очевидные утверждения.

1) $\overline{X}$ — замкнутое множество.

$\square$ Очевидно, так как $\overline{X}$ — дополнение к открытому множеству. $\blacksquare$

2) $\overline{X} \supset X$.

$\square$ $\operatorname{int} \hat{X} \subset \hat{X}$; переходя к дополнениям, получим вложение в другую сторону: $\overline{X} \supset X$. $\blacksquare$

3) $\overline{X} = X \iff X$ — замкнуто.

$\square$ X — замкнуто $\iff \hat{X}$ — открыто $\iff \operatorname{int} \hat{X} = \hat{X}$; переходя к дополнениям, получим равносильное равенство $\overline{X} = X$. $\blacksquare$

В курсе математического анализа замыкание обычно определяется как множество точек прикосновения X. Мы не будем пользоваться этим определением (разве что в некоторых примерах, где оно бывает удобнее определения 11.2), но ввиду его распространённости докажем его равносильность определению 11.2. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 11.2. *x_0 — точка прикосновения множества $X \subset \mathbb{R}^n \iff \forall\, \delta > 0 \to U_\delta(x_0) \cap X \neq \varnothing$.*

$\square$ ($\Rightarrow$) Если $x_0 \in X$, то $U_\delta(x_0) \cap X$ — непустое множество, так как содержит точку x_0. Если x_0 — предельная точка X, то найдётся последовательность точек x_k из X такая, что $x_k \neq x_0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$. Тогда $\forall\, \delta > 0 \to \exists\, k_0$: $\forall\, k \geqslant k_0 \to 0 < \rho(x_k, x_0) < \delta$; значит, $\forall\, \delta > 0 \to U_\delta(x_0) \cap X \neq \varnothing$.

($\Leftarrow$) Пусть $\forall\, \delta > 0 \to U_\delta(x_0) \cap X \neq \varnothing$. Если $x_0 \in X$, то x_0 — точка прикосновения X. Если $x_0 \notin X$, то $\forall\, \delta > 0 \to \mathring{U}_\delta(x_0) \cap X \neq \varnothing$. Возьмём $\delta = \frac{1}{k}$, $k = 1,\ 2,\ \ldots$ Тогда $\forall\, k \to \exists\, x_k \neq x_0$,

$\rho(x_k, x_0) < \frac{1}{k}$. Так как $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(x_k, x_0) = 0$, то $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$, и x_0 — предельная точка X. $\blacksquare$

Теорема 11.5. *Для любого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ его замыкание $\overline{X}$ совпадает с множеством точек прикосновения X.*

$\square$ x_0 — точка прикосновения $X \iff \forall\,\delta > 0 \to U_\delta(x_0) \cap X \neq$ $\neq \varnothing \iff \forall\,\delta > 0 \to \exists\, x \in U_\delta(x_0)$: $x \notin \hat{X} \iff x_0$ не является внутренней точкой $\hat{X} \iff x_0 \notin \operatorname{int} \hat{X} \iff x_0 \in \overline{X}$. $\blacksquare$

Определение 11.3. Для множества $X \subset \mathbb{R}^n$ его границей ∂X называется множество $\overline{X} \setminus \operatorname{int} X$.

Так как $\overline{X}$ — замкнутое, а $\operatorname{int} X$ — открытое множество, то по теореме 11.4 ∂X — замкнутое множество.

Лемма 11.3. *Для любого множества $X \subset \mathbb{R}^n$*

$$\partial X = \widehat{\operatorname{int} X \cup \operatorname{int} \hat{X}}.$$

$\square$ $\partial X = \overline{X} \setminus \operatorname{int} X = \overline{X} \cap \widehat{\operatorname{int} X} = \widehat{\operatorname{int} X} \cap \widehat{\operatorname{int} \hat{X}} = \widehat{\operatorname{int} X \cup \operatorname{int} \hat{X}}$. $\blacksquare$

Следствие 1. *В силу симметрии последнего выражения относительно X и $\hat{X}$ для любого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ имеет место равенство $\partial X = \partial \hat{X}$.*

Следствие 2. *Для любого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ всё пространство $\mathbb{R}^n$ является объединением точек попарно непересекающихся множеств:*

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{int} X \cup \operatorname{int} \hat{X} \cup \partial X.$$

Следствие 3. *Для любого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ граница ∂X — это множество точек, не являющихся внутренними ни для X, ни для $\hat{X}$, т.е. таких точек, в любой окрестности которых есть как точки X, так и точки $\hat{X}$. Такие точки называются граничными точками множества X.*

Пример 11.2. Пусть $X = (a; b)$ — ограниченный интервал в $\mathbb{R}^1$. Так как X — открытое множество, то $\operatorname{int} X = (a; b)$. Далее, $\hat{X} = (-\infty; a] \cup [b; +\infty)$ — замкнутое множество; $\operatorname{int} \hat{X} =$ $= (-\infty; a) \cup (b; +\infty)$; $\overline{X} = \widehat{\operatorname{int} \hat{X}} = [a; b]$; $\partial X = \overline{X} \setminus \operatorname{int} X = \{a; b\}$ — множество из двух точек (концов интервала).

Пример 11.3. Пусть $X = \mathbb{Q} \cap [0; 1]$ — множество рациональных точек отрезка $[0; 1]$ в $\mathbb{R}^1$. Так как ни одна точка не входит в X вместе с какой-то окрестностью, то $\operatorname{int} X = \varnothing$. Далее, множество X не имеет изолированных точек, множество предельных точек — весь отрезок $[0;1]$. Поэтому $\overline{X} = [0;1]$ (множество точек прикосновения X). Тогда $\partial X = \overline{X} \setminus \operatorname{int} X = [0;1]$.

Докажем два свойства границ множеств, которые понадобятся нам в теории меры Жордана.

Лемма 11.4. *Для любых двух множеств* $X, Y \subset \mathbb{R}^n$*:*
1) $\partial(X \cup Y) \subset (\partial X \cup \partial Y)$; 2) $\partial(X \cap Y) \subset (\partial X \cup \partial Y)$;
3) $\partial(X \setminus Y) \subset (\partial X \cup \partial Y)$.

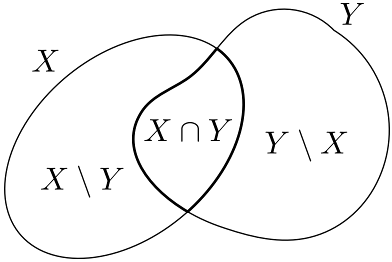

Рис. 11.1

□ Эти утверждения достаточно наглядны, если представить нужные нам множества на диаграммах Эйлера (см. рис. 11.1). Тем не менее не все множества устроены так просто, тем более в n-мерном пространстве, поэтому приведём строгое доказательство.

Пусть $x_0 \notin (\partial X \cup \partial Y)$. Тогда $x_0 \notin \partial X$, $x_0 \notin \partial Y$ (точка, не попавшая в линии, ограничивающие множества на рис. 11.1). Нужно доказать, что $x_0 \notin \partial(X \cup Y)$, $x_0 \notin \partial(X \cap Y)$, $x_0 \notin \partial(X \setminus Y)$.

Так как $\widehat{\partial X} = \operatorname{int} X \cup \operatorname{int} \hat{X}$, а $x_0 \in \widehat{\partial X \cup \partial Y} = \widehat{\partial X} \cap \widehat{\partial Y}$, то

$$x_0 \in (\operatorname{int} X \cup \operatorname{int} \hat{X}) \cap (\operatorname{int} Y \cup \operatorname{int} \hat{Y}) =$$
$$= (\operatorname{int} X \cap \operatorname{int} Y) \cup (\operatorname{int} X \cap \operatorname{int} \hat{Y}) \cup (\operatorname{int} \hat{X} \cap \operatorname{int} Y) \cup (\operatorname{int} \hat{X} \cap \operatorname{int} \hat{Y}).$$

Возможны 4 случая:

а) $x_0 \in \operatorname{int} X$, $x_0 \in \operatorname{int} Y$. В этом случае x_0 войдёт вместе с некоторой окрестностью и в X и в Y; значит, $x_0 \in \operatorname{int}(X \cap Y)$.

б) $x_0 \in \operatorname{int} X$, $x_0 \in \operatorname{int} \hat{Y} \Rightarrow x_0 \in \operatorname{int}(X \cap \hat{Y}) = \operatorname{int}(X \setminus Y)$.

в) $x_0 \in \operatorname{int} \hat{X}$, $x_0 \in \operatorname{int} Y \Rightarrow x_0 \in \operatorname{int}(\hat{X} \cap Y) = \operatorname{int}(Y \setminus X)$.

г) $x_0 \in \operatorname{int} \hat{X}$, $x_0 \in \operatorname{int} \hat{Y} \Rightarrow x_0 \in \operatorname{int}(\hat{X} \cap \hat{Y}) = \operatorname{int}(\widehat{X \cup Y})$.

На рис. 11.1 это означает попадание точки, не лежащей на граничных линиях, в одну из четырёх образовавшихся частей плоскости.

В случаях а, б, в $x_0 \in \operatorname{int}(X \cup Y)$, в случае г $x_0 \in \operatorname{int}(\widehat{X \cup Y})$; в любом случае $x_0 \notin \partial(X \cup Y)$.

В случае а $x_0 \in \operatorname{int}(X \cap Y)$, в случаях б, в, г $x_0 \in \operatorname{int}(\widehat{X \cap Y})$; в любом случае $x_0 \notin \partial(X \cap Y)$.

В случае б $x_0 \in \operatorname{int}(X \setminus Y)$, в случаях а, в, г $x_0 \in \operatorname{int}(\widehat{X \setminus Y})$; в любом случае $x_0 \notin \partial(X \setminus Y)$. ■

Лемма 11.5. *Если X — множество в $\mathbb{R}^n$, $x' \in X$, $x'' \in \hat{X}$, то на отрезке, соединяющем точки x' и x'', найдётся точка $\tilde{x} \in \in \partial X$.*

□ Утверждение достаточно наглядно (см. рис. 11.2) и имеет тот же смысл, что и, например, теорема Больцано–Коши 3.13. Тем не менее оно нуждается в строгом доказательстве.

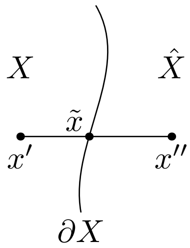

Рис. 11.2

Отрезок, соединяющий точки x и x'', можно задать так: $x(t) = x' + t(x'' - x')$, $t \in [0;1]$. Такая запись является чисто формальной, так как в точечном пространстве $\mathbb{R}^n$ не определены линейные операции; её нужно понимать так: если $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $x' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$, $x'' = (\alpha''_1, \ldots, \alpha''_n)$, то $\alpha_i(t) = \alpha'_i + t(\alpha''_i - \alpha'_i)$, $i = 1, \ldots, n$; $t \in [0;1]$ (см. определение 9.15). При этом $x(0) = x'$, $x(1) = x''$. Нужно доказать, что найдётся значение $t_0 \in [0;1]$, для которого $\tilde{x} = x(t_0) \in \partial X$.

Из двух половинок отрезка $[0;1]$ выберем отрезок Δ_1, для которого в одном из концов $x(t) \in X$, в другом $x(t) \in \hat{X}$, и т.д. (процесс половинного деления, аналогичный применённому в доказательстве теоремы Больцано–Коши). Получим последовательность вложенных отрезков $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_k \ldots$, в одном из концов каждого из которых $x(t) \in X$, в другом $x(t) \in \hat{X}$. Длина отрезка Δ_k стремится к нулю, так как равна $\frac{1}{2^k}$. По теореме Кантора о вложенных отрезках существует единственная точка t_0, принадлежащая всем Δ_k.

Пусть $x^{(1)} = (\alpha_1(t_1),\ \ldots,\ \alpha_n(t_1))$ и $x^{(2)} = (\alpha_1(t_2),\ \ldots,\ \alpha_n(t_2))$ — две точки отрезка, соединяющего x' и x''. Тогда

$$\rho(x^{(2)}, x^{(1)}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i(t_2) - \alpha_i(t_1))^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (t_2 - t_1)^2 (\alpha_i'' - \alpha_i')^2} = |t_2 - t_1|\rho,$$

где $\rho = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i'' - \alpha_i')^2} = \rho(x'', x') > 0$, так как $x'' \neq x'$.

Рассмотрим произвольное число $\delta > 0$ и $\varepsilon = \frac{\delta}{\rho}$. Так как найдётся номер k_0 такой, что при всех $k \geqslant k_0$ длина отрезка Δ_k меньше, чем ε, то все отрезки Δ_k при $k \geqslant k_0$ лежат в $U_\varepsilon(t_0)$. Если t' — один из концов Δ_k, то $\rho(x(t'), x(t_0)) = |t' - t_0|\rho < \varepsilon\rho = \delta$. В одном из концов отрезка Δ_k точка $x(t) \in X$, в другом $x(t) \in \hat{X}$; поэтому в любой $U_\delta(x(t_0))$, $\delta > 0$, есть как точки из X, так и точки из $\hat{X}$. Значит, $\tilde{x} = x(t_0) \in \partial X$. ■

§ 2. Клеточные множества

Определение 11.4. Параллелепипедом в $\mathbb{R}^n$ называется множество $\Pi = \{x = (x_1, \ldots, x_n)\colon\ a_i < x_i < b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$, где a_i, b_i — такие числа, что $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Легко видеть, что параллелепипед — открытое множество (любая точка $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \Pi$ принадлежит ему вместе с окрестностью радиуса $\delta = \min(x_1^0 - a_1^0,\ b_1^0 - x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0 - a_n^0,\ b_n^0 - x_n^0))$.

При $n = 2$ множество Π — открытый прямоугольник на плоскости, стороны которого параллельны осям координат, при $n = 3$ — открытый трёхмерный прямоугольный параллелепипед. При $n \geqslant 4$ непосредственная геометрическая интерпретация невозможна, но бывает удобно пользоваться плоскими рисунками и применять рассуждения по аналогии с плоским случаем. Конечно, полная строгость рассуждений при этом теряется, но при необходимости всё можно аккуратно обосновать без ссылок на геометрическую наглядность (см., например, два доказательства леммы 9.4).

Можно доказать, что замыкание множества Π

$$\overline{\Pi} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : \ a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, \ i = 1, \ldots, n\}$$

— «замкнутый параллелепипед»; граница множества Π

$$\partial\Pi = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{\Pi}, \quad \exists\, i = 1, \ldots, n : \\ ((x_i = a_i) \vee (x_i = b_i))\}.$$

Доказательство этих утверждений будет предложено в качестве упражнения.

Определение 11.5. Клеткой ранга k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) в $\mathbb{R}^n$ называется параллелепипед

$$Q^{(k)} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : \quad \frac{p_i}{2^k} < x_i < \frac{p_i + 1}{2^k}, \\ p_i \in \mathbb{Z}, \ i = 1, \ldots, n\}.$$

Мерой клетки $Q^{(k)}$ называется число

$$mQ^{(k)} = \frac{1}{2^{nk}}.$$

З а м е ч а н и е. В обычной геометрии прямоугольный параллелепипед, все рёбра которого равны, называется кубом (на плоскости — квадратом). По аналогии n-мерный параллелепипед, для которого все разности $b_i - a_i$, $i = 1, \ldots, n$, равны, мы будем называть n-мерным кубом (в плоском случае — квадратом). Так как для клетки $b_i - a_i = \frac{1}{2^k}$, $i = 1, \ldots, n$, то клетка ранга k является n-мерным кубом, длина ребра которого равна $\frac{1}{2^k}$ (соответственно, по аналогии с трёхмерным случаем, «n-мерный объём» равен $\frac{1}{2^{nk}}$). Таким образом, понятие меры клетки является обобщением понятия площади и объёма квадрата и куба на n-мерный случай. Отметим также, что не каждый n-мерный куб с ребром $\frac{1}{2^k}$, все рёбра которого параллельны осям координат, является клеткой ранга k; интервалы изменения x_i должны иметь двоично-рациональные концы со знаменателем 2^k.

Определение 11.6. Г-множеством ранга k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) в $\mathbb{R}^n$ называется множество вида

$$\Gamma_k = \{x = (x_1, \ldots, x_n), \quad \exists\, i = 1, \ldots, n : \quad x_i = \frac{p}{2^k}, \ p \in \mathbb{Z}\}.$$

Пустое множество является Г-множеством любого ранга.

Все точки множества Γ_k являются точками границ некоторых клеток ранга k. Легко видеть, что множество Γ_k является также Г-множеством любого ранга большего, чем k.

Определение 11.7. Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется клеточным множеством ранга k ($k = 0, 1, 2, \ldots$), если

$$S = \left(\bigcup_{j=1}^{N} Q_j^{(k)} \right) \cup \Gamma_k, \quad N = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $Q_j^{(k)}$, $j = 1, \ \ldots, N$ — различные клетки ранга k; Γ_k — ограниченное Г-множество ранга k. Если $N = 0$, то $S = \Gamma_k$; если $\Gamma_k = \varnothing$, то S является объединением клеток. Мерой клеточного множества S называется число $mS = \frac{N}{2^{nk}}$.

З а м е ч а н и е. Если $N = 0$, то $mS = m\Gamma_k = 0$ (мера ограниченного Г-множества равна 0). Если $N = 1$, $\Gamma_k = \varnothing$, то $S = Q^{(k)}$ и $mS = \frac{1}{2^{nk}}$, что совпадает с определением меры клетки в определении 11.5.

Пример 11.4. Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ клеточное множество ранга 2, изображённое на рис. 11.3. Длина стороны квадратика равна $\frac{1}{2^{2\cdot 2}} = \frac{1}{16}$. Клеточное множество S (внутренность закрашена; точки границы, принадлежащие множеству, выделены жирной линией) содержит 20 клеток и Г-множество ранга 2. Его мера $mS = \frac{20}{16} = 1,25$.

Отметим, что внутренние точки S, лежащие на границах двух или более соседних клеток, принадлежат Γ_2, но на рисунке они не выделены жирной линией; выделены только граничные точки S, принадлежащие S. Множество Γ_2 на рис. 11.3 содержит точки, не являющиеся точками границ клеток, входящих в S («рога», выделенные жирной линией, или даже от-

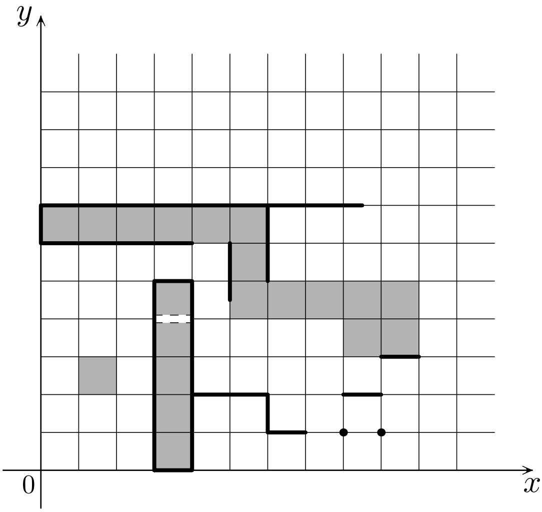

Рис. 11.3

дельные отрезки или точки). Некоторые участки границ соседних клеток, входящих в S, могут не принадлежать S (разрез, обозначенный с двух сторон штриховой линией на рис. 11.3). Иными словами, клетки, входящие в S, — открытые n-мерные кубики, а принадлежат ли S точки их границ, какие из этих точек относятся к Г-множеству, а какие не относятся — не имеет значения; на меру клеточного множества S это не влияет.

Отметим, что клеточное множество S ранга k является также клеточным множеством любого ранга большего, чем k; на меру S это не влияет. В самом деле, при разбиении пополам всех рёбер клетки ранга k получим 2^n клеток ранга $k+1$; мера полученного клеточного множества ранга $k+1$ (точки границ новых клеток ни на что не влияют) равна $\frac{2^n}{2^{n(k+1)}} = \frac{1}{2^{nk}}$, т.е. равна мере клетки ранга k. Ясно, что и общая мера клеточного множества S при этом не изменится; это же произойдёт при разбиении пополам всех рёбер новых клеток и т.д.

Лемма 11.6. 1) *Если S_1 и S_2 — клеточные множества в*

$\mathbb{R}^n$ рангов k_1 и k_2 соответственно, то $S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2$, $S_1 \setminus S_2$ — клеточные множества ранга $k = \max(k_1, k_2)$.

2) *Если при этом S_1 и S_2 пересекаются разве что по Г-множеству ранга k, то $m(S_1 \cup S_2) = mS_1 + mS_2$.*

3) *Если для клеточных множеств $S_1 \supset S_2$, то $m(S_1 \setminus S_2) = mS_1 - mS_2$.*

□ 1) Можно считать, что S_1 и S_2 — клеточные множества ранга k; их меры при этом не изменятся. Тогда в $S_1 \cup S_2$ войдут те и только те клетки ранга k, которые войдут либо в S_1, либо в S_2, либо в оба сразу; в $S_1 \cap S_2$ войдут те и только те клетки, которые войдут одновременно и в S_1 и в S_2; в $S_1 \setminus S_2$ войдут те и только те клетки, которые войдут в S_1, но не войдут в S_2. Внутренние точки остальных клеток ранга k не войдут в соответствующие множества. Что касается точек границ клеток ранга k, то войдут ли они в соответствующие Г-множества — не имеет значения. Первая часть леммы доказана.

2) Для доказательства равенства $m(S_1 \cup S_2) = mS_1 + mS_2$ для клеточных множеств ранга k, пересекающихся по Г-множеству, достаточно заметить, что количество клеток, вошедших в $S_1 \cup S_2$, равно сумме количеств клеток, вошедших в S_1 и в S_2, а затем разделить полученное равенство на 2^{nk}.

3) Если $S_1 \supset S_2$, то $S_1 = S_2 \cup (S_1 \setminus S_2)$, причём $S_2 \cap (S_1 \setminus S_2) = \varnothing$. Из пункта 2 следует, что $mS_1 = mS_2 + m(S_1 \setminus S_2)$, откуда следует нужное равенство. ■

§ 3. Определение и основные свойства меры Жордана

Определение 11.8. Внешней мерой ограниченного множества $X \subset \mathbb{R}^n$ называется число $\mu^* X = \inf\limits_{S \supset X} mS$, где S — всевозможные клеточные множества, включающие в себя множество X. Внутренней мерой ограниченного множества $X \subset \mathbb{R}^n$ называется число $\mu_* X = \sup\limits_{S \subset X} mS$, где S — всевозможные клеточные множества, содержащиеся в X. Ограниченное множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется измеримым (по Жордану), если

$\mu^* X = \mu_* X$; общее значение внешней и внутренней мер измеримого множества называется мерой X и обозначается μX.

В определении $\mu^* X$ клеточное множество, включающее в себя X, всегда существует (X принадлежит шару радиуса C, где C можно считать натуральным числом; следовательно, X принадлежит замкнутому кубу $\{x = (x_1, \ldots, x_n)\colon\ \forall i \to \to -C \leqslant x_i \leqslant C\}$ — а это клеточное множество, состоящее из $(2C)^n$ клеток ранга 0 с граничными точками). В определении $\mu_* X$ может быть так, что подходящим клеточным множеством является только $\varnothing$; в этом случае $\mu_* X = 0$.

В нашем курсе, говоря об измеримых множествах и о мере, мы будем иметь в виду именно измеримость по Жордану, не употребляя каждый раз этот термин. Определение 11.8 можно проиллюстрировать рис. 11.4.

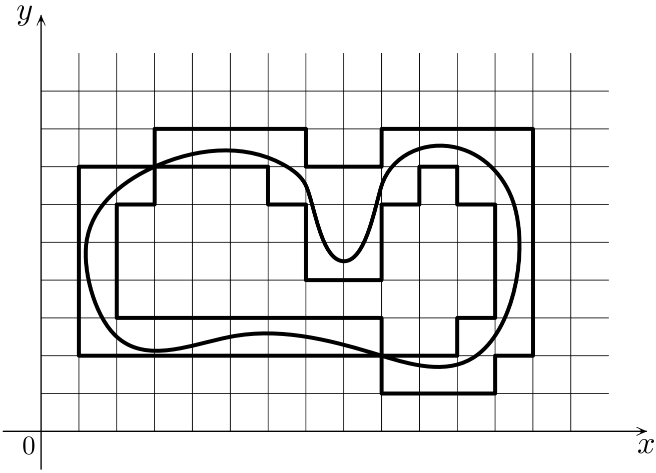

Рис. 11.4

По определению, $\quad \mu^* X = \inf\limits_{S \supset X} mS; \quad \mu_* X = \sup\limits_{S \subset X} mS.$

Отсюда следует, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, S_1 \subset X: \quad mS_1 > \mu_* X - \varepsilon;$$
$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, S_2 \supset X: \quad mS_2 < \mu^* X + \varepsilon.$$

Лемма 11.7. *Для ограниченного множества $X \subset \mathbb{R}^n$ выполняются неравенства*

$$0 \leqslant \mu_* X \leqslant \mu^* X < +\infty. \tag{11.1}$$

□ Левое из трёх неравенств (11.1) очевидно, так как для всех клеточных множеств $S \subset X$ их мера $mS \geqslant 0$ (если S только пустое, то $\mu_* X = 0$). Правое из трёх неравенств (11.1) означает, что $\mu^* X$ конечна; это следует из того, что $\mu^* X \leqslant mS$, где S — некоторая клетка такая, что $S \supset X$. Наконец, если S_1 и S_2 — такие клеточные множества, что $S_1 \subset X \subset S_2$, то из леммы 11.6 следует, что $mS_1 \leqslant mS_2$ (так как $mS_2 - mS_1 = m(S_2 \setminus S_1) \geqslant 0$). Переходя к точной верхней грани по $S_1 \subset X$, мы видим на основании леммы 1.3, что $\mu_* X \leqslant mS_2$ для любого клеточного множества $S_2 \supset X$. Переходя к точной нижней грани по $S_2 \supset X$, имеем неравенство $\mu_* X \leqslant \mu^* X$. ■

Следствие 1. *Для измеримого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ выполняются неравенства $0 \leqslant \mu X < +\infty$.*

Следствие 2. *Неизмеримость ограниченного множества означает, что $\mu_* X < \mu^* X$.*

Лемма 11.8. *Клеточное множество S измеримо в смысле определения 11.8, и $\mu S = mS$.*

□ Так как $S \subset S$, то $mS \leqslant \mu_* S$; $\mu^* S \leqslant mS$. Но $\mu_* S \leqslant \mu^* S$, и из полученной цепочки неравенств следует, что $\mu_* S = \mu^* S = mS$; значит, S измеримо и $\mu S = mS$. ■

Лемма 11.9. *Если $\mu^* X = 0$, то множество X измеримо и $\mu X = 0$.*

□ Утверждение очевидно из цепочки неравенств

$$0 \leqslant \mu_* X \leqslant \mu^* X = 0. \qquad ■$$

Лемма 11.10. *Если $X \subset Y$, то $\mu_* X \leqslant \mu_* Y$; $\mu^* X \leqslant \mu^* Y$. Если оба множества при этом измеримы, то $\mu X \leqslant \mu Y$.*

□ Если S — клеточное множество и $S \subset X$, то $S \subset Y$. Точная верхняя грань для Y берётся по большему набору множеств, чем для X, поэтому $\mu_* X \leqslant \mu_* Y$. Неравенство для внешней меры доказывается аналогично. Если множества измеримы, то вместо μ_* или μ^* можно написать μ, откуда следует нужное неравенство. ■

Лемма 11.11. *Если $\mu X = 0$, то любое подмножество Y множества X измеримо и $\mu Y = 0$.*

□ Если $Y \subset X$, то из лемм 11.10 и 11.9 следует, что

$$\mu^* Y \leqslant \mu^* X = \mu X = 0;$$

значит, Y измеримо и $\mu Y = 0$. ■

Лемма 11.12. $\mu_* X = 0 \iff$ *множество X не имеет внутренних точек.*

□ ($\Rightarrow$) Пусть X имеет внутреннюю точку $x^0 = (\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0)$. Тогда $\exists\, \delta > 0$: $U_\delta(x^0) \subset X$. Рассмотрим n-мерный куб:

$$\Pi = \{x = (x_1, \ldots, x_n): \quad \alpha_i^0 < x_i < \alpha_i^0 + \frac{\delta}{\sqrt{n}},\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

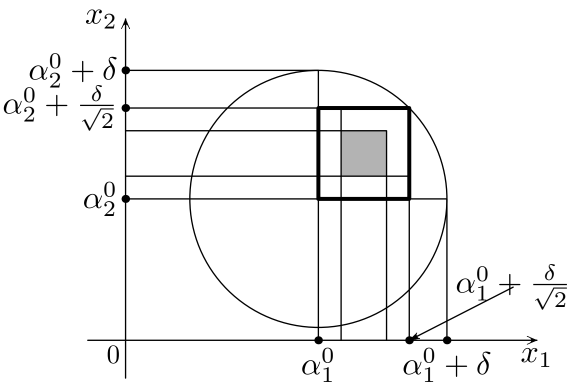

Рис. 11.5

Для каждой точки x этого куба

$$\rho(x, x^0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \alpha_i^0)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\delta}{\sqrt{n}}\right)^2} = \delta,$$

поэтому $\Pi \subset U_\delta(x^0)$. На рис. 11.5 изображён случай $n = 2$; Π — это квадрат со стороной $\frac{\delta}{\sqrt{2}}$, граница которого выделена жирными линиями.

Куб П, вообще говоря, не является клеткой. Покажем, что найдётся клетка $Q \subset \Pi$.

Рассмотрим два произвольных действительных числа α и β такие, что $\alpha < \beta$. Пусть k — такое натуральное число, что $2^k(\beta - \alpha) \geqslant 2$. Тогда длина интервала $(2^k\alpha; 2^k\beta)$ не меньше, чем 2, и на этом интервале найдутся два последовательных целых числа p и $p+1$.

$$2^k\alpha < p < p+1 < 2^k\beta \Rightarrow \alpha < \frac{p}{2^k} < \frac{p+1}{2^k} < \beta.$$

Вставим такую пару чисел $\frac{p_i}{2^k} < \frac{p_i+1}{2^k}$ на каждом из интервалов $\left(\alpha_i^0; \alpha_i^0 + \frac{\delta}{\sqrt{n}}\right)$, $i = 1, \ \ldots, n$ (натуральное число k можно считать одинаковым для всех $i = 1, \ \ldots, n$; если k_i различны, то возьмём наибольшее из них). Тогда клетка

$$Q = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : \quad \frac{p_i}{2^k} < x_i < \frac{p_i+1}{2^k}, \ i = 1, \ldots, n\}$$

целиком принадлежит кубу П (на рис. 11.5 Q — закрашенный квадрат). Поэтому $Q \subset \Pi \subset U_\delta(x^0) \subset X$, и $\mu_* X \geqslant mQ > 0$.

($\Leftarrow$) Если $\mu_* X > 0$, то найдётся клеточное множество $S \subset X$ такое, что $mS > 0$. Значит, S содержит хотя бы одну клетку, а так как клетка — открытое множество, то она имеет внутреннюю точку, следовательно, X имеет внутреннюю точку. ■

Пример 11.5. Множество X, состоящее из конечного числа точек, измеримо в $\mathbb{R}^n$, и $\mu X = 0$.

□ Пусть $x^0 = (\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0) \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим при $i = 1, 2, \ldots, n$ целые числа $p_i = [2^k\alpha_i^0]$, где $k = 0, 1, 2, \ \ldots$ — фиксированное число. Тогда $p_i \leqslant 2^k\alpha_i^0 < p_i + 1$, и $\frac{p_i}{2^k} \leqslant \alpha_i^0 < \frac{p_i+1}{2^k}$. Тогда $x^0 \in \overline{Q^{(k)}}$, где $Q^{(k)} = \{x = (x_1, \ldots, x_n)\colon \frac{p_i}{2^k} < x_i < \frac{p_i+1}{2^k}, \ i = 1, \ldots, n\}$ — клетка ранга k. Если $X = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \ \ldots, x^{(N)}\}$, то выберем натуральное число k настолько большим, что $\frac{1}{2^{nk}} < \frac{\varepsilon}{N}$, где ε — фиксированное положительное число. Каждую их точек $x^{(j)}$, $j = 1, \ \ldots, N$, поместим во множество $\overline{Q_j^{(k)}}$, построенное, как было указано выше. Тогда $X \subset S = \bigcup_{j=1}^{N} \overline{Q_j^{(k)}}$ — это клеточное множество ранга k. Так как множества $\overline{Q_j^{(k)}}$ при разных j могут совпадать, то $\mu^* X \leqslant mS \leqslant N \cdot m\overline{Q^{(k)}} = \frac{N}{2^{nk}} < \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ — произвольно, то $\mu^* X = 0$. По лемме 11.9 множество X измеримо и $\mu X = 0$. ■

Пример 11.6. Множество рациональных точек отрезка $[0;1]$ неизмеримо в $\mathbb{R}^1$.

□ Так как $X = \mathbb{Q} \cap [0;1]$ не имеет внутренних точек, то $\mu_* X = 0$ (лемма 11.12). Но если клеточное множество ранга k в $\mathbb{R}^1$ содержит в себе X, то оно содержит все 2^k клеток (интервалов) на $(0;1)$ длины $\frac{1}{2^k}$, поэтому $mS \geqslant 1$. Значит, $\mu^* X \geqslant 1 > \mu_* X = 0$ и множество X неизмеримо. ■

З а м е ч а н и е. Можно доказать, что $\mu^* X = 1$.

Пример 11.7. Отрезок $X = [a;b]$ измерим в $\mathbb{R}^1$ и $\mu X = b - a$.

□ Пусть $k = 0, 1, 2, \ldots$ — фиксированное число. Рассмотрим целые числа $p_1 = [2^k a]$, $p_2 = [2^k b]$. Число k будем считать настолько большим, что $p_1 \leqslant 2^k a < p_1 + 1 < p_2 \leqslant 2^k b < p_2 + 1$; тогда $\frac{p_1}{2^k} \leqslant a < \frac{p_1+1}{2^k} < \frac{p_2}{2^k} \leqslant b < \frac{p_2+1}{2^k}$ (см. рис. 11.6, где $\alpha = \frac{p_1}{2^k}$, $\beta = \frac{p_2}{2^k}$).

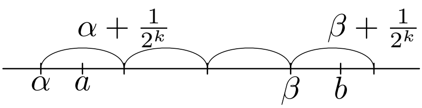

Рис. 11.6

Клетки ранга k в $\mathbb{R}^1$ — это интервалы вида $\left(\frac{p}{2^k}; \frac{p+1}{2^k}\right)$, где $p \in \mathbb{Z}$ (на рис. 11.6 клетки ранга k показаны дужками). Рассмотрим клеточные множества $S_1 = \left[\alpha + \frac{1}{2^k}; \beta\right]$, $S_2 = \left[\alpha; \beta + \frac{1}{2^k}\right]$. Мера клеточного множества, являющегося отрезком, равна длине этого отрезка (количество интервалов-клеток, на которые разбивается отрезок, помноженное на длину интервала-клетки). Поэтому $\mu_* X \geqslant mS_1 = \beta - \alpha - \frac{1}{2^k}$. Пусть $\varepsilon > 0$ — фиксированное число. Выберем k настолько большим, что $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$. Тогда $(b-a)-$ $-\left(\beta-\alpha-\frac{1}{2^k}\right) \leqslant 2\cdot\frac{1}{2^k} < 2\varepsilon$, откуда $\beta-\alpha-\frac{1}{2^k} > b-a-$ -2ε, т.е. $\mu_*X \geqslant b-a-2\varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ — произвольно, то $\mu_*X \geqslant b-a$. Аналогично, при k настолько больших, что $\frac{1}{2^k} <$ $< \varepsilon$, имеем: $\mu^*X \leqslant mS_2 = \beta+\frac{1}{2^k}-\alpha \leqslant b-a+2\cdot\frac{1}{2^k} < b-a+2\varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ — произвольно, то $\mu^*X \leqslant b-a$. Но $\mu_*X \leqslant \mu^*X$, поэтому их значения совпадают и равны $b-a$. ■

Докажем теперь два критерия измеримости множества в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 11.6. *Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ измеримо $\iff$ для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся измеримые множества X_1 и X_2 такие, что $X_1 \subset X \subset X_2$ и $\mu X_2 - \mu X_1 < \varepsilon$.*

□ ($\Rightarrow$) Так как множество X измеримо, то, по определению точных верхней и нижней граней, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся клеточные множества S_1 и S_2 такие, что $S_1 \subset X \subset S_2$, $mS_2 <$ $< \mu X + \frac{\varepsilon}{2}$, $mS_1 > \mu X - \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $mS_2 - mS_1 < \varepsilon$, и множества S_1 и S_2 можно взять в качестве измеримых множеств X_1 и X_2.

($\Leftarrow$) Пусть X_1 и X_2 — измеримые множества такие, что $X_1 \subset X \subset X_2$, $\mu X_2 - \mu X_1 < \varepsilon$. Возьмём клеточные множества S_1 и S_2 такие, что $S_1 \subset X_1 \subset X \subset X_2 \subset S_2$, $mS_1 > \mu X_1 -$ $-\varepsilon$, $mS_2 < \mu X_2 + \varepsilon$. Тогда $mS_2 - mS_1 < (\mu X_2 + \varepsilon) - (\mu X_1 -$ $-\varepsilon) = \mu X_2 - \mu X_1 + 2\varepsilon < 3\varepsilon$. Но $mS_1 \leqslant \mu_*X \leqslant \mu^*X \leqslant mS_2$; значит, $0 \leqslant \mu^*X - \mu_*X \leqslant mS_2 - mS_1 < 3\varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ — произвольно, то $\mu^*X - \mu_*X = 0$ и множество X измеримо. ■

Теорема 11.7. *Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ измеримо $\iff$ X — ограничено и $\mu\partial X = 0$.*

□ ($\Rightarrow$) Ограниченность множества X следует из определения измеримости. Так как множество X измеримо, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся клеточные множества S_1 и S_2 такие, что $S_1 \subset X \subset S_2$, $mS_2 - mS_1 < \varepsilon$ (дословное повторение доказательства первой части теоремы 11.6). Не уменьшая общности, можно считать, что S_1 — открытое, а S_2 — замкнутое множество (для клеточного множества S_1 множество $\operatorname{int} S_1$ — открытое клеточное множество той же меры, так как содержит все клетки соответствующего ранга, входящие в S_1; для клеточного множества S_2 множество $\overline{S}_2$ — замкнутое клеточное множество той же меры, так как к S_2 добавляются предельные точки S_2, ему не принадлежащие, т.е. точки Г-множества соответствующего ранга). Итак, заменим, если нужно, S_1 на $\operatorname{int} S_1$, S_2 на $\overline{S}_2$. Тогда $S_1 \subset \operatorname{int} X \subset X \subset \overline{X} \subset S_2$ (в самом деле, все точки S_1 являются внутренними для S_1, значит, и для X, поэтому $S_1 \subset \operatorname{int} X$; далее, все точки открытого множества $\hat{S}_2$ являются внутренними для $\hat{S}_2$, следовательно, и для $\hat{X}$, поэтому $\hat{S}_2 \subset \operatorname{int} \hat{X}$, и, переходя к дополнениям, получим включение $S_2 \supset \overline{X}$).

Значит, $\partial X = (\overline{X} \setminus \operatorname{int} X) \subset (S_2 \setminus S_1)$. Но S_2 и S_1 — клеточные множества; по лемме 11.6, $m(S_2 \setminus S_1) = mS_2 - mS_1 < \varepsilon$, поэтому $\mu^* \partial X < \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ — произвольно, то $\mu^* \partial X = 0$; по лемме 11.9 множество ∂X измеримо и $\mu \partial X = 0$.

($\Rightarrow$) Если $\mu \partial X = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся клеточное множество S некоторого ранга k такое, что $\partial X \subset S$ и $mS < \varepsilon$. Не уменьшая общности, S можно считать замкнутым клеточным множеством (как в доказательстве первой части теоремы). Пусть Q — произвольная клетка ранга k, не попавшая в S. Тогда либо $Q \subset \operatorname{int} X$, либо $Q \subset \operatorname{int} \hat{X}$. В самом деле, так как $Q \cap \partial X = \varnothing$, то по следствию из леммы 11.3 $Q \subset (\operatorname{int} X \cup \operatorname{int} \hat{X})$. Если $\exists\, x' \in Q \cap \operatorname{int} X$ и $\exists\, x'' \in Q \cap \operatorname{int} \hat{X}$, то по лемме 11.5 на отрезке, соединяющем точки $x' \in X$ и $x'' \in \hat{X}$, найдётся точка $\tilde{x} \in \partial X$. Но $x', x'' \in Q$; значит, $\tilde{x} \in Q$ (все координаты точки $\tilde{x}$ заключены между соответствующими координатами точек x' и x''; клетка, как и любой параллелепипед — выпуклое множество). Получено противоречие тому, что $Q \cap \partial X = \varnothing$.

Таким образом, множество $\hat{S}$ состоит из клеток ранга k, попавших либо в $\operatorname{int} X$, либо в $\operatorname{int} \hat{X}$ («разорваться» между этими множествами клетка ранга k, входящая в $\hat{S}$, не может), и каких-то точек их границ. Пусть $S_1 = \hat{S} \cap \operatorname{int} X$ — объединение всех клеток ранга k, попавших в $\operatorname{int} X$, а также каких-то точек их границ. Ясно, что S_1 — открытое клеточное множество ранга k (пересечение двух открытых множеств); $S_1 \subset \subset X$; кроме того, $S_1 \subset \hat{S}$, значит, $S_1 \cap S = \varnothing$. Тогда $S_2 = S_1 \cup \cup S$ — клеточное множество ранга k (в качестве иллюстрации можно воспользоваться рис. 11.4; S — клеточное множество, «окружающее» границу X; $S = S_2 \setminus S_1$).

Далее, если $x_0 \in X$, $x_0 \notin S$, то $x_0 \notin \partial X$. Значит, $x_0 \in \operatorname{int} X$, и $x_0 \in \operatorname{int} X \cap \hat{S} = S_1$. Поэтому если $x_0 \in X$, то $x_0 \in S$ или $x_0 \in S_1$, откуда следует, что $X \subset S \cup S_1 = S_2$.

Итак, $S_1 \subset X \subset S_2$, где $\mu S_2 - \mu S_1 = m S_2 - m S_1 = = m(S_2 \setminus S_1) = mS < \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ — любое, то по теореме 11.6 множество X измеримо. ■

Пример 11.8. Для множества $X = \mathbb{Q} \cap [0;1]$ в $\mathbb{R}^1$ граница $\partial X = [0;1]$ (пример 11.3). Так $\mu \partial X = 1$ (пример 11.7), то по теореме 11.7 множество X неизмеримо (другое доказательство неизмеримости этого множества было получено в примере 11.6).

Определение 11.9. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$; $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a$. Цилиндром в $\mathbb{R}^{n+1}$ с основанием X и высотой $h = b - a$ называется множество

$$\text{Ц}(X, a, b) = \{(x, y): \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in X,\ y \in [a; b]\};$$

применяется также запись $\text{Ц}(X, a, b) = X \otimes [a; b]$ — декартово произведение множеств X и $[a; b]$.

Такой цилиндр изображён на рис. 11.7 (совершенно необязательно выполнение неравенства $a > 0$).

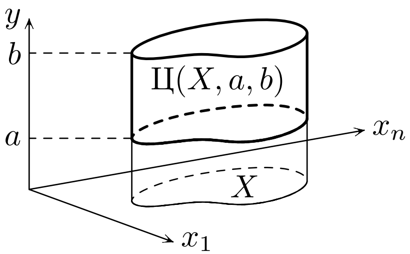

Рис. 11.7

Теорема 11.8. *Если множество X измеримо в $\mathbb{R}^n$, то цилиндр $Ц = Ц(X, a, b)$ измерим в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\mu Ц = \mu X \cdot (b - a)$. В частности, если $\mu X = 0$, то $\mu Ц = 0$ (цилиндр, основание которого имеет нулевую меру в $\mathbb{R}^n$, сам имеет нулевую меру в $\mathbb{R}^{n+1}$); если $a = b$, то $\mu Ц = 0$ (цилиндр с нулевой высотой, т.е. n-мерное множество в $\mathbb{R}^{n+1}$, имеет нулевую меру в $\mathbb{R}^{n+1}$).*

□ Для каждого $\varepsilon > 0$ существуют клеточные множества S_1 и S_2 в $\mathbb{R}^n$ такие, что $S_1 \subset X \subset S_2$,

$$\mu X - \varepsilon < mS_1 \leqslant mS_2 < \mu X + \varepsilon. \tag{11.2}$$

Не уменьшая общности, считаем, что S_1 и S_2 имеют один ранг k (иначе возьмём в качестве k наибольший из их рангов). Аналогично рассуждению при доказательстве утверждения примера 11.7 считаем k настолько большим, что найдутся целые числа p_1 и p_2 такие, что

$$\frac{p_1}{2^k} \leqslant a < \frac{p_1+1}{2^k} < \frac{p_2}{2^k} \leqslant b < \frac{p_2+1}{2^k}$$

(см. рис. 11.6, где $\alpha = \frac{p_1}{2^k}$, $\beta = \frac{p_2}{2^k}$). Рассмотрим отрезки $\Delta_1 = \left[\alpha + \frac{1}{2^k}\,; \beta\right]$. $\Delta_2 = \left[\alpha; \beta + \frac{1}{2^k}\right]$. Это — клеточные множества ранга k, причём $\Delta_1 \subset [a; b] \subset \Delta_2$ и длины (т.е. одномерные меры — см. пример 11.7) этих отрезков удовлетворяют неравенствам

$$b - a - \frac{2}{2^k} \leqslant m\Delta_1 < m\Delta_2 \leqslant b - a + \frac{2}{2^k}\,.$$

Не уменьшая общности, можно считать k настолько большим, что $\frac{2}{2^k} < \varepsilon$, откуда следует, что

$$b - a - \varepsilon < m\Delta_1 < m\Delta_2 < b - a + \varepsilon. \tag{11.3}$$

Рассмотрим следующие множества в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$S_1' = \text{Ц}\left(S_1, \alpha + \frac{1}{2^k}\,, \beta\right); \quad S_2' = \text{Ц}\left(S_2, \alpha, \beta + \frac{1}{2^k}\right).$$

Легко видеть, что S_1' — клеточное множество в $\mathbb{R}^{n+1}$ (в основании укладывается N_1 замкнутых кубиков размерности n с ребром $\frac{1}{2^k}$, а в высоте — N_2 отрезочков длины $\frac{1}{2^k}$; поэтому S_1' состоит из $N_1 N_2$ замкнутых кубиков размерности $n+1$ с ребром $\frac{1}{2^k}$). При этом

$$mS_1' = N_1 N_2 \cdot \frac{1}{2^{(n+1)k}} = \frac{N_1}{2^{nk}} \cdot \frac{N_2}{2^k} = mS_1 \cdot m\Delta_1.$$

Аналогично S'_2 — клеточное множество в $\mathbb{R}^{n+1}$, и $mS'_2 = mS_2 \cdot m\Delta_2$. Так как $S'_1 \subset \text{Ц}(X, a, b) \subset S'_2$, то

$$mS'_1 \leqslant \mu_* \text{Ц} \leqslant \mu^* \text{Ц} \leqslant mS'_2.$$

Из (11.2) и (11.3) получим

$$(\mu X - \varepsilon)(b - a - \varepsilon) < \mu_* \text{Ц} \leqslant \mu^* \text{Ц} < (\mu X + \varepsilon)(b - a + \varepsilon).$$

Так как $\varepsilon > 0$ — произвольно, то

$$\mu X \cdot (b - a) \leqslant \mu_* \text{Ц} \leqslant \mu^* \text{Ц} \leqslant \mu X \cdot (b - a).$$

Значит, цилиндр измерим в $\mathbb{R}^{n+1}$, и его мера равна $\mu X \cdot (b - a)$.

Если $\mu X = 0$ или $a = b$, то будем рассматривать только S_2 и Δ_2, тогда $\text{Ц} = \text{Ц}(X, a, b) \subset S'_2$ и $\mu^* \text{Ц} \leqslant mS'_2 < (\mu X + \varepsilon)(b - a + \varepsilon)$. Так как $\varepsilon > 0$ — произвольно, то $\mu^* \text{Ц} \leqslant \mu X \cdot (b - a) = 0$, значит, $\mu^* \text{Ц} = 0$, и по лемме 11.9 $\mu \text{Ц} = 0$. ■

Следствие 1. *Замкнутый параллелепипед* $\overline{\Pi}_n = \{x = (x_1, \ldots, x_n)\colon\ a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ *измерим в* $\mathbb{R}^n$ *и* $\mu \overline{\Pi}_n = (b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n)$*; при этом* $a_i \leqslant b_i$, $i = 1, \ \ldots, n$ *(неравенства между* a_i *и* b_i *могут обращаться в равенства).*

□ При $n = 1$ это утверждение примера 11.7. Пусть утверждение доказано для некоторого натурального n. Тогда

$$\overline{\Pi}_{n+1} = \{x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) :\ a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, \ldots, n+1\}$$

— это цилиндр $\text{Ц}(\overline{\Pi}_n, a_{n+1}, b_{n+1})$. Так как $\overline{\Pi}_n$ измерим в $\mathbb{R}^n$ по предположению индукции и $\mu \overline{\Pi}_n = (b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n)$, то по теореме 11.8 $\overline{\Pi}_{n+1}$ измерим в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\mu \overline{\Pi}_{n+1} = \mu \overline{\Pi}_n (b_{n+1} - a_{n+1}) = (b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n)(b_{n+1} - a_{n+1})$. Утверждение доказано по индукции. ■

Следствие 2. *Любое ограниченное множество* $X \subset \mathbb{R}^n$ *(пусть даже неизмеримое) имеет меру нуль, если его рассматривать как множество в* $\mathbb{R}^{n+1}$*, добавив к координатам всех его точек* $n + 1$*-ю нулевую (или какую-нибудь другую, но одну и ту же) координату.*

□ Рассмотрим некоторое клеточное множество $S \subset \mathbb{R}^n$, включающее в себя X (см. комментарий после определения 11.8).

Если X и S рассматривать как множества точек в $\mathbb{R}^{n+1}$, то это фактически означает переход к цилиндрам с нулевой высотой:

$$Ц(X, a, a) \subset Ц(S, a, a).$$

Тогда

$$\mu^* Ц(X, a, a) \leqslant \mu^* Ц(S, a, a) = \mu Ц(S, a, a) = mS \cdot (a - a) = 0$$

(здесь мы воспользовались теоремой 11.8 для измеримого основания S). Тогда $\mu^* Ц(X, a, a) = 0$, и по лемме 11.9 $\mu Ц(X, a, a) = 0$, а это и есть $(n+1)$-мерная мера n-мерного множества X. ■

§ 4. Конечная аддитивность меры Жордана

Теорема 11.9. *Если X и Y — два измеримых множества в $\mathbb{R}^n$, причём $\mu(X \cap Y) = 0$, то множество $X \cup Y$ измеримо и $\mu(X \cup Y) = \mu X + \mu Y$.*

□ Для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим клеточные множества S_1, S_2, T_1, T_2 такие, что $S_1 \subset X \subset S_2$, $T_1 \subset Y \subset T_2$,

$$mS_2 - \varepsilon < \mu X < mS_1 + \varepsilon, \quad mT_2 - \varepsilon < \mu Y < mT_1 + \varepsilon.$$

Так как $(S_1 \cap T_1) \subset (X \cap Y)$, то $m(S_1 \cap T_1) = 0$. Тогда клеточное множество $S_1 \cap T_1$ не имеет внутренних точек, и по лемме 11.6

$$m(S_1 \cup T_1) = mS_1 + mT_1 > \mu X + \mu Y - 2\varepsilon.$$

Далее, $(S_1 \cup T_1) \subset (X \cup Y) \subset (S_2 \cup T_2)$. При этом $S_2 \cup T_2 = S_2 \cup (T_2 \setminus S_2)$, т.е. клеточное множество $S_2 \cup T_2$ является объединением двух непересекающихся клеточных множеств. Тогда по лемме 11.6

$$m(S_2 \cup T_2) = mS_2 + m(T_2 \setminus S_2) \leqslant mS_2 + mT_2 < \mu X + \mu Y + 2\varepsilon$$

(так как $(T_2 \setminus S_2) \subset T_2$, то $m(T_2 \setminus S_2) \leqslant mT_2$). Итак,

$$\mu X + \mu Y - 2\varepsilon < m(S_1 \cup T_1) \leqslant \mu_*(X \cup Y) \leqslant \mu^*(X \cup Y) \leqslant \leqslant m(S_2 \cup T_2) < \mu X + \mu Y + 2\varepsilon.$$

Но $\varepsilon > 0$ — произвольно, поэтому

$$\mu X + \mu Y \leqslant \mu_*(X \cup Y) \leqslant \mu^*(X \cup Y) \leqslant \mu X + \mu Y.$$

Значит, множество $X \cup Y$ измеримо и его мера равна $\mu X + \mu Y$. ■

Следствие. *Если $\mu X = \mu Y = 0$, то множество $X \cup Y$ измеримо и его мера равна 0.*

□ Так как $(X \cap Y) \subset X$, то из леммы 11.11 следует, что $\mu(X \cap \cap Y) = 0$. Остаётся применить теорему 11.9. ■

Теорема 11.10 (конечная аддитивность меры Жордана). *Если $X_1, \ \ldots, X_k$ — измеримые множества в $\mathbb{R}^n$ такие, что для любых различных $i, j = 1, \ \ldots, k$ мера пересечения $X_i \cap X_j$ равна нулю, то множество $X = \bigcup_{i=1}^{k} X_i$ измеримо и $\mu X = \sum\limits_{i=1}^{k} \mu X_i$.*

□ Доказательство методом индукции по $k \geqslant 2$. При $k = 2$ — это теорема 11.9. Пусть утверждение доказано для некоторого $k \geqslant 2$, и $X = \bigcup_{i=1}^{k+1} X_i$, где все X_i измеримы и $\mu(X_i \cap X_j) = 0$ при любых различных $i, j = 1, \ \ldots, k+1$. По предположению индукции множество $Y = \bigcup_{i=1}^{k} X_i$ измеримо и $\mu Y = \sum\limits_{i=1}^{k} \mu X_i$. При этом $Y \cap X_{k+1} = \left(\bigcup_{i=1}^{k} X_i\right) \cap X_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{k} Y_i$, где $Y_i = X_i \cap \cap X_{k+1}$, $i = 1, \ \ldots, k$. Но $\mu(X_i \cap X_{k+1}) = 0$ при $i = 1, \ \ldots, k$, т.е. $\mu Y_i = 0$, и $(Y_i \cap Y_j) \subset Y_i$, поэтому из леммы 11.11 следует, что $\mu(Y_i \cap Y_j) = 0$ при всех различных $i, j = 1, \ \ldots, k$.

По предположению индукции множество $Y \cap X_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{k} Y_i$ измеримо и $\mu(Y \cap X_{k+1}) = \sum\limits_{i=1}^{k} \mu Y_i = 0$. Тогда из теоремы 11.9 следует, что множество $X = Y \cup X_{k+1}$ измеримо и $\mu X = \mu Y + \mu X_{k+1} = \sum\limits_{i=1}^{k+1} \mu X_i$. Доказательство по индукции завершено. ■

Теорема 11.11. *Если множества X и Y в $\mathbb{R}^n$ измеримы, то измеримы также множества $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \setminus Y$, причём*

$$\mu(X \cup Y) = \mu X + \mu Y - \mu(X \cap Y).$$

Если при этом $X \supset Y$, то $\mu(X \setminus Y) = \mu X - \mu Y$.

□ Из теоремы 11.7 следует, что $\mu \partial X = \mu \partial Y = 0$. Так как $\partial(X \cup Y) \subset (\partial X \cup \partial Y)$ (лемма 11.4), то $\mu \partial(X \cup Y) = 0$ (сначала применяется следствие из теоремы 11.9, затем лемма 11.11). Из теоремы 11.7 вытекает, что множество $X \cup Y$ измеримо. Точно также из включений $\partial(X \cap Y) \subset (\partial X \cup \partial Y)$ и $\partial(X \setminus Y) \subset \subset (\partial X \cup \partial Y)$ следует, что множества $X \cap Y$ и $X \setminus Y$ измеримы.

Если $X \supset Y$, то $X = Y \cup (X \setminus Y)$ — объединение двух непересекающихся множеств. Из теоремы 11.9 следует, что $\mu X = \mu Y + \mu(X \setminus Y)$, т.е. $\mu(X \setminus Y) = \mu X - \mu Y$.

Наконец, для любых множеств X и Y (см. рис. 11.1):

$$X \cup Y = (X \setminus Y) \cup (X \cap Y) \cup (Y \setminus X)$$

— объединение трёх непересекающихся множеств. Если множества X и Y измеримы, то измеримы все указанные здесь множества, и по теореме 11.10

$$\mu(X \cup Y) = \mu(X \setminus Y) + \mu(X \cap Y) + \mu(Y \setminus X). \tag{11.4}$$

Так как $X \setminus Y = X \setminus (X \cap Y)$ и $(X \cap Y) \subset X$, то $\mu(X \setminus Y) = = \mu X - \mu(X \cap Y)$; аналогично $\mu(Y \setminus X) = \mu Y - \mu(X \cap Y)$. Подставляя последние выражения в (11.4), получаем равенство

$$\mu(X \cup Y) = \mu X + \mu Y - \mu(X \cap Y). \qquad \blacksquare$$

Утверждения, доказанные в этом параграфе, — естественные свойства, которыми должны обладать площадь, объём и их обобщение на случай n-мерного пространства.

Пример 11.9. Доказать, что открытый параллелепипед $\Pi_n = \{x = (x_1, \ldots, x_n)\colon\ a_i < x < b_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ измерим в $\mathbb{R}^n$ и $\mu\Pi_n = (b_1 - a_1)\ldots(b_n - a_n) = \mu\overline{\Pi}_n$.

$\square$ Так как множество

$$\partial\Pi_n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{\Pi}_n, \quad \exists\, i = 1, \ldots, n : \\ ((x_i = a_i) \vee (x_i = b_i))\}$$

является объединением $2n$ «граней» параллелепипеда

$$\{x \in \overline{\Pi}_n : \quad x_i = a_i\}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

и

$$\{x \in \overline{\Pi}_n : \quad x_i = b_i\}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

а каждая их этих «граней» является ограниченным множеством в $\mathbb{R}^{n-1}$, рассматриваемым как цилиндр нулевой высоты в

$\mathbb{R}^n$, то по следствию 2 из теоремы 11.8 все эти грани имеют нулевую меру в $\mathbb{R}^n$ и по теореме 11.10 $\mu\partial\Pi_n = 0$.

Так как $\Pi_n \subset \overline{\Pi}_n$, а $\partial\Pi_n = \overline{\Pi}_n \setminus \Pi_n$, то по теореме 11.11 $\mu\Pi_n = \mu\overline{\Pi}_n$. ■

Следствие (при $n = 1$): *интервал* $(a; b)$ *в* $\mathbb{R}^1$ *измерим, и его мера равна мере отрезка* $[a; b]$, *т.е.* $b - a$.

Пример 11.10. Прямоугольный треугольник на плоскости, катеты которого параллельны осям координат прямоугольной системы, измерим в $\mathbb{R}^2$ и его площадь равна $\frac{1}{2}\,ab$, где a и b — длины катетов.

□ Разобьём катет, параллельный оси Ox, на n равных частей и рассмотрим ступенчатые фигуры, состоящие из прямоугольников, изображённые на рис. 11.8.

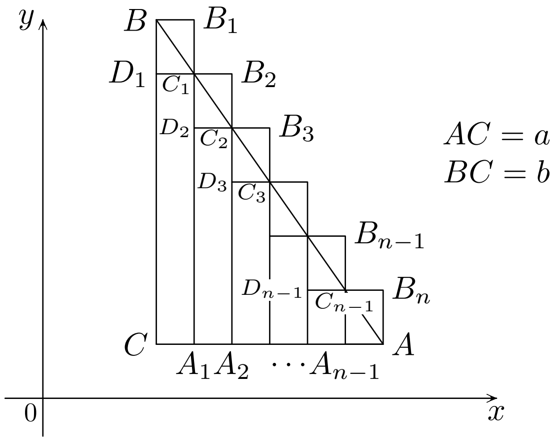

Рис. 11.8

Пусть X — множество точек треугольника ABC с прямым углом C (граница и внутренность); X_1 — ступенчатая фигура, состоящая из $n-1$ прямоугольников $CD_1C_1A_1$, $A_1D_2C_2A_2$, …, $A_{n-2}D_{n-1}C_{n-1}A_{n-1}$; X_2 — ступенчатая фигура, состоящая из n прямоугольников CBB_1A_1, $A_1C_1B_2A_2$, …, $A_{n-1}C_{n-1}B_nA$. Все прямоугольники замкнутые; прямоугольники, входящие в X_1, пересекаются разве что по участкам границ, т.е. по множествам нулевой меры, аналогичное утверждение имеет место для прямоугольников, входящих в X_2. Прямоугольник на плоскости, стороны которого параллельны осям координат, измерим, и площадь его равна произведению длин сторон (следствие 1 из теоремы 11.8). По теореме 11.10 ступенчатые фигуры X_1 и X_2 измеримы, и мера каждой из них равна сумме площадей входящих в неё прямоугольников. Нетрудно подсчитать, что

$$\mu X_1 = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n} + \frac{a}{n}\cdot\frac{2b}{n} + \ \ldots + \frac{a}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\,b = \frac{ab}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right);$$

$$\mu X_2 = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n} + \frac{a}{n}\cdot\frac{2b}{n} + \ \ldots + \frac{a}{n}\cdot\frac{n}{n}\,b = \frac{ab}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Так как $X_1 \subset X \subset X_2$, то $\mu X_1 \leqslant \mu_* X \leqslant \mu^* X \leqslant \mu X_2$, т.е. $\frac{ab}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) \leqslant \mu_* X \leqslant \mu^* X \leqslant \frac{ab}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Но n — произвольное натуральное число, поэтому $\frac{ab}{2} \leqslant \mu_* X \leqslant \mu^* X \leqslant \frac{ab}{2}$. Значит, множество X измеримо в $\mathbb{R}^2$ и $\mu X = \frac{ab}{2}$. ■

Пример 11.11. Прямоугольник на плоскости (параллельность его сторон осям координат не обязательна) измерим, и его площадь равна произведению длин сторон.

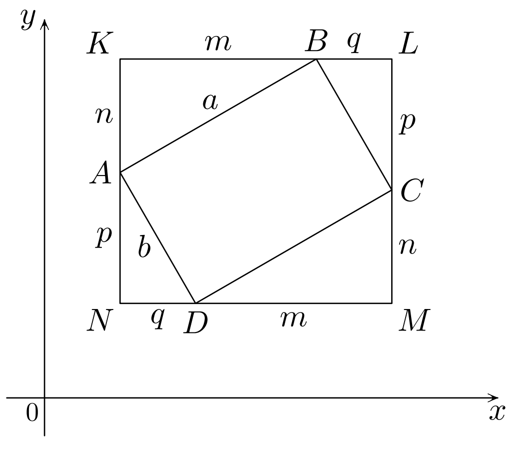

Рис. 11.9

□ Если стороны прямоугольника параллельны осям координат, то применим следствие 1 из теоремы 11.8. Если нет, то проведём через вершины прямоугольника прямые, параллельные осям координат (см. рис. 11.9), здесь нам придётся частично прибегнуть к геометрическим представлениям, так как полная формализация задачи очень громоздка. Стороны прямоугольника $KLMN$ параллельны осям координат, его площадь равна $\mu(KLMN) = (m+q)(n+p)$. У возникших четырёх прямоугольных треугольников катеты параллельны осям координат; по утверждению примера 11.10, их площади

$$\mu(AKB) = \mu(CMD) = \frac{1}{2}\,mn; \quad \mu(BLC) = \mu(AND) = \frac{1}{2}\,pq.$$

Так как четыре прямоугольных треугольника имеют общие точки разве что в вершинах (множества меры нуль) и принадлежат прямоугольнику $KLMN$, то

$$KLMN \setminus (AKB \cup CMD \cup BLC \cup AND) = \operatorname{int}(ABCD).$$

По теоремам 11.10 и 11.11 $\operatorname{int}(ABCD)$ — измеримое множество и $\mu(\operatorname{int}(ABCD)) = \mu(KLMN) - (\mu(AKB) + \mu(CMD) + {} + \mu(BLC) + \mu(AND)) = (m+q)(n+p) - 2\cdot\frac{1}{2}\,mn - 2\cdot\frac{1}{2}\,pq = {} = mp + qn$.

Докажем, что $mp + qn = ab = \sqrt{m^2+n^2}\cdot\sqrt{p^2+q^2}$ (теорема Пифагора соответствует формуле расстояния между точками плоскости). Последнее равенство равносильно $(mp+qn)^2 = {} = (m^2+n^2)(p^2+q^2)$, т.е. $(mq-np)^2 = 0$. Но прямые AB и AD перпендикулярны, значит, модули их угловых коэффициентов, равные соответственно $\frac{n}{m}$ и $\frac{p}{q}$, взаимно обратны, т.е. $\frac{n}{m} = \frac{q}{p}$, откуда и следует требуемое равенство $(mq-np)^2 = 0$.

Итак, $\mu(\operatorname{int}(ABCD)) = ab$. Но так как $\operatorname{int}(ABCD)$ — измеримое множество, то по теореме 11.7 граница этого множества имеет меру нуль, а она совпадает с контуром прямоугольника. Поэтому $ABCD = \operatorname{int}(ABCD) \cup \partial(ABCD)$ — измеримое множество, имеющее ту же меру ab. ■

З а м е ч а н и е. Может показаться, что последний пример не нужен — ведь уже было доказано, что площадь прямоугольника равна произведению сторон. Но это было доказано только для прямоугольников, стороны которых параллельны осям координат (что, кстати, было использовано в решении последних двух примеров). В упражнении 11.17 будет предложено доказать, что измеримость и мера множества на плоскости не зависят от выбора прямоугольной системы координат, но при доказательстве этого факта имеет смысл использовать утверждение примера 11.11.

Упражнения к главе XI

11.1. Найти $\operatorname{int} X$, $\overline{X}$ и ∂X для следующих множеств из $\mathbb{R}^1$:

а) $X = (a; b]$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

б) $X = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$;

в) $X = [0; 1] \setminus \mathbb{Q}$;

г) $X = \left[-1; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[-\frac{1}{3}; -\frac{1}{4}\right) \cup \left[-\frac{1}{5}; -\frac{1}{6}\right) \cup \ldots =$
$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{2k-1}; -\frac{1}{2k}\right).$

11.2. Найти $\operatorname{int} X$, $\overline{X}$ и ∂X для следующих множеств из $\mathbb{R}^2$:

а) X — график функции Дирихле $y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q}; \end{cases}$

б) X — график функции $y = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$

в) $X = \left\{(x, y) : \ \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2} > 0\right\}$;

г) $X = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 \notin \mathbb{Q}\}$.

11.3. Какие множества в $\mathbb{R}^n$ одновременно и открыты, и замкнуты?

11.4. Для каких множеств $X \subset \mathbb{R}^n$ верны следующие утверждения:

а) $X \cap \partial X = \varnothing$; б) $\partial(\partial X) \subset \partial X$; в) $\partial(\partial X) = \partial X$?

11.5. Доказать, что все изолированные точки множества $X \subset \mathbb{R}^n$ принадлежат ∂X.

11.6. Верно ли, что для любого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ выполняются равенства:

а) $\partial(\partial(\partial X)) = \partial(\partial X)$; б) $\overline{X} = \overline{\operatorname{int} X}$;

в) $\operatorname{int} X = \operatorname{int} \overline{X}$?

11.7. Доказать, что замыканием параллелепипеда в $\mathbb{R}^n$

$$\overline{\Pi} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : \ a_i < x_i < b_i, \ i = 1, \ldots, n\}$$

является замкнутый параллелепипед

$$\overline{\Pi} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : \ a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, \ i = 1, \ldots, n\},$$

а границей — множество точек

$$\partial\Pi = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{\Pi}, \quad \exists\, i = 1, \ldots, n : \\ ((x_i = a_i) \vee (x_i = b_i))\}.$$

11.8. Доказать, что если множество X измеримо в $\mathbb{R}^n$, то $\operatorname{int} X$ и $\overline{X}$ также измеримы и имеют такую же меру.

11.9. Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}^n$, причём $\mu Y = 0$. Доказать, что:

а) множество X измеримо $\iff X \cup Y$ измеримо;

б) множество X измеримо $\iff X \setminus Y$ измеримо.

В случае измеримости X имеют место равенства $\mu(X \cup Y) = \mu(X \setminus Y) = \mu X$. Иначе говоря, добавление или выбрасывание множества Y нулевой меры не влияет ни на измеримость, ни на меру множества X.

11.10. Доказать, что множество точек квадрата $\{(x, y)\colon 0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$, обе координаты которых рациональны, неизмеримо в $\mathbb{R}^2$.

11.11. Привести пример последовательности измеримых множеств $X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots$ в $\mathbb{R}^1$ такой, что множество $\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ неизмеримо. Иными словами, показать, что мера Жордана не обладает свойством счётной аддитивности.

11.12. Построить пример неизмеримого множества в $\mathbb{R}^2$ такого, что:

а) $\operatorname{int} X$ — измеримое множество;

б) $\overline{X}$ — измеримое множество.

11.13. Доказать, что множество точек сходящейся последовательности в $\mathbb{R}^n$ имеет меру нуль.

11.14. Доказать, что график непрерывной функции $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, имеет нулевую меру в $\mathbb{R}^2$.

11.15. Доказать, что ограниченное Г-множество любого ранга $k = 0, 1, 2, \ldots$ имеет нулевую меру в любой прямоугольной системе координат в $\mathbb{R}^2$.

11.16. Доказать, что клеточное множество ранга k, содержащее N клеток, измеримо в любой прямоугольной системе координат в $\mathbb{R}^2$, и мера его равна $\frac{N}{2^{2k}}$, т.е. не зависит от выбора прямоугольной системы координат (указание: воспользоваться примером 11.11 и упражнением 11.15).

11.17. Доказать, что измеримость и мера множества в $\mathbb{R}^2$ не зависят от выбора прямоугольной системы координат (указание: воспользоваться упражнением 11.16).

11.18. Доказать, что треугольник на плоскости измерим, и площадь его равна половине произведения длины одной из сторон на расстояние от противолежащей вершины до этой стороны.

11.19. Построим множество $F \subset \mathbb{R}^1$ следующим образом. Из отрезка $[0;1]$ удалим «среднюю треть» — интервал $\left(\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$. Из каждого из двух оставшихся отрезков удалим «средние трети» — интервалы $\left(\frac{1}{9}\,;\frac{2}{9}\right)$ и $\left(\frac{7}{9}\,;\frac{8}{9}\right)$. Из каждого из оставшихся четырёх отрезков удалим средние трети, и т.д. При неограниченном продолжении процесса из отрезка удаляется открытое множество G (счётное объединение интервалов). Оставшееся замкнутое множество $F = [0;1] \setminus G$ называется канторовым множеством. Доказать, что множества G и F измеримы в $\mathbb{R}^1$; $\mu G = 1$, $\mu F = 0$.

11.20. Видоизменим конструкцию упражнения 11.19. Из отрезка $[0;1]$ удалим интервал $\left(\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$. Из каждого из двух оставшихся отрезков удалим серединные интервалы так, что сумма их длин равна $\frac{1}{9}$, из каждого из оставшихся четырёх отрезков удалим серединные интервалы так, что сумма их длин равна $\frac{1}{27}$, и т.д. Доказать, что построенные аналогично упражнению 11.19 открытое множество G и замкнутое множество F неизмеримы в $\mathbb{R}^1$.

ГЛАВА XII. **ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ РИМАНА**

§ 1. Суммы Дарбу и критерий интегрируемости Дарбу

Пусть $[a;b]$ — отрезок в $\mathbb{R}^1$; $a < b$. Рассмотрим разбиение отрезка:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b.$$

Разбиение обозначим буквой R. Длины отрезков разбиения

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Наибольшую из длин отрезков разбиения будем называть мелкостью разбиения и обозначать $|R|$:

$$|R| = \max_{i=1, \ldots, N} \Delta x_i.$$

Пусть f — ограниченная функция на $[a;b]$;

$$M_i = \sup_{[x_{i-1};x_i]} f(x);\ m_i = \inf_{[x_{i-1};x_i]} f(x),\ \omega_i = M_i - m_i,\ i = 1, \ldots, N.$$

Величина ω_i называется колебанием функции f на отрезке $[x_{i-1};x_i]$. Для ограниченной функции f на отрезке $[a;b]$ и некоторого разбиения R этого отрезка определим следующие суммы:

$$S^*_R = \sum_{i=1}^{N} M_i \Delta x_i \quad \text{(верхняя сумма Дарбу);}$$

$$S_{*R} = \sum_{i=1}^{N} m_i \Delta x_i \quad \text{(нижняя сумма Дарбу);}$$

$$\omega_R = S^*_R - S_{*R} = \sum_{i=1}^{N} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \Delta x_i.$$

Если функция f неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a;b]$, то S^*_R — площадь ступенчатой фигуры из прямоугольников, содержащей в себе криволинейную трапецию под графиком функции f; S_{*R} — площадь ступенчатой фигуры из прямоугольников, содержащейся в этой криволинейной трапеции; ω_R — площадь закрашенной на рис. 12.1 фигуры из прямоугольников.

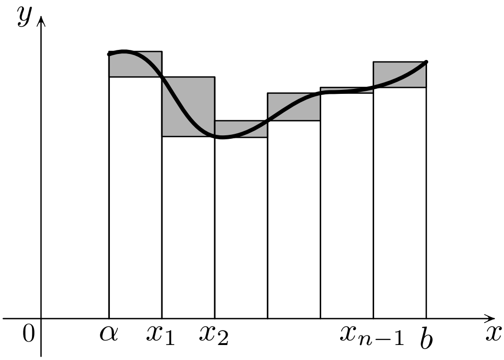

Рис. 12.1

Говорят, что разбиение R_2 следует за разбиением R_1 (обозначается $R_2 > R_1$), если каждый из отрезков разбиения R_2 принадлежит некоторому отрезку разбиения R_1 (т.е. все точки разбиения R_1 присутствуют и к ним добавляются новые).

Через $\max(R_1, R_2)$ обозначается такое разбиение R, множество точек которого — объединение множеств точек разбиений R_1 и R_2. Ясно, что если $R = \max(R_1, R_2)$, то $R > R_1$, $R > R_2$.

Лемма 12.1. *Для двух разбиений R_1 и R_2 отрезка $[a;b]$ таких, что $R_2 > R_1$, и для функции f, ограниченной на $[a;b]$, выполняются неравенства*

$$S^*_{R_2} \leqslant S^*_{R_1}; \quad S_{*R_2} \geqslant S_{*R_1}; \quad \omega_{R_2} \leqslant \omega_{R_1}.$$

□ Докажем первое из нужных неравенств. Достаточно рассмотреть случай, когда R_2 получается из R_1 добавлением одной точки $x' \in (x_{i-1}; x_i)$ (в общем случае такую процедуру нужно применить несколько раз). Тогда все слагаемые суммы $S^*_{R_1}$, кроме i-го, не изменятся; i-е же слагаемое, которое было равно $M_i(x_i - x_{i-1})$, превратится в сумму

$$M_i'(x_i - x') + M_i''(x' - x_{i-1}),$$

где $M'_i = \sup\limits_{[x';x_i]} f(x)$, $M''_i = \sup\limits_{[x_{i-1};x']} f(x)$. Ясно, что $M'_i \leqslant M_i$, $M''_i \leqslant M_i$, поэтому последняя сумма не превосходит $M_i(x_i - x' + x' - x_{i-1}) = M_i(x_i - x_{i-1})$, что совпадает с одним бывшим слагаемым. Значит, $S^*_{R_2} \leqslant S^*_{R_1}$. Аналогично $S_{*R_2} \geqslant S_{*R_1}$. Наконец,

$$\omega_{R_2} = S^*_{R_2} - S_{*R_2} \leqslant S^*_{R_1} - S_{*R_1} = \omega_{R_1}. \qquad \blacksquare$$

Лемма 12.2. *Для любых двух разбиений R_1 и R_2 отрезка $[a;b]$ и для любой функции f, ограниченной на $[a;b]$, выполняется неравенство $S^*_{R_1} \geqslant S_{*R_2}$.*

$\square$ Рассмотрим разбиение $R = \max(R_1, R_2)$. Тогда $R > R_1$, $R > R_2$, и по лемме 12.1 $S^*_{R_1} \geqslant S^*_R \geqslant S_{*R} \geqslant S_{*R_2}$ (неравенство $S^*_R \geqslant S_{*R}$ очевидно следует из того, что $M_i \geqslant m_i$ при всех $i = 1, \ldots, N$). $\blacksquare$

Определение 12.1. Верхним и нижним интегралами Дарбу функции f, ограниченной на отрезке $[a;b]$, называются соответственно числа $I^* = \inf\limits_R S^*_R$ и $I_* = \sup\limits_R S_{*R}$ (точные нижняя и верхняя грани берутся по всем разбиениям отрезка $[a;b]$). Если $I^* = I_*$, то ограниченная функция f называется интегрируемой по Риману на отрезке $[a;b]$, а общее значение $I^* = I_*$ называется определённым интегралом Римана функции f по отрезку $[a;b]$ (обозначается $\int_a^b f(x)\,dx$).

З а м е ч а н и е. Смысл такого обозначения и связь его с неопределённым интегралом $\int f(x)\,dx$ выяснятся позже. Обратим внимание на то, что $a < b$.

Лемма 12.3. *Для ограниченной функции f на отрезке $[a;b]$ выполняются неравенства*

$$-\infty < I_* \leqslant I^* < +\infty. \tag{12.1}$$

$\square$ Из леммы 12.2 следует, что для любых разбиений R_1 и R_2 отрезка $[a;b]$ выполняется неравенство $S_{*R_2} \leqslant S^*_{R_1}$. Переходя к точной верхней грани по R_2, мы видим, что $I_* \leqslant S^*_{R_1}$ для любого разбиения R_1, а переходя затем к точной нижней грани по R_1, получим неравенство $I_* \leqslant I^*$. Правое из неравенств (12.1) означает конечность I^*, которая следует из того, что $I^* \leqslant S^*_{R_1}$ для некоторого разбиения R_1. Аналогично получается левое из неравенств (12.1). ■

Теорема 12.1 (критерий интегрируемости Дарбу). *Для ограниченной функции f на отрезке $[a;b]$ равносильны следующие три условия:*

1°. *Функция f интегрируема по Риману на $[a;b]$.*

2°. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся разбиение R отрезка $[a;b]$ такое, что $\omega_R < \varepsilon$.*

3°. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения R отрезка $[a;b]$, мелкость которого меньше δ, выполняется неравенство $\omega_R < \varepsilon$.*

□ 3° ⇒ 2° — очевидно.

2° ⇒ 1°. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ найдётся разбиение R такое, что $\omega_R = S^*_R - S_{*R} < \varepsilon$. Так как $S^*_R \geqslant I^* \geqslant I_* \geqslant S_{*R}$, то $0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S^*_R - S_{*R} < \varepsilon$. Но $\varepsilon > 0$ — произвольно, поэтому $I^* - I_* = 0$ и функция интегрируема по Риману на $[a;b]$.

1° ⇒ 2°. Так как $I^* = I_* = I = \sup\limits_R S_{*R}$, то $\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, R_1$: $S_{*R_1} > I - \frac{\varepsilon}{2}$. Также $I = \inf\limits_R S^*_R$, поэтому $\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, R_2$: $S^*_{R_2} < I + \frac{\varepsilon}{2}$. Рассмотрим разбиение $R = \max(R_1, R_2)$. Из леммы 12.1 следует, что

$$S_{*R} \geqslant S_{*R_1} > I - \frac{\varepsilon}{2}\,; \quad S^*_R \leqslant S^*_{R_2} < I + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Значит, $\omega_R = S^*_R - S_{*R} < \varepsilon$.

2° ⇒ 3° (самая сложная часть доказательства). Пусть для любого $\varepsilon > 0$ найдётся разбиение R_0 такое, что $\omega_{R_0} = \sum\limits_{i=1}^{N_0} \omega_i^0 \Delta x_i^0 < \frac{\varepsilon}{2}$. Если функция f тождественно равна нулю на $[a;b]$, то все $\omega_R = 0$ и доказывать нечего, если нет, то $M = \sup\limits_{[a;b]} |f(x)| > 0$.

Рассмотрим $\delta = \min\left(\delta_0, \frac{\varepsilon}{4MN_0}\right)$, где $\delta_0 = |R_0|$. Пусть R — любое разбиение отрезка $[a;b]$ такое, что $|R| < \delta$. Тогда $\omega_R = \sum\limits_{i=1}^{N} \omega_i \Delta x_i = \Sigma' + \Sigma''$, где Σ' берётся по отрезкам, целиком принадлежащим отрезкам разбиения R_0, а Σ'' — по отрезкам, каждый из которых принадлежит объединению двух соседних отрезков R_0 (на рис. 12.2 отрезки из Σ'' отмечены дужками; их не более чем $N_0 - 1$). Рассмотрим разбиение $R_1 = \max(R_0, R)$ — это разбиение, состоящее из всех отрезочков на рис. 12.2.

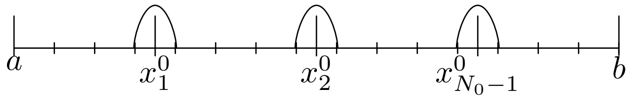

Рис. 12.2

Так как $R_1 > R_0$, то $\omega_{R_1} \leqslant \omega_{R_0} < \frac{\varepsilon}{2}$; значит, $\Sigma' \leqslant \omega_{R_1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Далее, для всех $i = 1, \ \dots, N$ выполняется неравенство $\omega_i = M_i - m_i \leqslant 2M$, поэтому $\Sigma'' = \Sigma''\omega_i\Delta x_i \leqslant 2M(N_0 - 1)\delta$ (сумма берётся только по отрезкам, отмеченным дужкой на рис. 12.2; их не более чем $N_0 - 1$, а все $\Delta x_i \leqslant |R| < \delta$). Значит, $\Sigma'' < 2MN_0\delta \leqslant 2MN_0 \cdot \frac{\varepsilon}{4MN_0} = \frac{\varepsilon}{2}$. Итак, $\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\,\delta > 0$: $\forall\,R$, $|R| < \delta \to \omega_R < \varepsilon$. ■

Утверждение $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$ означает, что если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся хотя бы одно разбиение, для которого $\omega_R < \varepsilon$, то и для всех разбиений с мелкостью, меньшей некоторого числа δ, также выполняется неравенство $\omega_R < \varepsilon$. Этот совершенно нетривиальный факт позволяет при доказательстве различных утверждений в теории интеграла применять то пункт 2°, то пункт 3° критерия Дарбу, что очень упрощает дальнейшее изложение.

Пример 12.1. Докажем, что функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

не является интегрируемой по Риману ни на каком отрезке $[a; b]$, хотя и ограничена.

□ На любом отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ найдутся как рациональные, так и иррациональные точки; поэтому всегда $M_i = 1$, $m_i = 0$, $\omega_i = 1$. Значит, на любом отрезке $[a; b]$ для любого разбиения R

$$S_R^* = \sum_{i=1}^{N} 1 \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{N} \Delta x_i = b - a;$$

$$S_{*R} = \sum_{i=1}^{N} 0 \cdot \Delta x_i = 0; \quad \omega_R = b - a.$$

Так как $I^* = \inf\limits_R S_R^* = b - a$, $I_* = \sup\limits_R S_{*R} = 0$, то $I^* > I_*$, и функция не интегрируема по Риману на $[a; b]$. Это следует также из критерия Дарбу, так как при $\varepsilon \leqslant b - a$ нет ни одного разбиения, для которого $\omega_R < \varepsilon$. ■

В дальнейшем, говоря об интегрируемости функций, мы будем опускать слова «по Риману», имея их в виду.

Пример 12.2. Постоянная функция $f(x) \equiv C$ интегрируема на любом отрезке $[a; b]$ и $\int_a^b C\, dx = C(b - a)$.

□ Так как всегда $M_i = m_i = C$, то $S_R^* = S_{*R} = \sum\limits_{i=1}^{N} C \cdot \Delta x_i = C(b - a)$. Поэтому $I^* = I_* = C(b - a)$, и $\int_a^b C\, dx = C(b - a)$. ■

§ 2. Классы интегрируемых функций

Теорема 12.2. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на $[a; b]$.*

□ По теореме Кантора 9.9 функция f равномерно непрерывна на $[a; b]$, значит, $\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta > 0$: $\forall x', x'' \in [a; b]$, $|x' - x''| < \delta \to |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b - a}$. Рассмотрим разбиение R отрезка $[a; b]$ такое, что $|R| < \delta$. Так как функция f непрерывна на каждом отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, \ \ldots, N$, то она достигает на каждом из этих отрезков своих точных верхней и нижней граней, т.е. $M_i = f(x')$, $m_i = f(x'')$, где $x', x'' \in [x_{i-1}; x_i]$, и $|x' - x''| \leqslant |R| < \delta$. Тогда $\omega_i = M_i - m_i = f(x') - f(x'') < \frac{\varepsilon}{b - a}$, и $\omega_R = \sum\limits_{i=1}^{N} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b - a} \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b - a}(b - a) = \varepsilon$. Итак, $\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta > 0$: $\forall R$, $|R| < \delta \to \omega_R < \varepsilon$. По пункту 3° критерия Дарбу функция f интегрируема на $[a;b]$ (ограниченность f следует из теоремы Вейерштрасса 3.11). ■

Теорема 12.3. *Если функция f монотонна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на $[a;b]$.*

□ Пусть для определённости функция f возрастает на $[a;b]$ (вообще говоря, нестрого). Тогда $\forall\, x \in [a;b] \to f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$, и функция f ограничена на $[a;b]$. Если f постоянна, то она интегрируема на $[a;b]$, поэтому можно считать, что $f(a) < f(b)$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим число $\delta = \dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Если R — разбиение отрезка $[a;b]$ такое, что $|R| < \delta$, то $\omega_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$, $i = 1, \ \ldots, N$; $\Delta x_i \leqslant |R| < \delta$, и

$$\omega_R = \sum_{i=1}^{N}(f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i < \delta \cdot \sum_{i=1}^{N}(f(x_i) - f(x_{i-1})) = \delta(f(b) - f(a)) = \varepsilon.$$

Итак, $\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, \delta > 0$: $\forall\, R$, $|R| < \delta \to \omega_R < \varepsilon$. По пункту 3° критерия Дарбу функция f интегрируема на $[a;b]$. ■

Теорема 12.4. *Если функция f интегрируема на $[a;c]$ и на $[c;b]$, $a < c < b$, то она интегрируема на $[a;b]$.*

□ Так как функция f ограничена на $[a;c]$ и на $[c;b]$, то она ограничена на $[a;b]$. Применим пункт 2° критерия Дарбу. Из интегрируемости f на $[a;c]$ и на $[c;b]$ следует, что:

1) $\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, R_1$ (разбиение $[a;c]$): $\omega_{R_1} < \frac{\varepsilon}{2}$;

2) $\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, R_2$ (разбиение $[c;b]$): $\omega_{R_2} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Рассмотрим разбиение R отрезка $[a;b]$, включающее все точки R_1 и R_2. Тогда $\omega_R = \omega_{R_1} + \omega_{R_2} < \varepsilon$. Значит, f интегрируема на $[a;b]$. ■

З а м е ч а н и е. Теорема 12.4 по индукции распространяется на конечное число отрезков (если f интегрируема на $[a_0;a_1]$, $[a_1;a_2]$, $\ \ldots, [a_{k-1};a_k]$, где $a_0 < a_1 < a_2 < \ \ldots < a_k$, то она интегрируема на $[a_0;a_k]$).

Теорема 12.5. *Если функция f интегрируема на $[a;b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[c;d] \subset [a;b]$.*

□ Так как функция f ограничена на $[a;b]$, то она ограничена и на $[c;d]$. Применим пункт 3° критерия Дарбу.

$$\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta > 0: \quad \forall R(\text{разбиения } [a;b]), \quad |R| < \delta \to \omega_R < \varepsilon.$$

Рассмотрим любое разбиение R_0 отрезка $[c;d]$ такое, что $|R_0| < \delta$. Оно продолжается до разбиения R отрезка $[a;b]$ такого, что $|R| < \delta$ и, следовательно, $\omega_R < \varepsilon$. Значит, $\omega_{R_0} \leqslant \omega_R < \varepsilon$. Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta > 0: \forall R_0(\text{ разбиения } [c;d]),\ |R_0| < \delta \to \omega_{R_0} < \varepsilon,$$

т.е. функция f интегрируема на $[c;d]$. ■

Теорема 12.6. *Если функция f ограничена на $[a;b]$ и для любого $a' \in (a;b)$ интегрируема на $[a';b]$, то она интегрируема и на $[a;b]$.*

□ Если функция f тождественно равна нулю на $[a;b]$, то она интегрируема; поэтому считаем, что $M = \sup\limits_{[a;b]} |f(x)| > 0$. Применим пункт 2° критерия Дарбу. Пусть ε — любое положительное число такое, что $a' = a + \frac{\varepsilon}{4M} < b$. Так как f интегрируема на $[a', b]$, то найдётся разбиение R' этого отрезка такое, что $\omega_{R'} < \frac{\varepsilon}{2}$. Рассмотрим теперь разбиение R отрезка $[a;b]$, состоящее из отрезка $[a;a']$ и всех отрезков разбиения R'. Тогда $\omega_R = \omega_0(a' - a) + \omega_{R'}$, где ω_0 — колебание функции f на отрезке $[a;a']$; $\omega_0 = M_0 - m_0 \leqslant 2M$. Но $a' - a = \frac{\varepsilon}{4M}$, и $\omega_R < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Значит, f интегрируема на $[a;b]$. ■

З а м е ч а н и е. Аналогично доказывается, что если f ограничена на $[a;b]$ и для любого $b' \in (a;b)$ интегрируема на $[a;b']$, то она интегрируема на $[a;b]$.

Теорема 12.7. *Если функция f ограничена на отрезке $[a;b]$ и имеет конечное число точек разрыва на этом отрезке, то она интегрируема на $[a;b]$.*

□ Обозначим точки разрыва $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ $(a \leqslant \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_k \leqslant b)$. Отрезок $[a;b]$ можно разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых функция f имеет единственную точку разрыва в одном из концов (см. рис. 12.3, там $a = \xi_1$, $b = \xi_k$; легко понять, как изменится схема, если в точках a или b функция односторонне непрерывна).

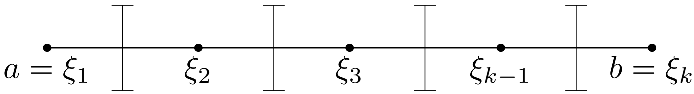

Рис. 12.3

В силу замечания к теореме 12.4, достаточно доказать, что f интегрируема на каждом из таких отрезков. Пусть для определённости f ограничена на $[\xi; b]$ и непрерывна на $(\xi; b]$. Тогда для любого $\xi' \in (\xi; b)$ f непрерывна (следовательно, интегрируема) на $[\xi'; b]$. По теореме 12.6 функция f интегрируема на $[\xi; b]$. ■

Пример 12.3. Функции $f_1(x) = \operatorname{sign} x$ и

$$f_2(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}\,, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

интегрируемы на $[-1; 1]$, так как ограничены на этом отрезке и имеют на нём единственную точку разрыва $\xi = 0$. Для функции f_1 эта точка разрыва — первого рода, для функции f_2 — второго рода.

Определение 12.2. Функция f называется кусочно-непрерывной на отрезке $[a; b]$, если она имеет на этом отрезке не более конечного числа точек разрыва, и все они первого рода (т.е. отрезок $[a; b]$ может быть разбит на конечное число отрезков, на каждом из которых f после доопределения по непрерывности в концах станет непрерывной).

Функция f_1 из примера 12.3 является кусочно-непрерывной на отрезке $[-1; 1]$, функция f_2 — нет. Из теоремы 12.7 следует, что кусочно-непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция интегрируема на нём.

Как известно, множество точек разрыва монотонной функции может быть счётным. Поэтому из теоремы 12.3 следует, что существуют интегрируемые функции со счётным множеством точек разрыва. Приведём без доказательства следующее утверждение.

Теорема 12.8 (Лебега). *Для того чтобы функция f была интегрируема на отрезке $[a;b]$, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена на $[a;b]$ и множество X её точек разрыва имело меру нуль в смысле Лебега (т.е. для любого $\varepsilon > 0$ нашлась конечная или счётная система интервалов, объединение которых содержало X и сумма длин которых была меньше ε).*

Отметим, что любое счётное множество имеет меру нуль в смысле Лебега (но может быть неизмеримо по Жордану). Функция Дирихле не удовлетворяет условиям теоремы 12.8, так как она разрывна в любой точке.

§ 3. Суммы Римана и критерий интегрируемости Римана

Пусть R — разбиение отрезка $[a;b]$; $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$, причём на каждом из отрезков $[x_{i-1};x_i]$ выбрана некоторая точка ξ_i, т.е. $\xi_i \in [x_{i-1};x_i]$, $i = 1, \ldots, N$. Для произвольной (не обязательно ограниченной) функции f на отрезке $[a;b]$ определим суммы Римана:

$$\sigma_R = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Если функция f неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a;b]$, то σ_R — площадь ступенчатой фигуры из прямоугольников, основания которых — длины отрезков разбиения, а высоты — значения функции в точках ξ_i (см. рис. 12.4).

Теорема 12.9 (критерий интегрируемости Римана). *Функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$ и $\int_a^b f(x)\,dx = I \iff$ для любой последовательности разбиений R_n отрезка $[a;b]$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n| = 0$, при любом выборе точек $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)};x_i^{(n)}]$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{R_n} = I$.*

$\square$ ($\Rightarrow$) Рассмотрим соответствующие последовательности сумм Дарбу $S^*_{R_n}$ и S_{*R_n}. Так как $m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i$ при $i = 1, \ldots, N$, то

$$S_{*R_n} \leqslant \sigma_{R_n} \leqslant S^*_{R_n}. \qquad (12.2)$$

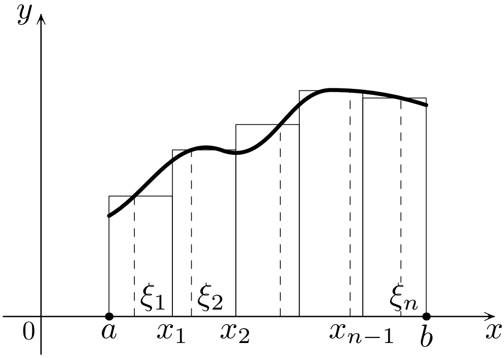

Рис. 12.4

Так как f интегрируема на $[a;b]$, то по пункту 3° критерия Дарбу

$$\forall\,\varepsilon>0\to\exists\,\delta>0:\quad\forall\,R,\quad|R|<\delta\to S^*_R-S_{*R}<\varepsilon.\qquad(12.3)$$

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n|=0$. Тогда для указанного в (12.3) числа $\delta(\varepsilon)$

$$\exists\,n_0:\quad\forall\,n\geqslant n_0\to|R_n|<\delta.$$

Итак, $\forall\,\varepsilon>0\to\exists\,n_0$: $\forall\,n\geqslant n_0\to S^*_{R_n}-S_{*R_n}<\varepsilon$. Так как $S_{*R_n}\leqslant I\leqslant S^*_{R_n}$, то, учитывая (12.2), имеем

$$\forall\,\varepsilon>0\to\exists\,n_0:\quad\forall\,n\geqslant n_0\to|\sigma_{R_n}-I|\leqslant S^*_{R_n}-S_{*R_n}<\varepsilon,$$

а это значит, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{R_n}=I$ при любом выборе точек $\xi_i^{(n)}$.

$\Leftarrow$ Докажем сначала, что функция f ограничена на $[a;b]$. Пусть это не так. Рассмотрим некоторую последовательность разбиений R_n такую, что $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n|=0$. При фиксированном n функция f неограничена хотя бы на одном из отрезков разбиения $[x_{k-1}^{(n)};x_k^{(n)}]$. Пусть σ'_{R_n} — часть римановой суммы без k-го слагаемого с фиксированными точками $\xi_i^{(n)}$ на остальных отрезках ($i\neq k$). Тогда, в силу неограниченности f на k-м отрезке, $\exists\,\xi_k^{(n)}\in[x_{k-1}^{(n)};x_k^{(n)}]$ такая, что $|f(\xi_k^{(n)})|>\dfrac{n+|\sigma_{R'_n}|}{\Delta x_k^{(n)}}$. Значит, $|\sigma_{R_n}|=|\sigma_{R'_n}+f(\xi_k^{(n)})\cdot\Delta x_k^{(n)}|\geqslant|f(\xi_k^{(n)})|\cdot\Delta x_k^{(n)}-|\sigma_{R'_n}|>n+$ $+|\sigma_{R'_n}|-|\sigma_{R'_n}|=n$, что противоречит существованию конечного $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{R_n}$. Итак, f ограничена на $[a;b]$. Докажем теперь, что она интегрируема. Если это не так, то, в силу пункта 3° критерия Дарбу,

$$\exists\,\varepsilon>0:\quad \forall\,\delta>0\to\exists\,R,\quad |R|<\delta:\quad S_R^*-S_{*R}\geqslant\varepsilon.$$

Пусть $\delta=\frac{1}{n}$, $n=1,\,2,\,\ldots$ Тогда

$$\exists\,\varepsilon>0:\quad \forall\,n\to\exists\,R_n,\quad |R_n|<\frac{1}{n}:\quad S_{R_n}^*-S_{*R_n}\geqslant\varepsilon.$$

Так как $M_i^{(n)}=\sup\limits_{[x_{i-1}^{(n)};x_i^{(n)}]}f(x)$, то при фиксированном разбиении R_n можно подобрать точки $\xi_i^{(n)}$, $i=1,\,2,\,\ldots,N_n$ так, что $|f(\xi_i^{(n)})-M_i^{(n)}|<\frac{\varepsilon}{4(b-a)}$. Тогда

$$|S_{R_n}^*-\sigma_{R_n}|=\left|\sum_{i=1}^{N_n}(M_i^{(n)}-f(\xi_i^{(n)}))\Delta x_i^{(n)}\right|<$$
$$<\frac{\varepsilon}{4(b-a)}\cdot\sum_{i=1}^{N_n}\Delta x_i^{(n)}=\frac{\varepsilon}{4}\,.$$

Аналогично можно подобрать точки $\eta_i^{(n)}$, $i=1,\,2,\,\ldots,N_n$ так, что

$$|f(\eta_i^{(n)})-m_i^{(n)}|<\frac{\varepsilon}{4(b-a)}\,,\quad \text{и}\quad |\sigma'_{R_n}-S_{*R_n}|<\frac{\varepsilon}{4}$$

(суммы Римана σ_{R_n} и σ'_{R_n} рассматриваются для одного разбиения R_n, но выбираются разные промежуточные точки). Для построенных сумм Римана $|\sigma_{R_n}-\sigma'_{R_n}|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$, $n=1,\,2,\,\ldots$ (иначе $|S_{R_n}^*-S_{*R_n}|\leqslant|S_{R_n}^*-\sigma_{R_n}|+|\sigma_{R_n}-\sigma'_{R_n}|+|\sigma'_{R_n}-S_{*R_n}|<\frac{\varepsilon}{4}+$ $+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon$, а это не так). Но $|R_n|<\frac{1}{n}$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n|=0$, и $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{R_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma'_{R_n}=I$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty}(\sigma_{R_n}-\sigma'_{R_n})=0$, что противоречит неравенству $|\sigma_{R_n}-\sigma'_{R_n}|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$, $n=1,\,2,\,\ldots$ Полученное противоречие показывает, что f интегрируема на $[a;b]$. ■

Если известно, что f интегрируема на $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx$ можно вычислять как $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{R_n}$ для некоторой последовательности сумм Римана при некотором выборе промежуточных точек, лишь бы $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n| = 0$.

Пример 12.4. Вычислить $\int_0^1 x^2\,dx$.

$\square$ Функция $f(x) = x^2$ непрерывна на $[0;1]$, следовательно, интегрируема. Рассмотрим последовательность разбиений R_n отрезка $[0;1]$ такую, что $x_i^{(n)} = \frac{i}{n}$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ (отрезок $[0;1]$ разбивается на n равных частей); $\xi_i^{(n)} = \frac{i}{n}$ (выбирается крайняя правая точка отрезка разбиения). Тогда $\sigma_{R_n} = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \dfrac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3}$. Можно доказать (например, по индукции), что $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, поэтому $\sigma_{R_n} = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$, и $\int_0^1 x^2\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{R_n} = \frac{1}{3}$. $\blacksquare$

Пример 12.5. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [a;b] \setminus \{x_1,\ \ldots,\ x_k\}; \\ f_i, & \text{если } x = x_i,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k \end{cases}$$

(т.е. f отлична от нуля в конечном числе точек). Доказать, что $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

$\square$ Функция f интегрируема на $[a;b]$, так как кусочно-непрерывна на нём. Рассмотрим произвольную последовательность R_n разбиений отрезка $[a;b]$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n| = 0$. Промежуточные точки $\xi_i^{(n)}$ можно выбрать так, чтобы они не совпадали с точками $x_1,\ \ldots,\ x_k$; тогда $f(\xi_i^{(n)}) = 0$ при $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N_n$, и $\sigma_{R_n} = 0$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ Значит, $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{R_n} = 0$. $\blacksquare$

§ 4. Свойства интегрируемых функций

Теорема 12.10 (линейность интеграла). *Если функции f и g интегрируемы на $[a;b]$, то для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $\alpha f + \beta g$ интегрируема на $[a;b]$, причём*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

□ Рассмотрим произвольную последовательность разбиений R_n отрезка $[a;b]$, лишь бы $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n| = 0$, и выберем произвольным образом точки $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}; x_i^{(n)}]$, $i = 1, \ \ldots, N_n$. Тогда

$$\sigma_{R_n}(\alpha f + \beta g) = \alpha\sigma_{R_n}(f) + \beta\sigma_{R_n}(g). \tag{12.4}$$

Так как f и g интегрируемы на $[a;b]$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{R_n}(f) = \int_a^b f(x)\,dx \equiv I_1; \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_{R_n}(g) = \int_a^b g(x)\,dx \equiv I_2.$$

Переходя в равенстве (12.4) к пределу, получим

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{R_n}(\alpha f + \beta g) = \alpha I_1 + \beta I_2. \tag{12.5}$$

Так как R_n — произвольная последовательность разбиений $[a;b]$, удовлетворяющая условию $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n| = 0$, и равенство (12.5) выполняется при любом выборе промежуточных точек $\xi_i^{(n)}$, то из критерия Римана следует, что функция $\alpha f + \beta g$ интегрируема на $[a;b]$ и

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha I_1 + \beta I_2. \qquad \blacksquare$$

На языке линейной алгебры теорема 12.10 может быть сформулирована так: множество интегрируемых на $[a;b]$ функций является линейным пространством относительно операций сложения и умножения на число (бесконечномерное), и $\int_a^b f(x)\,dx$ — линейный функционал на этом пространстве.

Следствие. *Если значения функции f изменить в конечном числе точек на отрезке $[a;b]$, то её интегрируемость, а в случае интегрируемости и значение интеграла, не изменятся.*

□ Изменение значений f в конечном числе точек равносильно прибавлению к f функции g, отличной от нуля в конечном числе точек, а для такой функции $\int_a^b g(x)\,dx = 0$ (пример 12.5). Остаётся применить теорему 12.10. ■

Таким образом, интегрируемую функцию можно считать не определённой в конечном числе точек (как ни определять её в этих точках, интегрируемость и значение интеграла не изменятся).

Теорема 12.11. *Если функции f и g интегрируемы на $[a;b]$, то их произведение fg также интегрируемо на $[a;b]$.*

□ Из ограниченности f и g на $[a;b]$ следует, что $|f(x)| \leqslant C$, $|g(x)| \leqslant C$. Пусть $h = fg$. Тогда для любых точек $\xi, \eta \in \in [x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, N$, имеет место оценка

$$|h(\eta) - h(\xi)| = |f(\eta)(g(\eta) - g(\xi)) + g(\xi)(f(\eta) - f(\xi))| \leqslant \\ \leqslant C|g(\eta) - g(\xi)| + C|f(\eta) - f(\xi)|.$$

Если $M_i = \sup f(x)$, $m_i = \inf f(x)$ на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, то значения $f(\xi)$ и $f(\eta)$ заключены между m_i и M_i, и $|f(\eta) - - f(\xi)| \leqslant M_i - m_i = \omega_i(f)$; аналогично $|g(\eta) - g(\xi)| \leqslant \omega_i(g)$. Тогда для любых $\xi, \eta \in [x_{i-1}; x_i]$ имеет место неравенство

$$|h(\eta) - h(\xi)| \leqslant C(\omega_i(f) + \omega_i(g)) \equiv A,$$

значит, $h(\eta) - h(\xi) \leqslant A$. Пусть $M_i' = \sup h(x)$, $m_i' = \inf h(x)$ на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$. Переходя в последнем неравенстве к точной верхней грани по η и к точной нижней грани по ξ, получим неравенство $\omega_i(h) = M_i' - m_i' \leqslant A$, т.е. $\omega_i(h) \leqslant C(\omega_i(f) + + \omega_i(g))$. Домножив обе части последнего неравенства на Δx_i и суммируя по i от 1 до N, получим: $\omega_R(h) \leqslant C(\omega_R(f) + \omega_R(g))$.

По пункту 2° критерия Дарбу для любого $\varepsilon > 0$ найдутся разбиение R_1 отрезка $[a;b]$ такое, что $\omega_{R_1}(f) < \frac{\varepsilon}{2C}$, и разбиение R_2 отрезка $[a;b]$ такое, что $\omega_{R_2}(g) < \frac{\varepsilon}{2C}$ (естественно считать, что $C > 0$). Пусть $R = \max(R_1, R_2)$. Тогда $\omega_R(h) \leqslant C(\omega_R(f) + + \omega_R(g)) \leqslant C(\omega_{R_1}(f) + \omega_{R_2}(g)) < C\left(\frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2C}\right) = \varepsilon$. Функция $h = fg$ интегрируема на $[a;b]$. ■

Теорема 12.12. *Если функция f интегрируема на $[a;b]$, то функция $|f|$ также интегрируема на $[a;b]$.*

□ Для любых точек $\xi, \eta \in [x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, N$, имеем

$$||f(\eta)| - |f(\xi)|| \leqslant |f(\eta) - f(\xi)|,$$

откуда, аналогично доказательству теоремы 12.11, следует, что $\omega_i(|f|) \leqslant \omega_i(f)$ и $\omega_R(|f|) \leqslant \omega_R(f)$. Остаётся применить пункт 2° критерия Дарбу. ■

З а м е ч а н и е. Из интегрируемости на $[a;b]$ функции $|f|$ не следует интегрируемость f. В самом деле, функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}; \\ -1, & \text{если } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

не интегрируема ни на каком отрезке $[a;b]$ (аналогично примеру 12.1)); в то же время $|f(x)| \equiv 1$ — интегрируемая функция на любом отрезке.

Теорема 12.13 (аддитивность интеграла по отрезкам). *Если функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$, то для любой точки c такой, что $a < c < b$, выполняется равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

□ Существование интегралов в правой части последнего равенства следует из теоремы 12.5. Рассмотрим последовательности разбиений $R_n^{(1)}$ отрезка $[a;c]$ и $R_n^{(2)}$ отрезка $[c;b]$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n^{(1)}| = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n^{(2)}| = 0$. Тогда при любом выборе промежуточных точек для этих разбиений

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{R_n^{(1)}} = \int_a^c f(x)\,dx \equiv I_1; \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_{R_n^{(2)}} = \int_c^b f(x)\,dx \equiv I_2.$$

Рассмотрим при фиксированном $n = 1, 2, \ldots$ разбиение R_n отрезка $[a;b]$, включающее все точки $R_n^{(1)}$ и $R_n^{(2)}$, с соответствующими промежуточными точками для этих разбиений. Тогда $\sigma_{R_n} = \sigma_{R_n^{(1)}} + \sigma_{R_n^{(2)}}$, и $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{R_n} = I_1 + I_2$. Так как $|R_n| = \max(|R_n^{(1)}|, |R_n^{(2)}|)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n| = 0$, и по критерию Римана $\int_a^b f(x)\,dx = I_1 + I_2$. ■

Теорема 12.14 (интегрирование неравенств). *Если функции f и g интегрируемы на $[a;b]$, причём $f(x) \geqslant g(x)$ на этом отрезке, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

□ Для любой последовательности R_n разбиений отрезка $[a;b]$ при любом выборе промежуточных точек имеет место неравенство $\sigma_{R_n}(f) \geqslant \sigma_{R_n}(g)$. Остаётся перейти к пределу в этом неравенстве для последовательности разбиений такой, что $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n| = 0$. ■

Следствие 1. *Если интегрируемая функция f неотрицательна на $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.*

Следствие 2. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$, то $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$.*

□ Интегрируемость функции $|f|$ следует из теоремы 12.12. Применим теперь теорему 12.14 к неравенству $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$, справедливому при всех x. Получим

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

откуда следует нужное неравенство. ■

Следствие 3. *Если функции f и g интегрируемы на $[a;b]$, причём для всех $x \in [a;b]$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M$, то*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant M \cdot \int_a^b |g(x)|\,dx.$$

□ Интегрируемость функции fg следует из теоремы 12.11. Тогда по теореме 12.12 интегрируема функция $|fg|$, и остаётся применить теорему 12.14 и следствие 2 из неё к неравенству

$$|f(x)g(x)| \leqslant M|g(x)|.$$ ■

Теорема 12.15. *Если функции f и g интегрируемы на $[a;b]$, $f(x) \geqslant g(x)$ на этом отрезке, причём $f(x_0) > g(x_0)$ в некоторой точке $x_0 \in [a;b]$, в которой f и g непрерывны, то $\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$.*

□ Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - g(x)$. Достаточно доказать, что если φ — неотрицательная интегрируемая функция на $[a;b]$, причём $\varphi(x_0) > 0$ в точке $x_0 \in [a;b]$, в которой φ непрерывна, то $\int_a^b \varphi(x)\,dx > 0$.

Так как функция φ непрерывна в точке x_0 и $\varphi(x_0) > 0$, то, взяв в определении непрерывности по Коши $\varepsilon = \frac{\varphi(x_0)}{2}$, получим

$$\exists\, \delta > 0: \quad \forall\, x \in U_\delta(x_0) \to |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leqslant \frac{\varphi(x_0)}{2}\,,$$

откуда следует, что для всех $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $\varphi(x) \geqslant \frac{\varphi(x_0)}{2}$ (в силу непрерывности φ оно выполняется и при всех $x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$). Мы считаем здесь, что $x_0 \in (a; b)$, причём δ настолько мало, что $a < x_0 - \delta < x_0 + \delta < b$ (если $x_0 = a$ или $x_0 = b$, то изменения очевидны). Тогда по теореме 12.13

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^{a-\delta} \varphi(x)\,dx + \int_{a-\delta}^{a+\delta} \varphi(x)\,dx + \int_{a+\delta}^{b} \varphi(x)\,dx.$$

Первый и третий интегралы в правой части последнего равенства неотрицательны по следствию 1 из теоремы 12.14. Второй оценим снизу по теореме 12.14:

$$\int_{a-\delta}^{a+\delta} \varphi(x)\,dx \geqslant \frac{\varphi(x_0)}{2} \int_{a-\delta}^{a+\delta} 1\,dx = \frac{\varphi(x_0)}{2} \cdot 2\delta = \delta \cdot \varphi(x_0) > 0,$$

откуда следует, что $\int_a^b \varphi(x)\,dx > 0$. ■

Пример 12.6. Если отказаться от непрерывности обеих функций в точке x_0, то может оказаться так, что $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$ (нестрогое неравенство имеет место по теореме 12.14). Пусть $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq 0; \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ а $g(x) \equiv 0$. Для всех $x \in [-1; 1]$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant g(x)$, а $f(x) > g(x)$ в единственной точке $x = 0$, где функция f разрывна. Из примера 12.5 следует, что $\int_{-1}^1 f(x)\,dx = 0 = \int_{-1}^1 g(x)\,dx$.

Теорема 12.16. 1) *Если функция f интегрируема на отрезке $[-a; a]$, где $a > 0$, и чётна (т.е. $\forall\, x \in [-a; a] \to f(-x) = f(x)$), то*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

2) *Если функция f интегрируема на отрезке $[-a;a]$, где $a > 0$, и нечётна (т.е. $\forall\, x \in [-a;a] \to f(-x) = -f(x)$), то $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = $ $= 0$.*

$\square$ 1) Докажем, что $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$ (существование этих интегралов следует из теоремы 12.5); тогда $\int_{-a}^{a} = \int_{-a}^{0} +$ $+ \int_{0}^{a} = 2\int_{0}^{a}$.

Рассмотрим R_n — разбиение $[0;a]$ на n равных частей, точки $\xi_i^{(n)}$ совпадают с правыми концами соответствующих отрезков $[x_{i-1}^{(n)}; x_i^{(n)}]$; R'_n — разбиение $[-a;0]$ на n равных частей, промежуточные точки $\xi_i'^{(n)}$ совпадают с левыми концами соответствующих отрезков, т.е. $\xi_i'^{(n)} = -\xi_i^{(n)}$, и, в силу чётности функции, $f(\xi_i'^{(n)}) = f(\xi_i^{(n)})$. Тогда $\sigma_{R_n} = \sigma_{R'_n}$, причём $|R_n| = $ $= |R'_n| = \frac{a}{n}$, и эти мелкости стремятся к нулю при $n \to \infty$. В пределе $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{R_n} = \int_0^a f(x)\,dx$; $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{R'_n} = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx$, и эти пределы равны.

2) Доказательство аналогично ($\sigma_{R'_n} = -\sigma_{R_n}$, и $\int_{-a}^{0} f(x)dx = $ $= -\int_0^a f(x)\,dx$). $\blacksquare$

Теорема 12.17. *Если функция f интегрируема на отрезке $[0;T]$, где $T > 0$, и имеет период T (т.е. $D(f) = \mathbb{R}$ и $\forall\, x \in$ $\in D(f) \to f(x+T) = f(x)$), то f интегрируема на любом конечном отрезке, и при всех $a \in \mathbb{R}$ имеет место равенство $\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$ (интеграл по периоду).*

$\square$ В силу периодичности, суммы Римана функции f на любом отрезке $[kT;(k+1)T]$, $k \in \mathbb{Z}$, совпадают с соответствующими суммами Римана f на отрезке $[0;T]$. По критерию Римана, f интегрируема на $[kT;(k+1)T]$, и $\int_{kT}^{(k+1)T} f(x)\,dx = $ $= \int_0^T f(x)\,dx$. По теореме 12.4 и замечанию к ней, f интегрируема на любом отрезке $[k_1T;k_2T]$, где $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, $k_1 < k_2$. Так как любой конечный отрезок можно поместить в некоторый отрезок вида $[k_1T;k_2T]$, где $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, то f интегрируема на любом конечном отрезке (теорема 12.5). Тогда, с одной стороны, $\int_0^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^a + \int_a^{a+T}$, с другой стороны, $\int_0^{a+T} f(x)\,dx = $ $= \int_0^T + \int_T^{a+T}$. Так как $\int_0^a f(x)\,dx = \int_T^{a+T} f(x)\,dx$ (в силу периодичности совпадают соответствующие суммы Римана), то $\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$. ■

З а м е ч а н и е 1. В доказательстве теоремы 12.17 неявно предполагалось, что $a > 0$ и соответственно $a + T > 0$. Чуть позже (в начале § 5) мы покажем, что равенство $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$ формально сохраняется при любом расположении точек a, b, c на числовой прямой, и доказательство теоремы 12.17 сохраняется при любых знаках a и $a + T$.

З а м е ч а н и е 2. Утверждение теоремы 12.17 не так очевидно, как иногда кажется, потому что криволинейные трапеции, соответствующие $\int_a^{a+T}$ и $\int_0^T$ не являются геометрически равными фигурами (это равносоставленные фигуры — см. рис. 12.5), и равенство соответствующих сумм Римана не является очевидным фактом. Криволинейные трапеции, соответствующие $\int_0^a$ и $\int_T^{a+T}$, действительно являются геометрически равными фигурами, что фактически использовано в доказательстве теоремы.

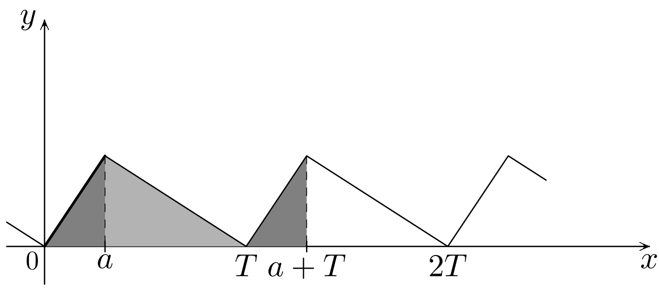

Рис. 12.5

Теорема 12.18 (о среднем). *Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a; b]$, причём $g(x)$ сохраняет знак (т.е. $g(x) \geqslant 0$ на $[a; b]$ или $g(x) \leqslant 0$ на $[a; b]$), то:*

1) $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx$, *где* $\mu \in [m; M]$, $m = \inf\limits_{[a;b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$;

2) *если при этом функция f непрерывна на $[a; b]$, то* $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx$, *где* $\xi \in [a; b]$.

□ 1) Не уменьшая общности, считаем, что $g(x) \geqslant 0$ на $[a;b]$ (иначе заменим $g(x)$ на $-g(x)$). Так как для всех $x \in [a;b]$ выполняются неравенства $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то $mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$. Применяя теорему 12.14, получим

$$m \int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M \int_a^b g(x)\,dx. \qquad (12.6)$$

Если $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, то из (12.6) следует, что $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$, и нужное равенство выполняется для любого числа μ. Если $\int_a^b g(x)\,dx > 0$ (а отрицательным он быть не может в силу неотрицательности функции g), то разделим неравенство (12.6) на $\int_a^b g(x)\,dx$, получим

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leqslant M, \quad \text{т.е.} \quad \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} = \mu \in [m;M].$$

2) Если функция f непрерывна на $[a;b]$, то для числа $\mu \in$ $\in [m;M]$ существует точка $\xi \in [a;b]$ такая, что $f(\xi) = \mu$ (это следует из теоремы 3.15); требуемое утверждение доказано. ■

Пример 12.7. Если функция g меняет знак, то теорема о среднем теряет силу. Пусть, например, $f(x) = g(x) = x$ на $[-1;1]$. Тогда $\int_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx = \int_{-1}^1 x^2\,dx > 0$ (по теореме 12.15, так как функция x^2 непрерывна и неотрицательна на $[-1;1]$ и существуют точки, где она строго положительна). С другой стороны, $\int_{-1}^1 g(x)\,dx = \int_{-1}^1 x\,dx = 0$ в силу нечётности функции $g(x) = x$ (теорема 12.16), и равенство $\int_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx =$ $= \mu \int_{-1}^1 g(x)\,dx$ не выполняется ни при каком значении μ.

§ 5. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона–Лейбница

Понятие $\int_a^b f(x)\,dx$ распространяется на случай $a \geqslant b$. Если $a > b$, то под $\int_a^b f(x)\,dx$ понимается число $-\int_b^a f(x)\,dx$ (если соответствующий интеграл существует). Для любой функции f считается, что $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Теорема 12.13 об аддитивности интеграла по отрезкам сохраняется при любом расположении точек a, b, c на числовой прямой. Например, при $b < a < c$ из теоремы 12.13 следует, что $\int_b^a + \int_a^c = \int_b^c$, поэтому $\int_a^b = -\int_b^a = -\left(\int_b^c - \int_a^c\right) = \int_a^c + \int_c^b$. Легко проверить, что равенство $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$ сохраняется при всех возможных случаях взаимного расположения точек a, b, c. Свойства интегрируемых функций, не связанные с неравенствами, сохраняются (нужно переставить пределы интегрирования и сменить знак у интеграла, в итоге ничего не изменится). А вот в теореме 12.14, следствии 1 из неё и теореме 12.15 в случае $a > b$ итоговое неравенство изменится на противоположное: если $f(x) \geqslant g(x)$, то $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$, и т.д. Во избежание недоразумений при применении этих утверждений нужно сводить возникшую ситуацию к случаю $a < b$. А в следствиях 2 и 3 из теоремы 12.14 результат нужно записывать в виде

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|$$

и

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant M\left|\int_a^b |g(x)|\,dx\right|;$$

это верно при любом взаимном расположении точек a и b. Теорема о среднем 12.18 сохраняется и при $a \geqslant b$, так как её итоговые результаты являются равенствами (хотя доказательство в случае $a > b$ нужно изменить).

Если функция f интегрируема на $[a;b]$, то можно рассмотреть интеграл с переменным верхним пределом $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, где $a \leqslant x \leqslant b$ (переменную интегрирования можно обозначать любой буквой, но не x, так как x — это аргумент функции F).

Теорема 12.19. *Если функция f интегрируема на $[a;b]$, то $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ — непрерывная на $[a;b]$ функция.*

□ Пусть $x_1, x_2 \in [a;b]$, $|f(x)| \leqslant M$ на $[a;b]$. Тогда при любом расположении точек x_1 и x_2:

$$|F(x_2) - F(x_1)| = \left|\int_a^{x_2} f(t)\,dt - \int_a^{x_1} f(t)\,dt\right| =$$
$$= \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\right| \leqslant M \left|\int_{x_1}^{x_2} dt\right| = M|x_2 - x_1|.$$

Поэтому $\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\,\delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0$: $\forall\,x_1, x_2 \in [a;b]$, $|x_2 - x_1| < \delta \to \to |F(x_2) - F(x_1)| < \varepsilon$, т.е. функция F равномерно непрерывна на $[a;b]$. ■

Теорема 12.20. *Пусть функция f интегрируема на $[a;b]$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $a \leqslant x \leqslant b$; $x_0 \in [a;b]$. Тогда*
1° *если f непрерывна справа в точке x_0, то $F'_+(x_0) = f(x_0)$;*
2° *если f непрерывна слева в точке x_0, то $F'_-(x_0) = f(x_0)$;*
3° *если f непрерывна в точке x_0, то $F'(x_0) = f(x_0)$.*

□ Достаточно доказать пункт 1°; пункт 2° доказывается аналогично; 3° следует из 1° и 2°.

Рассмотрим при $x > 0$ функцию

$$\varphi(x) = \left|\frac{F(x_0 + x) - F(x_0)}{x} - f(x_0)\right| =$$
$$= \left|\frac{\int_a^{x_0+x} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt}{x} - \frac{f(x_0)}{x}\int_{x_0}^{x_0+x} 1\,dt\right| =$$
$$= \frac{\left|\int_{x_0}^{x_0+x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x_0+x} f(x_0)\,dt\right|}{x} = \frac{\left|\int_{x_0}^{x_0+x} (f(t) - f(x_0))\,dt\right|}{x}.$$

Так как функция f непрерывна справа в точке x_0, то $\forall\,\varepsilon > > 0 \to \exists\,\delta > 0$: $\forall\,t \in [x_0; x_0 + \delta) \to |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Тогда если $x \in [0;\delta)$ и $t \in [x_0; x_0 + x]$, то $t \in [x_0; x_0 + \delta)$, и

$$\varphi(x) \leqslant \frac{1}{x}\int_{x_0}^{x_0+x} |f(t) - f(x_0)|\,dt \leqslant \frac{1}{x}\cdot\varepsilon\cdot\int_{x_0}^{x_0+x} dt = \frac{1}{x}\cdot\varepsilon x = \varepsilon.$$

Итак, $\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\,\delta > 0$: $\forall\,x \in [0;\delta) \to 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \varepsilon$; значит, $\lim\limits_{x\to+0} \frac{F(x_0 + x) - F(x_0)}{x} = f(x_0)$, т.е. существует $F'_+(x_0) = f(x_0)$. ■

Следствие. *Для функции f, непрерывной на отрезке $[a;b]$, интеграл с переменным верхним пределом $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$*

является первообразной на $[a;b]$, *так как* $F'(x) = f(x)$ *для всех* $x \in (a;b)$; $F'_+(a) = f(a)$; $F'_-(b) = f(b)$.

Если в качестве нижнего предела интегрирования взять любую точку $x_0 \in (a;b)$, то функция $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ будет отличаться от $F(x)$ на постоянную $C = \int_a^{x_0} f(t)\,dt$, и также является первообразной для $f(x)$ на $[a;b]$. Отсюда легко следует, что любая непрерывная на промежутке I функция f имеет первообразную; в качестве первообразной можно взять функцию $\Phi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, где x_0 — произвольная точка I. В самом деле, любую точку $x \in I$ можно поместить в отрезок $[a;b]$, целиком принадлежащий I. По только что доказанному, $\Phi'(x) = f(x)$ во всех точках $[a;b]$, значит, и в точке x (если x — конец I, то производная односторонняя). Так как x — произвольная точка I, то функция Φ — первообразная для f на промежутке I.

Только что мы доказали то, что обещали доказать в § 4 главы VIII: любая непрерывная на промежутке функция имеет первообразную (напомним, что две первообразные от одной функции на промежутке отличаются на постоянное слагаемое). Кроме того, мы установили связь между неопределённым и определённым интегралами: в качестве первообразной непрерывной функции f на промежутке I можно взять $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, где $x_0 \in I$.

З а м е ч а н и е. Так как $F_1(x) \equiv \int_x^b f(t)\,dt = C - \int_a^x f(t)\,dt$, где $C = \int_a^b f(t)\,dt$, то для интегрируемой на $[a;b]$ функции f интеграл с переменным нижним пределом F_1 — непрерывная на $[a;b]$ функция, а если f непрерывна в точке x_0, то F_1 имеет производную в точке x_0, причём $F_1'(x_0) = -F'(x_0) = -f(x_0)$.

Теорема 12.21 (формула Ньютона–Лейбница). *Если функция* f *непрерывна на отрезке* $[a;b]$, *то* $\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$, *где* Φ *— любая первообразная для* f *на отрезке* $[a;b]$.

□ Так как любые две первообразные для f на $[a;b]$ отличаются на постоянное слагаемое, то $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$; последнее равенство верно при всех $x \in [a;b]$. При $x = a$ имеем:

$\Phi(a) = C$. Тогда при $x = b$ получим: $\Phi(b) = \int_a^b f(t)\,dt + \Phi(a)$, откуда следует нужное равенство. ■

Для разности $\Phi(b) - \Phi(a)$ есть стандартное обозначение: $\Phi(x)\Big|_a^b$ («$\Phi(x)$ в подстановке от a до b»).

Лемма 12.4. *Пусть функции f и g непрерывны на отрезке $[a; b]$ и всюду на $[a; b]$, кроме конечного числа точек, существуют и совпадают f' и g'. Тогда $f(x) = g(x) + C$ при всех $x \in [a; b]$, где C — постоянная.*

□ Пусть $f'(x) = g'(x)$ при $x \neq \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$, где $a = \xi_1 < < \xi_2 < \ldots < \xi_k = b$ (для определённости считаем, что $\xi_1 = = a$, $\xi_k = b$). Применяя следствие из теоремы 4.15, мы видим, что для всех $x \in (\xi_i; \xi_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, выполняется равенство $f(x) = g(x) + C_i$, где постоянная C_i своя для каждого интервала. Но в силу непрерывности функций f и g равенство $f(x) = g(x) + C_i$ сохраняется для всех $x \in [\xi_i; \xi_{i+1}]$. В пределе при $x \to \xi_i - 0$ имеем: $f(\xi_i) = g(\xi_i) + C_{i-1}$; в пределе при $x \to \to \xi_i + 0$ имеем: $f(\xi_i) = g(\xi_i) + C_i$. Поэтому $C_{i-1} = C_i$ для всех $i = 2, 3, \ldots, k-1$. Значит, все C_i равны, и $f(x) = g(x) + C$ при всех $x \in [a; b]$. ■

Лемма 12.4 обобщает широко применявшееся ранее следствие из теоремы 4.15 на случай непрерывных функций, не имеющих производной в конечном числе точек на отрезке.

Теорема 12.22 (обобщение формулы Ньютона–Лейбница). *Если f — кусочно-непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция с разрывами первого рода $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ ($a \leqslant \xi_1 < < \xi_2 < \ldots < \xi_k \leqslant b$), то $\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$, где Φ — обобщённая первообразная для f на отрезке $[a; b]$, т.е. такая непрерывная на $[a; b]$ функция, что $\Phi'(x) = f(x)$ всюду на $[a; b]$, кроме, быть может, точек $\xi_1, \ldots, \xi_k$ (в качестве $\Phi(x)$ можно взять $\int_a^x f(t)\,dt$).*

□ Так как кусочно-непрерывная функция f интегрируема на отрезке $[a; b]$, то для всех $x \in [a; b]$ можно определить $\Phi(x) = = \int_a^x f(t)\,dt$. По теореме 12.20, $\Phi'(x) = f(x)$ всюду на $[a; b]$, кроме точек $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$. По лемме 12.4, любая другая такая непрерывная функция отличается от Φ на постоянное слагаемое, и теорему 12.22 достаточно доказать для $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Но $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^a f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$, и теорема доказана. ■

З а м е ч а н и е. Теоремы 12.21 и 12.22 сохраняют силу, если $a \geqslant b$ (для доказательства этого факта при $a > b$ нужно сменить знаки в обеих частях равенства $\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$).

Пример 12.8. Вычислить: а) $\int_0^1 x^2\,dx$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$; в) $\int_a^b \operatorname{sign} x\,dx$.

□ а) $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$ (см. также пример 12.4).

б) $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

в) Функция $f(x) = \operatorname{sign} x$ является кусочно-непрерывной на любом конечном отрезке $[a;b]$ (непрерывной, если $0 < a < b$ или $0 > b > a$). Её обобщённой первообразной является непрерывная функция $|x|$, так как $(|x|)' = \operatorname{sign} x$ при $x \neq 0$. Поэтому при любых значениях и любом взаимном расположении точек a и b

$$\int_a^b \operatorname{sign} x\,dx = |x|\Big|_a^b = |b| - |a|.$$ ■

Теорема 12.23 (замена переменной в определённом интеграле). *Пусть функция f непрерывна на промежутке I, а функция φ непрерывно дифференцируема на промежутке J, причём $\varphi(J) \subset I$.*

Тогда если $\alpha, \beta \in J$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt.$$

□ Так как $a, b \in \varphi(J) \subset I$, то функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$ (взаимное расположение точек α, β и точек a, b может быть любым). Пусть Φ — первообразная для f на промежутке I, т.е. $\Phi'(x) = f(x)$ для всех $x \in I$ (в концах I, если они принадлежат ему, рассматриваются соответствующие односторонние производные).

По формуле производной сложной функции для всех $t \in J$:

$$(\Phi(\varphi(t)))' = \Phi'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t),$$

причём эта функция непрерывна на J. Тогда по теореме 12.21

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) =$$

$$= \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(x)\,dx. \quad \blacksquare$$

З а м е ч а н и е. Замена переменной в определённом интеграле отличается от замены переменной в неопределённом интеграле тем, что при переходе к новой переменной меняются пределы интегрирования. Искомый интеграл — не функция, а число, которое выражается интегралом по некоторой переменной и не зависит от этой переменной. После вычисления интеграла по новой переменной возвращаться к старой переменной, естественно, не нужно.

Пример 12.9. Вычислить $\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,dx$, где $R > 0$.

$\square$ По теореме 12.16 искомый интеграл равен

$$2\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

(подынтегральная функция чётна). Сделаем замену $x = R\sin t$. Так как $x \in [0; R]$, то можно выбрать $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; искомый интеграл равен

$$2\int_0^{\pi/2} \sqrt{R^2\cos^2 t} \cdot R\cos t\,dt = 2R^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt =$$

$$= R^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\,dt = R^2 \left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} R^2. \quad \blacksquare$$

Пример 12.10. Вычислить $\int_0^\pi \cos^5 t\,dt$.

$\square$ Теорему 12.23 применяем «справа налево», считая $x = \sin t$. Тогда $\int_0^\pi \cos^5 t\,dt = \int_0^\pi (1 - \sin^2 t)^2 \cos t\,dt = \int_0^0 (1 - x^2)^2\,dx = 0$ (здесь $a = b = 0$; $\alpha = 0$, $\beta = \pi$). $\blacksquare$

Приведённое решение может вызвать сомнения в законности подобных действий; смущает $\int_0^0$. Тем не менее никакого противоречия теореме 12.23 здесь нет; всё делается совершенно законно.

Теорема 12.24 (интегрирование по частям в определённом интеграле). *Пусть функции u и v непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a;b]$. Тогда*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx.$$

□ Так как $u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - v(x)u'(x)$ и все написанные здесь функции непрерывны на $[a;b]$, то остаётся взять интеграл от обеих частей последнего равенства и учесть, что по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b (u(x)v(x))'dx = u(x)v(x)\Big|_a^b. \qquad \blacksquare$$

З а м е ч а н и е. Аналогично теореме 12.21 эта формула сохраняется, если u и v непрерывны на $[a;b]$, а u' и v' кусочно-непрерывны на $[a;b]$ (т.е. определены и непрерывны на $[a;b]$ всюду, кроме, быть может, конечного числа точек, где у них разрывы первого рода).

Пример 12.11. Вычислить $\int_0^1 x\ln(1+x^2)\,dx$.

□ Сделаем сначала замену $1+x^2=y$, после которой интеграл приведётся к виду $\frac{1}{2}\int_1^2 \ln y\,dy$ (т.к. $dy = 2x\,dx$). После этого применим интегрирование по частям ($\ln y = u$; $dy = dv$; $du = \frac{dy}{y}$; $v = y$); интеграл равен

$$\frac{1}{2}\left(y\ln y\Big|_1^2 - \int_1^2 y\cdot\frac{1}{y}\,dy\right) = \frac{1}{2}\,(2\ln 2 - 1) = \ln 2 - \frac{1}{2}\,. \qquad \blacksquare$$

§ 6. Геометрические приложения определённого интеграла

Интеграл Римана вводился так, чтобы для непрерывной неотрицательной функции значение $\int_a^b f(x)\,dx$ соответствовало площади криволинейной трапеции под графиком функции (рис. 12.1, рис. 12.4). Докажем теперь соответствующее утверждение аккуратно.

Определение 12.3. Графиком функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, называется множество точек из $\mathbb{R}^2$:

$$\Gamma_f = \{(x, y) : \quad y = f(x),\ a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Если функция f неотрицательна на отрезке $[a; b]$, то её подграфиком (криволинейной трапецией) называется множество точек из $\mathbb{R}^2$:

$$\Pi_f = \{(x, y) : \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Теорема 12.25. 1) *Если функция f интегрируема на отрезке $[a; b]$, то её график Γ_f измерим в $\mathbb{R}^2$, и $\mu\Gamma_f = 0$.*
2) *Если неотрицательная функция f интегрируема на $[a; b]$, то её подграфик Π_f измерим в $\mathbb{R}^2$, и $\mu\Pi_f = \int_a^b f(x)\,dx$.*
☐ 2) По пункту 2° критерия Дарбу для любого $\varepsilon > 0$ найдётся разбиение R отрезка $[a; b]$ такое, что $\omega_R = S_R^* - S_{*R} < \varepsilon$. Но $S_R^* = \sum\limits_{i=1}^{N} M_i \Delta x_i$, $S_{*R} = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i \Delta x_i$ — это площади ступенчатых фигур Π^* и Π_*, являющихся объединениями нескольких прямоугольников, которые имеют общие точки разве что по прямолинейным отрезкам, следовательно, пересечения этих прямоугольников имеют нулевую меру (см. следствие 1 из теоремы 11.8 и теорему 11.10).

Так как $\Pi_* \subset \Pi_f \subset \Pi^*$ (см. рис. 12.1), а множества Π_* и Π^* измеримы, то $\mu\Pi_* \leqslant \mu_*\Pi_f \leqslant \mu^*\Pi_f \leqslant \mu\Pi^*$. Тогда $0 \leqslant \mu^*\Pi_f - \mu_*\Pi_f \leqslant \mu\Pi^* - \mu\Pi_* = S_R^* - S_{*R} < \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ — любое, то $\mu^*\Pi_f = \mu_*\Pi_f$, т.е. Π_f измерим в $\mathbb{R}^2$. Далее, $S_{*R} = \mu\Pi_* \leqslant \mu\Pi_f \leqslant \mu\Pi^* = S_R^*$, а также $S_{*R} \leqslant I \leqslant S_R^*$, где $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Поэтому $|\mu\Pi_f - I| \leqslant S_R^* - S_{*R} < \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ — любое, то $\mu\Pi_f = I$.

1) До сих пор мы считали, что f — неотрицательная интегрируемая функция на $[a; b]$. Если отказаться от неотрицательности, то всё равно $\Gamma_f \subset \Gamma$, где Γ — ступенчатая фигура, являющаяся объединением закрашенных прямоугольников на

рис. 12.1; $\mu\Gamma = \sum\limits_{i=1}^{N}(M_i - m_i)\Delta x_i = \omega_R$ (аналогично рассуждению в предыдущей части доказательства). Так как для любого $\varepsilon > 0$ найдётся разбиение R отрезка $[a;b]$ такое, что $\omega_R < \varepsilon$, то $\mu^*\Gamma_f \leqslant \mu\Gamma = \omega_R < \varepsilon$. Но $\varepsilon > 0$ — любое, поэтому $\mu^*\Gamma_f = 0$; по лемме 11.9, Γ_f измерим в $\mathbb{R}^2$, и $\mu\Gamma_f = 0$. ■

Теорема 12.26 (обобщение второй части теоремы 12.25). *Пусть f и g — две интегрируемые на $[a;b]$ функции, причём $f(x) \geqslant g(x)$ на $[a;b]$. Тогда множество точек из $\mathbb{R}^2$*

$$\Pi = \{(x,y) : \quad g(x) \leqslant y \leqslant f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b\}$$

измеримо в $\mathbb{R}^2$, и $\mu\Pi = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$.

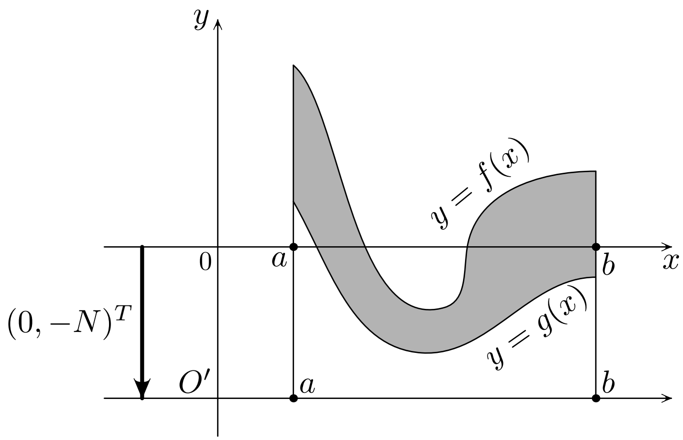

Рис. 12.6

□ Множество Π закрашено на рис. 12.6. Знаки функций f и g не имеют значения, лишь бы $f(x) \geqslant g(x)$ при $x \in [a;b]$. Так как f и g ограничены, то найдётся натуральное число N такое, что $f(x) \geqslant g(x) \geqslant -N$ при всех $x \in [a;b]$. Рассмотрим функции $f_1(x) = f(x) + N$; $g_1(x) = g(x) + N$; $f_1(x) \geqslant g_1(x) \geqslant 0$, $x \in [a;b]$.

В прямоугольной системе координат $O'x'y'$, полученной из исходной системы Oxy параллельным переносом на вектор

$(0, -N)^T$,

$$\Pi = (\Pi_{f_1} \setminus \Pi_{g_1}) \cup \Gamma_{g_1}.$$

Но по теореме 12.25 $\mu\Gamma_{g_1} = 0$; $\mu\Pi_{f_1} = \int_a^b f_1(x)\,dx$; $\mu\Pi_{g_1} = \int_a^b g_1(x)\,dx$; поэтому в системе $O'x'y'$ множество Π измеримо, и так как $\Pi_{g_1} \subset \Pi_{f_1}$, то

$$\mu\Pi = \mu\Pi_{f_1} - \mu\Pi_{g_1} = \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b g_1(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

Измеримость по Жордану и значение меры не зависят от выбора прямоугольной системы координат на плоскости (упражнение 11.17). В данном случае можно не применять это общее утверждение, а просто заметить, что при параллельном переносе системы координат на вектор $(0, -N)^T$, $N \in \mathbb{N}$, клеточные множества и их мера останутся теми же, поэтому измеримость и значение меры не изменятся. ■

Пример 12.12. Доказать, что площадь круга радиуса R равна πR^2.

□ В любой прямоугольной системе координат на плоскости окружность радиуса R задаётся уравнением $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, поэтому круг задаётся неравенствами $g(x) \leqslant y \leqslant f(x)$, $x_0 - R \leqslant x \leqslant x_0 + R$, где $f(x) = y_0 + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}$; $g(x) = y_0 - \sqrt{R^2 - (x - x_0)}$ (см. рис. 12.7). Тогда по теореме 12.26 площадь круга равна

$$S = \int_{x_0 - R}^{x_0 + R} (f(x) - g(x))\,dx = 2\int_{x_0 - R}^{x_0 + R} \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} dx.$$

После замены $x - x_0 = t$ получим: $S = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - t^2}\,dt = 2 \cdot \frac{\pi}{2} R^2 = \pi R^2$ (см. пример 12.9). ■

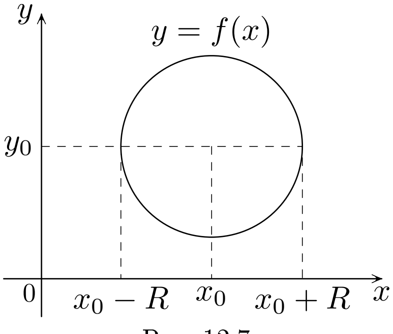

Рис. 12.7

Теорема 12.27 (объём тела вращения). *Пусть функция f неотрицательна и интегрируема на отрезке $[a;b]$;*

$$V_f = \{(x,y,z): \quad y^2+z^2 \leqslant (f(x))^2, \quad a \leqslant x \leqslant b\}$$

— множество точек $\mathbb{R}^3$, полученное в результате вращения подграфика Π_f вокруг оси Ox. Тогда множество V_f измеримо в $\mathbb{R}^3$ и

$$\mu V_f = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx.$$

□ Так как функция f интегрируема на $[a;b]$, то по теореме 12.11 функция $(f(x))^2$, а вместе с ней и функция $\pi(f(x))^2$, интегрируема на $[a;b]$. Пусть $I = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$. По пункту 2° критерия Дарбу для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение R отрезка $[a;b]$ такое, что $S_R^* - S_{*R} < \varepsilon$, где $S_R^* = \sum\limits_{i=1}^{N} M_i \Delta x_i$, $S_{*R} = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i \Delta x_i$; M_i и m_i — соответственно точная верхняя и нижняя грани функции $\pi(f(x))^2$ на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, \ldots, N$.

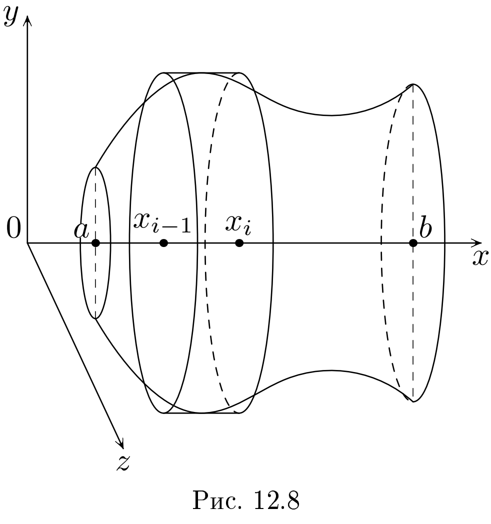

Рис. 12.8

Рассмотрим часть $(V_f)_i$, ограниченную плоскостями $x = x_{i-1}$ и $x = x_i$, $i = 1, \ldots, N$. Так как $\pi(f(x))^2 \leqslant M_i$ при $x \in [x_{i-1}; x_i]$, то $f(x) \leqslant \sqrt{\frac{M_i}{\pi}}$. Поэтому круглый цилиндр с радиусом основания $\sqrt{\frac{M_i}{\pi}}$ и высотой Δx_i содержит в себе $(V_f)_i$ (см. рис. 12.8); в силу теоремы 11.8 и примера 12.12 объём цилиндра равен $\pi \cdot \left(\sqrt{\frac{M_i}{\pi}}\right)^2 \cdot \Delta x_i = M_i \Delta x_i$. Пусть T_2 — объединение таких цилиндров по i от 1 до N. Цилиндры эти имеют общие точки разве что по кругам, лежащим в плоскостях $x = x_i$; каждый такой круг имеет нулевую меру в $\mathbb{R}^3$ (следствие 2 из теоремы 11.8). Поэтому по теореме 11.10 множество T_2 измеримо в $\mathbb{R}^3$, и $\mu T_2 = \sum\limits_{i=1}^{N} M_i \Delta x_i = S_R^*$. Так как $V_f \subset T_2$, то $\mu^* V_f \leqslant \mu T_2 = S_R^*$. Аналогично рассмотрим множество T_1 — объединение цилиндров, радиусы основания которых равны $\sqrt{\frac{m_i}{\pi}}$, а высоты равны Δx_i, $i = 1, \ldots, N$; это множество измеримо в $\mathbb{R}^3$, и $\mu T_1 = S_{*R}$. Так как $V_f \supset T_1$, то $\mu_* V_f \geqslant \mu T_1 = S_{*R}$.

Итак, $S_{*R} \leqslant \mu_* V_f \leqslant \mu^* V_f \leqslant S_R^*$; поэтому $0 \leqslant \mu^* V_f - \mu_* V_f \leqslant S_R^* - S_{*R} < \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ — любое, то $\mu^* V_f = \mu_* V_f$, и V_f измеримо в $\mathbb{R}^3$. Далее, $S_{*R} \leqslant \mu V_f \leqslant S_R^*$, а также $S_{*R} \leqslant I \leqslant S_R^*$. Поэтому $|\mu V_f - I| \leqslant S_R^* - S_{*R} < \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ — любое, то $\mu^* V_f = I$. ■

Теорема 12.28 (длина дуги кривой). *Если кривая* $\Gamma = \{\vec{r}\colon \vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [a; b]\}$ *непрерывно дифференцируема, то её длина равна* $l_\Gamma = \int_a^b |\vec{r}\,'(t)|\, dt$.

□ Согласно теореме 6.2 переменная длина дуги $s(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция и $s'(t) = |\vec{r}\,'(t)|$. Тогда

$$\int_a^b |\vec{r}\,'(t)|\, dt = \int_a^b s'(t)\, dt = s(b) - s(a) = l_\Gamma. \qquad ■$$

Для параметрически заданной непрерывно дифференцируемой кривой в пространстве $\Gamma = \{(x, y, z)\colon\ x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in [a; b]\}$ длина равна $l_\Gamma = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$ (на плоскости отсутствует

$z(t))$. Длина графика непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, равна $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

§ 7. Применение интеграла к выводу некоторых пределов

Если функция f интегрируема на отрезке $[a; b]$, то интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ можно вычислять как предел некоторой последовательности сумм Римана, лишь бы для соответствующей последовательности разбиений мелкость стремилась к нулю (пример 12.4). Но на практике такие интегралы значительно проще вычисляются по формуле Ньютона–Лейбница (пример 12.8а). Более того, пределы некоторых последовательностей можно легко вычислять, если представить их как последовательности сумм Римана интегрируемой функции.

Пример 12.13. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, где $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$.

□ Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x}$, которая интегрируема на отрезке $[1; 2]$. Разобьём отрезок на n равных частей ($x_i^{(n)} = 1 + \frac{i}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$) и возьмём $\xi_i^{(n)} = x_i^{(n)}$. Тогда соответствующая сумма Римана

$$\sigma_{R_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} = x_n.$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$ (пример 12.8б). ■

Выведем теперь два фундаментальных предельных соотношения, которые не только интересны сами по себе, но и широко используются.

Теорема 12.29 (формула Валлиса).

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2} \qquad (12.7)$$

(здесь $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n$; $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$, $n = 1, 2, \ldots$).

□ Пусть $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ Тогда при $n \geqslant 2$ применим интегрирование по частям:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin^{n-1} x\, dx =$$
$$= -\sin^{n-1} x \cdot \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \cdot (n-1) \sin^{n-2} x\, dx$$

(здесь $u = \sin^{n-1} x$; $dv = \sin x\, dx$; $du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\, dx$; $v = -\cos x$). Результат подстановки («обынтегрированный член») равен 0, и

$$I_n = (n-1)\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x)\sin^{n-2} dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

откуда

$$I_n = \frac{n-1}{n}\, I_{n-2}, \quad n \geqslant 2.$$

Получена рекуррентная формула с шагом 2 для вычисления I_n. Так как $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \cos x \Big|_0^{\pi/2} = 1$, то

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\, I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2}\, I_{2n-4} = \ \ldots =$$
$$= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdot\ \ldots \cdot 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\cdot\ \ldots \cdot 4 \cdot 2}\, I_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\, \frac{\pi}{2}\,,\ n = 1, 2, 3,\ \ldots;$$
$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\, I_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1}\, I_{2n-3} = \ \ldots =$$
$$= \frac{2n(2n-2)\cdot\ \ldots \cdot 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdot\ \ldots \cdot 5 \cdot 3}\, I_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\,,\ n = 1, 2, 3,\ \ldots$$

Так как $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$ при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, то

$$\sin^{2n+1} x \leqslant \sin^{2n} x \leqslant \sin^{2n-1} x, \quad n = 1, 2,\ \ldots, \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Интегрируя это неравенство на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, имеем

$$I_{2n+1} \leqslant I_{2n} \leqslant I_{2n-1},$$
$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqslant \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\, \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\,, \quad n = 2, 3,\ \ldots,$$

откуда

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant 2n\left(\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \frac{1}{2n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2. \tag{12.8}$$

Пусть $x_n = \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1}$; $y_n = \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n}$. Тогда $y_n - x_n = \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{(2n+1)2n}$; из левого из равенств (12.8) следует, что $0 < y_n - x_n \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2n}$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$. В то же время из (12.8) следует, что $0 \leqslant \frac{\pi}{2} - x_n \leqslant y_n - x_n$; поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$, т.е. доказано равенство (12.7). ■

Теорема 12.30 (формула Стирлинга).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi}, \tag{12.9}$$

т.е. $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$ *при* $n \to \infty$.

□ Рассмотрим последовательность $x_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$. Легко видеть, что $\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{e(n+1)} \cdot \frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$; поэтому

$$\ln\frac{x_n}{x_{n+1}} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1. \tag{12.10}$$

Докажем, что при всех $x > 0$ выполняются неравенства

$$\frac{2x}{x+2} < \ln(1+x) < \frac{1}{2}\left(x + \frac{x}{x+1}\right). \tag{12.11}$$

Рассмотрим функции $f(x) = \frac{2x}{x+2}$; $g(x) = \ln(1+x)$, $h(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x}{x+1}\right)$. Имеем: $f'(x) = \frac{4}{(x+2)^2}$; $g'(x) = \frac{1}{x+1}$; $h'(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{(1+x)^2}\right)$. Так как

$$g'(x) - f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} > 0 \quad \text{при} \quad x > 0,$$

$$h'(x) - g'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{x^2}{2(x+1)^2} > 0$$
$$\text{при} \quad x > 0,$$

а $f(0) = g(0) = h(0) = 0$, то, по теореме 5.3 при всех $x > 0$ выполняются неравенства (12.11). Взяв $x = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, получим

$$\frac{2}{2n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right).$$

Умножим все члены этого неравенства на $\left(n + \frac{1}{2}\right)$, а затем вычтем из полученных чисел 1:

$$0 < \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 < \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{n(n+1)} - 1 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Учитывая (12.10), имеем

$$0 < \ln\frac{x_n}{x_{n+1}} < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$
$$\text{т.е.} \quad 1 < \frac{x_n}{x_{n+1}} < e^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)}. \qquad (12.12)$$

Левое неравенство последней цепочки говорит о том, что последовательность положительных чисел x_n убывает; так как эта последовательность ограничена снизу нулём, то по теореме Вейерштрасса существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha \geqslant 0$; если мы докажем, что $\alpha = \sqrt{2\pi}$, равенство (12.9) будет установлено.

Подставим в (12.12) вместо n числа n, $n+1$, $\ldots$, $n+k-1$. Получим

$$1 < \frac{x_n}{x_{n+1}} < e^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)}; \quad 1 < \frac{x_{n+1}}{x_{n+2}} < e^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)}, \ \ldots,$$
$$1 < \frac{x_{n+k-1}}{x_{n+k}} < e^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right)}.$$

Перемножая почленно эти неравенства, получим

$$1 < \frac{x_n}{x_{n+k}} < e^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right)}. \qquad (12.13)$$

Устремим теперь k к ∞ при фиксированном n. Так как предел правой части (12.13) равен $e^{\frac{1}{4n}}$, то правая часть — ограниченная последовательность с индексом k. Значит, последовательность $\frac{x_n}{x_{n+k}}$ также ограничена как последовательность с индексом k (n — фиксировано). Но если $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n+k} = 0$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+k}} = \infty$ при любом n, поэтому $\alpha > 0$. Переходя в неравенствах (12.13) к пределу при $k \to \infty$ (n — фиксировано), получим

$$\begin{gathered} 1 \leqslant \frac{x_n}{\alpha} \leqslant e^{\frac{1}{4n}}, \\ \text{т.е.} \quad x_n = \xi_n \alpha, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant \xi_n \leqslant e^{\frac{1}{4n}}. \end{gathered} \tag{12.14}$$

Вспомним теперь формулу Валлиса. Легко видеть, что

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{(2n)!!(2n)!!}{(2n-1)!!(2n)!!} = \frac{((2n)!!)^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}.$$

Так как $n! = e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} x_n = \alpha e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} \xi_n$, то

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2^{2n} \cdot \alpha^2 e^{-2n} n^{2n+1} \xi_n^2}{\alpha e^{-2n} (2n)^{2n+\frac{1}{2}} \xi_{2n}} = \frac{\alpha\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\xi_n^2}{\xi_{2n}};$$

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\alpha^2 n}{2(2n+1)} \cdot \frac{\xi_n^4}{\xi_{2n}^2}.$$

В силу (12.14), $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = 1$, и предел левой части последнего равенства равен $\frac{\alpha^2}{4}$. С другой стороны, по формуле Валлиса этот предел равен $\frac{\pi}{2}$, откуда $\alpha = \sqrt{2\pi}$. ■

На практике часто применяется не теорема 12.30, а её упрощённый вариант.

Следствие. $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$ *при* $n \to \infty$.

□ Так как $n! = \xi_n \cdot \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = 1$, то $\sqrt[n]{n!} = \frac{n}{e} \cdot \alpha_n$, где $\alpha_n = \sqrt[n]{\xi_n \sqrt{2\pi n}}$; нужно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 1$. Но $\ln \alpha_n = \frac{1}{n}\left(\ln \xi_n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{2}\ln n\right)$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \xi_n = 0$

и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$ (следует из примера 5.6), то $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \alpha_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 1$. ■

Упражнения к главе XII

12.1. Вычислить следующие интегралы как пределы последовательностей сумм Римана подынтегральной функции:

а) $\int_0^1 x^3\,dx$; б) $\int_a^b \dfrac{dx}{x^2}$, $0 < a < b$;

в) $\int_0^1 e^x\,dx$; г) $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$.

12.2. Применяя критерий Римана, доказать, что функция Дирихле неинтегрируема ни на каком отрезке (см. пример 12.1).

12.3. Пусть функция f определена на отрезке $[a;b]$, и $F(R)$ — функция от разбиения R отрезка $[a;b]$ (например, S^*_R, S_{*R}, ω_R). Говорят, что $\lim\limits_{|R|\to 0} F(R) = \beta$, где β — один из 6 СПС, если

$$\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\,\delta > 0: \quad \forall\,R,\ |R| < \delta \to F(R) \in U_\varepsilon(\beta).$$

Доказать, что:

а) ограниченная функция f интегрируема на $[a;b]$ $\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow \lim\limits_{|R|\to 0} \omega_R = 0$;

б) ограниченная функция f интегрируема на $[a;b]$ и

$$\int_a^b f(x)\,dx = I \Longleftrightarrow \lim_{|R|\to 0} S^*_R = \lim_{|R|\to 0} S_{*R} = I.$$

12.4. Пусть функция f определена на отрезке $[a;b]$, и $F(R,\xi)$ — функция от разбиения R отрезка $[a;b]$ и промежуточных точек $\xi_i \in [x_{i-1};x_i]$, $i = 1, \ \ldots, N$ (например, σ_R). Говорят, что $\lim\limits_{|R|\to 0} F(R,\xi) = \beta$, где β — один из 6 СПС, если

$$\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\,\delta > 0: \quad \forall\,R,\ |R| < \delta, \quad \forall\,\xi_i \in [x_{i-1};x_i],$$
$$i = 1, \ldots, N \to F(R,\xi) \in U_\varepsilon(\beta).$$

Доказать, что функция f интегрируема на $[a;b]$ и $\int_a^b f(x)\,dx = I \Longleftrightarrow \lim\limits_{|R|\to 0} \sigma_R = I$.

12.5. Вычислить интегралы:

а) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$; в) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$;

г) $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+x^6}$; д) $\int_0^{\pi} x^3 \sin x\,dx$; е) $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$;

ж) $\int_0^{\pi/2} e^x \sin 2x\,dx$; з) $\int_1^e \sin \ln x\,dx$; и) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2-7x+12}$;

к) $\int_0^1 \sqrt{x^2+3}\,dx$; л) $\int_{-1}^2 |x|\,dx$; м) $\int_0^4 [x]\,dx$.

12.6. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, представив x_n как последовательность сумм Римана некоторой интегрируемой функции:

а) $x_n = \dfrac{1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$, $\alpha > 0$;

б) $x_n = \dfrac{n}{n^2+1^2} + \dfrac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \dfrac{n}{n^2+n^2}$.

12.7. Доказать неравенства:

а) $\sin 1 < \int_{-1}^1 \dfrac{\cos x}{1+x^2}\,dx < 2\sin 1$;

б) $\dfrac{2}{3} < \int_0^1 \dfrac{\sqrt{x}e^x}{1+x}\,dx < \dfrac{e-1}{2}$;

в) $\dfrac{\pi^3}{2427} < \int_0^{\pi/2} \dfrac{x^2\,dx}{100+2\sqrt{3}\sin^3 x \cos x} < \dfrac{\pi^3}{2400}$;

г) $1 - \frac{1}{n} < \int_0^1 e^{-x^n}\,dx < 1$, $n \in \mathbb{N}$.

12.8. Найти производные от следующих функций:

а) $f(x) = \int_0^x \sin t^2\,dt$;

б) $f(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,dt$;

в) $f(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \dfrac{dt}{\sqrt{4-t^2}}$.

12.9. а) Доказать, что функция $f(x) = \operatorname{sign} x$ интегрируема, но не имеет первообразной на отрезке $[-1;1]$.

б) Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} \left(x^{3/2} \sin \frac{1}{x}\right)', & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

имеет первообразную, но не интегрируема на отрезке $[0;1]$.

12.10. Доказать, что если функция f интегрируема и имеет первообразную F на отрезке $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ (в частности, это имеет место для непрерывных на $[a;b]$ функций).

12.11. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[-a;a]$, где $a > 0$; $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, $x \in [-a;a]$. Тогда:

а) если f — чётная функция, то F — нечётная функция;
б) если f — нечётная функция, то F — чётная функция.

12.12. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[0;T]$, где $T > 0$, и имеет период T. Тогда функция $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ периодична $\iff$ $\int_0^T f(x)\,dx = 0$.

12.13. Почему неприменима формула Ньютона–Лейбница при вычислении интегралов $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ и $\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)dx$? Существуют ли эти интегралы? Если да, то вычислить их.

12.14. Доказать, что площадь кругового сектора радиуса R с центральным углом α радиан равна $\frac{1}{2}R^2\alpha$ (указание: воспользоваться независимостью меры Жордана относительно выбора прямоугольной системы координат на плоскости; поместить начало координат в центр круга, а положительный луч оси Ox направить по биссектрисе центрального угла сектора).

12.15. Доказать, что множество точек из $\mathbb{R}^2$

$$S = \{(x,y):\ x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ 0 \leqslant r \leqslant r(\varphi),\\ \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta,\ \beta - \alpha < 2\pi\}$$

(сектор в полярных координатах (см. рис. 12.9)), где функция $r(\varphi)$ интегрируема на $[\alpha;\beta]$, измеримо в $\mathbb{R}^2$, и $\mu S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (r(\varphi))^2\,d\varphi$.

Указание: представить геометрически верхнюю и нижнюю сумму Дарбу для этого интеграла как ступенчатые фигуры, являющиеся объединением круговых секторов (применить при этом результат упражнения 12.14); затем, аналогично доказательству теорем 12.25 и 12.27, воспользоваться пунктом 2° критерия Дарбу.

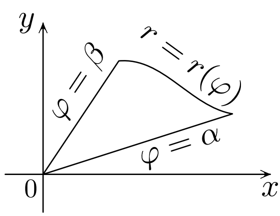

Рис. 12.9

12.16. Доказать, что кривая Γ, заданная в полярных координатах на плоскости уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, где $r(\varphi)$ — непрерывно дифференцируемая функция на $[\alpha;\beta]$, спрямляема и $l_\Gamma = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi$. *Указание*: представить кривую в прямоугольной системе координат в параметрическом виде $x = r(\varphi)\cos\varphi$, $y = r(\varphi)\sin\varphi$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$.

12.17. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \ln(x+6)$, $y = 3\ln x$, $y = 0$ (*указание*: удобно применить теорему 12.26, считая y независимой переменной, а x — функцией от y).

12.18. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой, заданной в полярных координатах уравнением $r = a(1+\cos\varphi)$, $a > 0$.

12.19. Найти объёмы тел, образованных при вращении подграфика функции $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$:

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

12.20. Найти длины дуг кривых:

а) $y = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}$, $1 \leqslant x \leqslant 3$;

б) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (одна арка циклоиды);

в) $r = a\cos^3\frac{\varphi}{3}$.

ГЛАВА XIII. **НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ**

§ 1. Определение и общие свойства

Определение 13.1. Пусть функция f определена на $[a;b)$, $a<b$, где b — конечно или $+\infty$, и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a;b']$, где $a<b'<b$. Тогда если существует конечный $\lim\limits_{b'\to b-0}\int_a^{b'} f(x)\,dx$, то он называется несобственным интегралом $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$, а функция f называется несобственно интегрируемой на $[a;b)$.

Аналогичное определение можно дать для полуинтервала с открытым левым концом.

Определение 13.1′. Пусть функция f определена на $(a;b]$, $a<b$, где a — конечно или $-\infty$, и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a';b]$, где $a<a'<b$. Тогда если существует конечный $\lim\limits_{a'\to a+0}\int_{a'}^{b} f(x)\,dx$, то он называется несобственным интегралом $\int_{a\leftarrow}^{b} f(x)\,dx$, а функция f называется несобственно интегрируемой на $(a;b]$.

Если предел в этих определениях существует и конечен, то соответствующий несобственный интеграл называется сходящимся, если нет — расходящимся. Если $b=+\infty$, то $b'\to b-0$ означает $b'\to+\infty$; если $a=-\infty$, то $a'\to a+0$ означает $a'\to$ $\to-\infty$. Стрелку для открытого конца полуинтервала в соответствующем пределе интеграла обычно не ставят; мы её будем употреблять в этой главе и иногда в дальнейшем для того, чтобы чётко было видно, где у интеграла особенность.

Если полуинтервал ограничен и функция f ограничена на нём, то из несобственной интегрируемости следует и обычная, и несобственный интеграл равен обычному интегралу Римана $\int_a^b f(x)\,dx$. В самом деле, рассмотрим, например, случай открытого левого конца a ($a<b$, $a\in\mathbb{R}$). Если функцию f доопределить произвольным значением $f(a)$, то полученная функция будет ограничена на $[a;b]$ и интегрируема на любом отрезке $[a',b]$, $a<a'<b$. По теореме 12.6 функция f интегриру-

ема на $[a;b]$, а в силу непрерывности интеграла с переменным нижним пределом, $\lim\limits_{a'\to a+0} \int_{a'}^{b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. Это значит, что сходится несобственный интеграл $\int_{a\leftarrow}^{b} f(x)\,dx$, и его значение равно $\int_a^b f(x)\,dx$. Аналогично разбирается случай полуинтервала с открытым правым концом.

Геометрически сходимость несобственного интеграла для неотрицательной непрерывной функции означает конечность площади соответствующей неограниченной фигуры (см. рис. 13.1 — иллюстрация для случая открытых правых концов; интерес представляет случай, когда $b = +\infty$ или когда $b \in \mathbb{R}$, но функция неограничена на $[a;b)$).

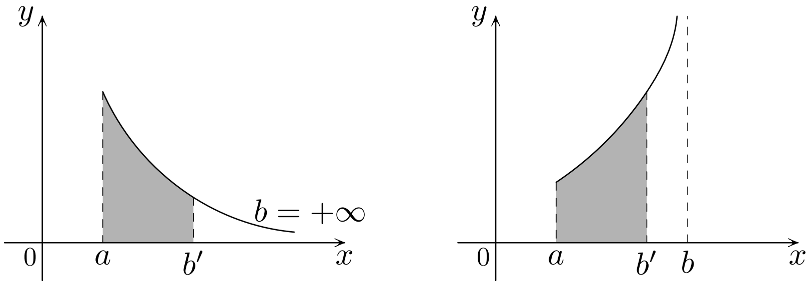

Рис. 13.1

При изложении теории несобственного интеграла для полуинтервала с одним открытым концом все утверждения будут формулироваться и доказываться (если не оговорено противное) для случая открытого правого конца; случай открытого левого конца разбирается совершенно аналогично. Для обозначения того факта, что $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ и $\int_a^{\to b} g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно, т.е. что из сходимости первого следует сходимость второго и наоборот, будет применяться запись: $\int_a^{\to b} f(x)\,dx \overset{\text{сх}}{\sim} \int_a^{\to b} g(x)\,dx$ (значок $\overset{\text{сх}}{\sim}$ означает равносильность сходимости этих интегралов; если писать просто $\sim$, то запись теряет смысл).

Теорема 13.1 (линейность несобственного интеграла). *Пусть функции f и g интегрируемы по Риману на* *любом отрезке $[a; b']$, где $a < b' < b$ (b — конечно или $+\infty$). Если $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ и $\int_a^{\to b} g(x)\,dx$ сходятся, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то сходится и*

$$\int_a^{\to b} (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^{\to b} f(x)\,dx + \beta \int_a^{\to b} g(x)\,dx.$$

□ Утверждение следует из того, что при всех $b' \in (a; b)$

$$\int_a^{b'} (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^{b'} f(x)\,dx + \beta \int_a^{b'} g(x)\,dx.$$

Если существуют $\lim\limits_{b' \to b-0} \int_a^{b'} f(x)\,dx = I_1$ и $\lim\limits_{b' \to b-0} \int_a^{b'} g(x)\,dx = I_2$, то существует и $\lim\limits_{b' \to b-0} \int_a^{b'} (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha I_1 + \beta I_2$. ■

Следствие. *Если функции f и g интегрируемы по Риману на любом отрезке $[a; b']$, где $a < b' < b$ (b — конечно или $+\infty$), причём $\int_a^{\to b} g(x)\,dx$ сходится, то*

$$\int_a^{\to b} (f(x) + g(x))\,dx \overset{\text{сх}}{\sim} \int_a^{\to b} f(x)\,dx$$

(т.е. при исследовании сходимости несобственного интеграла можно игнорировать слагаемое, дающее заведомо сходящийся интеграл).

□ Если $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ сходится, то всё следует из теоремы 13.1. Если $\int_a^{\to b} (f(x) + g(x))\,dx$ сходится, то $f(x) = (f(x) + g(x)) - g(x)$; $f(x)$ представляется как разность функций, интегралы от которых сходятся, и $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ сходится по теореме 13.1. ■

Теорема 13.2. *Если функция f интегрируема по Риману на любом отрезке $[a; b']$, где $a < b' < b$ (b — конечно или $+\infty$), и $c \in (a; b)$. то $\int_c^{\to b} f(x)\,dx \overset{\text{сх}}{\sim} \int_a^{\to b} f(x)\,dx$ (т.е. при исследовании сходимости несобственного интеграла по полуинтервалу с открытым правым концом нижний предел интегрирования можно произвольно перемещать по этому полуинтервалу); при этом $\int_a^{\to b} f(x)\,dx = \int_a^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\to b} f(x)\,dx$.*

□ При всех $b' \in (c; b)$

$$\int_a^{b'} f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^{b'} f(x)\,dx. \qquad (13.1)$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{b'\to b-0} \int_a^{b'} f(x)\,dx$ и $\lim\limits_{b'\to b-0} \int_c^{b'} f(x)\,dx$ существуют одновременно, откуда вытекает первое утверждение теоремы. Второе утверждение получается после перехода к пределу в (13.1) при $b' \to b - 0$. ■

Теорема 13.3 (формула Ньютона–Лейбница). *Если функция f непрерывна на $[a; b)$ и F — её первообразная на $[a; b)$, где b — конечно или $+\infty$, то*

$$\int_a^{\to b} f(x)\,dx = F(b-0) - F(a) \equiv F(x)\Big|_a^{b-0}$$

(при этом сходимость несобственного интеграла равносильна существованию конечного $\lim\limits_{x\to b-0} F(x)$).

□ По теореме 12.21 для любого $b' \in (a; b)$ имеет место равенство

$$\int_a^{b'} f(x)\,dx = F(b') - F(a);$$

пределы обеих частей последнего равенства при $b' \to b - 0$ существуют одновременно; в случае существования они равны. ■

Пример 13.1. Исследовать сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

□ Если $\alpha \neq 1$, то

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \alpha < 1; \\ \dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{если } \alpha > 1. \end{cases}$$

Если $\alpha = 1$, то $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^{+\infty} = +\infty$. Таким образом, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится, если $\alpha > 1$, и расходится, если $\alpha \leqslant 1$. ■

Теорема 13.4 (интегрирование по частям). *Пусть функции u и v непрерывно дифференцируемы на $[a; b)$, где*

b — конечно или $+\infty$. Тогда

$$\int_a^{\to b} u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^{b-0} - \int_a^{\to b} v(x)u'(x)\,dx$$

(из существования двух пределов следует существование третьего, и выполняется нужное равенство).

$\square$ По теореме 12.24 для любого $b' \in (a;b)$ имеет место равенство

$$\int_a^{b'} u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^{b'} - \int_a^{b'} v(x)u'(x)\,dx.$$

Если два из трёх написанных выражений имеют конечный предел при $b' \to b-0$, то имеет предел и третье; в пределе при $b' \to b-0$ получим нужное равенство. $\blacksquare$

Пример 13.2. Вычислить $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$.

$\square$ Применим интегрирование по частям ($u = x$, $dv = e^{-x}\,dx$, $v = -e^{-x}$):

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = -xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx.$$

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ (это следует из примера 5.5 при $a = e$, $p = 1$), а по теореме 13.3 $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$, то $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$ сходится и равен 1. $\blacksquare$

В дальнейшем для несобственных интегралов будет удобно считать, что $\int_b^a = -\int_a^b$ независимо от того, какой из концов полуинтервала открыт.

Теорема 13.5 (замена переменной в несобственном интеграле). *Пусть функция f непрерывна на $[a;b)$, где b — конечно или $+\infty$; функция φ непрерывно дифференцируема и строго возрастает на $[\alpha;\beta)$, где β — конечно или $+\infty$, причём $\varphi(\alpha) = a$, $\lim\limits_{t\to\beta-0} \varphi(t) = b-0$. Тогда*

$$\int_a^{\to b} f(x)\,dx = \int_\alpha^{\to\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt \tag{13.2}$$

(если один из этих двух интегралов сходится, то сходится и другой, и они равны; при этом один из них или оба могут быть обычными «собственными» интегралами Римана).

□ 1) Пусть сходится $\int_{\alpha}^{\to\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$. Так как функция φ непрерывна и строго возрастает на промежутке $I = [\alpha;\beta)$, то по теореме об обратной функции 3.17 на промежутке $J = \varphi(I) = [a;b)$ определена, строго возрастает и непрерывна обратная функция $t = \psi(x)$. Если $b' \in (a;b)$, то $\beta' = \psi(b') \in (\alpha;\beta)$, причём $\lim\limits_{x\to b-0}\psi(x) = \beta - 0$ (это следует из теоремы 3.9 о пределах монотонных функций, так как $I = \psi(J) = [\alpha;\beta)$ и $\sup\limits_{(a;b)}\psi(x) = \beta$). Тогда по теореме 12.23

$$\int_a^{b'} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\psi(b')} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt. \qquad (13.3)$$

Так как $\lim\limits_{b'\to b-0}\psi(b') = \beta - 0$, причём $\psi(b') < \beta$, а

$$\lim_{\beta'\to\beta-0}\int_{\alpha}^{\beta'} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int_{\alpha}^{\to\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt,$$

то по теореме 3.5 о замене переменной под знаком предела и в силу (13.3)

$$\lim_{b'\to b-0}\int_a^{b'} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\to\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt,$$

т.е. сходится $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ и имеет место (13.2).

2) Пусть сходится $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$. Если $\beta' \in (\alpha;\beta)$, то по теореме 12.23

$$\int_{\alpha}^{\beta'} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int_a^{\varphi(\beta')} f(x)\,dx. \qquad (13.4)$$

Так как $\lim\limits_{\beta'\to\beta-0}\varphi(\beta') = b - 0$, причём $\varphi(\beta') < b$, а

$$\lim_{b'\to b-0}\int_a^{b'} f(x)\,dx = \int_a^{\to b} f(x)\,dx,$$

то, по теореме 3.5 и в силу (13.4)

$$\lim_{\beta'\to\beta-0}\int_{\alpha}^{\beta'} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int_a^{\to b} f(x)\,dx,$$

т.е. сходится $\int_{\alpha}^{\to\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$ и имеет место (13.2). ■

Пример 13.3. Вычислить $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+3\sin^2 x}$.

□ Это — собственный интеграл, но стандартная замена $\operatorname{tg} x = t$, т.е. $x = \operatorname{arctg} t$, превращает промежуток интегрирования в $[0;+\infty)$. Применим теорему 13.5, и наш собственный интеграл, равный

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\dfrac{dx}{\cos^2 x}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}+3\operatorname{tg}^2 x},$$

преобразуется в несобственный интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+4t^2}$. В последнем интеграле сделаем замену $2t = u$, т.е. $t = \frac{u}{2}$, и он преобразуется опять-таки в несобственный интеграл $\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^2}$, который вычисляется по формуле Ньютона–Лейбница:

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg} u\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{\pi}{4}. \qquad ■$$

Замену в несобственном интеграле можно делать и строго убывающей непрерывно дифференцируемой функцией $\varphi(t)$; тогда открытым концом полуинтервала вместо правого станет левый, и для восстановления естественного порядка нужно поменять местами пределы, и интеграл сменит знак.

Пример 13.4. Исследовать сходимость $\int_{0\leftarrow}^{1}\frac{dx}{x^{\alpha}}$.

□ Сделаем замену $x = \frac{1}{t}$, т.е. $t = \frac{1}{x}$. Это — строго убывающая функция, которая преобразует $(0;1]$ в $[1;+\infty)$, и открытым концом полуинтервала вместо левого станет правый. Интеграл преобразуется в $\int_{+\infty}^{1}\frac{\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt}{\left(\frac{1}{t}\right)^{\alpha}} = \int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{2-\alpha}}$. Согласно примеру 13.1 он сходится при $2 - \alpha > 1$ и расходится при $2 - \alpha \leqslant 1$. Окончательно имеем: $\int_{0\leftarrow}^{1} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$. ■

Требование монотонности функции $\varphi(t)$, осуществляющей замену, на самом деле несущественно, но для упрощения доказательства мы им пользуемся.

Теорема 13.6 (критерий Коши сходимости несобственного интеграла). *Пусть функция f интегрируема по Риману на любом отрезке $[a; b']$, где $a < b' < b$ (b — конечно или $+\infty$). Тогда $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ сходится $\iff$ $\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\,\delta > 0$: $\forall\,b', b'' \in \mathring{U}_\delta(b-0) \to \left|\int_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$.*

□ Утверждение фактически является критерием Коши существования конечного предела функции $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ при $x \to b - 0$ ($\int_{b'}^{b''} f(x)\,dx = F(b'') - F(b')$), так что отдельного доказательства не требуется. ■

Пример 13.5. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

□ Теорема 13.6 при $b = +\infty$ формулируется так: если функция f интегрируема по Риману на любом отрезке $[a; b']$, где $b' > a$, то $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится $\iff$ $\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\,\Delta > a$: $\forall\,b', b'' > \Delta \to \left|\int_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$. Расходимость $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ означает, что

$$\exists\,\varepsilon > 0: \quad \forall\,\Delta > a \to \exists\,b', b'' > \Delta: \quad \left|\int_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| \geqslant \varepsilon.$$

Так как $\int_{b'}^{b''} \frac{dx}{x} = \ln\frac{b''}{b'}$, то возьмём $b'' = 2b'$, например, $b' = n$, $b'' = 2n$. Тогда $\exists\,\varepsilon = \ln 2$: $\forall\,\Delta > 1 \to \exists\,b' = n > \Delta$, $\exists\,b'' = 2n > \Delta$: $\left|\int_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| = \varepsilon$. Значит, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится по критерию Коши. ■

Несобственные интегралы могут иметь несколько особенностей.

Определение 13.2. Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется особенностью функции f, если функция f определена в некоторой правой (или левой) проколотой окрестности точки x_0 и ни на одном отрезке $[x_0; x_0+\varepsilon]$ (соответственно $[x_0-\varepsilon; x_0]$) не является интегрируемой по Риману. Символы $+\infty$ и $-\infty$ всегда считаются особенностями функции, определённой в некоторой окрестности $+\infty$ (соответственно $-\infty$). Если интервал $(a; b)$, где a — конечно или $-\infty$, b — конечно или $+\infty$, разбивается на конечное число промежутков $I_1 = (a; x_1]$, $I_2 = [x_1; x_2]$, $\ldots$, $I_N = [x_{N-1}; b)$, на каждом из которых функция f имеет единственную особенность в одном из концов, то все интегралы $\int_{I_k} f(x)\,dx$, $k = 1, \ \ldots, N$, могут рассматриваться как несобственные в смысле определения 13.1 или 13.1$'$. Если все эти несобственные интегралы сходятся, то их сумма $\sum\limits_{k=1}^{N} \int_{I_k} f(x)\,dx$ называется сходящимся несобственным интегралом $\int_a^b f(x)\,dx$. Если хотя бы один из $\int_{I_k} f(x)\,dx$ расходится, то несобственный $\int_a^b f(x)\,dx$ считается расходящимся.

Пример 13.6. Сходятся ли несобственные интегралы:

а) $\int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2}$; б) $\int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{x}$; в) $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^2}$?

☐ а) $\int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2} = \int_{0\leftarrow}^{1} \dfrac{dx}{x^2} + \int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2}$, первый из которых расходится, второй — сходится (примеры 13.4 и 13.1). Значит, $\int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2}$ расходится.

б) $\int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{x} = \int_{0\leftarrow}^{1} \dfrac{dx}{x} + \int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x}$; оба интеграла расходятся (примеры 13.4 и 13.1). Значит, $\int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{x}$ расходится.

в) $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \dfrac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{0} + {}$ $+ \operatorname{arctg} x\Big|_0^{+\infty} = 0 - \left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + \dfrac{\pi}{2} - 0 = \pi$ (оба интеграла сходятся, $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^2}$ сходится). ■

З а м е ч а н и е. Если функция f непрерывна на интервале $(a; b)$, где a — конечно или $-\infty$, b — конечно или $+\infty$, и $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, то его можно вычислять по формуле Ньютона–Лейбница: $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{a+0}^{b-0}$, где F — первообразная для f на $(a;b)$. Например, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.

§ 2. Несобственные интегралы от знакопостоянных функций

В этом параграфе будем считать, что подынтегральная функция сохраняет знак на $[a;b)$ или хотя бы в некоторой $\overset{\circ}{U}_\delta(b-0)$; не уменьшая общности, функция неотрицательна (иначе заменим f на $-f$).

Теорема 13.7. *Пусть функция f интегрируема по Риману на любом отрезке $[a;b']$, где $a < b' < b$ (b — конечно или $+\infty$), причём $f(x) \geqslant 0$ в некоторой $\overset{\circ}{U}_\delta(b-0)$, $\delta > 0$. Тогда $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ сходится $\iff$ функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ограничена на $[a;b)$.*

☐ Так как при исследовании сходимости интеграла и ограниченности функции F точку a можно заменить на любую точку $c \in \overset{\circ}{U}_\delta(b-0)$, то, не уменьшая общности, можно считать, что $f(x) \geqslant 0$ при всех $x \in [a;b)$. Но тогда функция F возрастает (вообще говоря, нестрого) на $[a;b)$ и по теореме 3.9 о пределе монотонной функции ограниченность функции F равносильна наличию конечного $\lim\limits_{x\to b-0} F(x)$, т.е. сходимости интеграла $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$. ■

Теорема 13.8 (признак сравнения сходимости). *Пусть функции f и g интегрируемы по Риману на любом отрезке $[a;b']$, где $a < b' < b$ (b — конечно или $+\infty$), причём $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) \geqslant 0$ в некоторой $\overset{\circ}{U}_\delta(b-0)$, $\delta > 0$. Тогда:*

1) *если $f(x) = O(g(x))$ при $x \to b-0$, то из сходимости $\int_a^{\to b} g(x)\,dx$ следует сходимость $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$, или, что то же, из расходимости $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ следует расходимость $\int_a^{\to b} g(x)\,dx$ (в частности, это имеет место, если $f(x) = = o(g(x))$ при $x \to b-0$);*

2) *если $f(x) = O^*(g(x))$ при $x \to b-0$, то $\int_a^{\to b} f(x)\,dx \overset{\text{cx}}{\approx} \int_a^{\to b} g(x)\,dx$ (в частности, это имеет место, если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to b-0$).*

□ 1) Как и при доказательстве теоремы 13.7, не уменьшая общности, можно считать, что $0 \leqslant f(x) \leqslant Cg(x)$ при всех $x \in$ $\in [a;b)$. Так как $\int_a^{\to b} g(x)\,dx$ сходится, то функция $\int_a^x g(t)\,dt$ ограничена. Но при всех $x \in [a;b)$ имеет место неравенство $0 \leqslant \int_a^x f(t)\,dt \leqslant C\int_a^x g(t)\,dt$, поэтому функция $\int_a^x f(t)\,dt$ также ограничена; по теореме 13.7 $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ сходится.

2) Следует из первой части, так как $f = O^*(g) \iff (f =$ $= O(g)) \wedge (g = O(f))$. ■

Следствие. *Пусть функции f и g интегрируемы по Риману на любом отрезке $[a;b']$, где $a < b' < b$ (b — конечно или $+\infty$), причём $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) \geqslant 0$ в некоторой $\mathring{U}_\delta(b-0)$, $\delta > 0$, и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = C > 0$. Тогда $\int_a^{\to b} f(x)g(x)\,dx \overset{\text{сх}}{\approx} \int_a^{\to b} g(x)\,dx$ (при исследовании сходимости интеграла от знакопостоянной функции можно игнорировать множитель, имеющий конечный ненулевой предел).*

□ Утверждение следует из теоремы 13.8 и того, что

$$f(x)g(x) \sim Cg(x) \quad \text{при} \quad x \to b-0. \qquad ■$$

Пример 13.7. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx \overset{\text{сх}}{\approx} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, так как $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$. Интеграл сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Пример 13.8. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{|x| + x^4}} = \int_{-\infty}^{-1} + \int_{-1}^{\to 0} + \int_{0\leftarrow}^{1} + \int_1^{+\infty} \equiv$ $\equiv I_1 + I_2 + I_3 + I_4$.

Так как $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x^2}$ при $x \to +\infty$, то I_4 сходится по признаку сравнения (в силу чётности функции аналогично сходится I_1). Так как $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ при $x \to +0$, то I_3 сходится по признаку сравнения (в силу чётности функции аналогично сходится I_2); здесь использованы результаты примеров 13.1 и 13.4. Итак, данный интеграл сходится.

Пример 13.9. Исследовать сходимость $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$.

□ Нижний предел интегрирования взят большим, чем 1, чтобы не появилась вторая особенность $x = 1$. Если $\alpha = 1$, то сделаем замену $\ln x = t$:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta} \overset{\text{сх}}{\sim} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}$$

— сходится при $\beta > 1$, расходится при $\beta \leqslant 1$ (пример 13.1).

При $\alpha \neq 1$ наличие множителя $(\ln x)^\beta$ не влияет на сходимость интеграла. При доказательстве этого факта возникают 4 качественно различных случая (случай $\beta = 0$ тривиален, так как остаётся $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$).

1) $\alpha > 1$, $\beta > 0$ (усиление сходимости). Так как $\frac{1}{x^\alpha(\ln x)^\beta} = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ при $x \to +\infty$, а $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится, то данный интеграл сходится по признаку сравнения.

2) $\alpha > 1$, $\beta < 0$ (ослабление сходимости). Известно, что $\ln x = o(x^\varepsilon)$ при $x \to +\infty$, если $\varepsilon > 0$ (пример 5.6). Поэтому если $\gamma = -\beta > 0$, то

$$(\ln x)^\gamma = o(x^{\gamma\varepsilon}); \quad \frac{1}{x^\alpha(\ln x)^\beta} = \frac{(\ln x)^\gamma}{x^\alpha} = o\left(\frac{x^{\gamma\varepsilon}}{x^\alpha}\right) = o\left(\frac{1}{x^{\alpha-\gamma\varepsilon}}\right).$$

Так как $\alpha > 1$, то можно выбрать $\varepsilon > 0$ таким, что $\alpha - \gamma\varepsilon > 1$; тогда $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha-\gamma\varepsilon}}$ сходится, и данный интеграл сходится по признаку сравнения.

3) $\alpha < 1$, $\beta < 0$ (усиление расходимости). Так как $\frac{1}{x^\alpha} = o\left(\frac{1}{x^\alpha(\ln x)^\beta}\right)$ при $x \to +\infty$, а $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ расходится, то данный интеграл расходится по признаку сравнения.

4) $\alpha < 1$, $\beta > 0$ (ослабление расходимости). Так как $\ln x = o(x^\varepsilon)$ при $x \to +\infty$, если $\varepsilon > 0$, то $\frac{1}{x^{\beta\varepsilon}} = o\left(\frac{1}{(\ln x)^\beta}\right)$, и $\frac{1}{x^{\alpha+\beta\varepsilon}} = o\left(\frac{1}{x^\alpha(\ln x)^\beta}\right)$. Так как $\alpha < 1$, то можно выбрать $\varepsilon > 0$ таким, что $\alpha + \beta\varepsilon < 1$; тогда $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+\beta\varepsilon}}$ расходится, и данный

интеграл расходится по признаку сравнения. Итак:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta} : \begin{cases} \text{сходится } \forall\,\beta, & \text{если } \alpha > 1; \\ \text{расходится } \forall\,\beta, & \text{если } \alpha < 1; \\ \text{если } \alpha = 1 & \begin{cases} \text{сходится при } \beta > 1; \\ \text{расходится при } \beta \leqslant 1. \end{cases} \end{cases} \quad \blacksquare$$

Пример 13.10. Исследовать сходимость $\int_{0\leftarrow}^{1/2} \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta}$.

$\square$ Верхний предел интегрирования взят меньшим, чем 1, чтобы не появилась вторая особенность $x = 1$. Так как $\ln x < 0$, то для возможности возведения в любую действительную степень он взят по модулю.

При помощи замены $x = \frac{1}{t}$ интеграл сведётся к интегралу из примера 13.9.

$$\int_{0\leftarrow}^{1/2} \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta} = \int_{+\infty}^{2} \frac{\left(-\frac{dt}{t^2}\right)}{\left(\frac{1}{t}\right)^\alpha \left|\ln \frac{1}{t}\right|^\beta} = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-\alpha}(\ln t)^\beta}\,.$$

Так как $2 - \alpha > 1 \iff \alpha < 1$; $2 - \alpha < 1 \iff \alpha > 1$, то итог таков: интеграл

$$\begin{cases} \text{сходится } \forall\,\beta, & \text{если } \alpha < 1; \\ \text{расходится } \forall\,\beta, & \text{если } \alpha > 1; \\ \text{если } \alpha = 1 & \begin{cases} \text{сходится при } \beta > 1; \\ \text{расходится при } \beta \leqslant 1. \end{cases} \end{cases}$$

Опять-таки при $\alpha \neq 1$ наличие множителя $|\ln x|^\beta$ не влияет на сходимость интеграла. $\blacksquare$

Теорема 13.9. *Если функция f интегрируема на любом отрезке $[a; b']$, где $b' > a$, и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = C > 0$ или $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, то $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится.*

$\square$ Доказательство следует из того, что $\exists\,\Delta > 0$: $\forall\,x > \Delta \to f(x) \geqslant \frac{C}{2}$, а $\int_a^{+\infty} 1\,dx$ расходится; остаётся применить признак сравнения. $\blacksquare$

Тем не менее условие $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ не является необходимым условием сходимости $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Такой интеграл может сходиться даже для неограниченной неотрицательной функции.

Пример 13.11. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2^k, & \text{если } x \in \Delta_k,\ k = 1{,}2,\ \ldots; \\ 0 & \text{в остальных точках } x \geqslant 0; \end{cases}$$

здесь $\Delta_k = [k; k + 4^{-k}]$, $k = 1, 2, \ \ldots$ Ясно, что функция f неограничена на $[0; +\infty)$, а $\int_0^{n+4^{-n}} f(t)\,dt = \sum\limits_{k=1}^{n} 2^k \cdot \frac{1}{4^k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1$ при всех $n = 1, 2, \ \ldots$ Так как $f(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant 0$, то функция $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ возрастает, и существует $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \beta$ — конечный или $+\infty$. Но $F(n + 4^{-n}) < 1$, $n = 1, 2, \ \ldots$, поэтому β — конечное число. А это значит, что $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится (см. рис. 13.2).

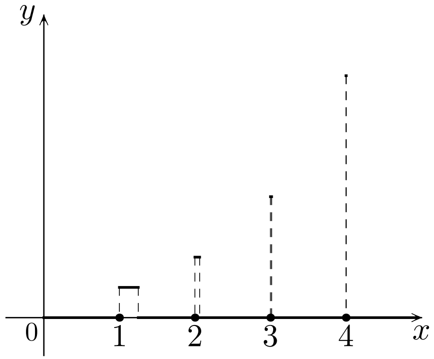

Рис. 13.2

Пример 13.12. Исследовать сходимость интеграла $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\,dx$ (гамма-функция Эйлера).

$\square$ Интеграл имеет 2 особенности: 0 и $+\infty$; $\Gamma(p) = \int_{0\leftarrow}^{1} + \int_1^{+\infty} \equiv I_1 + I_2$. Так как $f(x) = x^{p-1}e^{-x} \sim x^{p-1}$ при $x \to +0$, то $I_1 \overset{\text{сх}}{\sim} \int_{0\leftarrow}^{1} \frac{dx}{x^{1-p}}$; интеграл сходится при $1 - p < 1$, т.е. $p > 0$; расходится при $1 - p \geqslant 1$, т.е. $p \leqslant 0$. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^q} = +\infty$

при всех $q \in \mathbb{R}$ (пример 5.5), то $x^{p-1}e^{-x} = o(\frac{1}{x^2})$ при $x \to +\infty$ и интеграл I_2 сходится при всех $p \in \mathbb{R}$ по признаку сравнения.

Итак, интеграл $\Gamma(p)$ сходится при $p > 0$ и расходится при $p \leqslant 0$. ■

§ 3. Несобственные интегралы от знакопеременных функций

Для функций, не сохраняющих знак ни в какой проколотой окрестности особенности, признаки сравнения сходимости несобственных интегралов не работают (примеры будут приведены позже). Часто представляет интерес исследование сходимости интеграла от модуля функции.

Теорема 13.10. *Пусть функция f интегрируема по Риману на любом отрезке $[a; b']$, где $a < b' < b$ (b — конечно или $+\infty$). Тогда если сходится $\int_a^{\to b} |f(x)|\,dx$, то сходится и $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$.*

□ Из теоремы 12.12 следует, что функция $|f|$ также интегрируема на любом отрезке $[a; b']$, $a < b' < b$. Так как $\int_a^{\to b} |f(x)|\,dx$ сходится, то по критерию Коши сходимости несобственного интеграла

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, \delta > 0: \quad \forall\, b', b'' \in \mathring{U}_\delta(b-0) \to \left| \int_{b'}^{b''} |f(x)|\,dx \right| < \varepsilon.$$

Так как $\left| \int_{b'}^{b''} f(x)\,dx \right| \leqslant \left| \int_{b'}^{b''} |f(x)|\,dx \right|$, то критерий Коши выполнен и для сходимости $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$. ■

Определение 13.3. Пусть функция f интегрируема по Риману на любом отрезке $[a; b']$, где $a < b' < b$ (b — конечно или $+\infty$). Тогда если $\int_a^{\to b} |f(x)|\,dx$ сходится, то $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ называется абсолютно сходящимся; если $\int_a^{\to b} |f(x)|\,dx$ расходится, а $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ сходится, то последний интеграл называется условно сходящимся.

Из теоремы 13.10 следует, что возможны три взаимно исключающих ситуации: абсолютная сходимость, условная сходимость и расходимость.

Отметим, что если речь идёт об обычной интегрируемости по Риману («в собственном смысле»), то там всё наоборот: из интегрируемости функции следует интегрируемость её модуля (теорема 12.12), а обратное утверждение неверно.

При исследовании абсолютной сходимости несобственного интеграла признаки сравнения сходимости применять можно, так как речь идёт об исследовании сходимости интеграла от знакопостоянной функции. При исследовании сходимости в знакопеременном случае нужны более тонкие признаки.

Теорема 13.11 (признак Дирихле). *Пусть функция f непрерывна на $[a;b)$, а функция g непрерывно дифференцируема на $[a;b)$, где b — конечно или $+\infty$, причём:*

1) $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ *— ограниченная функция на $[a;b)$ (т.е. f имеет на $[a;b)$ ограниченную первообразную);*
2) $g'(x) \leqslant 0$ *на $(a;b)$ и* $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = 0$ *(т.е. функция g, убывая, стремится к нулю при $x \to b-0$); это обычно записывают так: $g(x) \downarrow 0$ при $x \to b-0$.*

Тогда $\int_a^{\to b} f(x)g(x)\,dx$ сходится.

□ Применим интегрирование по частям на отрезке $[b';b'']$, где $b', b'' \in (a;b)$, и учтём, что $|F(x)| \leqslant M$ при всех $x \in [a;b]$:

$$\int_{b'}^{b''} f(x)g(x)\,dx = g(x)F(x)\Big|_{b'}^{b''} - \int_{b'}^{b''} F(x)g'(x)\,dx;$$

здесь $u = g(x)$; $dv = f(x)\,dx$; $v = F(x)$; $du = g'(x)\,dx$. Тогда

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant M(|g(b')|+|g(b'')|)+\left|\int_{b'}^{b''} |F(x)|\cdot|g'(x)|\,dx\right|.$$

Из условия следует, что $g(x) \geqslant 0$ на $[a;b)$; кроме того, $|g'(x)| = -g'(x)$. Не уменьшая общности, можно считать, что $b'' > b'$, поэтому

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant M\left(g(b') + g(b'') - \int_{b'}^{b''} g'(x)\,dx\right) =$$

$$= M(g(b') + g(b'') - g(b'') + g(b')) = 2Mg(b').$$

Так как $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = 0$, то $\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\,\delta > 0$: $\forall\,b' \in \mathring{U}_\delta(b-0) \to$ $\to |g(b')| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Поэтому $\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\,\delta > 0$: $\forall\,b', b'' \in \mathring{U}_\delta(b-$ $-0) \to \left|\int_{b'}^{b''} f(x)g(x)\,dx\right| < \varepsilon$, т.е. выполнен критерий Коши для сходимости $\int_a^{\to b} f(x)g(x)\,dx$. ■

Теорема 13.12 (признак Абеля). *Пусть функция f непрерывна на $[a;b)$, а функция g непрерывно дифференцируема на $[a;b)$, где b — конечно или $+\infty$, причём:*

1) *$\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ сходится;*

2) *$g(x)$ ограничена, а $g'(x)$ не меняет знак на $(a;b)$.*

Тогда $\int_a^{\to b} f(x)g(x)\,dx$ сходится.

□ Не уменьшая общности, $g'(x) \leqslant 0$ на $(a;b)$ (иначе заменим g на $-g$). По теореме о пределе монотонной функции существует конечный $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = C$. Рассмотрим функцию $g_1(x) = g(x)-$ $-C$; $g_1(x) \downarrow 0$ при $x \to b-0$. Так как $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ имеет предел при $x \to b-0$, то функция F ограничена в некоторой $\mathring{U}_\delta(b-0)$. На оставшемся отрезке от точки a до левого конца $\mathring{U}_\delta(b-0)$ функция F ограничена, потому что непрерывна; значит, F ограничена на $[a;b)$. Тогда $\int_a^{\to b} f(x)g_1(x)\,dx$ сходится по признаку Дирихле. Поэтому

$$\int_a^{\to b} f(x)g(x)\,dx = \int_a^{\to b} f(x)g_1(x)\,dx + C\int_a^{\to b} f(x)\,dx$$

— сходится по теореме 13.1. ■

Встречающиеся на практике несобственные интегралы от знакопеременных функций, как правило, содержат синус или косинус от некоторой функции, стремящейся к бесконечности. Очевидным следствием из признака Дирихле является

Теорема 13.13 (тригонометрический признак сходимости). *Пусть функция g непрерывно дифференцируема на $[a;+\infty)$, $g'(x) \leqslant 0$ при $x > a$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Тогда при любых*

$k, p \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, *интегралы*

$$\int_a^{+\infty} g(x)\sin(kx+p)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} g(x)\cos(kx+p)\,dx$$

сходятся.

$\square$ Утверждение следует из признака Дирихле, так как функции $\sin(kx+p)$ и $\cos(kx+p)$ имеют ограниченные первообразные $-\frac{1}{k}\cos(kx+p)$ и $\frac{1}{k}\sin(kx+p)$. $\blacksquare$

Пример 13.13. Интегралы

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(kx+p)}{x^\alpha}\,dx \quad \text{и} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos(kx+p)}{x^\alpha}\,dx$$

сходятся при $\alpha > 0$ $(k, p \in \mathbb{R},\ k \neq 0)$, так как $g(x) = \frac{1}{x^\alpha} \downarrow 0$ при $x \to +\infty$. Это можно вывести также непосредственно из признака Дирихле; для этого нужно применить стандартную процедуру — выписать первообразную от функций $\sin(kx+p)$ и $\cos(kx+p)$.

Теорема 13.14 (тригонометрический признак расходимости). *Пусть функция g интегрируема по Риману на любом отрезке $[a; b']$, где $b' > a$, и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = C > 0$ или $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Тогда при любых $k, p \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, интегралы*

$$\int_a^{+\infty} g(x)\sin(kx+p)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} g(x)\cos(kx+p)\,dx \quad \textit{расходятся.}$$

$\square$ Из условия следует, что $\exists\,\Delta_0 > a$: $\forall\,x > \Delta_0 \to g(x) \geqslant \frac{C}{2}$ (если $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, то C — любое положительное число). Применим критерий Коши сходимости несобственных интегралов, т.е. докажем, что

$$\exists\,\varepsilon > 0:\ \forall\,\Delta > a \to \exists\,b', b'' > \Delta:\ \left|\int_{b'}^{b''} g(x)\sin(kx+p)\,dx\right| \geqslant \varepsilon.$$

Не уменьшая общности, можно считать, что $k > 0$. Рассмотрим $b' = \frac{2\pi n - p}{k}$, $b'' = \frac{2\pi n + \pi - p}{k}$, где натуральное число n настолько велико, что $b'' > b' > \max(\Delta, \Delta_0)$. Так как b' и b'' —

два соседних нуля функции $\sin(kx+p)$, и $\sin(kx+p) > 0$ при $x \in (b'; b'')$, то

$$\int_{b'}^{b''} g(x)\sin(kx+p)\,dx \geqslant \frac{C}{2}\int_{b'}^{b''} \sin(kx+p)\,dx =$$

$$= \frac{C}{2k}\int_{kb'+p}^{kb''+p} \sin t\,dt = \frac{C}{2k}\int_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} \sin t\,dt = \frac{C}{2k}\cdot 2 = \frac{C}{k}$$

(проведена замена $kx+p=t$). Итак, $\exists\,\varepsilon = \frac{C}{k} > 0$: $\forall\,\Delta > a \to \exists\, b', b'' > \Delta$: $\int_{b'}^{b''} g(x)\sin(kx+p)\,dx \geqslant \varepsilon$. Интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)\sin(kx+p)\,dx$ расходится по критерию Коши.

В случае косинуса доказательство аналогично, нужно взять $b' = \dfrac{2\pi n - \frac{\pi}{2} - p}{k}$, $b'' = \dfrac{2\pi n + \frac{\pi}{2} - p}{k}$ (два соседних нуля функции $\cos(kx+p)$). ■

Пример 13.14. Интегралы

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(kx+p)}{x^\alpha}\,dx \quad \text{и} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos(kx+p)}{x^\alpha}\,dx$$

расходятся при $\alpha \leqslant 0$ ($k, p \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$), так как $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \alpha < 0, \\ 1, & \text{если } \alpha = 0. \end{cases}$ Остаётся применить теорему 13.14.

З а м е ч а н и е. Часто ошибочно считают, что для доказательства расходимости интегралов, фигурирующих в теореме 13.14, достаточно заметить, что функции под знаком интеграла не стремятся к нулю при $x \to +\infty$. Как уже отмечалось, это неверно (пример 13.11).

Теорема 13.15 (тригонометрический признак абсолютной сходимости). *Пусть функция g непрерывно дифференцируема на $[a; +\infty)$, $g'(x) \leqslant 0$ при $x > a$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Тогда при любых $k, p \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$*

$$\int_1^{+\infty} |g(x)\sin(kx+p)|\,dx \overset{\text{cx}}{\approx} \int_a^{+\infty} |g(x)\cos(kx+p)|\,dx \overset{\text{cx}}{\approx} \int_a^{+\infty} |g(x)|\,dx$$

(т.е. интегралы, фигурирующие в теореме 13.13, абсолютно сходятся одновременно с $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$).

□ Из условия следует, что $g(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant a$. Так как

$$|g(x)\sin(kx+p)| \leqslant g(x); \quad |g(x)\cos(kx+p)| \leqslant g(x),$$

то из сходимости $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ и признака сравнения следует абсолютная сходимость нужных нам интегралов.

Далее, пусть $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ расходится. Тогда при всех $x \geqslant a$

$$|g(x)\sin(kx+p)| \geqslant g(x)\sin^2(kx+p) =$$

$$= \frac{g(x)}{2} - \frac{g(x)\cos(2kx+2p)}{2} \geqslant 0. \quad (13.5)$$

Так как $g(x) \downarrow 0$ при $x \to +\infty$, то $\int_a^{+\infty} g(x)\cos(2kx+2p)\,dx$ сходится по тригонометрическому признаку сходимости. Но $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ расходится, поэтому из (13.5) и признака сравнения следует расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} |g(x)\sin(kx+p)|\,dx$.

В случае косинуса доказательство аналогично; в неравенстве, аналогичном (13.5), знак минус заменится на плюс. ■

Пример 13.15. Если $\alpha > 0$, то $\frac{1}{x^\alpha} \downarrow 0$ при $x \to +\infty$, поэтому по теореме 13.15

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(kx+p)|}{x^\alpha}\,dx \overset{\text{сх}}{\approx} \int_1^{+\infty} \frac{|\cos(kx+p)|}{x^\alpha}\,dx \overset{\text{сх}}{\approx} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

(при любых $k, p \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$). Значит интегралы из примера 13.13 абсолютно сходятся при $\alpha > 1$ и абсолютно расходятся (т.е. сходятся условно, поскольку они сходятся) при $0 < \alpha \leqslant 1$.

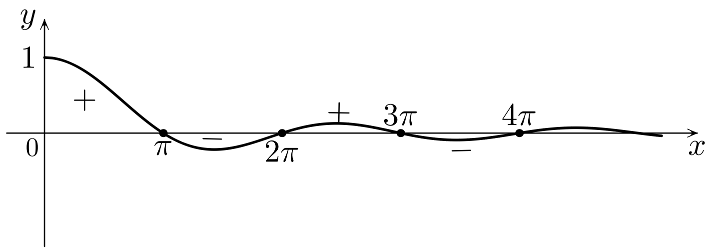

Рис. 13.3

Мы получили, наконец, примеры условно сходящихся интегралов. Простейшими из них являются $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ и

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$. График функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ изображён на рис. 13.3. Геометрически условная сходимость означает, что площадь соответствующей неограниченной фигуры бесконечна, но благодаря наложению положительных и отрицательных значений функции «алгебраическая сумма» положительных и отрицательных участков этой площади конечна. Абсолютная сходимость интеграла, как и сходимость интеграла от знакопостоянной функции, означает конечность площади соответствующей неограниченной фигуры.

Если под знаком синуса или косинуса у знакопостоянной функции стоит не линейное, а более сложное выражение, то нужно попробовать (если удастся) сделать замену переменной так, чтобы это выражение стало линейным.

Пример 13.16. Исследовать сходимость и абсолютную сходимость интеграла

$$I(\alpha) = \int_3^{+\infty} \frac{\cos(2x^2+1)}{(x\ln x - \operatorname{arctg} x)^\alpha}\,dx.$$

□ Так как при $x \geqslant 3$ выражение в знаменателе $x\ln x - - \operatorname{arctg} x \geqslant 3 - \frac{\pi}{2} > 0$, то единственной особенностью является $+\infty$. Сделаем замену $x^2 = t$. Тогда $x = \sqrt{t}$, $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$, и интеграл преобразуется к виду $\frac{1}{2}\int_9^{+\infty} g(t)\cos(2t+1)\,dt$, где $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}(\sqrt{t}\ln\sqrt{t} - \operatorname{arctg}\sqrt{t})^\alpha}$. При исследовании сходимости и абсолютной сходимости таких интегралов удобно придерживаться следующей схемы действий.

1) Выясним поведение функции g при $t \to +\infty$. Для этого заменим её на эквивалентную функцию как можно более простого вида:

$$g(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}\left(\sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}\ln t\right)^\alpha} = \frac{A}{t^{\frac{1+\alpha}{2}}(\ln t)^\alpha} \to \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha > -1; \\ +\infty, & \text{если } \alpha \leqslant -1. \end{cases}$$

Здесь $A = A(\alpha) > 0$; если $\alpha \neq -1$, то, в силу утверждения примера 5.6, логарифмический множитель не влияет на стремление знаменателя к 0 или $+\infty$; если $\alpha = -1$, то $g(t) = C\ln t \to \to +\infty$.

2) При тех значениях α, при которых $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = C > 0$ или $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$ (конечно, может быть также $C < 0$ или $-\infty$), интеграл расходится по тригонометрическому признаку расходимости. В данном случае интеграл расходится при $\alpha \leqslant -1$.

3) При тех значениях α, для которых $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$, т.е. при $\alpha > -1$, нужно пытаться применить тригонометрический признак сходимости. Но для этого следует доказать, что функция g убывает на $[a; +\infty)$ (или хотя бы на некотором луче $(\Delta; +\infty)$, где $\Delta > a$; a — нижний предел интегрирования). Часто это самая сложная часть исследования, так как приходится вычислять громоздкие производные. Дело в том, что нельзя ограничиться вычислением производной эквивалентной функции более простого вида. При замене на эквивалентную функцию монотонность может нарушиться. Итак, нужно доказать, что $g(t) \downarrow$. Можно несколько упростить задачу; так как $g(t) > 0$, то достаточно доказать, что $\dfrac{1}{g(t)} = \sqrt{t}(\sqrt{t}\ln\sqrt{t} - \operatorname{arctg}\sqrt{t})^{\alpha} \uparrow$. Так как замена $x = \sqrt{t}$ не влияет на монотонность ($\sqrt{t}$ — строго возрастающая функция), то достаточно доказать, что $\varphi(x) = x(x\ln x - \operatorname{arctg} x)^{\alpha} \uparrow$ при $\alpha > -1$. Дальше упрощать некуда. Имеем

$$\varphi'(x) = (x\ln x - \operatorname{arctg} x)^{\alpha} + x\cdot\alpha(x\ln x - \operatorname{arctg} x)^{\alpha-1}\cdot\left(1 + \ln x - \frac{1}{1+x^2}\right) =$$

$$= (x\ln x - \operatorname{arctg} x)^{\alpha-1} \times \left[x\ln x - \operatorname{arctg} x + x\alpha\left(1 + \ln x - \frac{1}{1+x^2}\right)\right] =$$

$$= (x\ln x - \operatorname{arctg} x)^{\alpha-1}\cdot\left[(\alpha+1)x\ln x + x\alpha\cdot\frac{x^2}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x\right] =$$

$$= (x\ln x - \operatorname{arctg} x)^{\alpha-1}\cdot x\ln x\left[(\alpha+1) + \frac{\alpha x^2}{(1+x^2)\ln x} - \frac{\operatorname{arctg} x}{x\ln x}\right].$$

В последнем выражении при $x \geqslant 3$ множители, стоящие перед квадратными скобками, положительны, поэтому всё определяется знаком выражения в квадратных скобках. Но предел выражения в квадратных скобках при $x \to +\infty$ равен $\alpha+1 > 0$; поэтому это выражение, а вместе с ним и $\varphi'(x)$, положительны при $x > x_0$. Значит, $\varphi(x) \uparrow$ при $x > x_0$, а $g(t) \downarrow$ при $t > t_0 = x_0^2$. Итак, $g(t) \downarrow 0$, и интеграл $I(\alpha)$ сходится при $\alpha > -1$ по тригонометрическому признаку сходимости.

4) При тех значениях α, для которых установлена сходимость, нужно провести исследование абсолютной сходимости. Если сходимость установлена по тригонометрическому признаку сходимости, то остаётся исследовать сходимость $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ и применить тригонометрический признак абсолютной сходимости. Для исследования сходимости интеграла от знакопостоянной функции $g(t)$ эту функцию можно заменить на эквивалентную при $t \to +\infty$; по признаку сравнения сходимости

$$\int_9^{+\infty} g(t)\,dt \overset{\text{сх}}{\approx} \int_9^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{1+\alpha}{2}}(\ln t)^{\alpha}}.$$

В силу утверждения примера 13.9 этот интеграл сходится при $\dfrac{1+\alpha}{2} > 1$, т.е. при $\alpha > 1$; расходится при $\dfrac{1+\alpha}{2} < 1$, т.е. при $\alpha < 1$. Если $\alpha = 1$, то интеграл расходится. Если $\alpha > -1$, то $g(t) \downarrow 0$ при $t \to +\infty$, поэтому по тригонометрическому признаку абсолютной сходимости

$$\int_9^{+\infty} |g(t)\cos(2t+1)|\,dt \overset{\text{сх}}{\approx} \int_9^{+\infty} g(t)\,dt;$$

этот интеграл сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leqslant 1$. Итак, интеграл $I(\alpha)$ при $\alpha > 1$ абсолютно сходится, при $\alpha \leqslant 1$ абсолютно расходится, т.е. сходится условно.

Ответ: интеграл $I(\alpha)$ абсолютно сходится при $\alpha > 1$, условно сходится при $-1 < \alpha \leqslant 1$, расходится при $\alpha \leqslant -1$. ■

Теорема 13.16. *Пусть функции f и g интегрируемы по Риману на любом отрезке $[a; b']$, где $a < b' < b$ (b — конечно или $+\infty$). Тогда:*

1) *если $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ и $\int_a^{\to b} g(x)\,dx$ сходятся абсолютно, то и $\int_a^{\to b}(f(x)+g(x))\,dx$ сходится абсолютно;*

2) *если* $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ *сходится абсолютно, а* $\int_a^{\to b} g(x)\,dx$ *сходится условно, то* $\int_a^{\to b}(f(x)+g(x))\,dx$ *сходится условно.*

$\square$ Первая часть следует из неравенства $|f+g| \leqslant |f|+|g|$ и признака сравнения сходимости. Во второй части теоремы интеграл от суммы двух функций сходится, так как сходятся оба интеграла в отдельности. Пусть интеграл от суммы сходится абсолютно. Так как $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ сходится абсолютно, то абсолютно сходится и $\int_a^{\to b} g(x)\,dx$, а это не так. $\blacksquare$

З а м е ч а н и е. Если $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ и $\int_a^{\to b} g(x)\,dx$ расходятся, то $\int_a^{\to b}(f(x)+g(x))\,dx$ может сходиться: $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}+$ $+\int_1^{+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^{+\infty}0\cdot dx$. Если $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ и $\int_a^{\to b} g(x)\,dx$ сходятся условно, то $\int_a^{\to b}(f(x)+g(x))\,dx$ может сходиться абсолютно:

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx+\int_1^{+\infty}\left(-\frac{\sin x}{x}\right)dx=\int_1^{+\infty}0\cdot dx.$$

Пример 13.17. Исследовать сходимость интеграла

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}\,dx.$$

$\square$ Легко видеть, что $\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} \sim \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ при $x \to +\infty$, а $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ сходится условно (примеры 13.13 и 13.15). Но было бы ошибкой на основании этого заключить, что $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}\,dx$ сходится — подынтегральная функция меняет знак в любой окрестности $+\infty$.

Так как $u=\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \to 0$ при $x\to+\infty$, то подставим $u=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ в разложение по формуле Тейлора $(1+u)^{-1}=1-u+u^2+o(u^2)$, $u\to 0$. Получим

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}=\frac{\sin x}{\sqrt{x}\left(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)}=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)^{-1}=$$

$$=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(1-\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+\frac{\sin^2 x}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=$$

$$= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{x} + \frac{\sin^3 x}{x^{3/2}} + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) =$$

$$= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x} + \frac{\cos 2x}{2x} + \frac{\sin^3 x}{x^{3/2}} + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \quad x \to +\infty.$$

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx$ и $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}\, dx$ сходятся (пример 13.13). Сумму двух последних слагаемых в правой части разложения можно оценить сверху через $\frac{C}{x^{3/2}}$ в окрестности $+\infty$, поэтому эти два слагаемых дают по признаку сравнения абсолютно сходящийся интеграл. Наконец, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится. Сумма одного расходящегося и нескольких сходящихся интегралов даёт расходящийся интеграл, поэтому $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x}\, dx$ расходится. ■

Этот пример показывает, что знакопеременную функцию в несобственном интеграле нельзя менять на эквивалентную; сходимость интеграла при этом может нарушиться. В примере 13.17 главная часть разложения $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ даёт условно сходящийся интеграл, а член более высокого порядка $\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}$ — расходящийся интеграл; в случае абсолютной сходимости главной части такое было бы невозможно. В итоге за счёт члена разложения более высокого порядка интеграл расходится. Кстати, признак Дирихле в примере 13.17 применять нельзя; $(\sqrt{x} + \sin x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \cos x$ меняет знак.

Упражнения к главе XIII

13.1. Верно ли, что если функция f интегрируема по Риману на любом отрезке $[a; b']$, где $b' > a$, и $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \to +\infty$, то $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ сходится?

13.2. Вычислить несобственные интегралы:

а) $\int_0^{\to 1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$; б) $\int_{0\leftarrow}^{1} \ln x\, dx$;

в) $\int_{0\leftarrow}^{1/2} \frac{dx}{x \ln^2 x}$; г) $\int_{0\leftarrow}^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{\sin x}}$;

д) $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x}\,dx$; е) $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^2}$;

ж) $\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^4+1}$; з) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,dx$.

13.3. Исследовать сходимость интегралов:

а) $\int_{0\leftarrow}^{\pi} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$; б) $\int_{0\leftarrow}^{1} \frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{\sin x}-1}$;

в) $\int_{0\leftarrow}^{1/2} \frac{dx}{x\ln x}$; г) $\int_0^{\to 1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$;

д) $\int_0^{+\infty} \sin 5x\,dx$; е) $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x\cdot\ln\ln x}$;

ж) $\int_0^{+\infty} x\cdot 2^{-x}\,dx$; з) $\int_2^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^3-1}$.

13.4. Исследовать сходимость интегралов:

а) $\int_{0\leftarrow}^{1} \frac{1-\cos x}{x^\alpha}\,dx$; б) $\int_{0\leftarrow}^{1} \frac{e^{\alpha x}-\sqrt{1+x}}{\operatorname{ch}x-\cos x}\,dx$;

в) $\int_2^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}\,dx}{(x-1)^\alpha\ln x}$.

13.5. Исследовать сходимость интегралов с двумя особенностями:

а) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(\ln x)^\beta}$; б) $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-x}\,dx$;

в) $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}x}{x^\alpha}\,dx$; г) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|^\alpha}\,dx$.

13.6. Исследовать сходимость интегралов с особенностью, зависящей от параметра:

а) $\int_0^1 \frac{dx}{\ln|x-\alpha|}$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{(x+\alpha)^2}\,dx$.

13.7. Применяя признак Абеля и примеры 13.13 и 13.14, доказать, что

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\operatorname{arctg}x\,dx$$

сходится при $\alpha > 0$ и расходится при $\alpha \leqslant 0$.

13.8. Исследовать сходимость и абсолютную сходимость интегралов:

а) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(3x-1)}{(\sqrt{x}-\ln x)^\alpha}\,dx$; б) $\int_2^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{x^\alpha\ln x}\,dx$;

в) $\int_{0\leftarrow}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x}\sin\frac{1}{x}\,dx$.

13.9. Исследовать сходимость и абсолютную сходимость интеграла $\int_1^{+\infty}\sin(2x^3-1)\,dx$ (указание: домножить и разделить подынтегральную функции на $(2x^3-1)'$; для доказательства сходимости применить признак Дирихле).

13.10. Пусть функция f непрерывна на $[a;+\infty)$ и имеет период $T>0$ (т.е. при всех $x\geqslant a$ имеет место равенство $f(x+T)=f(x)$), а функция g непрерывно дифференцируема на $[a;+\infty)$, $g'(x)\leqslant 0$ при $x>a$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$. Доказать, что:

1) если $\int_a^{a+T} f(x)\,dx = 0$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ сходится;

2) если $\int_a^{a+T} f(x)\,dx \neq 0$, то $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx \overset{\text{сх}}{\approx} \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

13.11. Вывести из утверждения упражнения 13.10 тригонометрический признак сходимости несобственных интегралов ($f(x)=\sin(kx+p)$ или $f(x)=\cos(kx+p)$) и тригонометрический признак абсолютной сходимости ($f(x)=|\sin(kx+p)|$ или $f(x)=|\cos(kx+p)|$).

13.12. Исследовать сходимость и абсолютную сходимость интегралов:

а) $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin(\sin x)}{x^\alpha}\,dx$; б) $\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos(\sin x)}{x^\alpha}\,dx$;

в) $\int_\pi^{+\infty} \dfrac{|\cos x|-\alpha}{\pi+x}\,dx$; г) $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin^3 x}{x^\alpha}\,dx$.

13.13. Применяя разложения по формуле Тейлора, исследовать сходимость и абсолютную сходимость интегралов:

а) $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}+\cos x}\,dx$; б) $\int_1^{+\infty} \operatorname{sh}\left(\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)dx$;

в) $\int_1^{+\infty} \operatorname{sh}\left(\dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$.

13.14. Доказать, что если функция f убывает на $[a;+\infty)$ и $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то $f(x)=o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ при $x\to+\infty$.

13.15. Привести пример неотрицательной непрерывной функции f на $[0;+\infty)$, неограниченной на $[0;+\infty)$ и такой, что $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится (функция из примера 13.11 удовлетворяет всем этим условиям, кроме непрерывности на $[0;+\infty)$).

13.16. Пусть функции f и g удовлетворяют всем условиям признака Дирихле при $b=+\infty$, кроме сохранения знака g'. Следует ли отсюда сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$?

13.17. Пусть функции f и g удовлетворяют всем условиям признака Абеля при $b = +\infty$, кроме сохранения знака g'. Следует ли отсюда сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$?

13.18. Доказать, что

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx < 0, \quad \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx > 0.$$

13.19. Известно, что $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится условно, а $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится абсолютно (оба интеграла имеют единственную особенность $+\infty$). Может ли $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$:

а) сходиться абсолютно; б) сходиться условно;

в) расходиться?

13.20. Известно, что $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходятся условно (оба интеграла имеют единственную особенность $+\infty$). Может ли $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$:

а) сходиться абсолютно; б) сходиться условно;

в) расходиться?

13.21. Известно, что $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходятся абсолютно (оба интеграла имеют единственную особенность $+\infty$). Может ли $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ расходиться?

ГЛАВА XIV. **КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ**

§ 1. Криволинейный интеграл первого рода

Определение 14.1. Пусть $\Gamma = \{\vec{r}\colon \ \vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T,\ t \in [a; b],\ a < b\}$ — гладкая кривая; G — область в $\mathbb{R}^3$, содержащая кривую Γ; f — непрерывная функция от x, y, z в области G. Тогда криволинейным интегралом первого рода $\int_\Gamma f(x, y, z)\, ds$ называется определённый интеграл Римана

$$\int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot |\vec{r}\,'(t)|\, dt.$$

З а м е ч а н и е 1. Так как в каждой точке кривой Γ функция f непрерывна в смысле определения 9.22, то по теореме 9.5 сложная функция $f(x(t), y(t), z(t))$ непрерывна в каждой точке отрезка $[a; b]$ (в концах отрезка — односторонняя непрерывность с очевидными изменениями в доказательстве теоремы 9.5 в случае $k = 1$). Так как функция $|\vec{r}\,'(t)|$ также непрерывна на $[a; b]$, то функция под знаком интеграла непрерывна на $[a; b]$.

З а м е ч а н и е 2. Определения 14.1 и всё дальнейшее изложение в этой главе сохраняются для кривых в $\mathbb{R}^2$; упрощения в этом случае очевидны.

Корректность определения 14.1. Значение $\int_\Gamma f(x, y, z)\, ds$ не изменится при ДЗП на кривой Γ (определение 6.12).

☐ Напомним, что если одна и та же кривая параметризуется двумя способами: $x = x_1(t)$, $y = y_1(t)$, $z = z_1(t)$, $t \in I_1$ и $x = x_2(u)$, $y = y_2(u)$, $z = z_2(u)$, $u \in I_2$, причём непрерывно дифференцируемая функция $u = u(t)$, для которой $u'(t) \neq 0$, отображает промежуток I_1 на промежуток I_2, то замена параметра называется допустимой. При этом отображение I_1 на I_2 будет взаимно однозначным, $\vec{r}\,'(t) = \vec{r}\,'(u) \cdot u'(t)$, и по теореме Больцано–Коши либо $u'(t) > 0$ для всех $t \in I_1$, либо $u'(t) < 0$ (см. доказательство леммы 6.5). Тогда при первой параметризации ($t \in [\alpha; \beta]$):

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,ds = \int_\alpha^\beta f(x_1(t), y_1(t), z_1(t)) \cdot |\vec{r}_1'(t)|\,dt; \qquad (14.1)$$

при второй параметризации ($u \in [a; b]$):

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(x_2(u), y_2(u), z_2(u)) \cdot |\vec{r}_2'(u)|\,du. \qquad (14.2)$$

Напомним, что $a < b$, $\alpha < \beta$. Сделаем в интеграле в правой части (14.2) замену $u = u(t)$. Этот интеграл преобразуется к виду

$$\pm \int_\alpha^\beta f(x_2(u(t)), y_2(u(t)), z_2(u(t))) \cdot |\vec{r}_2'(u(t))| \cdot u'(t)\,dt.$$

Знак плюс соответствует случаю $u'(t) > 0$, т.е. возрастанию функции u; при этом $u(\alpha) = a$, $u(\beta) = b$. Знак минус соответствует случаю $u'(t) < 0$, т.е. убыванию функции u; при этом $u(\alpha) = b$, $u(\beta) = a$. Так как $\pm u'(t) = |u'(t)|$, то интеграл преобразуется к виду

$$\int_\alpha^\beta f(x_1(t), y_1(t), z_1(t)) \cdot |\vec{r}_2'(u(t)) \cdot u'(t)|\,dt,$$

что совпадает с интегралом в правой части (14.1). ■

Из свойств определённого интеграла Римана очевидно вытекают следующие свойства криволинейного интеграла первого рода.

I. Линейность ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; Γ — гладкая кривая):

$$\int_\Gamma (\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z))\,ds =$$
$$= \alpha \int_\Gamma f(x,y,z)\,ds + \beta \int_\Gamma g(x,y,z)\,ds.$$

II. Аддитивность относительно кривой интегрирования: если

$$\Gamma = \{\vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [a; b]\}, \quad \Gamma_1 = \{\vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [a; c]\},$$
$$\Gamma_2 = \{\vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [c; b]\}, \quad a < c < b,$$

Γ — гладкая кривая, то

$$\int_\Gamma f(z,y,z)\,ds = \int_{\Gamma_1} f(x,y,z)\,ds + \int_{\Gamma_2} f(x,y,z)\,ds.$$

Определение 14.1 приобретает совсем простой вид, если s — натуральный параметр на кривой. Тогда $|\vec{r}\,'(s)| = 1$, и

$$\int_\Gamma f(z,y,z)\,ds = \int_0^{l_\Gamma} f(x(s),y(s),z(s))\,ds \qquad (14.3)$$

(слева — криволинейный интеграл первого рода, справа — определённый интеграл Римана по отрезку $[0;l_\Gamma]$ от функции переменной s; здесь l_Γ — длина кривой Γ). Кстати, $\int_\Gamma 1\cdot ds = \int_a^b |\vec{r}\,'(t)|\,dt$, т.е. криволинейный интеграл первого рода от функции $f(x,y,z)\equiv 1$ равен длине кривой.

Пример 14.1. Вычислить $\int_\Gamma \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,ds$, где Γ — часть винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = t$, $0 \leqslant t \leqslant a$.

$\square$ Так как $\vec{r}\,'(t) = (-a\sin t, a\cos t, 1)^T$, то $|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{1+a^2}$, и искомый интеграл равен

$$\int_0^a \sqrt{t^2+a^2}\cdot\sqrt{1+a^2}\,dt =$$

$$= \sqrt{1+a^2}\left(\frac{t}{2}\sqrt{t^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(t+\sqrt{t^2+a^2})\right)\Bigg|_0^a$$

(здесь использован результат примера 8.9). После преобразований получим ответ:

$$\int_\Gamma \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,ds = a^2\sqrt{1+a^2}\left(\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \qquad \blacksquare$$

Определение 14.2. Непрерывная кривая $\Gamma = \{\vec{r}\colon \vec{r} = \vec{r}(t),\ t\in[a;b]\}$ называется кусочно-гладкой, если существует такое разбиение отрезка $[a;b]$: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$, что на каждом отрезке $[t_{i-1};t_i]$, $i = 1, \ldots, N$, соответствующая кривая Γ_i является гладкой. Кривые Γ_i, $i = 1, \ldots, N$, называются участками гладкости кривой Γ.

Определение 14.3. Если Γ — кусочно-гладкая кривая с участками гладкости Γ_i, $i = 1, \ldots, N$, а функция f непрерывна в области $G \subset \mathbb{R}^3$, содержащей кривую Γ, то криволинейным интегралом первого рода $\int_\Gamma f(x,y,z)\,ds$ называется $\sum\limits_{i=1}^{N} \int_{\Gamma_i} f(x,y,z)\,ds$.

З а м е ч а н и е. На каждом из участков гладкости кусочно-гладкой кривой Γ можно произвести ДЗП (свою на каждом участке). Значение $\int_\Gamma f(x,y,z)\,ds$ при этом не изменится.

Легко видеть, что свойства линейности криволинейного интеграла первого рода и аддитивности относительно кривой интегрирования сохраняются, если фигурирующая в формулировке этих свойств кривая является кусочно-гладкой.

§ 2. Ориентация гладкой кривой

Если $\Gamma = \{\vec{r}\colon\ \vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [a;b]\}$ — гладкая кривая, то в каждой точке кривой, соответствующей значению параметра $t_0 \in [a;b]$, можно определить единичный вектор касательной (определение 6.10 и теорема 6.1) $\vec{\tau} = \dfrac{\vec{r}\,'(t_0)}{|\vec{r}\,'(t_0)|}$, направленный в сторону возрастания t; в точках $t_0 = a$ и $t_0 = b$ имеются в виду соответствующие односторонние производные (замечание после определения 6.11). Сейчас имеет смысл обозначить этот вектор через $\vec{\tau}_1$, потому что $\vec{\tau}_2 = -\vec{\tau}_1$ — также единичный вектор касательной, но направленный в противоположную сторону (в сторону убывания t) (см. рис. 14.1).

Рис. 14.1

Так как $|\vec{r}\,'(t)| \neq 0$, то $\vec{\tau}_1(t)$ и $\vec{\tau}_2(t)$ — две непрерывные вектор-функции на отрезке $[a;b]$. Каждая из них задаёт некоторое направление обхода кривой. Если направление обхода связано с функцией $\vec{\tau}_1$, то $t = a$ соответствует «началу», а $t = b$ — «концу» кривой; если с функцией $\vec{\tau}_2$, то наоборот. Направление $\vec{\tau}_1$ совпадает с направлением $\vec{r}\,'(t)$.

Определение 14.4. Гладкая кривая $\Gamma = \{\vec{r}\colon\ \vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in \in [a;b]\}$ называется ориентированной, если на $[a;b]$ задан единичный вектор касательной как непрерывная функция от t (сделан выбор знака в равенстве $\vec{\tau} = \pm\dfrac{r'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}$, иначе говоря, задано направление обхода, т.е. заданы начало и конец кривой). Гладкая кривая имеет две различные ориентации, соответствующие двум различным направлениям обхода.

Так как в определении ориентированной кривой фигурирует параметризация, то существует ошибочное мнение, согласно которому при ДЗП с положительной производной $u'(t)$ ориентация кривой сохраняется, а при $u'(t) < 0$ — меняется. Это совершенно неверно! Ориентация кривой — геометрическое свойство, отражающее наличие двух различных направлений её обхода; направление обхода не зависит ни от какой параметризации. При ДЗП $u = u(t)$ имеет место равенство $\vec{r}\,'_1(t) = \vec{r}\,'_2(u)\cdot u'(t)$, поэтому при ДЗП с положительной производной $\vec{\tau}_1(t) = \vec{\tau}_1(u)$, $\vec{\tau}_2(t) = \vec{\tau}_2(u)$ (сохраняется соответствие или несоответствие ориентации направлению возрастания параметра). При ДЗП с отрицательной производной $\vec{\tau}_1(t) = = \vec{\tau}_2(u)$, $\vec{\tau}_2(t) = \vec{\tau}_1(u)$ (при одной параметризации ориентация кривой соответствует направлению возрастания параметра, при другой — нет).

Пример 14.2. Рассмотрим две параметризации верхней полуокружности $x^2 + y^2 = 1$ (см. также пример 6.4):

1) $x_1 = \cos t$, $y_1 = \sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$;

2) $x_2 = u$, $y_2 = \sqrt{1-u^2}$, $-1 \leqslant u \leqslant 1$.

Для того чтобы замена параметра $u = \cos t$ была допустимой, нужно, чтобы $u'(t) = -\sin t \neq 0$, т.е. надо отступить от концов полуокружности (например, $\delta \leqslant t \leqslant \pi - \delta$, $-\cos\delta \leqslant u \leqslant \cos\delta$, где $\delta > 0$). При этом $u'(t) < 0$, т.е. при этих двух параметризациях возрастание параметра соответствует различным направлениям обхода кривой. В самом деле, возрастание t соответствует обходу окружности против часовой стрелки, т.е. налево вдоль оси x, а возрастание u — направо вдоль оси x (см. рис. 14.2).

Для нижней полуокружности $x^2 + y^2 = 1$ аналогичные параметризации:

1) $x_1 = \cos t$, $y_1 = \sin t$, $\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$;

2) $x_2 = u$, $y_2 = -\sqrt{1-u^2}$, $-1 \leqslant u \leqslant 1$.

При замене параметра $u(t) = \cos t$ опять-таки нужно отступить от концов полуокружности. При этом $u'(t) = -\sin t > 0$, и возрастание параметра при этих двух параметризациях соответствует одному и тому же направлению обхода кривой (возрастание t соответствует обходу окружности против часовой стрелки, возрастание u — направо вдоль оси x; для нижней полуокружности эти направления совпадают (см. рис. 14.3)).

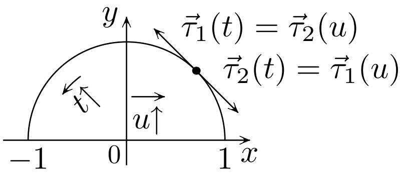

Рис. 14.2

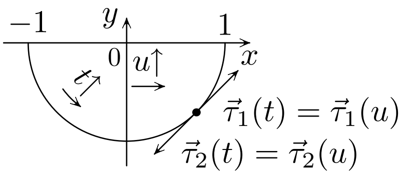

Рис. 14.3

Определение 14.5. Кусочно-гладкая кривая Γ называется ориентированной, если все её участки гладкости Γ_i, $i = 1, \ldots, N$, ориентированы так, что при всех $i = 1, 2, \ldots, N-1$ конец Γ_i — это начало Γ_{i+1} (или при всех $i = 1, 2, \ldots, N-1$ начало Γ_i — это конец Γ_{i+1}).

Если кусочно-гладкая кривая — простая или простая замкнутая (определения 6.9 и 6.13), то её можно ориентировать двумя способами (рис. 14.4 и рис. 14.5); если есть точки самопересечения — таких способов будет больше (на рис. 14.6 — 4 способа).

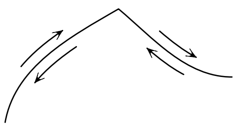

Рис. 14.4

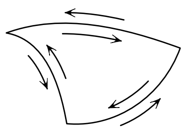

Рис. 14.5

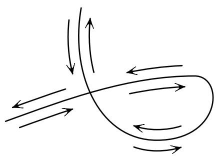

Рис. 14.6

§ 3. Криволинейный интеграл второго рода

Определение 14.6. Пусть $\Gamma = \{\vec{r}\colon\ \vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [a; b],\ a < < b\}$ — ориентированная гладкая кривая; $\vec{\tau}$ — единичный вектор касательной к Γ, соответствующий выбранной ориентации. Пусть, далее, G — область в $\mathbb{R}^3$, содержащая кривую Γ; $\vec{a} = = (P, Q, R)^T$ — непрерывная вектор-функция от переменных x, y, z в области G. Тогда криволинейным интегралом второго рода $\int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r})$ называется криволинейный интеграл первого рода $\int_\Gamma (\vec{a}, \vec{\tau})\, ds$.

Символ для криволинейного интеграла второго рода $\int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r})$ может быть записан в координатном виде:

$$\int_\Gamma (P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz).$$

Интеграл первого рода определялся без учёта ориентации кривой; при смене ориентации вектор $\vec{\tau}$ заменится на $-\vec{\tau}$, поэтому при смене ориентации гладкой кривой значение интеграла второго рода изменится на противоположное.

Выведем формулу для вычисления криволинейного интеграла второго рода через параметризацию кривой:

$$\int_\Gamma P\, dx + Q\, dy + R\, dz = \int_\Gamma (\vec{a}, \vec{\tau})\, ds = \int_\Gamma \left(\vec{a}, \pm \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}\right) ds =$$

$$= \pm \int_a^b \frac{1}{|\vec{r}\,'(t)|}\, (\vec{a}, \vec{r}\,'(t)) \cdot |\vec{r}\,'(t)|\, dt = \pm \int_a^b (\vec{a}, \vec{r}\,'(t))\, dt =$$

$$= \pm \int_a^b \Big(P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) +$$

$$+ R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t) \Big)\, dt$$

(т.е. в выражение $\int_\Gamma (P\, dx + Q\, dy + R\, dz)$ формально подставляем $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$; знак плюс берём, если возрастание t соответствует направлению обхода кривой, минус — если противоположно).

При ДЗП значение интеграла первого рода не изменится; вектор $\vec{\tau}$ для ориентированной кривой фиксирован. Поэтому значение интеграла второго рода не зависит от ДЗП $u = u(t)$ (знак $u'(t)$ роли не играет).

Пример 14.3. Вычислить $\int_\Gamma (x\,dy - y\,dx)$, где Γ — дуга окружности $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \left[\frac{\pi}{3}\,;\frac{2\pi}{3}\right]$, пробегаемая по часовой стрелке.

☐ Так как направление обхода по часовой стрелке противоположно направлению возрастания t, то

$$\int_\Gamma (x\,dy - y\,dx) = -\int_{\pi/3}^{2\pi/3} (\cos t \cdot \cos t + \sin t \cdot \sin t)\,dt = -\frac{\pi}{3}\,.$$

Можно вычислить этот интеграл и иначе, приняв за параметр x, т.е. $x = x$, $y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in \left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$. Направление обхода по часовой стрелке для верхней полуокружности соответствует возрастанию x, поэтому

$$\int_\Gamma (x\,dy - y\,dx) = +\int_{-1/2}^{1/2} \left(-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}\right) dx =$$

$$= -\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arcsin x \Big|_{-1/2}^{1/2} = -\frac{\pi}{3}\,. \quad \blacksquare$$

Аналогично интегралу первого рода, для криволинейного интеграла второго рода имеют место линейность и аддитивность относительно кривой интегрирования (если ориентация Γ_1 и Γ_2 порождается ориентацией Γ).

Определение 14.7. Если Γ — ориентированная кусочно-гладкая кривая с участками гладкости Γ_i, $i = 1, \ \ldots, N$, ориентация которых порождается ориентацией Γ, а вектор-функция $\vec{a}$ непрерывна в области $G \subset \mathbb{R}^3$, содержащей кривую Γ, то криволинейным интегралом второго рода $\int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r})$ называется $\sum\limits_{i=1}^{N} \int_{\Gamma_i} (\vec{a}, d\vec{r})$.

Свойства линейности криволинейного интеграла второго рода и аддитивности относительно кривой интегрирования сохраняются, если соответствующие кривые являются кусочно-гладкими.

Упражнения к главе XIV

14.1. Введём на гладкой кривой Γ натуральный параметр s. Применяя равенство (14.3), доказать, что $\int_\Gamma f(x,y,z)\,ds = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i^{(n)}, y_i^{(n)}, z_i^{(n)})\cdot\Delta s_i^{(n)}$, где функция f непрерывна в области $G\subset\mathbb{R}^3$, содержащей кривую Γ; $0 = s_0^{(n)} < s_1^{(n)} < \ldots < s_n^{(n)} = l_\Gamma$ — последовательность R_n разбиений отрезка $[0; l_\Gamma]$ такая, что $|R_n|\to 0$; $x_i^{(n)} = x(s_i^{(n)})$, $y_i^{(n)} = y(s_i^{(n)})$, $z_i^{(n)} = z(s_i^{(n)})$, $i = 1, \ \ldots, n$.

14.2. Применяя результат упражнения 14.1, доказать, что значение криволинейного интеграла первого рода не зависит от выбора прямоугольной системы координат в $\mathbb{R}^3$. Получить отсюда аналогичный результат для криволинейного интеграла второго рода.

14.3. Вычислить интегралы:

а) $\int_\Gamma (x+y)\,ds$, где Γ — граница треугольника с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$;

б) $\int_\Gamma y^2\,ds$, где Γ — арка циклоиды $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ $(a>0)$;

в) $\int_\Gamma z\,ds$, где Γ — дуга конической винтовой линии $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$;

г) $\int_\Gamma x^2\,ds$, где Γ — окружность $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $x+y+z = 0$ $(a>0)$.

14.4. Вычислить интегралы:

а) $\int_\Gamma (xy\,dx - y^2\,dy)$, где Γ — дуга параболы $y^2 = 2x$ с началом в точке $(0,0)$ и концом в точке $(2,2)$;

б) $\int_\Gamma \dfrac{(x+y)\,dx + (y-x)\,dy}{x^2+y^2}$, где Γ — окружность $x^2+y^2 = a^2$ $(a>0)$, пробегаемая против часовой стрелки;

в) $\int_\Gamma \dfrac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где Γ — отрезок с началом в точке $(1,1,1)$ и концом в точке $(4,4,4)$.

14.5. Сколькими способами можно ориентировать кривую $x^2+y^2 = |x|$ на плоскости?

ГЛАВА XV. **ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ**

§ 1. Общие свойства числовых рядов

Числовой ряд — это формальное выражение вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, где u_n — действительные или комплексные числа. Число $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ называется частичной суммой ряда.

Определение 15.1. Числовой ряд называется сходящимся, если существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, и расходящимся, если этот предел не существует. В случае сходимости число S называется суммой ряда и применяется обозначение $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Определение 15.2. Для сходящегося ряда разность $r_n = S - S_n$, $n = 1, 2, \ldots$, называется остатком ряда.

Эти определения даются для рядов как с действительными, так и с комплексными членами. Под сходимостью последовательности комплексных чисел $(\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S)$ понимается сходимость соответствующей последовательности точек комплексной плоскости: $\forall \varepsilon > 0 \to \exists n_0 \colon \forall n \geqslant n_0 \to |S_n - S| < \varepsilon$ или, что равносильно, сходимость в отдельности последовательностей действительных и мнимых частей ($S_n = a_n + b_n i$; $S = a + bi$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \Longleftrightarrow (\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a) \wedge (\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b)$; см. лемму 9.2). Для последовательностей комплексных чисел сохраняется теорема об арифметических действиях с пределами — доказательство проводится отдельно для действительных и мнимых частей.

Теорема 15.1. *Пусть ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходятся. Тогда для любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha u_n + \beta v_n)$, *и его сумма равна* $\alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n + \beta \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

□ При всех $n = 1,\ 2,\ \ldots$

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha u_k + \beta v_k) = \alpha\sum_{k=1}^{n}u_k + \beta\sum_{k=1}^{n}v_k.$$

Остаётся перейти к пределу при $n \to \infty$. ■

В определении числового ряда можно рассмотреть $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$, где $n_0 \in \mathbb{Z}$ $(n = n_0,\ n_0+1,\ n_0+2,\ \ldots)$. Тогда $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$, $n \geqslant n_0$, и всё сказанное выше сохраняется. Ясно, что сходимость ряда не зависит от выбора начального индекса n_0. В случае сходимости $\sum\limits_{n=n_1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=n_1}^{n_2-1} u_n + \sum\limits_{n=n_2}^{\infty} u_n$, где $n_2 > n_1$. Поэтому остаток сходящегося ряда можно записать в виде

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$$

Пример 15.1. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия $u_n = u_1 q^{n-1}$, где $|q| < 1$ — член сходящегося ряда. Так как сумма n первых членов геометрической прогрессии $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_1 q^{k-1} = \frac{u_1 q^n - u_1}{q-1}$, а $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ (лемма 2.10), то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{u_1}{1-q}$, т.е. сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $S = \frac{u_1}{1-q}$.

З а м е ч а н и е. Равенство $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ сохраняется для комплексных чисел q таких, что $|q| < 1$. В самом деле, пусть $q = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $0 < r < 1$ (случай $r = 0$ тривиален). Тогда $q^n = r^n\cos n\varphi + i\cdot r^n \sin n\varphi$ (следствие из леммы 7.3). Но $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$, а последовательности $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ ограничены, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} r^n\cos n\varphi = \lim\limits_{n\to\infty} r^n \sin n\varphi = 0$; значит, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Формула суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, таким образом, справедлива при $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$.

Пример 15.2. Мы доказывали, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)$ существует, а $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$ не существует (примеры 2.29 и 2.30). Это значит, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится (его сумма равна $\frac{\pi^2}{6}$, мы пока не в состоянии доказать это), а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится («гармонический ряд»).

Теорема 15.2 (необходимое условие сходимости ряда). *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ *сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

□ Это следует из того, что $u_n=S_n-S_{n-1}$, $n=2,\ 3,\ \ldots$, и $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=S-S=0$. ■

Это необходимое условие не является достаточным: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, хотя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Теорема 15.3 (критерий Коши сходимости ряда). *Числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ *сходится* $\iff\ \forall\,\varepsilon>0\to\exists\,n_0\colon\ \forall\,n\geqslant n_0$, $\forall\,p\in\mathbb{N}\to\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k\right|<\varepsilon$.

□ По критерию Коши сходимости последовательности для существования конечного $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\,\varepsilon>0\to\exists\,n_0:\quad\forall\,n\geqslant n_0,\quad\forall\,p\in\mathbb{N}\to|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon,$$

т.е. $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k\right|<\varepsilon$. ■

Для рядов с комплексными членами критерий Коши сохраняется, так как имеет место критерий Коши сходимости последовательности точек плоскости (теорема 9.2).

Пример 15.3. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$ расходится.

□ Имеем
$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{k^2+4} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{k^2+4k^2} = \frac{1}{5}\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{5}\cdot n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{10}\,;$$

поэтому $\exists\, \varepsilon = \frac{1}{10}$: $\forall\, n_0 \to \exists\, n = n_0$, $\exists\, p = n_0$: $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \dfrac{k}{k^2+4} \geqslant \varepsilon$; ряд расходится по критерию Коши. ■

Пример 15.4. Если последовательность b_n такова, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$ или $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, то:

а) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx$ расходится при всех x;

б) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ расходится при всех $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

□ В силу необходимого условия сходимости ряда достаточно доказать, что: а) $\cos nx \not\to 0$ при всех x; б) $\sin nx \not\to 0$ при всех $x \neq \pi k$.

Если $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $\cos nx = \pm 1$, и утверждение а) очевидно. Пусть $x \neq \pi k$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \cos nx = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n+1)x = 0$; из равенства $\cos(n+1)x = \cos nx\cdot\cos x - \sin nx\cdot\sin x$, т.е. $\sin nx = \dfrac{\cos nx\cdot\cos x - \cos(n+1)x}{\sin x}$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx = 0$, что невозможно, так как $\cos^2 nx + \sin^2 nx = 1$. Итак, неверно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \cos nx = 0$. Утверждение б) доказывается аналогично. ■

Теорема 15.4. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *сходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится.*

□ По критерию Коши сходимости ряда
$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, n_0: \quad \forall\, n \geqslant n_0, \quad \forall\, p \in \mathbb{N} \to \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon.$$

Так как $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |u_k|$, то критерий Коши выполняется и для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. ■

Отметим, что все теоремы § 1 выполняются для рядов с комплексными членами.

Определение 15.3. Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ с комплексными членами называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется условно сходящимся.

Как и в случае несобственных интегралов, возможны три взаимно исключающих ситуации: числовой ряд сходится абсолютно, сходится условно или расходится.

§ 2. Числовые ряды со знакопостоянными членами

Теория числовых рядов имеет много общего с теорией несобственных интегралов. Например, возникает понятие абсолютной и условной сходимости и наличие трёх взаимно исключающих ситуаций при исследовании сходимости и абсолютной сходимости. Как и в случае несобственных интегралов, имеет смысл отдельно рассматривать ряды со знакопостоянными и знакопеременными членами. В этом параграфе мы будем считать, что общий член ряда действителен и сохраняет знак (не уменьшая общности, $a_n \geqslant 0$ при $n \geqslant n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$).

Теорема 15.5. *Если $u_n \geqslant 0$ при $n \geqslant n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится $\iff$ последовательность его частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ ограничена.*

□ Не уменьшая общности, $u_n \geqslant 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ (конечное число членов не влияет ни на сходимость ряда, ни на ограниченность последовательности S_n). Тогда последовательность S_n возрастает (вообще говоря, нестрого), и её сходимость равносильна ограниченности. ■

Теорема 15.6 (признак сравнения сходимости). *Пусть $u_n \geqslant 0$, $v_n \geqslant 0$ при $n \geqslant n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$. Тогда:*

1) *если* $u_n = O(v_n)$ *при* $n \to \infty$, *то из сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *следует сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, *или, что то же, из расходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *следует расходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *(в частности, это имеет место, если* $u_n = o(v_n)$ *при* $n \to \infty$*);*

2) *если* $u_n = O^*(v_n)$ *при* $n \to \infty$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \overset{\text{cx}}{\sim} \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, *т.е. ряды сходятся или расходятся одновременно (в частности, это имеет место, если* $u_n \sim v_n$ *при* $n \to \infty$*).*

□ 1) Не уменьшая общности, можно считать, что $0 \leqslant u_n \leqslant Cv_n$ при всех n. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то последовательность $\sum\limits_{k=1}^{n} v_k$ ограничена; следовательно, ограничена последовательность $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$. По теореме 15.5 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_n$ сходится.

2) Следует из первой части, так как $u_n = O^*(v_n) \iff (u_n = O(v_n)) \wedge (v_n = O(u_n))$. ■

Теоремы 15.5 и 15.6 аналогичны теоремам 13.7 и 13.8 в теории несобственных интегралов. Оказывается также, что при условии монотонности соответствующей функции сходимость ряда и «так же выглядящего» интеграла равносильны.

Теорема 15.7 (интегральный признак сходимости ряда). *Пусть функция f неотрицательна и монотонна на* $[A; +\infty)$, *где* $A \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\int_A^{+\infty} f(x)\,dx$ *и* $\sum\limits_{n=A}^{\infty} f(n)$ *сходятся или расходятся одновременно.*

□ Отметим, что функция f интегрируема по Риману на любом отрезке $[A; b']$, где $b' > A$. Если функция возрастает (нестрого) на $[A; +\infty)$, то либо $f(x) \equiv 0$ (тогда интеграл и ряд сходятся), либо $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = C > 0$, либо $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (в обоих случаях $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится по теореме 13.9, а

$\sum\limits_{n=A}^{\infty} f(n)$ расходится по теореме 15.2). Если функция убывает (нестрого) и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = C > 0$, то интеграл и ряд аналогично расходятся. Остаётся рассмотреть случай, когда $f(x) \downarrow 0$ при $x \to +\infty$.

Так как функция f убывает на $[A; +\infty)$, то при $x \in [k; k + 1]$, $k \geqslant A$ имеет место неравенство $f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k)$. Интегрируем это неравенство по отрезку $[k; k+1]$:

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\, dx \leqslant f(k).$$

Суммируем по k от A до $n-1$:

$$\sum_{k=A}^{n-1} f(k+1) \leqslant \int_A^n f(x)\, dx \leqslant \sum_{k=A}^{n-1} f(k).$$

Левую часть последней цепочки неравенств можно записать в виде $\sum\limits_{k=A+1}^{n} f(k)$. Окончательно получим

$$\sum_{k=A+1}^{n} f(k) \leqslant \int_A^n f(x)\, dx \leqslant \sum_{k=A}^{n-1} f(k),$$

что иллюстрируется рис. 15.1.

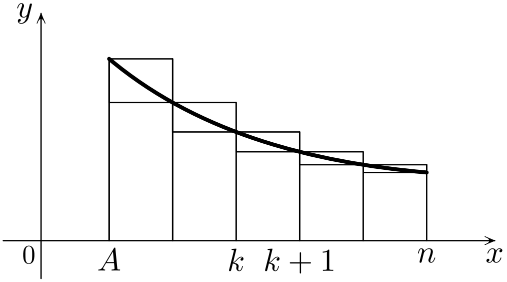

Рис. 15.1

Если $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ сходится, то сходится (значит, ограничена) последовательность $\int_A^n f(x)\, dx$. Поэтому ограничена и последовательность $\sum\limits_{k=A+1}^{n} f(k)$; по теореме 15.5 отсюда следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=A}^{\infty} f(n)$. Пусть теперь ряд $\sum\limits_{n=A}^{\infty} f(n)$ сходится. Тогда последовательность его частичных сумм $\sum\limits_{k=A}^{n-1} f(k)$ ограничена. Отсюда вытекает ограниченность последовательности $\int_A^n f(x)\,dx$. В силу неотрицательности функции f функция $\int_A^x f(t)\,dt$ возрастает, и существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_A^x f(t)\,dt$. Из ограниченности последовательности $\int_A^n f(x)\,dx$ следует конечность этого предела, т.е. сходимость $\int_A^{+\infty} f(x)\,dx$. ■

Пример 15.5. Так как при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ функция $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ монотонна в ту или другую сторону на $[1;+\infty)$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \overset{\text{сх}}{\sim} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$. Поэтому (пример 11.1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$ (частные случаи при $\alpha = 2$ и $\alpha = 1$ мы формулировали в примере 15.2).

Пример 15.6. Докажем, что

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \begin{cases} \text{сходится } \forall\,\beta, & \text{если } \alpha > 1; \\ \text{расходится } \forall\,\beta, & \text{если } \alpha < 1; \\ \text{если } \alpha = 1 & \begin{cases} \text{сходится при } \beta > 1; \\ \text{расходится при } \beta \leqslant 1. \end{cases} \end{cases}$$

□ Интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ сходится и расходится при тех же значениях параметров (пример 13.9). Остаётся доказать, что функция $f(x) = \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ при любых α и β монотонна в ту или другую сторону на $[2;+\infty)$. Если $\alpha = 0$ или $\beta = 0$, то это очевидно. Пусть теперь $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Если $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то знаменатель $x^\alpha (\ln x)^\beta$ возрастает и функция f убывает на $[2;+\infty)$. Если $\alpha < 0$, $\beta < 0$, то знаменатель убывает и функция f возрастает. Пусть $\alpha > 0$, $\beta < 0$. Тогда $f(x) = \frac{(\ln x)^\gamma}{x^\alpha}$, где

$\gamma = -\beta > 0$;

$$f'(x) = \frac{x^\alpha \cdot \gamma (\ln x)^{\gamma-1} \cdot \frac{1}{x} - (\ln x)^\gamma \alpha x^{\alpha-1}}{x^{2\alpha}} = $$
$$= \frac{(\ln x)^{\gamma-1}(\gamma - \alpha \ln x)}{x^{\alpha+1}} \leqslant 0$$

при $x \geqslant x_0 = \max(2, e^{\gamma/\alpha})$. Значит, функция f убывает при $x \geqslant x_0$. Ясно, что монотонность функции f достаточно доказать при $x \geqslant x_0$; на сходимость ряда это не повлияет. Наконец, если $\alpha < 0$, $\beta > 0$, то $f(x) = \frac{x^\gamma}{(\ln x)^\beta}$, где $\gamma = -\alpha > 0$. По только что доказанному, функция $\dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\gamma}$ убывает при $x \geqslant x_0$, значит, функция f возрастает при $x \geqslant x_0$. ■

З а м е ч а н и е. При $\alpha = 1$ мы видим, что ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$ сходится при $\beta > 1$. Поэтому из оценки $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ещё не следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, так же как из оценки $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \to +\infty$ не следует сходимость $\int_A^{+\infty} f(x)\,dx$.

Не следует думать, однако, что теория числовых рядов полностью соответствует теории несобственных интегралов. Например, необходимое условие сходимости ряда (теорема 15.2) не имеет аналога в теории несобственных интегралов (для сходящегося интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ не обязано выполняться условие $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ — см. пример 13.11).

Существуют также признаки сходимости числовых рядов со знакопостоянными членами, не имеющие интегральных аналогов.

Теорема 15.8 (признак Даламбера). *Пусть* $u_n > 0$ *при* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда:*

1) *если* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$, *где* $0 < q < 1$, *при* $n \geqslant n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится;*

2) *если* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ *при* $n \geqslant n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *расходится.*

$\square$ Не уменьшая общности, можно считать, что неравенства из условия теоремы выполняются при всех $n \in \mathbb{N}$ (конечное число членов не влияет на сходимость ряда).

1) Так как $u_2 \leqslant qu_1$, $u_3 \leqslant qu_2 \leqslant q^2u_1$ и т.д., по индукции легко доказать, что $u_n = O(q^{n-1})$ при $n \to \infty$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ сходится (пример 15.1), то наш ряд сходится по признаку сравнения.

2) Так как $u_{n+1} \geqslant u_n$, то последовательность u_n возрастает (нестрого), и существует $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$, конечный или равный $+\infty$. Но так как $u_n \geqslant u_1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \geqslant u_1 > 0$, и не выполнено необходимое условие сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. $\blacksquare$

Следствие (признак Даламбера в предельной форме). *Пусть* $u_n > 0$ *при* $n \in \mathbb{N}$, *причём* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$. *Тогда:*

1) *если* $0 \leqslant q < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится;*

2) *если* $q > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *расходится.*

$\square$ 1) Пусть $q' \in (q; 1)$. Тогда $\exists\, n_0$: $\forall\, n \geqslant n_0 \to \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q'$, и ряд сходится по теореме 15.8.

2) В этом случае $\exists\, n_0$: $\forall\, n \geqslant n_0 \to \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, и ряд расходится по теореме 15.8. $\blacksquare$

Теорема 15.9 (признак Коши). *Пусть* $u_n \geqslant 0$ *при* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда:*

1) *если* $\sqrt[n]{u_n} \leqslant q$, *где* $0 < q < 1$, *при* $n \geqslant n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится;*

2) *если* $\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1$ *при* $n \geqslant n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *расходится.*

$\square$ Не уменьшая общности, можно считать, что неравенства из условия теоремы выполняются при всех $n \in \mathbb{N}$.

1) Так как $u_n \leqslant q^n$, то ряд сходится по признаку сравнения (пример 15.1)
2) Так как $u_n \geqslant 1$ при всех n, то не выполнено необходимое условие сходимости ряда (теорема 15.2). ■

Следствие (признак Коши в предельной форме). *Пусть* $u_n \geqslant 0$ *при* $n \in \mathbb{N}$, *причём* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q$. *Тогда:*

1) *если* $0 \leqslant q < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится;*

2) *если* $q > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *расходится.*

□ Аналогично доказательству признака Даламбера в предельной форме. ■

Пример 15.7. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!a^n}{n^n}$, $a > 0$.

□ Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!a^{n+1}n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n!a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{a}{e},$$

то по признаку Даламбера ряд сходится при $a < e$ и расходится при $a > e$.

Можно применить также признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{n} \cdot \sqrt[n]{n!}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{n} \cdot \frac{n}{e}\right) = \frac{a}{e}$$

(следствие из формулы Стирлинга — теоремы 12.30). Ряд сходится при $a < e$ и расходится при $a > e$.

При $a = e$ соответствующие пределы равны 1, и ни признак Даламбера, ни признак Коши не дают ответа на поставленный вопрос.

Применим формулу Стирлинга. При $n \to \infty$

$$\frac{n!e^n}{n^n} \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \frac{e^n}{n^n} = \sqrt{2\pi n};$$

ряд расходится, так как его общий член не стремится к нулю.

Ответ: ряд сходится при $a < e$ и расходится при $a \geqslant e$. ■

З а м е ч а н и е. В предельной форме признаков Даламбера и Коши ряд сравнивается с геометрической прогрессией («очень быстро» сходящимся рядом при $q < 1$ и «очень быстро» расходящимся рядом при $q > 1$). Если $q = 1$, то предельная форма признаков Даламбера и Коши не даёт ответа на вопрос о сходимости ряда и, как правило, нужно применять признаки сравнения. Например, для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ при любом α $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$, а ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

§ 3. Числовые ряды со знакопеременными членами

Как и в теории несобственных интегралов, при исследовании сходимости рядов с действительными членами, не сохраняющими знак (и тем более рядов с комплексными членами) нельзя применять признаки сравнения (признаки сравнения можно применять при исследовании абсолютной сходимости таких рядов). Имеют место признаки Дирихле и Абеля, аналогичные признакам Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов. При этом роль интегрирования по частям играет преобразование Абеля числовых сумм:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (S_k - S_{k-1}) b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k b_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} S_{k-1} b_k =$$
$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k b_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k b_{k+1} =$$
$$= S_{n+p} b_{n+p} - S_n b_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k (b_k - b_{k+1});$$

здесь $S_k = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$; $n, p \in \mathbb{N}$.

Теорема 15.10 (признак Дирихле). *Пусть последовательность* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *частичных сумм ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *ограничена,* *а последовательность* b_n *убывает (вообще говоря, нестрого) и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ *(это обычно записывают так:* $b_n \downarrow 0$*). Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.*

$\square$ Пусть $|S_n| \leqslant M$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда, так как $b_n \geqslant 0$ и $b_k - b_{k+1} \geqslant 0$, то из только что записанного преобразования Абеля следует оценка

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \leqslant M(b_{n+p} + b_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (b_k - b_{k+1})) =$$
$$= M(b_{n+p} + b_{n+1} + b_{n+1} - b_{n+p}) \leqslant 2Mb_{n+1}$$

при всех $n, p \in \mathbb{N}$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, то $\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\, n_0\colon\ \forall\, n \geqslant n_0 \to \to b_{n+1} < \frac{\varepsilon}{2M}$, значит, $\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\, n_0\colon\ \forall\, n \geqslant n_0,\ \forall\, p \in \mathbb{N} \to \to \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| < \varepsilon$. По критерию Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится. $\blacksquare$

Теорема 15.11 (признак Абеля). *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, а последовательность* b_n *монотонна (вообще говоря, нестрого) и ограничена. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.*

$\square$ Не уменьшая общности, последовательность b_n убывает (иначе заменим b_n на $-b_n$). Тогда, так как в силу ограниченности b_n существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = C$, то последовательность $b'_n = b_n - C \downarrow 0$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его частичные суммы ограничены, и по признаку Дирихле ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b'_n$ сходится. Но $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b'_n + C \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$; ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится по теореме 15.1. $\blacksquare$

Можно рассматривать тригонометрические ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \tag{15.1}$$

зависящие от параметра x. Если $b_n \downarrow 0$, то при $x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, применение к этим рядам признака Дирихле позволяет вывести тригонометрический признак сходимости, аналогичный тригонометрическому признаку сходимости несобственных интегралов.

Лемма 15.1. *Пусть $x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда* $D_n(x) \equiv \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$ *(ядро Дирихле);*

$\overline{D_n}(x) \equiv \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \dfrac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$ *(сопряжённое ядро Дирихле).*

□ Домножим интересующие нас суммы на $2\sin\frac{x}{2}$. Имеем

$$2\sin\frac{x}{2}\,D_n(x) = \\ = \sin\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos x + 2\sin\frac{x}{2}\cos 2x + \ldots + 2\sin\frac{x}{2}\cos nx = \\ = \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2} + \ldots + \\ + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x;$$

$$2\sin\frac{x}{2}\,\overline{D}_n(x) = \\ = 2\sin\frac{x}{2}\sin x + 2\sin\frac{x}{2}\sin 2x + \ldots + 2\sin\frac{x}{2}\sin nx = \\ = \cos x - \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2} + \ldots + \\ + \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x = \cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x.$$

Если $x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $\sin\frac{x}{2} \neq 0$, откуда следуют нужные равенства. ■

Теорема 15.12 (тригонометрический признак сходимости рядов). *Пусть последовательность* b_n *убывает и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. *Тогда:*

1) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx$ *сходится при* $x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$*;*

2) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ *сходится при всех* $x \in \mathbb{R}$.

$\square$ Если $x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то из леммы 15.1 следует, что

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| = \left|D_n(x) - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} + \frac{1}{2}\,;$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \left|\overline{D_n}(x)\right| \leqslant \frac{2}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} = \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\,.$$

Из ограниченности этих сумм в каждой такой точке x и условия $b_n \downarrow 0$ на основании признака Дирихле делаем вывод о сходимости данных тригонометрических рядов.

Если $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то ряд из синусов нулевой и сходится при любой последовательности b_n. $\blacksquare$

Можно вывести и признак абсолютной сходимости рядов (15.1), аналогичный тригонометрическому признаку абсолютной сходимости несобственных интегралов.

Теорема 15.13 (тригонометрический признак абсолютной сходимости рядов). *Пусть последовательность* b_n *убывает и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. *Тогда:*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n \cos nx| \overset{\text{сх}}{\approx} \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *при всех* $x \in \mathbb{R}$*;*

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n \sin nx| \overset{\text{сх}}{\approx} \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *при* $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\square$ Так как $b_n \geqslant 0$ и при всех x имеют место неравенства

$$|b_n \cos nx| \leqslant b_n, \quad |b_n \sin nx| \leqslant b_n,$$

то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует абсолютная сходимость тригонометрических рядов (15.1) при всех x. Пусть теперь ряд

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится. Имеет место цепочка неравенств

$$|b_n \cos nx| \geqslant b_n \cos^2 nx = \frac{b_n}{2} + \frac{b_n \cos 2nx}{2} \geqslant 0. \tag{15.2}$$

Если $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $2x \neq 2\pi k$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \cos 2nx$ сходится по тригонометрическому признаку сходимости. Так как сумма сходящегося и расходящегося рядов даёт расходящийся ряд, то из (15.2) и признака сравнения следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n \cos nx|$. Для ряда по синусам доказательство аналогично. Если же $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $|b_n \cos nx| = b_n$, и доказательство первой части теоремы при этих x очевидно. ■

Пример 15.8. На основании теорем 15.12 и 15.13, а также примера 15.4, можно построить таблицу сходимости и абсолютной сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$ при различных x и α (см. рис. 15.2):

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha}$	$x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$	$x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$
$\alpha > 1$	сходится абсолютно	сходится абсолютно
$0 < \alpha \leqslant 1$	сходится условно	расходится
$\alpha \leqslant 0$	расходится	расходится

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$	$x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$	$x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$
$\alpha > 1$	сходится абсолютно	сходится абсолютно
$0 < \alpha \leqslant 1$	сходится условно	сходится абсолютно
$\alpha \leqslant 0$	расходится	сходится абсолютно

Рис. 15.2

Отметим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ при $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ — нулевой, поэтому он абсолютно сходится при любой последовательности b_n.

Если в ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx$ положить $x = \pi$, то получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$. Таким образом, из тригонометрического признака сходимости рядов вытекает следующее простое достаточное условие сходимости ряда со знакочередующимися членами.

Теорема 15.14 (признак Лейбница). *Пусть последовательность b_n убывает и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ сходится.*

Аналогичного признака сходимости нет в теории несобственных интегралов от знакопеременных функций. Приведём простое и наглядное доказательство признака Лейбница, не опирающееся на более громоздкий признак Дирихле.

$\square$ Для частичных сумм ряда: $S_1 = -b_1$; $S_2 = -b_1 + b_2$; $S_3 = -b_1+b_2-b_3 \geqslant S_1$, так как $b_2 \geqslant b_3$; $S_4 = -b_1+b_2-b_3+b_4 \leqslant S_2$, так как $b_4 \leqslant b_3$, и т.д.

Легко видеть, что $S_1 \leqslant S_3 \leqslant S_5 \leqslant \ldots$, т.е. последовательность S_{2n+1} возрастает; $S_2 \geqslant S_4 \geqslant S_6 \geqslant \ldots$, т.е. последовательность S_{2n} убывает. Значит, существуют $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \alpha$ (конечный или $+\infty$) и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \beta$ (конечный или $-\infty$). Но $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim\limits_{n\to\infty}(-b_{2n+1}) = 0$. Значит, если $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = +\infty$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = +\infty$, что невозможно; аналогично невозможен случай $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = -\infty$. Поэтому α и β конечны, причём $\alpha - \beta = -\lim\limits_{n\to\infty} b_{2n+1} = 0$. Так как $\alpha = \beta$, то в любой окрестности α содержится не более конечного числа членов S_{2n+1} и не более конечного числа членов S_{2n}, т.е. не более конечного числа членов S_n. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \alpha$. $\blacksquare$

З а м е ч а н и е. Признак Лейбница сохраняется для рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$, где $b_n \downarrow 0$. Ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$, где $b_n \downarrow 0$, называются рядами Лейбница (ряды со знакочередующимися членами, модуль общего члена которых, монотонно убывая, стремится к нулю). При выводе теоремы 15.14 было фактически доказано следующее утверждение.

Лемма 15.2. *Если S — сумма ряда Лейбница $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$,* *где* $b_n \downarrow 0$, *то* $\forall m, n \in \mathbb{N}$ *выполняется неравенство* $S_{2m} \geqslant S \geqslant S_{2n+1}$. *Если* S *— сумма ряда Лейбница* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$, *где* $b_n \downarrow 0$, *то* $\forall m, n \in \mathbb{N}$ *выполняется неравенство* $S_{2m} \leqslant S \leqslant S_{2n+1}$.

□ Первое из утверждений следует из того, что последовательность S_{2m}, убывая, стремится к S, а последовательность S_{2n+1}, возрастая, стремится к S (см. доказательство теоремы 15.14). Второе утверждение доказывается аналогично. ■

При оценке скорости сходимости рядов Лейбница часто используется следующее утверждение.

Теорема 15.15. *Для остатка ряда Лейбница* $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k b_k$ *или* $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}b_k$, *где* $b_k \downarrow 0$, *имеет место оценка* $|r_n| \leqslant b_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ *(т.е. остаток ряда Лейбница ограничивается по модулю своим первым членом).*

□ Остаток ряда Лейбница сам является рядом Лейбница, поэтому утверждение достаточно доказать при $n = 1$. Иными словами, нужно доказать, что для суммы ряда Лейбница имеет место неравенство $|S| \leqslant b_1$. Докажем, это неравенство для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$, где $b_n \downarrow 0$; во втором случае доказательство аналогично.

Из леммы 15.2 следует, что $S_1 \leqslant S \leqslant S_2$, где $S_1 = -b_1 \leqslant 0$; $S_2 = b_2 - b_1 \leqslant 0$. Поэтому $S \leqslant 0$, и $|S| \leqslant |S_1| = b_1$. ■

Пример 15.9. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 0$ по признаку Лейбница, так как $\dfrac{1}{n^\alpha} \downarrow 0$. Ряд абсолютно сходится, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$, т.е. при $\alpha > 1$. При $0 < \alpha \leqslant 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ сходится условно. При $\alpha \leqslant 0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ расходится, так как его общий член не стремится к нулю.

Простейшим примером условно сходящегося ряда является ряд Лейбница $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$. Сумму этого ряда мы вычислим в главе XVII.

Пример 15.10. Для рядов со знакопеременными членами признаки сравнения сходимости не выполняются. Например, $\dfrac{1}{n} = o\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ при $n \to \infty$, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ сходится по признаку Лейбница. Конечно, сходимость этого ряда должна быть условной, потому что для абсолютно сходящихся рядов признаки сравнения выполняются.

Теорема 15.16. 1) *Если ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходятся абсолютно, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ *сходится абсолютно.*

2) *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится абсолютно, а ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходится условно, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ *сходится условно.*

□ Доказательство аналогично доказательству теоремы 13.16. ■

§ 4. Влияние перестановки членов на сходимость ряда

Кажется естественным, что в силу коммутативности сложения члены ряда можно переставлять произвольным образом; это не должно влиять ни на сходимость ряда, ни на величину его суммы. Такое мнение ошибочно, потому что коммутативность сложения действительных или комплексных чисел ($a + b = b + a$) формулируется для двух слагаемых и по индукции распространяется на сумму конечного числа слагаемых. Если же число слагаемых бесконечно, то такая «счётная коммутативность» имеет место лишь для абсолютно сходящихся рядов, для условно сходящихся рядов картина существенно сложнее.

Лемма 15.3. *Если ряд с действительными неотрицатель-*

ными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$*, составленный из тех же чисел* u_n*, но в другом порядке, сходится к той же сумме.*

$\square$ Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$. Тогда $\forall\, m \to \sum\limits_{k=1}^{m} v_k \leqslant S$. По теореме 15.5 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится и его сумма $S' \leqslant S$. Так как ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ равноправны, то аналогично $S \leqslant S'$; значит, $S' = S$. $\blacksquare$

Введём следующие обозначения:

$$u^+ = \frac{u + |u|}{2}; \quad u^- = \frac{|u| - u}{2}, \quad u \in \mathbb{R}$$

(положительная и отрицательная часть числа u). Ясно, что

$$u^+ = \begin{cases} u, & \text{если } u \geqslant 0; \\ 0, & \text{если } u < 0; \end{cases} \quad u^- = \begin{cases} 0, & \text{если } u > 0; \\ -u, & \text{если } u \leqslant 0; \end{cases}$$
$$u = u^+ - u^-; \quad |u| = u^+ + u^-;$$

всегда $u^+ \geqslant 0$, $u^- \geqslant 0$.

Лемма 15.4. *Если ряд с действительными членами* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится абсолютно, то сходятся ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^+$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^-$*. Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится условно, то ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^+$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^-$ *расходятся.*

$\square$ Ясно, что $0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n|$, $0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n|$. Поэтому из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ следует сходимость рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^+$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^-$.

Пусть теперь ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится условно. Так как $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^+$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^-$ не могут одновременно сходиться. Но если один из них сходится, а другой расходится, то из равенства $u_n = u_n^+ - u_n^-$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Значит, оба ряда расходятся. $\blacksquare$

Теорема 15.17 (независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых). *Если ряд с действительными членами* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *абсолютно сходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, *составленный из тех же чисел* u_n, *но в другом порядке, также сходится абсолютно, и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

□ Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится, то по лемме 15.3 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |v_n|$ также сходится, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится абсолютно. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n^+ - u_n^-) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^+ - \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^-$; оба эти ряда с неотрицательными членами сходятся по лемме 15.4. Так как v_n^+ и v_n^- — это те же u_n^+ и u_n^-, но в другом порядке, то по лемме 15.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n^+ - \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n^- = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (v_n^+ - v_n^-) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$. ■

З а м е ч а н и е. Теорема 15.17 сохраняется для рядов с комплексными членами. Для доказательства надо заметить, что если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n + ib_n|$, то в силу неравенств $|a_n| \leqslant |a_n + ib_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ и $|b_n| \leqslant |a_n + ib_n|$ сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$; теорема доказывается отдельно для рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Если ряд с действительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится условно, то оказывается, что при подходящей перестановке членов ряда в качестве его суммы можно получить любое действительное число (этим оправдывается термин «условная сходимость»).

Теорема 15.18 (Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда). *Если ряд с действительными* *членами* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится условно, то для любого числа* $S \in \mathbb{R}$ *найдётся ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, *составленный из тех же чисел* u_n, *но в другом порядке, такой, что* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = S$.

$\square$ По лемме 15.4 ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^+$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^-$ расходятся, значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} u_j^+ = +\infty$; $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} u_j^- = +\infty$. Поэтому $\exists\, n_1$: $A_1 \equiv$ $\equiv \sum\limits_{j=1}^{n_1} u_j^+ > S$, но $\sum\limits_{j=1}^{n_1-1} u_j^+ \leqslant S$ (возможно $n_1 = 1$, тогда второе условие не рассматривается). Иными словами, мы набрали ровно столько, но не больше, членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^+$, чтобы сумма их стала больше S. Далее, $\exists\, m_1$: $A_2 \equiv A_1 - \sum\limits_{j=1}^{m_1} u_j^- < S$, но $A_1 - \sum\limits_{j=1}^{m_1-1} u_j^- \geqslant S$ (шаг назад: набрали ровно столько, но не больше, членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^-$, чтобы после вычитания их из A_1 результат стал меньше S). Снова делаем шаг вперёд: $\exists\, n_2$: $A_3 \equiv A_2 + \sum\limits_{j=n_1+1}^{n_2} u_j^+ > S$, но $A_2 + \sum\limits_{j=n_1+1}^{n_2-1} u_j^+ \leqslant S$ (набрали ещё ровно столько, но не больше членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^+$, чтобы после прибавления к A_2 результат стал больше S). Далее, $\exists\, m_2$: $A_4 \equiv$ $\equiv A_3 - \sum\limits_{j=m_1+1}^{m_2} u_j^- < S$, но $A_3 - \sum\limits_{j=m_1+1}^{m_2-1} u_j^- \geqslant S$, и т.д. Так как $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$, то $n_k \geqslant k$, $m_k \geqslant k$, $k = 1, 2, \ldots$, поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} m_k = +\infty$.

Но $u_n = \begin{cases} u_n^+, & \text{если } u_n \geqslant 0; \\ u_n^-, & \text{если } u_n < 0 \end{cases}$ (если $u_n = 0$, то отнесём его к u_n^+), и все числа u_n выстроятся в ряд в некотором новом порядке. Члены построенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ получаются перестановкой членов исходного ряда. Докажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится к числу S. Пусть $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} v_j$, $n \geqslant n_1$. Тогда найдётся номер $k = 1, 2, \ldots$ такой, что

$$m_{k-1} + n_k \leqslant n < m_k + n_{k+1}. \tag{15.3}$$

Если $m_{k-1} + n_k \leqslant n < m_k + n_k$ (шаг назад от A_{2k-1} к A_{2k}), то $S \leqslant S_n \leqslant A_{2k-1}$, значит, $0 \leqslant S_n - S \leqslant A_{2k-1} - S \leqslant u^+_{n_k}$ (см. рис. 15.3).

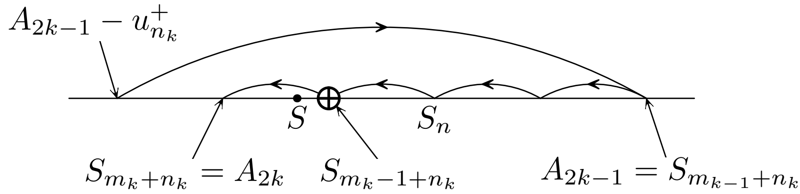

Рис. 15.3

Если $m_k + n_k \leqslant n < m_k + n_{k+1}$ (шаг вперёд от A_{2k} к A_{2k+1}), то $S \geqslant S_n \geqslant A_{2k}$, значит, $0 \leqslant S - S_n \leqslant S - A_{2k} \leqslant u^-_{m_k}$ (см. рис. 15.4).

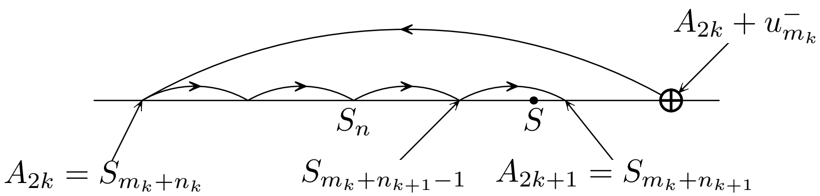

Рис. 15.4

Крестом в кружочке на рис. 15.3 и рис. 15.4 обозначена одна и та же точка ($S_{m_k-1+n_k} - u^-_{m_k} = A_{2k}$). Объединяя полученные результаты, видим, что при выполнении условия (15.3) имеет место неравенство

$$|S_n - S| \leqslant \max(u^+_{n_k}, u^-_{m_k}).$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} u^+_{n_k} = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} u^-_{m_k} = 0$, то

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, k_0: \quad \forall\, k \geqslant k_0 \to (u^+_{n_k} < \varepsilon) \wedge (u^-_{m_k} < \varepsilon).$$

Таким образом, $\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, n_0 = m_{k_0-1} + n_{k_0}$: $\forall\, n \geqslant n_0 \to |S_n - S| \leqslant \max(u^+_{n_k}, u^-_{m_k}) < \varepsilon$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. ■

Можно показать аналогичным методом, что при надлежащей перестановке членов условно сходящегося ряда можно добиться того, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$, а также получить более сложную структуру предельного множества последовательности S_n. Проверить это будет предложено в качестве упражнения.

В отличие от абсолютной сходимости условная сходимость не является «полноценной» сходимостью, так как она зависит от порядка членов ряда. Если абсолютная сходимость ряда обусловлена достаточно быстрым стремлением к нулю его членов и не зависит от их порядка, то при условной сходимости члены ряда стремятся к нулю не слишком быстро, и сходимость ряда обусловлена «взаимным погашением двух бесконечностей» — рядов из положительных и отрицательных частей. Аналогичное явление имеет место при условной сходимости несобственного интеграла, но там нет аналога перестановкам членов ряда, и эффект не столь отчётлив. Условную сходимость можно считать проявлением неопределённости $\infty - \infty$: в итоге можно получить всё, что угодно.

К рассмотренным вопросам примыкает теорема о произведении абсолютно сходящихся рядов.

Теорема 15.19. *Пусть ряды с комплексными членами* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *абсолютно сходятся. Тогда ряд* $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} u_j v_j$, *составленный из всевозможных попарных произведений* $u_i v_j$, *также сходится абсолютно (по теореме 15.17 и замечанию к ней, сходимость этого ряда и значение суммы* $S = \sum\limits_{i,j=1}^{\infty} u_i v_j$ *не зависят* *от порядка слагаемых); при этом* $S = S_1 S_2$, *где* $S_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $S_2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

$\square$ Достаточно доказать абсолютную сходимость ряда при некотором фиксированном порядке суммирования, например, «по квадратам» (см. рис. 15.5).

$$
\begin{tikzcd}
u_1v_1 \arrow[r] & u_1v_2 \arrow[d] & u_1v_3 \arrow[r] & \cdots & u_1v_n & \ldots \\
u_2v_1 \arrow[d] & u_2v_2 \arrow[l] & u_2v_3 \arrow[u] & \cdots & u_2v_n & \ldots \\
u_3v_1 \arrow[r] & u_3v_2 \arrow[r] & u_3v_3 \arrow[u] & \cdots & u_3v_n & \ldots \\
 & \ldots & \ldots & \ldots & & \\
u_nv_1 & u_nv_2 & u_nv_3 & \cdots & u_nv_n & \\
 & \ldots & \ldots & \ldots & &
\end{tikzcd}
$$

Рис. 15.5

При таком порядке для частичных сумм ряда $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} |u_i v_j|$:

$$S^*_{n^2} = \sum_{i,j=1}^{n} |u_i v_j| = \sum_{i=1}^{n} |u_i| \cdot \sum_{j=1}^{n} |v_j| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |u_i| \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |v_j| \equiv A.$$

Так как последовательность S^*_n возрастает и её подпоследовательность $S^*_{n^2}$ ограничена, то и последовательность S^*_n ограничена, значит, сходится. Поэтому ряд $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} |u_i v_j|$ сходится при суммировании «по квадратам», а значит, и любым другим способом. Итак, ряд $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} u_i v_j$ сходится абсолютно, и сумма его S не зависит от порядка слагаемых. Тогда для частичных сумм этого ряда при суммировании «по квадратам»

$$S_{n^2} = \sum_{i,j=1}^{n} u_i v_j = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot \sum_{j=1}^{n} v_j, \quad \text{и} \quad \lim_{n \to \infty} S_{n^2} = S_1 S_2.$$

Но последовательность S_n сходится к пределу $S = \sum\limits_{i,j=1}^{\infty} u_i v_j$, тогда $S = S_1 S_2$. ■

Если хотя бы один из рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ не является абсолютно сходящимся, то под их произведением понимают ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (u_1 v_k + u_2 v_{k-1} + \ldots + u_k v_1)$, т.е. в ряду $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} u_i v_j$ зафиксирован порядок суммирования «по пачкам» $i + j = n$, $n = 2, 3, \ldots$ Можно доказать, что если оба ряда сходятся, причём $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S_1$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = S_2$, и хотя бы один из них сходится абсолютно, то сходится их произведение, причём сумма ряда-произведения равна $S_1 S_2$.

Упражнения к главе XV

15.1. Найти суммы рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1-i}{2}\right)^n$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\varphi$, $|r| < 1$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\varphi$, $|r| < 1$.

15.2. Исследовать сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \sqrt[n]{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)n^3}{3n^5 + 2}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln^2 n}{n^{3/2} + \sin n}$;

д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n+1}{n^2 \ln n + \sqrt{n}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \cdot \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$.

15.3. Исследовать сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin \dfrac{\pi n^2}{2n^2+1}\right)^{\alpha}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{\alpha}}{\left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)^2}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n \sin \frac{1}{n}} - \cos \dfrac{1}{n}\right)^{\alpha}$.

15.4. Исследовать сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n+1)!!}{3^n n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n+1)!}{n^n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot 3^{-n}$.

15.5. Исследовать сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln(n!)}$; б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n \cdot (\ln\ln n)^{\alpha}}$;

в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

15.6. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и последовательность u_n монотонна, то $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ при $n \to \infty$. Привести пример сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, для которого $u_n > 0$ и $u_n \neq$ $\neq o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

15.7. Исследовать сходимость и абсолютную сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n-\ln n)^{\alpha}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin 2n}{\sqrt[3]{n}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^3 n}{\sqrt{n}}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\dfrac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right)$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$;

ж) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{\sin n}{(\sqrt{n} - \operatorname{arctg} n)^{\alpha}}$.

15.8. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и $u_n \sim v_n$ при $n \to \infty$. Следует ли отсюда, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится?

15.9. Доказать, что если $u_n \geqslant 0$ при $n \in \mathbb{N}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ сходится. Обязан ли сходиться ряд

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ для сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, общий член которого не сохраняет знак?

15.10. Доказать, что если $u_n > 0$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q \geqslant 0$, то существует и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q$. На примере ряда

$$1 + a + ab + a^2b + a^2b^2 + \ldots + a^nb^{n-1} + a^nb^n + \ldots$$

показать, что обратное утверждение неверно (т.е. признак Коши сходимости рядов сильнее признака Даламбера).

15.11. Пусть функция f убывает на $[A; +\infty)$, $A \in \mathbb{N}$, и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, причём интеграл $\int_A^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится (значит, сходится и ряд $\sum\limits_{n=A}^{\infty} f(n)$).

Доказать, что при $n \geqslant A + 1$ имеет место оценка

$$\int_n^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} f(k) \leqslant f(n-1) + \int_n^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Обязаны ли при этих условиях выполняться соотношения:

а) $\sum\limits_{k=n}^{\infty} f(k) \sim \int_n^{+\infty} f(x)\,dx$, $n \to \infty$;

б) $\sum\limits_{k=n}^{\infty} f(k) = O^*\left(\int_n^{+\infty} f(x)\,dx\right)$, $n \to \infty$?

15.12. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится условно, а S_n — последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, полученного перестановкой членов исходного ряда. Доказать, что множество частичных пределов последовательности S_n есть $[a; b]$, где $a = \varliminf\limits_{n\to\infty} S_n \in [-\infty; +\infty]$; $b = \varlimsup\limits_{n\to\infty} S_n \in [-\infty; +\infty]$. Доказать также, что для произвольного множества $[a; b]$, где $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$, найдётся такая перестановка членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, что множество частичных пределов S_n совпадает с $[a; b]$.

15.13. Доказать, что если все ряды, получаемые при всевозможных перестановках членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \in \mathbb{R}$, сходятся, то сам ряд сходится абсолютно.

15.14. Пусть $u_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, и $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$. Следует ли отсюда, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ сходится?

15.15. Исследовать сходимость и абсолютную сходимость ряда

$$\frac{1}{1^\alpha} - \frac{1}{2^\beta} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\beta} + \frac{1}{5^\alpha} - \frac{1}{6^\beta} + \ \ldots$$

ГЛАВА XVI. **ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ**

§ 1. Равномерная сходимость функциональных последовательностей

Члены числовой последовательности f_n могут зависеть от параметра x, $x \in E$. В этой главе, если множество E не описано более конкретно, будем считать, что $E \subset \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$ или $E \subset \mathbb{C}$. Итак, $f_n = f_n(x)$, $x \in E$, т.е. определена функциональная последовательность (здесь, как обычно, $n \in \mathbb{N}$ или $n \geqslant n_0$, $n_0 \in \mathbb{Z}$). Если $\forall\, x \in E \to \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in \mathbb{R}$, то функция f называется предельной функцией последовательности f_n на множестве E. В этом случае говорят, что функциональная последовательность f_n поточечно сходится к функции f на множестве E. Поточечная сходимость f_n к f на множестве E может быть записана так:

$$\forall\, x \in E, \quad \forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, n_0 : \quad \forall\, n \geqslant n_0 \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon;$$

здесь $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$.

Определение 16.1. Функциональная последовательность f_n называется равномерно сходящейся к функции f на множестве E, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, n_0 : \quad \forall\, n \geqslant n_0, \quad \forall\, x \in E \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{16.1}$$

Для равномерной сходимости применяется обозначение

$$f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x) \quad \text{или} \quad f_n(x) \rightrightarrows f(x), \quad x \in E.$$

Очевидно, что из равномерной сходимости f_n к f на множестве E следует поточечная; как мы убедимся чуть позже на примерах, обратное утверждение неверно. В случае равномерной сходимости $n_0 = n_0(\varepsilon)$; эта зависимость является частным случаем зависимости $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$.

Лемма 16.1. *Пусть* $\rho_n = \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$. *Тогда* $f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x) \iff \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0.$

□ $\Rightarrow$ Из определения равномерной сходимости (16.1) следует, что $\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\, n_0$: $\forall\, n \geqslant n_0 \to \rho_n \leqslant \varepsilon$; значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$.

$\Leftarrow$ Если $\forall\,\varepsilon > 0 \to \exists\, n_0$: $\forall\, n \geqslant n_0 \to \rho_n < \varepsilon$, то отсюда очевидно следует, что $\forall\, x \in E \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, т.е. выполняется (16.1). ■

З а м е ч а н и е. Если $\rho_n = +\infty$ для конечного числа номеров n, то это не влияет на предельное поведение ρ_n. Если же $\rho_n = +\infty$ для бесконечной последовательности индексов n_k $(n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots)$, то естественно считать, что равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$ не выполняется.

Пример 16.1. Для последовательности $f_n(x) = x^n$, $x \in [0; 1]$, предельная функция

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant x < 1; \\ 1, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

Так как $f_n(x) - f(x) = \begin{cases} x^n, & \text{если } 0 \leqslant x < 1; \\ 0, & \text{если } x = 1, \end{cases}$ то $\rho_n = \sup\limits_{[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$ (см. рис. 16.1); поточечная сходимость есть, а равномерной нет (т.е. сходимость неравномерна).

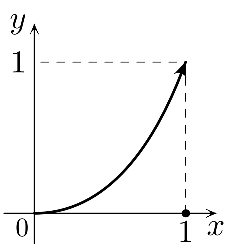

Рис. 16.1

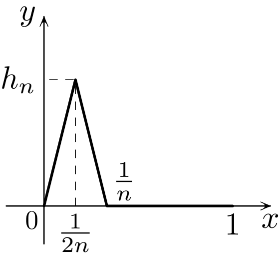

Рис. 16.2

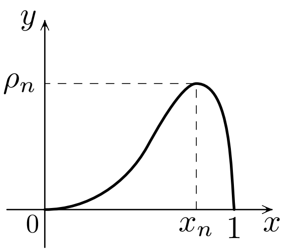

Рис. 16.3

Пример 16.2. Рассмотрим функцию f_n, график которой изображён на рис. 16.2 (на отрезке $\left[0; \frac{1}{n}\right]$ равнобедренный треугольник высоты h_n; $f_n(x) = 0$ при $\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$). Ясно, что при всех $x \in [0; 1]$ $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ ($f_n(0) = 0$

при всех n, а $\forall\, x \in (0;1] \to \exists\, n_0$: $\forall\, n \geqslant n_0 \to \frac{1}{n} < x$, т.е. $f_n(x) = 0$). Так как $\rho_n = \sup\limits_{[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = h_n$, то необходимым и достаточным условием равномерной сходимости последовательности f_n является стремление к нулю высоты h_n.

З а м е ч а н и е. Отсюда наглядно виден геометрический смысл равномерной сходимости. Равномерная сходимость $f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x)$ означает сходимость «в целом по множеству»; на рис. 16.2 горб высоты $h_n \to 0$ в пределе исчезает («вдавливается в отрезок $[0;1]$»). Неравномерная сходимость означает сходимость в каждой точке множества, но не в целом по множеству (в случае $h_n \not\to 0$ на рис. 16.2 горб проходит рано или поздно любую фиксированную точку $(0;1]$, но в целом на отрезке он остаётся).

Пример 16.3. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на $[0;1]$ последовательности:

а) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$;

б) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$.

$\square$ Так как при $x \in [0;1)$

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} x^{n+1} = \lim_{n\to\infty} x^{2n} = 0,$$

то в обоих случаях $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ при всех $x \in [0;1]$; так как $f_n(x) \geqslant 0$, то

$$\rho_n = \sup_{[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[0;1]} f_n(x).$$

В первом случае $f_n'(x) = x^{n-1}(n - (n+1)x)$; $f_n' > 0$ при $0 < x < x_n = \dfrac{n}{n+1}$ и $f_n' < 0$ при $x_n < x < 1$. Поэтому $0 < \rho_n = f_n\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \cdot \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n+1}$, и $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$; сходимость равномерна.

Во втором случае $f_n'(x) = nx^{n-1}(1 - 2x^n)$; $f_n' > 0$ при $0 < x < x_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}$ и $f_n' < 0$ при $x_n < x < 1$. Поэтому $\rho_n = f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) = \dfrac{1}{4}$ при всех n; сходимость неравномерна.

Оба случая можно проиллюстрировать рис. 16.3; только в первом случае высота горба ρ_n стремится к нулю, во втором — нет. ■

Лемма 16.2. *Функциональная последовательность f_n равномерно сходится к функции f на множестве E $\iff$ для любой последовательности точек $x_n \in E$ выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} (f_n(x_n) - f(x_n)) = 0.$$

□ $(\Rightarrow)$ Если $f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x)$, то для любой последовательности $x_n \in E$:

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \leqslant \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \equiv \rho_n \to 0.$$

$(\Leftarrow)$ Пусть последовательность f_n не является равномерно сходящейся к f на множестве E. Тогда неверно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$, т.е. $\exists\, \varepsilon > 0$: $\forall\, n_0 \to \exists\, n \geqslant n_0$: $\rho_n \geqslant \varepsilon$. Но если $\rho_n = \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon$, то для каждого такого значения n найдётся точка $x_n \in E$ такая, что $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Значит, $\exists\, \varepsilon > 0$: $\forall\, n_0 \to \exists\, n \geqslant n_0$, $\exists\, x_n \in E$: $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, т.е. неверно, что $\lim\limits_{n\to\infty} (f_n(x_n) - f(x_n)) = 0$. ■

Поэтому для доказательства отсутствия равномерной сходимости f_n к f на множестве E бывает удобно найти последовательность $x_n \in E$ такую, что $f_n(x_n) - f(x_n) \not\to 0$.

Пример 16.4. Последовательность $f_n(x) = x^n$ не является равномерно сходящейся на отрезке $[0;1]$ (см. пример 16.1), так как для последовательности $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}$ выполняется равенство $f_n(x_n) - f(x_n) = \frac{1}{2}$ ($f(x)$ определена в примере 16.1).

Теорема 16.1 (критерий Коши равномерной сходимости). *Функциональная последовательность f_n равномерно сходится к функции f на множестве E $\iff \forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, n_0$: $\forall\, n, m \geqslant n_0$, $\forall\, x \in E \to |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.*

□ $(\Rightarrow)$ Из определения равномерной сходимости следует, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, n_0 : \quad (\forall\, n \geqslant n_0,\ \forall\, x \in E \to |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}) \wedge$$

$$\wedge(\forall\, m \geqslant n_0,\ \forall\, x \in E \to |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

Значит,

$$\forall\, n, m \geqslant n_0, \quad \forall\, x \in E \to |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

$\Leftarrow$ Так как в каждой точке $x \in E$ выполняется критерий Коши сходимости последовательности $f_n(x)$, то $\forall\, x \in E \to$ $\to \exists\, f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. В неравенстве $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ зафиксируем $x \in E$, $n \geqslant n_0$ и перейдём к пределу при $m \to \infty$. Получим

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, n_0 : \quad \forall\, n \geqslant n_0, \quad \forall\, x \in E \to |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Это означает, что $f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x)$ (знак $<$ в определении равномерной сходимости можно заменить на $\leqslant$, при этом ничего не изменится). ■

Как и в случае числовой последовательности, условие Коши можно записать в другой форме:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, n_0 : \quad \forall\, n \geqslant n_0,\ \forall\, p \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in E \to$$
$$\to |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Лемма 16.3. *Если $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in E_1$ и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in$ $\in E_2$, то $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in E_1 \cup E_2$.*

□

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, n_1\colon \forall\, n \geqslant n_1, \forall\, x \in E_1 \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon;$$
$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, n_2\colon \forall\, n \geqslant n_2, \forall\, x \in E_2 \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Возьмём $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Тогда $\forall\, n \geqslant n_0$, $\forall\, x \in E_1 \cup E_2 \to$ $\to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Значит, $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in E_1 \cup E_2$. ■

Следствие. *Если $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in E$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) =$ $= f(x_0)$, то $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in E \cup \{x_0\}$.*

□ Это следует из леммы 16.3 и из того, что сходимость на множестве, состоящем из конечного числа точек x_1, x_2, $\ldots$, x_N, всегда равномерна ($n_0(\varepsilon) = \max\limits_{i=1,\,\ldots,\,N} n_0(\varepsilon, x_i)$). ■

Лемма 16.4. *Если* $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in E$ *и* $g_n(x) \rightrightarrows g(x)$, $x \in$ $\in E$, *то для любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *(или* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$*)*

$$\alpha f_n(x) + \beta g_n(x) \rightrightarrows \alpha f(x) + \beta g(x), \quad x \in E.$$

$\square$ $\forall \varepsilon > 0 \to \exists n_1$: $\forall n \geqslant n_1$, $\forall x \in E \to |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}$;

$\forall \varepsilon > 0 \to \exists n_2$: $\forall n \geqslant n_2$, $\forall x \in E \to |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}$.

Возьмём $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Тогда $\forall n \geqslant n_0$, $\forall x \in E \to$ $\to |(\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)) - (\alpha f(x) + \beta g(x))| \leqslant |\alpha| \cdot |f_n(x) - f(x)| +$ $+ |\beta| \cdot |g_n(x) - g(x)| < |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\alpha|} + |\beta| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\beta|} = \varepsilon$. Значит, $\alpha f_n(x) +$ $+ \beta g_n(x) \rightrightarrows \alpha f(x) + \beta g(x)$, $x \in E$. Если $\alpha = 0$ или $\beta = 0$, то упрощения в доказательстве очевидны. $\blacksquare$

Понятие равномерной сходимости даёт возможность делать вывод о непрерывности предельной функции в случае сходимости последовательности из непрерывных функций, переходить к пределу под знаком производной или интеграла и т.д.

Теорема 16.2. *Пусть функции* f_n, $n = 1, 2, \ldots,$ *непрерывны на множестве* E, *причём* $f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x)$. *Тогда предельная функция* f *непрерывна на* E.

$\square$ Из равномерной сходимости следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \to \exists n_0 : \forall n \geqslant n_0, \forall x \in E \to |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (16.2)$$

Пусть $x_0, x \in E$. Тогда

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|. \quad (16.3)$$

В силу (16.2) первое и третье слагаемые в правой части (16.3) меньше $\frac{\varepsilon}{3}$ при $n \geqslant n_0$. Пусть теперь $x_0 \in E$ и $n \geqslant n_0$ — фиксированы. Так как функция f_n непрерывна на множестве E, то она непрерывна в точке x_0 по множеству E и

$$\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \cap E \to |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Теперь из (16.3) окончательно следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \cap E \to$$
$$\to |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Значит, функция f непрерывна в точке x_0 по множеству E. Так как $x_0 \in E$ — любая, то f непрерывна на множестве E. ■

В случае поточечной (но неравномерной) сходимости последовательности непрерывных функций предельная функция не обязана быть непрерывной (пример 16.1). Разрывность предельной функции в этом случае является косвенным доказательством неравномерности сходимости.

Вместе с тем равномерная сходимость последовательности непрерывных функций является достаточным, но не необходимым условием непрерывности предельной функции. В примере 16.3б, а также в примере 16.2 при $h_n \not\to 0$ равномерной сходимости нет, а предельная функция сходящейся последовательности непрерывных функций также непрерывна.

Теорема 16.2 выполняется при $E \subset \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{C}$ (в последнем случае можно рассматривать даже комплекснозначные функции комплексной переменной; определения предела и непрерывности функции в точке и по множеству ничем не отличаются от соответствующих определений для действительнозначных функций действительной переменной, только модуль означает модуль комплексного числа, и $U_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{C}\colon |x - x_0| < \delta\}$ — окрестность на комплексной плоскости).

А вот теоремы об интегрировании и дифференцировании равномерно сходящейся последовательности доказываются в действительном случае для отрезка.

Теорема 16.3. *Пусть функции f_n непрерывны на отрезке $[a;b]$, причём $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in [a;b]$. Тогда $\int_a^x f_n(t)\,dt \rightrightarrows \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a;b]$ (в частности, при $x = b$ имеем: $\int_a^b f_n(t)\,dt \to \int_a^b f(t)\,dt$ — предельный переход под знаком интеграла).*

□ По теореме 16.2 функция f непрерывна (следовательно, интегрируема) на $[a;b]$. Пусть $\rho_n = \sup\limits_{[a;b]} |f_n(x) - f(x)|$; $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$.

Тогда при всех $x \in [a;b]$ имеет место оценка

$$\left| \int_a^x f_n(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\, dt \leqslant \rho_n \cdot (x-a) \leqslant \rho_n(b-a),$$

и

$$\sup_{[a;b]} \left| \int_a^x f_n(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \right| \leqslant \rho_n(b-a) \to 0.$$

Значит,

$$\int_a^x f_n(t)\, dt \rightrightarrows \int_a^x f(t)\, dt, \quad x \in [a;b]. \qquad \blacksquare$$

Пример 16.5. Для последовательности функций из примера 16.2 необходимым и достаточным условием равномерной сходимости является стремление высоты горба h_n к нулю. При этом $\int_0^1 f(t)\, dt = 0$, $\int_0^1 f_n(t)\, dt = \frac{h_n}{2n}$ (площадь треугольника на рис. 16.2); поэтому необходимым и достаточным условием возможности совершить предельный переход под знаком интеграла $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\, dt = \int_0^1 (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t))\, dt$ является $h_n = o(n)$, $n \to \infty$. Поэтому при $h_n = 1$ или $h_n = \sqrt{n}$ сходимость неравномерна, но предельный переход под знаком интеграла совершить можно, т.е. равномерная сходимость является достаточным, но не необходимым условием возможности совершения предельного перехода под знаком интеграла. А вот если, например, $h_n = n$, то $\int_0^1 f_n(t)\, dt = \frac{1}{2}$, а $\int_0^1 f(t)\, dt = 0$ — предельный переход под знаком интеграла совершить нельзя; равномерной сходимости при этом, естественно нет.

Теорема 16.4. *Пусть функции f_n непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a;b]$, причём $f_n'(x) \rightrightarrows \varphi(x)$, $x \in [a;b]$, а последовательность f_n сходится в некоторой точке $x_0 \in [a;b]$. Тогда $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in [a;b]$, где функция f непрерывно дифференцируема на $[a;b]$, причём $f'(x) = \varphi(x)$ при всех $x \in [a;b]$ (т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)'$ — предельный переход под знаком производной). В концах отрезка все производные предполагаются односторонними.*

□ По теореме 16.2 функция φ непрерывна на $[a;b]$, а по теореме 16.3

$$\int_a^x f_n'(t)\,dt \rightrightarrows \int_a^x \varphi(t)\,dt, \quad \text{т.е.}$$

$$f_n(x) - f_n(a) \rightrightarrows \int_a^x \varphi(t)\,dt \quad x \in [a;b].$$

При $x = x_0$

$$f_n(x_0) - f_n(a) \to \int_a^{x_0} \varphi(t)\,dt.$$

Последнее предельное соотношение не зависит от x, поэтому эту сходимость можно считать равномерной на $[a;b]$. Тогда по лемме 16.4

$$(f_n(x) - f_n(a)) - (f_n(x_0) - f_n(a)) \rightrightarrows \int_a^x \varphi(t)\,dt - \int_a^{x_0} \varphi(t)\,dt,$$

т.е. $f_n(x) - f_n(x_0) \rightrightarrows \int_{x_0}^x \varphi(t)\,dt$. По условию $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = A \in$ $\in \mathbb{R}$. Тогда $f_n(x) \rightrightarrows A + \int_{x_0}^x \varphi(t)\,dt$. Последнюю функцию обозначим $f(x)$. Ясно, что $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a;b]$ и $f'(x) = \varphi(x)$ при всех $x \in [a;b]$ (в концах отрезка — односторонние производные). ■

Пример 16.6. Если в теореме 16.4 отказаться от требования сходимости f_n в некоторой точке $x_0 \in [a;b]$ («не за что зацепиться»), то даже при условии равномерной сходимости последовательности f_n' последовательность f_n может не сходиться ни в одной точке $[a;b]$. Например, последовательность $f_n(x) = n$ не сходится ни в одной точке, а $f_n'(x) \equiv 0$ — последовательность, равномерно сходящаяся к нулевой функции.

Пример 16.7. Из равномерной сходимости последовательности непрерывно дифференцируемых функций к непрерывно дифференцируемой функции ещё не следует возможность совершения предельного перехода под знаком производной. Рассмотрим последовательность

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n, \quad x \in [-1;1].$$

Так как $|f_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{2n}$ при всех n и x, то

$$\rho_n = \sup_{[-1;1]} |f_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{2n} \to 0,$$

и $f_n(x) \rightrightarrows 0 \equiv f(x)$, $x \in [-1;1]$. Функции $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ и $f(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[-1;1]$; $f'(x) \equiv 0$. Но $f_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}$; $f_n'(1) = \frac{1}{2}$, а $f_n'(-1) = \frac{(-1)^n}{2}$; $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(-1)$ не существует. Равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))'$ не выполняется в точках $x = \pm 1$.

Предостережение. При исследовании равномерной сходимости функциональной последовательности нельзя менять её общий член на эквивалентную величину. Отброшенные o малые могут быть неравномерны по x.

Пример 16.8. Пусть $f_n(x) = \frac{1}{n} + \frac{x}{n^2}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Далее, при всех $x \in \mathbb{R}$ $f_n(x) \sim \frac{1}{n}$ при $n \to \infty$; так как последовательность $\varphi_n(x) = \frac{1}{n}$ не зависит от x и стремится к нулю, то $\varphi_n(x) \rightrightarrows 0$, $x \in \mathbb{R}$. При этом $\sup\limits_{\mathbb{R}} |f_n(x)| = +\infty$ при всех $n \in \mathbb{N}$; значит, последовательность $f_n(x)$ стремится к 0 неравномерно по $x \in \mathbb{R}$.

§ 2. Равномерная сходимость функциональных рядов

Члены числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ могут зависеть от параметра x, $x \in E$. Это значит, что на множестве E определён функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Определение 16.2. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется равномерно сходящимся на множестве E, если последовательность его частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ равномерно сходится на E.

Теоремы 16.1 – 16.4 естественным образом переформулируются для функциональных рядов.

Теорема 16.1′ (критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда). *Функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится на множестве* $E \iff \forall\, \varepsilon > 0 \to$ $\to \exists\, n_0$*:* $\forall\, n \geqslant n_0,\ \forall\, p \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in E \to \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon.$

Теорема 16.2′ (непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций). *Если функции* u_n*,* $n \in \mathbb{N}$*, непрерывны на множестве* E *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится на множестве* E*, то его сумма* $S(x)$ *непрерывна на множестве* E*.*

Теорема 16.3′ (почленное интегрирование равномерно сходящегося ряда). *Если функции* u_n*,* $n \in \mathbb{N}$*, непрерывны на отрезке* $[a;b]$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится к сумме* $S(x)$ *на* $[a;b]$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t)\,dt$ *равномерно сходится на* $[a;b]$ *к сумме* $\int_a^x S(t)\,dt$*. В частности, при* $x = b$*,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b u_n(t)\,dt\right) = \int_a^b \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right) dt.$

Теорема 16.4′ (почленное дифференцирование функционального ряда). *Если функции* u_n*,* $n \in \mathbb{N}$*, непрерывно дифференцируемы на отрезке* $[a;b]$*, ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ *равномерно на* $[a;b]$ *сходится к сумме* $\varphi(x)$*, а ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится в некоторой точке* $x_0 \in [a;b]$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно на* $[a;b]$ *сходится к непрерывно дифференцируемой функции* $S(x)$*, причём* $S'(x) = \varphi(x)$ *при всех* $x \in [a;b]$ *(т.е.* $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$*).*

При выводе теорем 16.2′ – 16.4′ из теорем 16.2 – 16.4 нужно воспользоваться тем, что если функции u_n непрерывны (непрерывно дифференцируемы) на множестве E (отрезке $[a;b]$), то таковыми же являются функции $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

Если в случае функциональной последовательности предельная функция, как правило, известна, и характер сходимости определяется поведением последовательности $\rho_n = \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$, то сумма сходящегося ряда, как правило, неизвестна, и при исследовании равномерной сходимости нет хорошо работающего на практике необходимого и достаточного условия (кроме громоздкого критерия Коши).

Теорема 16.5 (необходимое условие равномерной сходимости ряда). *Если функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на множестве E, то $u_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} 0$.*

□ Так как $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) \overset{E}{\rightrightarrows} S(x)$, то $S_{n-1}(x) \overset{E}{\rightrightarrows} S(x)$; тогда по лемме 16.4

$$u_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x) \overset{E}{\rightrightarrows} S(x) - S(x) = 0. \qquad \blacksquare$$

Теорема 16.6 (признак Вейерштрасса — достаточное условие равномерной сходимости ряда). *Пусть для всех $x \in E$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|u_n(x)| \leqslant \alpha_n$, где ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сходится. Тогда функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на E.*

□ По критерию Коши сходимости числового ряда

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, n_0 : \quad \forall\, n \geqslant n_0, \quad \forall\, p \in \mathbb{N} \to \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k < \varepsilon.$$

Тогда

$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, n_0 : \quad \forall\, n \geqslant n_0, \quad \forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in E \to$

$$\to \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k < \varepsilon;$$

ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E по критерию Коши равномерной сходимости. ■

Теоремы 16.5 и 16.6 можно сформулировать в терминах $\rho_n = \sup\limits_{x\in E} |u_n(x)|$. Если $\rho_n \not\to 0$ при $n \to \infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ не является равномерно сходящимся на E. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на E. А вот если $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho_n$ расходится (например, $\rho_n = \frac{1}{n}$), то эти теоремы не позволяют сделать никакого вывода о равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$; нужно более тонкое исследование.

Теорема 16.7 (признак Дирихле равномерной сходимости рядов). *Пусть выполняются следующие условия:*

1) $|S_n(x)| \leqslant M$ *при всех* $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$, *где* $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$;
2) *при любом* $x \in E$ *последовательность* $b_n(x)$ *убывает (вообще говоря, нестрого);*
3) $b_n(x) \rightrightarrows 0$, $x \in E$.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ *сходится равномерно на множестве* E.

□ Дословно повторяя начало доказательства признака Дирихле сходимости числовых рядов (теорема 15.10), получим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x)\right| \leqslant 2M \cdot b_{n+1}(x) \quad \text{при всех} \quad n, p \in \mathbb{N}, \quad x \in E$$

(при доказательстве использовалось то, что $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant M$, $b_k \geqslant 0$ и $b_k \downarrow$). Так как $b_n(x) \rightrightarrows 0$, $x \in E$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \to \exists n_0 : \quad \forall n \geqslant n_0, \quad \forall x \in E \to 0 \leqslant b_{n+1}(x) < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Значит,

$$\forall \varepsilon > 0 \to \exists n_0 : \quad \forall n \geqslant n_0, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in E \to$$
$$\to \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x)\right| < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ равномерно сходится на множестве E по критерию Коши. ■

Пример 16.9. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x^n - x^{n+1})$ сходится абсолютно при всех $x \in [0;1]$, сходится равномерно на $[0;1]$, но ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1})$ сходится неравномерно на $[0;1]$. Иными словами, признак Вейерштрасса даёт достаточное, но не необходимое условие абсолютной и равномерной сходимости функционального ряда.

□ 1) Пусть $b_n(x) = x^n - x^{n+1}$. Ясно, что $b_n(x) \geqslant 0$ при всех $x \in [0;1]$, $n \in \mathbb{N}$. Так как $b_n(x) = (1-x)x^n$, то при $x = 0$ и $x = 1$ это нулевой ряд, а при $0 < x < 1$ — бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Значит, данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x^n - x^{n-1})$ абсолютно сходится при всех $x \in [0;1]$.

2) Пусть $a_n(x) = a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда данный ряд можно записать в виде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$. Проверим выполнение условий признака Дирихле равномерной сходимости. Во-первых, сумма $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ равна 0 при чётном n и равна -1 при нечётном n, т.е. $|S_n(x)| \leqslant 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in [0;1]$. Во-вторых, при $x = 0$ и $x = 1$ имеет место тождественное равенство $b_n(x) \equiv 0$, а при $x \in (0;1)$ последовательность $b_n(x) =$

$= (1-x)x^n$ убывает. Наконец, $b_n(x) \rightrightarrows 0$, $x \in E$ (пример 16.3а). По признаку Дирихле данный ряд равномерно сходится на $[0;1]$.

3) Частичные суммы ряда из модулей членов данного ряда

$$\sum_{k=1}^{n}(x^k - x^{k+1}) = (x-x^2)+(x^2-x^3)+\ldots+(x^n-x^{n+1}) = x-x^{n+1}$$

имеют предел $\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leqslant x < 1; \\ 0, & \text{если } x = 1. \end{cases}$ Эта функция разрывна на $[0;1]$, значит, ряд из модулей членов данного ряда сходится неравномерно (сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций была бы непрерывной на $[0;1]$). ■

Пример 16.10. Исследовать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$, где $\alpha > 0$, на множествах:

а) $E_1 = (0; 2\pi)$;

б) $E_2 = [\delta; 2\pi - \delta]$, где $0 < \delta < \pi$.

□ При $\alpha > 0$ данный ряд сходится при всех $x \in \mathbb{R}$ (пример 15.8). Пусть $f(x)$ — его сумма. Эта функция определена при всех $x \in \mathbb{R}$ и имеет период 2π. Если $\alpha > 1$, то при всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $\left|\frac{\sin nx}{n^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ сходится, то данный ряд сходится равномерно по $x \in \mathbb{R}$ по признаку Вейерштрасса. В этом случае функция f (сумма ряда) непрерывна при всех x как сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций.

Пусть теперь $\alpha \in (0;1]$. Применим признак Дирихле равномерной сходимости. Последовательность $b_n(x) = b_n = \frac{1}{n^\alpha}$ убывает и стремится к нулю. Так как она не зависит от x, то $b_n(x) \rightrightarrows 0$, $x \in \mathbb{R}$. Пусть $a_n(x) = \sin nx$. Тогда $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx = \dfrac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$, если $x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

(лемма 15.1), значит,

$$|S_n(x)| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Если $x \in [\delta; 2\pi - \delta]$, $0 < \delta < \pi$, то $|S_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$. По признаку Дирихле ряд сходится равномерно на любом отрезке $[\delta; 2\pi - \delta]$, $0 < \delta < \pi$. Поэтому сумма ряда непрерывна на каждом таком отрезке. Но любая точка $x_0 \in (0; 2\pi)$ может быть помещена в некоторый интервал вида $(\delta; 2\pi - \delta)$, $0 < \delta < \pi$ (см. рис. 16.4). Значит, сумма ряда непрерывна в любой точке интервала $(0; 2\pi)$, т.е. непрерывна на этом интервале.

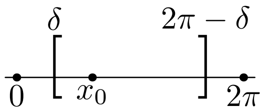

Рис. 16.4

Применяя критерий Коши равномерной сходимости ряда, покажем, что при $\alpha \in (0; 1]$ на $(0; 2\pi)$ равномерной сходимости нет. Отрицание условия Коши равномерной сходимости ряда звучит так. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ не является равномерно сходящимся на множестве $E \iff \exists\, \varepsilon > 0$: $\forall\, n_0 \to \exists\, n \geqslant n_0$, $\exists\, p \in \mathbb{N}$, $\exists\, x \in E$: $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \geqslant \varepsilon$. Возьмём $n = n_0$, $p = n_0$, $x = \frac{\pi}{4n_0} \in (0; 2\pi)$. Тогда при $n + 1 \leqslant k \leqslant 2n$ выполняется неравенство $\frac{\pi}{4} < \frac{k\pi}{4n} \leqslant \frac{\pi}{2}$, и $\sin\frac{k\pi}{4n} > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Значит,

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin\frac{k\pi}{4n}}{k^{\alpha}} > \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^{\alpha}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Итак, $\exists\, \varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{2}}$: $\forall\, n_0 \to \exists\, n = n_0$, $\exists\, p = n_0$, $\exists\, x = \frac{\pi}{4n_0}$: $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \geqslant \varepsilon$. Ряд не является равномерно сходящимся на $(0; 2\pi)$ по критерию Коши.

Ответ: а) на $(0; 2\pi)$ сходимость равномерна при $\alpha > 1$ и неравномерна при $0 < \alpha \leqslant 1$; б) на $[\delta; 2\pi - \delta]$, $0 < \delta < \pi$, сходимость равномерна при всех $\alpha > 0$. ■

З а м е ч а н и е. При $\alpha = 1$ сумма ряда $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ — это 2π-периодическая функция, равная $\frac{\pi - x}{2}$ на интервале $(0; 2\pi)$; в точках $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, эта функция равна 0. Мы пока не обладаем математическим аппаратом, позволяющим доказать это утверждение, но если это знать, то отсюда легко получить косвенное доказательство неравномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ на $(0; 2\pi)$. В самом деле, сумма ряда разрывна на $[0; 2\pi]$ (график суммы ряда изображён на рис. 16.5), значит, ряд не является равномерно сходящимся на $[0; 2\pi]$ (сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций — непрерывная функция). Но если бы ряд равномерно сходился на $(0; 2\pi)$, то, так как он сходится в точках $x = 0$ и $x = 2\pi$, по следствию из леммы 16.3 он равномерно сходился бы и на $[0; 2\pi]$, а это не так. Значит, равномерной сходимости на $(0; 2\pi)$ нет.

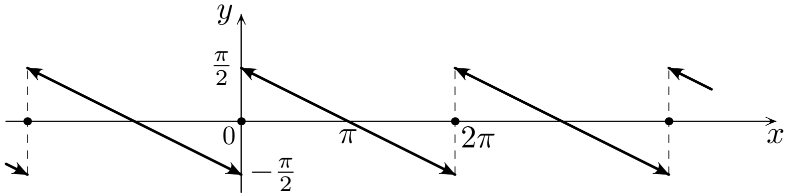

Рис. 16.5

Теорема 16.8 (признак Абеля равномерной сходимости рядов). *Пусть выполняются следующие условия:*

1) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно на множестве* E*;*
2) *последовательность* $b_n(x)$ *монотонна при любом* $x \in E$ *(монотонность, вообще говоря, нестрогая, может быть возрастание при одних значениях* x *и убывание при других);*
3) $|b_n(x)| \leqslant C$ *при всех* $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ *сходится равномерно на множестве* E.

□ Отметим, что $|b_k(x) - b_{k+1}(x)| = \pm(b_k(x) - b_{k+1}(x))$; знак плюс в тех точках x, где $b_k(x)$ убывает, знак минус — где возрастает. Аналогично доказательству теоремы 15.10 (a_k и b_k зависят от $x \in E$; $\tilde{S}_k = \sum\limits_{j=n+1}^{k} a_j$, $k \geqslant n+1$; $\tilde{S}_n = 0$) применим преобразование Абеля:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (\tilde{S}_k - \tilde{S}_{k-1}) b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} \tilde{S}_k b_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} \tilde{S}_{k-1} b_k =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} \tilde{S}_k b_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} \tilde{S}_k b_{k+1} =$$

$$= \tilde{S}_{n+p} b_{n+p} - \tilde{S}_n b_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \tilde{S}_k (b_k - b_{k+1}).$$

По критерию Коши равномерной сходимости ряда,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, n_0 : \quad \forall\, n \geqslant n_0, \quad \forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in E \to$$
$$\to \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3C}\,.$$

Значит, $|\tilde{S}_k| = \left| \sum\limits_{j=n+1}^{k} a_j(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3C}$ при всех $k \geqslant n+1$, $x \in E$. Тогда, учитывая, что $\tilde{S}_n = 0$, имеем:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3C} \left(|b_{n+p}(x)| \pm \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (b_k(x) - b_{k+1}(x)) \right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3C} \left(|b_{n+p}(x)| \pm (b_{n+1}(x) - b_{n+p}(x)) \right) \leqslant \frac{\varepsilon}{3C} \cdot 3C = \varepsilon.$$

Итак,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, n_0 : \quad \forall\, n \geqslant n_0, \quad \forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in E \to$$
$$\to \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ сходится равномерно на множестве E по критерию Коши. $\blacksquare$

З а м е ч а н и е. В признаках Дирихле и Абеля равномерной сходимости рядов $b_n(x)$ — действительная монотонная последовательность; значения последовательности $a_n(x)$ могут быть комплексными. Как отмечалось выше, $E \subset \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$ или $E \subset \mathbb{C}$. Признак Абеля для комплекснозначных функциональных последовательностей $a_n(x)$ будет применён в теории степенных рядов.

Приведём пример решения задачи на исследование сходимости и равномерной сходимости функционального ряда.

Пример 16.11. Исследовать сходимость и равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} x e^{-nx^2}$ на множествах: а) $E_1 = (0; +\infty)$; б) $E_2 = (\delta; +\infty)$, где $\delta > 0$.

$\square$ Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{\alpha} x e^{-(n+1)x^2}}{n^{\alpha} x e^{-nx^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha} e^{-x^2} = e^{-x^2} < 1,$$

то ряд с положительными членами сходится по признаку Даламбера при всех $x > 0$. Далее,

$$u_n'(x) = n^{\alpha} e^{-nx^2}(1 - 2nx^2); \quad u_n'(x) > 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

и $u_n' < 0$ при $x > \frac{1}{\sqrt{2n}}$. Отметим, что $u_n(0) = u_n(+\infty) = 0$, поэтому $\rho_n = \sup\limits_{(0;+\infty)} u_n(x) = u_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = Cn^{\alpha - \frac{1}{2}}$, где $C = \frac{1}{\sqrt{2e}}$ (график функции u_n изображён на рис. 16.6).

Так как $\frac{1}{\sqrt{2n}} < \delta$ при $n \geqslant n_0(\delta)$, то $\rho_n' = \sup\limits_{(\delta;+\infty)} u_n(x) = u_n(\delta)$. Но данный ряд сходится в точке $x = \delta > 0$, поэтому ρ_n' — член сходящегося ряда, и на $(\delta; +\infty)$ ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса.

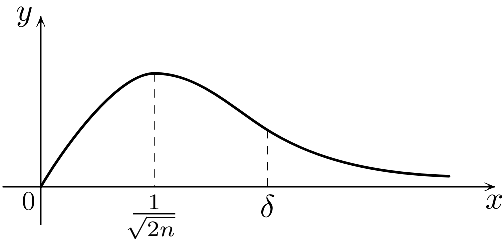

Рис. 16.6

Если $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$, то $\rho_n \not\to 0$ при $n \to \infty$ и не выполняется необходимое условие равномерной сходимости ряда на $(0; +\infty)$ — общий член ряда стремится к нулю неравномерно. Если $\alpha < -\frac{1}{2}$, то $\alpha - \frac{1}{2} < -1$ и ρ_n — член сходящегося ряда; по признаку Вейерштрасса ряд сходится равномерно не только на $(\delta; +\infty)$, но и на $(0; +\infty)$.

Наконец, если $-\frac{1}{2} \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$, то грубые признаки (теоремы 16.5 и 16.6) не работают. Применим критерий Коши равномерной сходимости ряда. Для любого $n_0 \in \mathbb{N}$ возьмём $n = n_0$, $p = n_0$, $x = \frac{1}{\sqrt{n_0}}$. Тогда при $n + 1 \leqslant k \leqslant 2n$ выполняются неравенства $1 < \frac{k}{n} \leqslant 2$, поэтому

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{k^\alpha}{\sqrt{n}} e^{-\frac{k}{n}} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}} e^{-2} \geqslant \frac{e^{-2}}{\sqrt{n}} \cdot n \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}e^2}\,.$$

Итак, $\exists\, \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}e^2}$: $\forall\, n_0 \to \exists\, n = n_0$, $\exists\, p = n_0$, $\exists\, x = \frac{1}{\sqrt{n_0}}$: $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \geqslant \varepsilon$. Ряд не является равномерно сходящимся на $(0; +\infty)$ по критерию Коши.

Ответ: а) на $(0; +\infty)$ сходимость равномерна при $\alpha < -\frac{1}{2}$ и неравномерна при $\alpha \geqslant -\frac{1}{2}$; б) на $(\delta; +\infty)$, $\delta > 0$, сходимость равномерна при всех α. ■

Упражнения к главе XVI

16.1. Доказать, что если $\alpha_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} 0$, а последовательность $\beta_n(x)$ равномерно ограничена на множестве E (т.е. $\exists\, C > 0$: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in E \to |\beta_n(x)| \leqslant C$), то $\alpha_n(x)\beta_n(x) \rightrightarrows 0$.

16.2. Пусть $f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x)$, $g_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} g(x)$. Следует ли отсюда, что $f_n(x)g_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x)g(x)$? Доказать, что если $f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x)$, $g_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} g(x)$, причём функции f и g ограничены на множестве E, то $f_n(x)g_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x)g(x)$.

16.3. Исследовать сходимость и равномерную сходимость функциональных последовательностей:

а) $f_n(x) = \frac{n}{x+n}$ на $E_1 = [0;1]$ и на $E_2 = [0;+\infty)$;

б) $f_n(x) = n\sin\frac{x}{n}$ на $E_1 = [0;1]$ и на $E_2 = [0;+\infty)$;

в) $f_n(x) = \ln\left(e^x + \frac{1}{n}\right)$ на $E_1 = [0;+\infty)$ и на $E_2 = (-\infty;0]$;

г) $f_n(x) = n\left(x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{2n}}\right)$ на $E_1 = \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ и на $E_2 = [1;+\infty)$.

16.4. Доказать, что если функция f непрерывно дифференцируема на интервале $(a;b)$, то последовательность $f_n(x) = n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$ равномерно сходится к $f'(x)$ на любом отрезке $[a+\delta; b-\delta]$, где $0 < \delta < \dfrac{b-a}{2}$.

16.5. Исследовать сходимость и равномерную сходимость функциональных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ на $E_1 = (-1;1)$ и на $E_2 = [-\delta;\delta]$, где $0 < \delta < 1$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{(n+x)^2}$ на $E_1 = [0;1]$ и на $E_2 = [0;+\infty)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx \cdot \sin\frac{1}{nx}}{4+\ln^2 nx}$ на $E_1 = (0;1)$ и на $E_2 = (1;+\infty)$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{n}\right)^2$ на $E_1 = (0;1)$ и на $E_2 = (1;+\infty)$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ на $E_1 = (0;A)$, где $A > 0$, и на $E_2 = (0;+\infty)$.

16.6. Исследовать сходимость и равномерную сходимость функциональных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln \dfrac{n+x}{n}$ на $E_1 = (0;1)$ и на $E_2 = (1;+\infty)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{x^2 - nx + n^2}$ на $E_1 = (0;1)$ и на $E_2 = (1;+\infty)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{n} \operatorname{arctg} \dfrac{\cos x}{n}$ на $E_1 = (0;1)$ и на $E_2 = (1;+\infty)$.

16.7. Исследовать сходимость и равномерную сходимость функциональных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx \cdot \sin x}{\sqrt{n+x}}$ на $[0;+\infty)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} \operatorname{arctg} x^n$ на $[0;+\infty)$.

16.8. Доказать, что если при любом $x \in E$ последовательность $b_n(x)$ убывает (вообще говоря, нестрого) и $b_n(x) \rightrightarrows 0$, $x \in E$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n(x)$ сходится равномерно на множестве E (признак Лейбница равномерной сходимости рядов).

16.9. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n+x^2}{n^2}$ сходится равномерно на любом конечном отрезке, но не сходится абсолютно ни при каком $x \in \mathbb{R}$.

16.10. Доказать, что дзета-функция Римана $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$:

а) непрерывна на $(1;+\infty)$;

б) имеет производные всех порядков на $(1;+\infty)$, причём $\zeta^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k (\ln n)^k}{n^x}$, $k \in \mathbb{N}$.

16.11. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n e^{-nx}$ сходится равномерно на $[0;+\infty)$.

16.12. Может ли последовательность разрывных на отрезке $[a;b]$ функций сходиться равномерно к непрерывной функции?

16.13. Доказать, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ непрерывна на $(0; +\infty)$, и вычислить $\int_a^b f(x)\,dx$, где $b > a > 0$.

16.14. Доказать, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos^2 nx}{n(n+1)}$ непрерывна в любой точке $x \in \mathbb{R}$ и дифференцируема в любой точке $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; вычислить $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$.

16.15. Доказать, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n^2 x}{2^n}$ имеет непрерывные производные всех порядков в любой точке $x \in \mathbb{R}$; при этом $f^{(2k-1)}(0) = 0$, $|f^{(2k)}(0)| > \dfrac{k^{4k}}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$.

ГЛАВА XVII. **СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ**

§ 1. Степенные ряды с комплексными членами. Радиус сходимости

Определение 17.1. Степенным рядом называется функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{где} \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad z_0 \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C};$$

члены ряда $u_n(z) = a_n(z - z_0)^n$ рассматриваются как функции комплексной переменной z (считается, что $u_0(z_0) = a_0$).

Теорема 17.1 (первая теорема Абеля). *Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ сходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$, то он абсолютно сходится в любой точке z такой, что $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$.*

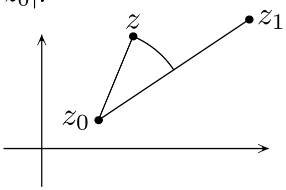

Рис. 17.1

□ Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z_1 - z_0)^n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(z_1 - z_0)^n = 0$. Тогда если $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ (см. рис. 17.1), то

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n(z_1 - z_0)^n| \cdot \left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right|^n = o(q^n),$$

где $q = \left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right| < 1$. По признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ абсолютно сходится. ■

Известно (см. пример 15.1 и замечание к нему), что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ сходится при $|z| < 1$; при $|z| \geqslant 1$ этот ряд расходится, так как его общий член не стремится к нулю. Таким образом, множеством точек сходимости ряда является круг $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$. Оказывается, множество точек сходимости степенного ряда всегда является кругом (с точностью до множества точек границы этого круга).

Определение 17.2. Неотрицательное число R (или символ $+\infty$) называется радиусом сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, если при всех z таких, что $|z-z_0|<R$, ряд сходится, а при всех z таких, что $|z-z_0|>R$, ряд расходится. Множество точек $\{z\in\mathbb{C}\colon\ |z-z_0|<R\}$ называется кругом сходимости степенного ряда (если $R=0$, то ряд расходится при всех $z\neq z_0$, и круг сходимости пуст; если $R=+\infty$, то ряд сходится при всех $z\in\mathbb{C}$, и кругом сходимости является вся комплексная плоскость).

Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ равен 1.

Теорема 17.2. *Каждый степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *имеет радиус сходимости* $R\in[0;+\infty]$.

□ Если ряд сходится для всех $z\in\mathbb{C}$, то по определению $R= +\infty$. В точке z_0 степенной ряд сходится к числу a_0 (все члены при $n\geqslant 1$ равны 0). Если при этом ряд расходится для всех $z\neq z_0$, то по определению $R=0$.

Пусть теперь существуют такие точки $z\in\mathbb{C}$, в которых ряд расходится, а также такие $z\neq z_0$, в которых ряд сходится. Рассмотрим точную верхнюю грань R множества действительных чисел λ таких, что найдётся точка z, для которой $|z-z_0|=\lambda$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ сходится. Ясно, что $R\in[0;+\infty]$. Докажем, что R — радиус сходимости ряда.

Если $R=0$, то ряд расходится при всех $z\neq z_0$ — этот случай рассмотрен раньше (в этом случае радиус сходимости равен 0). Если $R=+\infty$, то для каждого z найдётся z_1 такое, что $|z_1-z_0|>|z-z_0|$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n$ сходится. По первой теореме Абеля ряд абсолютно сходится в точке z, и его радиус сходимости равен $+\infty$. Пусть, наконец, $R\in(0;+\infty)$. Тогда при всех z таких, что $|z-z_0|>R$, ряд расходится. Если же $|z-z_0|<R$, то найдётся точка z_1 такая, что $|z_1-z_0|>|z-z_0|$

и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z_1 - z_0)^n$ сходится. По первой теореме Абеля ряд абсолютно сходится в точке z. Итак, ряд сходится в любой точке z такой, что $|z - z_0| < R$. Так как при всех z таких, что $|z-z_0| > R$, ряд расходится, то его радиус сходимости равен R.

■

Легко видеть, что при нахождении радиуса сходимости достаточно ограничиться исследованием абсолютной сходимости степенного ряда.

Лемма 17.1. *Если при всех z таких, что $|z - z_0| < R$, степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ **абсолютно** сходится, а при всех z таких, что $|z - z_0| > R$, ряд **абсолютно** расходится ($R \in \in [0; +\infty]$), то радиус сходимости ряда равен R.*

□ Пусть радиус сходимости ряда равен R_1. Так как при $|z - - z_0| < R$ ряд сходится, то $R \leqslant R_1$. Но если $R < R_1$, то при $|z - z_0| \in (R; R_1)$ ряд сходится. Зафиксируем одно такое число z_1; $|z_1 - z_0| = \rho \in (R; R_1)$. По первой теореме Абеля ряд абсолютно сходится при $|z - z_0| \in (R; \rho)$ — противоречие условию. Значит, $R = R_1$. ■

Так как исследование абсолютной сходимости ряда — это исследование сходимости ряда с неотрицательными членами, то для нахождения радиуса сходимости степенного ряда можно применять признаки Даламбера и Коши.

Пример 17.1. Найдём радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Если $z \neq 0$, то $\frac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = \frac{|z|^{n+1} \cdot n!}{|z|^n \cdot (n+1)!} = \frac{|z|}{n+1} \to 0$. По признаку Даламбера ряд абсолютно сходится при всех $z \neq 0$ (при $z = 0$ он очевидно абсолютно сходится). Значит, $R = +\infty$.

Пример 17.2. Найдём радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! z^n$. Если $z \neq 0$, то $\frac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = \frac{|z|^{n+1} \cdot (n+1)!}{|z|^n \cdot n!} = (n+1)|z| \to +\infty$. По признаку Даламбера ряд абсолютно расходится при всех $z \neq 0$. Значит, $R = 0$.

Пример 17.3. Найдём радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Если $z \neq 0$, то $\frac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = \frac{|z|^{n+1} \cdot n^\alpha}{|z|^n \cdot (n+1)^\alpha} = |z| \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \to$ $\to |z|$. По признаку Даламбера ряд абсолютно сходится при $|z| < 1$ (при $z = 0$ он очевидно абсолютно сходится) и абсолютно расходится при $|z| > 1$. Значит, $R = 1$ при всех α.

На границе круга сходимости (на окружности $\{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| = R\}$) ряд может вести себя по-разному. В некоторых точках окружности может быть абсолютная сходимость, в некоторых — условная сходимость, в некоторых — расходимость.

Пример 17.4. Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}$ равен 1 при всех $\alpha \in \mathbb{R}$. Но если $\alpha > 1$, то из неравенства $\left|\frac{z^n}{n^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$, выполненного при всех z таких, что $|z| \leqslant 1$, и признака Вейерштрасса равномерной сходимости рядов следует равномерная сходимость степенного ряда во всём круге $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| \leqslant 1\}$, в частности, сходимость в точках его границы. Если $\alpha \leqslant 0$, то в точках окружности общий член степенного ряда не стремится к нулю, и ряд расходится. Наконец, если $0 < \alpha \leqslant 1$ и $|z| = 1$, то $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$, и по формуле Муавра

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n^\alpha} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n^\alpha}\,.$$

Так как $\frac{1}{n^\alpha} \downarrow 0$, то оба ряда с действительными членами сходятся при всех $\varphi \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (тригонометрический признак сходимости рядов — теорема 15.12). При $\varphi = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, который расходится. Итак, если $0 < \alpha \leqslant 1$, то в точке $z = 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}$ расходится, а в остальных точках границы круга сходимости сходится, причём условно, так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n^\alpha}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ расходится.

Теорема 17.3. *Если степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *имеет* *радиус сходимости $R \in (0; +\infty]$, то он равномерно сходится в любом круге $K_r = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z - z_0| \leqslant r$, где $0 < r < R\}$.*

$\square$ Зафиксируем число z_1 такое, что $|z_1 - z_0| = r$. В точке z_1 ряд абсолютно сходится, поэтому числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ сходится. Так как при всех $z \in K_r$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $|a_n(z - z_0)^n| \leqslant |a_n| r^n$, то в круге K_r степенной ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. $\blacksquare$

Во всём круге сходимости $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z - z_0| < R\}$ степенной ряд может сходиться равномерно, а может сходиться и неравномерно.

Пример 17.5. При $\alpha > 1$ степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^\alpha}$ сходится равномерно во всём круге сходимости вместе с границей (пример 17.4). При $\alpha \leqslant 1$ этот ряд не является равномерно сходящимся в круге сходимости $\{z \in C\colon\ |z| < 1\}$. Если $\alpha \leqslant 0$, то это легко следует из того, что $\sup\limits_{|z|<1} \left|\dfrac{z^n}{n^\alpha}\right| = \dfrac{1}{n^\alpha} \not\to 0$; ряд сходится неравномерно, так как его общий член стремится к нулю неравномерно. Если же $0 < \alpha \leqslant 1$, то доказательство неравномерной сходимости ряда следует из критерия Коши равномерной сходимости рядов. В самом деле, если $z = \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}$, то

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{z^k}{k^\alpha} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^k \geqslant n\, \frac{1}{(2n)^\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^{2n} \geqslant \frac{1}{8}\,.$$

Поэтому

$$\exists\, \varepsilon = \frac{1}{8} : \forall\, n_0 \to \exists\, n = n_0,\ \exists\, p = n_0,\ \exists\, x = \frac{1}{\sqrt[n_0]{2}} : \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{z^k}{k^\alpha}\right| \geqslant \varepsilon,$$

и ряд не является равномерно сходящимся в круге сходимости.

Теорема 17.4 (вторая теорема Абеля). *Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ с радиусом сходимости $R \in (0; +\infty]$ сходится в точке $z_1 \neq z_0$, лежащей внутри или на границе круга сходимости, то он сходится равномерно на отрезке $[z_0; z_1]$, соединяющем точки z_0 и z_1 на комплексной плоскости.*

□ Пусть $z_1 \neq z_0$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z_1 - z_0)^n$ сходится. Так как отрезок $[z_0; z_1]$ может быть параметризован как $z = z_0 + t(z_1 - - z_0)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n \left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n t^n.$$

Числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z_1 - z_0)^n$ сходится и члены его не зависят от $t \in [0; 1]$, т.е. его можно считать равномерно сходящимся рядом с комплексными членами на множестве $t \in [0; 1]$. Последовательность $b_n(t) = t^n$ убывает при каждом $t \in [0; 1]$ (постоянна при $t = 0$ и $t = 1$), причём $|b_n(t)| \leqslant 1$ при всех $t \in [0; 1]$, $n = 0, 1, 2, \ \ldots$ По признаку Абеля равномерной сходимости рядов данный ряд равномерно сходится по $t \in [0; 1]$, т.е. по $z \in [z_0; z_1]$. ■

З а м е ч а н и е. Сходимость данного степенного ряда в точке z_1 на границе круга сходимости не обязана быть абсолютной. Для доказательства равномерной сходимости ряда на отрезке $[z_0; z_1]$ применён не грубый признак Вейерштрасса, а более тонкий признак Абеля.

Выведем теперь формулу, выражающую радиус сходимости степенного ряда через его коэффициенты.

Теорема 17.5 (формула Коши–Адамара). *Радиус сходимости ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *равен* $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$ *(считаем, что* $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$*).*

□ Рассмотрим $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Напомним (теорема 2.12), что в этом случае ρ — частичный предел последовательности $\sqrt[n]{|a_n|}$, т.е. найдётся последовательность индексов $n_1 < n_2 < < \ldots < n_k < \ldots$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = \rho$, но никакое число, большее ρ, не является частичным пределом последовательности $\sqrt[n]{|a_n|}$.

1) Пусть $\rho = +\infty$. Тогда найдётся последовательность индексов такая, что $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \to +\infty$, т.е. $\forall E > 0 \to \exists k_0$:

$\forall\, k \geqslant k_0 \to \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > E$. Если $z \neq z_0$, то возьмём $E = \dfrac{1}{|z - z_0|}$. Имеем

$$|a_{n_k}(z - z_0)^{n_k}| > E^{n_k} \left(\frac{1}{E}\right)^{n_k} = 1,$$

т.е. $a_n(z - z_0)^n \not\to 0$, и данный степенной ряд расходится. Так как $z \neq z_0$ — любое, то $R = 0$.

2) Пусть $\rho = 0$. Если верхний предел последовательности с неотрицательными членами равен 0, то, так как нижний предел также неотрицателен, последовательность сходится к нулю. Значит,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, n_0 : \quad \forall\, n \geqslant n_0 \to \sqrt[n]{|a_n|} < \varepsilon.$$

Если $z \neq z_0$, то возьмём $\varepsilon = \dfrac{1}{2|z - z_0|}$. Имеем: $\forall\, n \geqslant n_0 \to$ $\to |a_n(z - z_0)^n| < \varepsilon^n \left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, и данный степенной ряд абсолютно сходится по признаку сравнения. Так как $z \neq z_0$ — любое, то $R = +\infty$.

3) Пусть $0 < \rho < +\infty$, и $|z - z_0| > \frac{1}{\rho}$. Тогда $\exists\, \varepsilon > 0$: $|z - z_0| = \dfrac{1}{\rho - \varepsilon}$. Найдётся последовательность индексов такая, что $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \to \rho$, поэтому

$$\exists\, k_0 : \quad \forall\, k \geqslant k_0 \to \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \rho - \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Значит,

$$|a_{n_k}(z - z_0)^{n_k}| > \left(\frac{\rho - \frac{\varepsilon}{2}}{\rho - \varepsilon}\right)^{n_k} \to +\infty.$$

Итак, $a_n(z - z_0)^n \not\to 0$, и данный степенной ряд расходится в любой точке z такой, что $|z - z_0| > \frac{1}{\rho}$.

Если $0 < |z - z_0| < \frac{1}{\rho}$, то $\exists\, \varepsilon > 0$: $|z - z_0| = \frac{1}{\rho + \varepsilon}$. Ясно, что $\exists\, n_0$: $\forall\, n \geqslant n_0 \to \sqrt[n]{|a_n|} < \rho + \frac{\varepsilon}{2}$ (если $\forall\, n_0 \to \exists\, n \geqslant n_0$: $\sqrt[n]{|a_n|} \geqslant \rho + \frac{\varepsilon}{2}$, то существует частичный предел, превосходящий ρ, что противоречит определению верхнего предела). Тогда $\exists\, n_0$: $\forall\, n \geqslant n_0 \to |a_n(z - z_0)^n| < \left(\dfrac{\rho + \frac{\varepsilon}{2}}{\rho + \varepsilon}\right)^n$. Последнее выражение является членом сходящегося ряда, поэтому данный степенной ряд абсолютно сходится при всех z таких, что $0 < |z - z_0| < \frac{1}{\rho}$. Так как в точке z_0 ряд сходится, то, учитывая расходимость ряда при $|z - z_0| > \frac{1}{\rho}$, делаем вывод о том, что $R = \frac{1}{\rho}$. ■

Пример 17.6. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k z^{3k}$. Этот функциональный ряд будет степенным рядом в обычном смысле, если переписать его в виде $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, где

$$a_n = \begin{cases} 2^{n/3}, & \text{если } n = 3k; \\ 0, & \text{если } n \neq 3k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Тогда

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \sqrt[3]{2}, & \text{если } n = 3k; \\ 0, & \text{если } n \neq 3k. \end{cases}$$

Эта последовательность имеет 2 частичных предела 0 и $\sqrt[3]{2}$; поэтому $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[3]{2}$, и $R = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Лемма 17.2. *Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ имеет радиус сходимости $R \in [0; +\infty]$, то такой же радиус сходимости имеют «формально продифференцированный ряд» $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$ и «формально проинтегрированный ряд» $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{n+1}}{n+1}$.*

□ Так как данный ряд является формально продифференцированным по отношению к формально проинтегрированному ряду, то лемму достаточно доказать для формально продифференцированного ряда. В точке z_0 сходится любой ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$, поэтому можно считать, что $z \neq z_0$. Так как множитель $z - z_0$ не влияет на сходимость ряда при $z \neq z_0$, то достаточно доказать совпадение радиусов сходимости для рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n (z - z_0)^n$.

Но $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1$ (пример 5.6 и переход к пределу под знаком непрерывной функции e^x); поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (см. также упражнение 3.20б). Тогда последовательности $\sqrt[n]{|a_n|}$ и $\sqrt[n]{n|a_n|}$ имеют одни и те же частичные пределы; значит, совпадают их верхние пределы, и интересующие нас радиусы сходимости равны. ■

З а м е ч а н и е. Лемма 17.2 справедлива для степенных рядов с комплексными членами, но её реальная связь с дифференцированием и интегрированием будет показана в нашем курсе лишь для действительных степенных рядов в § 2 этой главы.

Докажем ещё два утверждения, полезные при нахождении радиусов сходимости степенных рядов.

Лемма 17.3. *Если $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$, то степенные ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ имеют одинаковые радиусы сходимости.*

□ Так как $|a_n(z-z_0)^n| \sim |b_n(z-z_0)^n|$ при всех z, то по признаку сравнения сходимости данные два ряда абсолютно сходятся или абсолютно расходятся одновременно. Но при нахождении радиуса сходимости можно ограничиться исследованием абсолютной сходимости ряда, поэтому радиусы сходимости данных рядов совпадают. ■

З а м е ч а н и е. Так как сходимость ряда в точках границы круга сходимости может быть условной, то в условиях леммы 17.3 множества точек сходимости двух данных рядов могут не совпадать (за счёт точек окружности $\{z \in \mathbb{C}\colon |z-z_0| = R\}$). Привести соответствующий пример будет предложено в качестве упражнения.

Пример 17.7. Найдём радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{3^n}\right) z^n.$$

Так как

$$a_n = \ln\left(\cos\frac{1}{3^n}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2\cdot 3^{2n}} + o\left(\frac{1}{3^{2n}}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\cdot 9^n} + o\left(\frac{1}{9^n}\right) \sim -\frac{1}{2\cdot 9^n}\,,$$

$n\to\infty$, а постоянная $-\frac{1}{2}$ не влияет на сходимость ряда, то радиус сходимости нашего ряда такой же как и у ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{9}\right)^n$.

Члены ряда образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{z}{9}$. Из примера 15.1 и замечания к нему следует, что ряд сходится при $|z|<9$ и расходится при $|z|\geqslant 9$, т.е. радиус сходимости равен 9.

Лемма 17.4. *Пусть радиусы сходимости степенных рядов* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *и* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ *равны соответственно* R_1 *и* R_2, *а радиус сходимости ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-z_0)^n$ *равен* R. *Тогда если* $R_1\neq R_2$, *то* $R=\min(R_1,R_2)$; *если* $R_1=R_2$, *то* $R\geqslant R_1$.

☐ Пусть $R_1\neq R_2$ (для определённости $R_1<R_2$). Тогда при $|z-z_0|<R_1$ оба ряда сходятся, и ряд, являющийся их суммой, также сходится. Если $|z-z_0|\in(R_1;R_0)$, то первый ряд расходится, а второй сходится. Значит сумма рядов расходится. Поэтому независимо от поведения суммы рядов при $|z-z_0|>$ $>R_2$ радиус сходимости суммы рядов равен R_1 (а при $|z-$ $-z_0|>R_2$ сумма рядов расходится, хотя, вообще говоря, сумма двух расходящихся рядов не обязана расходиться). Итак, $R=$ $=\min(R_1,R_2)$ при $R_1\neq R_2$.

Если же $R_1=R_2$, то при $|z-z_0|<R_1$ оба ряда сходятся, и сумма их также сходится; поэтому $R\geqslant R_1$. На этом возможность делать дальнейшие выводы исчерпана, так как при $|z-z_0|>R_1$ оба ряда расходятся, и о сходимости их суммы сказать ничего нельзя. ■

Пример 17.8. Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)z^n$

равен 2, так как радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$ равен 2, а радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n}$ равен 3 — члены этих рядов образуют геометрические прогрессии со знаменателями $\frac{z}{2}$ и $\frac{z}{3}$.

Пример 17.9. Ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-z^n)$ имеют радиусы сходимости, равные 1, а ряд, являющийся их суммой, — нулевой, он сходится при всех z, и его радиус сходимости равен $+\infty$.

§ 2. Степенные ряды с действительными членами

В этом параграфе будем считать, что все величины, входящие в выражение для степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, действительны. Функциональные свойства суммы ряда (непрерывность, дифференцируемость) в нашем курсе рассматриваются только в действительном случае. Соответствующий комплексный степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ имеет радиус сходимости $R \in [0; +\infty]$. Из утверждений, доказанных в § 1, непосредственно следует, что:

1) ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ имеет интервал сходимости $(x_0 - R; x_0 + +R)$ такой, что во всех точках этого интервала ряд сходится, при $|x - x_0| > R$ ряд расходится, а в точках $x = x_0 \pm R$ может вести себя по-разному (абсолютно сходиться, условно сходиться, расходиться); таким образом, множество точек сходимости ряда — промежуток числовой прямой (или одна точка x_0, если $R = 0$);
2) значение $R \in [0; +\infty]$, называемое радиусом сходимости действительного степенного ряда, можно вычислять по формуле Коши–Адамара; для нахождения R достаточно исследовать абсолютную сходимость ряда;
3) если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ имеет радиус сходимости $R \in \in (0; +\infty]$, то он равномерно сходится на любом отрезке

$[x_0 - r; x_0 + r]$, где $0 < r < R$; на всём интервале сходимости ряд может сходиться равномерно, а может сходиться и неравномерно;

4) вторая теорема Абеля: если степенной ряд с радиусом сходимости $R \in (0; +\infty]$ сходится в точке $x_1 \neq x_0$, лежащей внутри или на границе интервала сходимости, то он сходится равномерно на отрезке $[x_0; x_1]$ (или на $[x_1; x_0]$, смотря что больше).

Теорема 17.6. *Если степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *с радиусом сходимости* $R \in (0; +\infty]$ *сходится в точке* $x_1 \neq x_0$, *лежащей внутри или на границе интервала сходимости, то его сумма* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[x_0; x_1]$ *(или на* $[x_1; x_0]$, *смотря что больше). Формально проинтегрированный ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}$ *имеет тот же радиус сходимости и на отрезке* $[x_0; x_1]$ *равномерно сходится к функции* $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$.

□ Непрерывность суммы ряда $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ на отрезке $[x_0; x_1]$ следует из второй теоремы Абеля и теоремы о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций. Равенство радиусов сходимости самого ряда и формально проинтегрированного ряда следует из леммы 17.2. Равномерная сходимость формально проинтегрированного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_0}^{x} (t - x_0)^n\, dt$ к функции $F(x) = \int_{x_0}^{x} \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (t - x_0)^n \right) dt$ следует из теоремы о почленном интегрировании равномерно сходящегося ряда. ■

Следствие 1. *Сумма степенного ряда с радиусом сходимости* $R \in (0; +\infty]$ *непрерывна на промежутке, являющемся множеством точек сходимости ряда.*

□ Для произвольной точки $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$ найдётся $\delta \in$ $\in (0; R)$ такое, что $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$. По теореме 17.6 сумма ряда непрерывна на $[x_0 - \delta; x_0]$ и на $[x_0; x_0 + \delta]$, значит, она непрерывна в точке x. Если $x = x_0 + R$ или $x = x_0 - R$, и ряд сходится в точке x, то односторонняя непрерывность суммы ряда в этой точке также следует из теоремы 17.6. ■

Следствие 2. *Если* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *на промежутке, являющемся множеством точек сходимости степенного ряда, то формально проинтегрированный ряд также сходится в каждой точке этого промежутка к сумме* $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$*. Таким образом, множество точек сходимости степенного ряда принадлежит множеству точек сходимости проинтегрированного ряда (радиусы сходимости этих рядов одинаковы); точки, где проинтегрированный ряд сходится, а сам ряд расходится, могут находиться лишь на границе интервала сходимости.*

Пример 17.10. Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ имеет радиус сходимости 1 и сходится только в точках интервала $(-1; 1)$ (пример 15.1). В точках $x = \pm 1$ он расходится, так как его общий член не стремится к нулю. Формально проинтегрированный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ имеет тот же радиус сходимости 1 и сходится во всех точках интервала $(-1; 1)$, а также в точке $x = -1$ (ряд Лейбница); в точке $x = 1$ он расходится (гармонический ряд). Ещё раз проинтегрированный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$ имеет тот же радиус сходимости 1 и по признаку Вейерштрасса сходится абсолютно и равномерно на всём отрезке $[-1; 1]$.

Таким образом, степенной ряд обладает тем свойством, что сумма его непрерывна во всех точках, где он сходится, и на любом отрезке, где ряд сходится, его можно почленно интегрировать. Даже Коши, который владел строгими определениями предела и непрерывности, сначала ошибочно считал, что сумма ряда из непрерывных функций всегда непрерывна. Абель указал на эту ошибку в рассуждениях Коши и доказал, что для степенного ряда сумма непрерывна во всех точках его сходимости. Наконец, Вейерштрасс ввёл понятие равномерной сходимости, и соответствующая теория стала логически завершённой.

Теорема 17.7. *Пусть* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *— сумма степенного ряда с радиусом сходимости* $R \in (0; +\infty]$. *Тогда функция* f *бесконечно дифференцируема (т.е. имеет производные всех порядков* $k = 1, 2, \ldots$*) на интервале* $(x_0 - R; x_0 + R)$*; при этом при всех* $k = 1, 2, \ldots$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n(n-1)\ldots(n-k+1)(x - x_0)^{n-k},$$

$$x \in (x_0 - R; x_0 + R),$$

и каждый такой ряд (k *раз формально продифференцированный исходный ряд) имеет тот же радиус сходимости* R.

$\square$ Теорему достаточно доказать для $k = 1$, далее применять её последовательно. Формально продифференцированный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$ имеет тот же радиус сходимости, что и исходный, по лемме 17.2. Так как при всех $r \in (0; R)$ продифференцированный ряд равномерно сходится на отрезке $[x_0 - r; x_0 + r]$, а сам ряд сходится, например, в точке $x = x_0$, то по теореме о почленном дифференцировании функционального ряда равенство $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$ имеет место на отрезке $[x_0 - r; x_0 + r]$, а в силу произвольности $r \in (0; R)$ — и на всём интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$. $\blacksquare$

Определение 17.3. Функция действительной переменной f называется аналитической в точке x_0, если существует $\delta > 0$ такое, что при всех $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ выполняется равенство $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ (радиус сходимости последнего ряда $R \geqslant \delta$).

Теорема 17.8. *Если функция* f *— аналитическая в точке* x_0*, то она имеет в точке* x_0 *производные всех порядков, причём коэффициенты степенного ряда, являющегося разложением функции* f*, вычисляются по формулам* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $k = 1, 2, \ldots$*, т.е. разложение аналитической функции в сте-*

пенной ряд в окрестности точки единственно:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

(степенной ряд является рядом Тейлора функции f).

□ Бесконечная дифференцируемость аналитической функции на всём интервале $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ следует из теоремы 17.7; при этом $f(x_0) = a_0$. Так как при $k = 1, 2, \ldots$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n(n-1)\ldots(n-k+1)(x-x_0)^{n-k},$$
$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta,$$

то $f^{(k)}(x_0) = a_k \cdot k!$ (все слагаемые при $n > k$ обращаются в нуль), и $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $k = 1, 2, \ldots$ ■

Обратное утверждение неверно: бесконечно дифференцируемая в окрестности точки функция не обязана быть аналитической в этой точке.

Пример 17.11. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Докажем, что для этой функции $f^{(k)}(0) = 0$ при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ (см. также упражнение 5.4); график этой функции изображён на рис. 17.2. Отсюда будет следовать, что ряд Тейлора этой функции в точке $x = 0$ — нулевой. Сумма этого ряда равна 0 при всех x, и ряд Тейлора функции f не сходится к $f(x)$ ни в одной окрестности точки 0 (т.е. эта функция бесконечно дифференцируема в любой точке, но не является аналитической в точке $x = 0$).

□ Так как $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, то функция f непрерывна в точке $x = 0$ (и, следовательно, в любой точке). Далее,

$$f'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{t^2}}}{t} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\sqrt{y}}{e^y} = 0$$

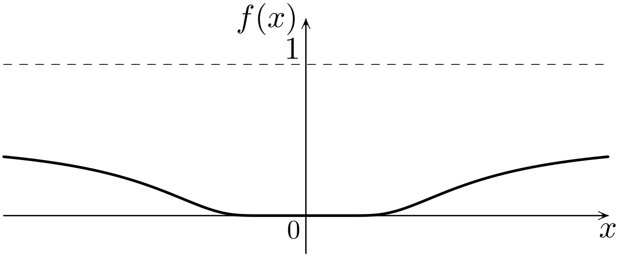

Рис. 17.2

(сделана замена $y = \frac{1}{t^2}$; из утверждения примера 5.5 при $p = \frac{1}{2}$ следует, что последний предел равен 0). Тогда $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Покажем по индукции, что при всех $k = 1,\ 2,\ \ldots$

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{P_k(x)}{x^{3k}} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases} \tag{17.1}$$

где $P_k(x)$ — многочлен. При $k = 1$ утверждение уже доказано. Пусть оно верно для некоторого $k \in \mathbb{N}$, докажем его справедливость для следующего значения $k+1$. При $x \neq 0$ имеем

$$f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)}(x))' =$$
$$= e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} \cdot \frac{P_k(x)}{x^{3k}} + e^{-\frac{1}{x^2}}\, \frac{x^{3k}P_k'(x) - 3kx^{3k-1}P_k(x)}{x^{6k}} =$$
$$= e^{-\frac{1}{x^2}} \left[\frac{2P_k(x)}{x^{3k+3}} + \frac{P_k'(x)}{x^{3k}} - \frac{3kP_k(x)}{x^{3k+1}}\right] = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{P_{k+1}(x)}{x^{3k+3}}.$$

Далее, $f^{(k+1)}(0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f^{(k)}(t) - f^{(k)}(0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{P_k(t)}{t^{3k+1}}\, e^{-\frac{1}{t^2}} = P_k(0) \cdot \lim\limits_{t\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{t^2}}}{t^{3k+1}} = P_k(0) \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{y^{\frac{3k+1}{2}}}{e^y} = 0$ (сделана замена $y = \frac{1}{t^2}$, из утверждения примера 5.5 при $p = \frac{3k+1}{2}$ следует, что последний предел равен 0). Формула (17.1) для $f^{(k)}(x)$ доказана по индукции; в частности, доказано, что $f^{(k)}(0) = 0$ при $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ ■

Приведём простейший пример аналитической функции.

Пример 17.12. Так как $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, $-1 < x < 1$, то функция $f(x) = \frac{1}{1-x}$ аналитическая в точке $x = 0$; радиус сходимости ряда равен 1. Докажем, что функция f аналитическая в любой точке $x = x_0 \neq 1$. Сделаем замену $x - x_0 = t$:

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x_0-t} = \frac{1}{1-x_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{1-x_0}} =$$

$$= \frac{1}{1-x_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{1-x_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{(1-x_0)^{n+1}}\,.$$

Применено разложение

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n,$$

где $u = \frac{t}{1-x_0} = \frac{x-x_0}{1-x_0}$. Ряд сходится при всех x таких, что $\left|\frac{x-x_0}{1-x_0}\right| < 1$, т.е. $|x-x_0| < |1-x_0|$, и расходится при всех x таких, что $\left|\frac{x-x_0}{1-x_0}\right| \geqslant 1$, т.е. $|x-x_0| \geqslant |1-x_0|$. Поэтому функция f аналитическая в точке $x = x_0$, и радиус сходимости ряда Тейлора равен $|1-x_0|$.

§ 3. Разложение элементарных функций в степенные ряды

Для аналитичности функции в точке x_0 необходима, но не достаточна её бесконечная дифференцируемость в этой точке. Нужно, чтобы ряд Тейлора $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n$ сходился к $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0. Иными словами, остаточный член $r_n(f,x)$ в формуле Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k + r_n(f,x)$$

должен стремиться к нулю при $n \to \infty$ в каждой фиксированной точке $x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)$, $\delta > 0$. Это совсем другой предельный процесс по сравнению с формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано; там n фиксировано, а $r_n(f,x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$. Для выполнения последнего предельного равенства достаточно наличия ровно n конечных производных в точке x_0. Например, функция из примера 17.11 имеет в точке $x = 0$ производные всех порядков, равные 0 (касание оси Ox бесконечного порядка). Поэтому для этой функции имеет место формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для всех $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$:

$$f(x) = o(x^n), \quad x \to 0,$$

но эта функция не является аналитической в точке $x = 0$.

Для доказательства аналитичности конкретных функций и получения их разложений в ряд Тейлора мало вычислить производные всех порядков в соответствующей точке x_0; нужно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(f,x) = 0$ при $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $\delta > 0$.

Теорема 17.9 (остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме). *Если функция f имеет $n+1$ непрерывную производную ($n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$) на интервале $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, то остаточный член формулы Тейлора имеет вид*

$$r_n(f,x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt, \quad x \in (x_0-\delta; x_0+\delta). \quad (17.2)$$

□ Доказательство по индукции. При $n = 0$ получим

$$r_0(f,x) = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt$$

— это известная формула Ньютона–Лейбница, имеющая место, если f' непрерывна на $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$. Пусть формула (17.2) верна при некотором $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ Докажем её справедливость для следующего значения $n+1$. Имеем

$$r_{n+1}(f,x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$

$$= r_n(f,x) - \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} =$$

$$= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)(x-t)^n\,dt - \frac{1}{n!}\,f^{(n+1)}(x_0)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,dt$$

(здесь использовано то, что $\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,dt = -\left.\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right|_{x_0}^{x} = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$). Тогда

$$r_{n+1}(f,x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(x_0))(x-t)^n\,dt.$$

Интегрируем по частям: $u = f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(x_0)$; $du = f^{(n+2)}(t)\,dt$; $dv = (x-t)^n\,dt$; $v = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}$. Окончательно имеем

$$r_{n+1}(f,x) = -\frac{1}{(n+1)!}\,(x-t)^{n+1}(f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(x_0))\Big|_{x_0}^{x} + \\ + \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}dt.$$

Так как обынтегрированный член равен 0, то равенство (17.2) доказано для значения $n+1$. По индукции формула (17.2) доказана для всех $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ ■

Следствие 1. *Так как функция $(x-t)^n$ сохраняет знак при $t \in [x_0; x]$, то по теореме о среднем для интеграла Римана*

$$r_n(f,x) = \frac{1}{n!}\,f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,dt = \\ = \frac{1}{n!}\,f^{(n+1)}(\xi)\left(-\left.\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right|_{x_0}^{x}\right) = \\ = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}, \quad \xi \in [x_0; x].$$

Получили остаточный член в форме Лагранжа. Ранее (теорема 4.19) эта формула была выведена при более слабых условиях (наличие конечной $f^{(n+1)}(x)$ на интервале $(x_0-\delta; x_0+\delta)$) с $\xi \in (x_0; x)$.

Следствие 2. *По теореме о среднем, оставляя под интегралом функцию* 1, *имеем*

$$r_n(f,x) = \frac{1}{n!}\, f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n \int_{x_0}^{x} dt = \frac{1}{n!}\, f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n (x-x_0).$$

Так как $\xi \in [x_0; x]$, *то* $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$; $x - \xi = x - x_0 - \theta(x - x_0) = (1-\theta)(x - x_0)$, *и*

$$r_n(f,x) = \frac{1}{n!}\, f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))(1-\theta)^n (x-x_0)^{n+1}; \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

Эта форма остаточного члена называется формой Коши (мы её применять не будем).

З а м е ч а н и е. В интегральной теореме о среднем всегда можно добиться того, чтобы точка ξ была внутренней точкой соответствующего отрезка, т.е. здесь $\xi \in (x_0; x)$ и $\theta \in (0; 1)$, но сейчас это несущественно.

Нам известны разложения некоторых элементарных функций по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано при $x \to 0$. Постараемся доказать, что для этих функций $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(f,x) = 0$ для всех x из некоторой окрестности точки $x = 0$, т.е. превратить эти разложения в ряды Тейлора.

Лемма 17.5. *Если функция f бесконечно дифференцируема на интервале $I = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $\delta > 0$ и*

$$\exists\, M > 0 : \quad \forall\, x \in I, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \to |f^{(n)}(x)| \leqslant M,$$

то ряд Тейлора функции f сходится к $f(x)$ при всех $x \in I$.

$\square$ Если $x \in I$, то при $t \in [x_0; x]$ выполняется неравенство $|x - t| < \delta$. Поэтому

$$|r_n(f,x)| = \frac{1}{n!} \left| \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \right| \leqslant \frac{M\delta^n}{n!} \left| \int_{x_0}^{x} dt \right| \leqslant \frac{M\delta^n}{n!}\, \delta.$$

Но $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\delta^n}{n!} = 0$ (пример 2.11), поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(f,x) = 0$ при всех $x \in I$. А это означает, что ряд Тейлора функции f сходится к $f(x)$ при всех $x \in I$. $\blacksquare$

Теорема 17.10. *Ряды Маклорена (т.е. ряды Тейлора в точке $x_0 = 0$) для функций e^x, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\cos x$, $\sin x$ сходятся к этим функциям в любой точке $x \in \mathbb{R}$, т.е. при всех x*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,; \quad \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,; \quad \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,;$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\,; \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,;$$

радиусы сходимости всех этих рядов равны $+\infty$.

☐ Так как при всех $n = 1,\ 2,\ \ldots$

$$(e^x)^{(n)} = e^x; \quad (\operatorname{ch} x)^{(n)} = \frac{e^x + (-1)^n e^x}{2}\,;$$

$$(\operatorname{sh} x)^{(n)} = \frac{e^x - (-1)^n e^x}{2}\,;$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\,n\right); \quad (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\,n\right),$$

то при всех $x \in (-\delta; \delta)$, $\delta > 0$, выполняются неравенства

$$|(e^x)^{(n)}| \leqslant e^\delta; \quad |(\operatorname{ch} x)^{(n)}| \leqslant e^\delta; \quad |(\operatorname{sh} x)^{(n)}| \leqslant e^\delta;$$
$$|(\cos x)^{(n)}| \leqslant 1; \quad |(\sin x)^{(n)}| \leqslant 1.$$

Поэтому по лемме 17.5 эти функции являются суммами своих рядов Тейлора на любом интервале $(-\delta; \delta)$, $\delta > 0$, а значит, и при всех $x \in \mathbb{R}$. Так как ряды сходятся в каждой точке, то их радиусы сходимости равны $+\infty$. ■

Теорема 17.11. *Для любого действительного числа $\alpha \neq \neq 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ ряд Маклорена функции $(1+x)^\alpha$ сходится к этой функции в любой точке $x \in (-1; 1)$, т.е. при всех $x \in (-1; 1)$:*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n,$$

где

$$C_\alpha^0 = 1, \quad C_\alpha^n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$$

при $n \in \mathbb{N}$; радиус сходимости такого ряда равен 1.

З а м е ч а н и е. При $\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ и $n \geqslant \alpha$ имеет место равенство $C_\alpha^n = 0$; ряд превращается в конечную сумму (формула бинома Ньютона), и радиус сходимости его равен $+\infty$.

$\square$ Найдём радиус сходимости ряда при $\alpha \neq 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ Если $x \neq 0$, то

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)x^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^n}\right| = \\ = \frac{|\alpha-n|}{n+1}\,|x| \to |x| \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

По признаку Даламбера ряд абсолютно сходится при $0 < |x| < 1$ и абсолютно расходится при $|x| > 1$; так как в точке $x = 0$ ряд абсолютно сходится, то по лемме 17.1 радиус сходимости ряда равен 1.

Далее, $f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}$ при всех $n = 1,\ 2,\ \ldots,\ x > -1$. Напишем остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме:

$$r_n(f,x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x (1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n dt.$$

Имеем

$$\frac{|r_{n+1}(f,x)|}{|r_n(f,x)|} = \\ = \frac{|\alpha-n-1|}{n+1}\cdot\frac{\left|\int_0^x |x-t|^n(1+t)^{\alpha-n-1}\,\frac{|x-t|}{1+t}\,dt\right|}{\left|\int_0^x |x-t|^n(1+t)^{\alpha-n-1}dt\right|}; \quad (17.3)$$

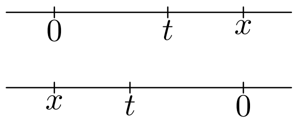

Рис. 17.3

здесь учтено, что при $t \in [0;x]$ (или $t \in [x;0]$ — в зависимости от знака x) выражение $x - t$ сохраняет знак, совпадающий со знаком x и t, а так как $1 + t > 0$, то функция $\varphi(t)$ под знаком интеграла в формуле для $r_n(f,x)$ сохраняет знак, и $\left|\int_0^x \varphi(t)\,dt\right| = \left|\int_0^x |\varphi(t)|\,dt\right|$. Если $x > 0$, то $0 < t < x$; если $x < 0$, то $x < t < 0$ (см. рис. 17.3). В любом случае $|x - t| = |x| - |t|$. Пусть теперь $x \neq 0$, $0 < |x| < 1$; тогда при $t \in [0;x]$

выполняется неравенство $|t| < 1$. Так как $1+t \geqslant 1-|t| > 0$, то

$$\frac{|x-t|}{1+t} \leqslant \frac{|x|-|t|}{1-|t|} = |x| \cdot \frac{1-\dfrac{|t|}{|x|}}{1-|t|} < |x|$$

(здесь учтено, что $\dfrac{|t|}{|x|} > |t|$). Тогда из (17.3) получим

$$\frac{|r_{n+1}(f,x)|}{|r_n(f,x)|} \leqslant \frac{|n+1-\alpha|}{n+1} \cdot |x| \cdot \frac{\left|\int_0^x |x-t|^n (1+t)^{\alpha-n-1}\,dt\right|}{\left|\int_0^x |x-t|^n (1+t)^{\alpha-n-1}\,dt\right|} =$$

$$= \frac{|n+1-\alpha|}{n+1} \cdot |x|.$$

Но $|x| \in (0;1)$, поэтому можно выбрать $\varepsilon > 0$ так, что $(1 + \varepsilon)|x| < 1$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|n+1-\alpha|}{n+1}|x| = |x|$, то

$$\exists\, n_0 : \quad \forall\, n \geqslant n_0 \to \frac{|r_{n+1}(f,x)|}{|r_n(f,x)|} \leqslant (1+\varepsilon)|x| < 1.$$

По признаку Даламбера в общей форме (теорема 15.8) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |r_n(f,x)|$ сходится. Во всяком случае отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(f,x) = 0$ при $0 < |x| < 1$ (а значит, и для всех $x \in (-1;1)$). Поэтому ряд Тейлора функции $(1+x)^\alpha$ сходится к этой функции при всех $x \in (-1;1)$. ■

Приведённое доказательство теоремы 17.11 сообщил автору О.В. Бесов.

Следствие. *Если $\alpha = -1$, то получим разложение $\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, $x \in (-1;1)$. Заменив x на $-x$, получим уже известное разложение $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-1;1)$. Радиусы сходимости обоих рядов равны 1.*

Теорема 17.12. *Ряды Маклорена функций $\ln(1+x)$ и $\operatorname{arctg} x$ сходятся к этим функциям в любой точке $x \in (-1;1)$, т.е. при всех $x \in (-1;1)$*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}\,; \quad \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\,;$$

радиусы сходимости этих рядов равны 1.

□ Интегрируя разложение $\frac{1}{1+x}$, по следствию 2 из теоремы 17.6 имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x), \quad -1 < x < 1.$$

После сдвига индекса в сумме получим нужное равенство

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad -1 < x < 1. \tag{17.4}$$

Так как при интегрировании радиус сходимости степенного ряда не меняется, то у ряда в правой части (17.4) тот же радиус сходимости, что и у разложения $\frac{1}{1+x}$, т.е. $R = 1$.

Подставим теперь в разложение $\frac{1}{1+x}$ значение x^2 вместо x

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}. \tag{17.5}$$

Так как ряд Тейлора функции $\frac{1}{1+x}$ имеет радиус сходимости 1, то он сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$. Поэтому ряд в правой части (17.5) сходится при $|x^2| < 1$, т.е. при $|x| < 1$, и расходится при $|x^2| > 1$, т.е. при $|x| > 1$, и радиус сходимости этого ряда также равен 1. Интегрируя теперь разложение (17.5), по следствию из теоремы 17.6 имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} x, \quad -1 < x < 1. \tag{17.6}$$

Так как при интегрировании радиус сходимости степенного ряда не меняется, то у ряда в левой части (17.6) тот же радиус сходимости, что и у ряда в правой части (17.5), т.е. $R = 1$. ■

З а м е ч а н и е. Степенной ряд в правой части (17.4) сходится в точке $x = 1$ (ряд Лейбница) и расходится в точке $x = -1$, а степенной ряд в правой части (17.6) сходится в обеих точках $x = \pm 1$. По теореме 17.6, суммы этих рядов непрерывны (односторонне) в концах интервала сходимости, в которых ряд сходится. Так как функции $\ln(1+x)$ и $\operatorname{arctg} x$ также непрерывны в этих точках, то равенство (17.4) сохраняется при $-1 < x \leqslant 1$, а равенство (17.6) — при $-1 \leqslant x \leqslant 1$. При $x = 1$ имеем:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots; \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Пример 17.13. Разложить в ряд по степеням $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ функцию $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{-\frac{x}{x+1}}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

□ После замены $x + \frac{1}{2} = t$ получим: $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-2t}{1+2t}} = g(t)$. Так как $g'(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-4t^2}}$, то можно воспользоваться основным разложением $(1+u)^{-1/2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_{-1/2}^{n} u^n$, радиус сходимости которого равен 1, т.е. ряд сходится при $|u| < 1$ и расходится при $|u| > 1$. Подставляя в это разложение $u = -4t^2$, имеем

$$g'(t) = -\sum_{n=0}^{\infty} C_{-1/2}^{n} (-4t^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_{-1/2}^{n} (-1)^{n+1} 4^n t^{2n}. \qquad (17.7)$$

Последний ряд сходится при $|-4t^2| < 1$, т.е. $|t| < \frac{1}{2}$, и расходится при $|-4t^2| > 1$, т.е. $|t| > \frac{1}{2}$, поэтому его радиус сходимости равен $\frac{1}{2}$. Интегрируем разложение (17.7):

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{-1/2}^{n} (-1)^{n+1} \cdot 4^n \, \frac{t^{2n+1}}{2n+1} =$$
$$= \int_0^t g'(y)\, dy = g(t) - g(0) = g(t) - \frac{\pi}{4}\,.$$

Так как при интегрировании радиус сходимости степенного ряда не меняется, то радиус сходимости последнего ряда также равен $\frac{1}{2}$. Итак,

$$f(x) = g(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} C_{-1/2}^{n} (-1)^{n+1} \cdot 4^n \, \frac{t^{2n+1}}{2n+1} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} C_{-1/2}^{n} (-1)^{n+1} \cdot 4^n \, \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{2n+1}, \quad R = \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

§ 4. Разложение в степенные ряды функций e^z, $\cos z$, $\sin z$

Напомним, что для любого $z \in \mathbb{C}$ ($z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$) определяются выражения

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y); \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Последние две формулы называются формулами Эйлера. Из них следует, что $e^{iz} = \cos z + i \sin z$; $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$. Основное свойство экспоненты $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ сохраняется для комплексных показателей (лемма 7.5).

Теорема 17.13. *Для любых $z \in \mathbb{C}$ имеют место равенства*

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}; \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

☐ По теореме 17.10 соответствующие разложения верны для всех $z = x \in \mathbb{R}$, значит, радиусы сходимости всех этих рядов равны $+\infty$, и ряды эти абсолютно сходятся при всех $z \in \mathbb{C}$.

Пусть $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Тогда $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$;

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!}$$

(здесь использовано то, что ряды абсолютно сходятся, и суммировать их можно в любом порядке).

Если мы докажем, что при любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ выполняется равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!}, \tag{17.8}$$

то легко увидим, что

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

и разложение в ряд e^z будет получено. Остаётся доказать равенство (17.8). Но произведение двух абсолютно сходящихся рядов — абсолютно сходящийся ряд, который можно суммировать в любом порядке. Применим суммирование «по пачкам» $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ (см. рис. 17.4):

$$\begin{tikzcd}
u_0v_0 \arrow[r] & u_0v_1 \arrow[dl] & u_0v_2 \arrow[r] & \cdots & u_0v_n & \cdots \\
u_1v_0 \arrow[d] & u_1v_1 \arrow[ur] & u_1v_2 & \cdots & u_1v_n & \cdots \\
u_2v_0 \arrow[ur] & u_2v_1 & u_2v_2 & \cdots & u_2v_n & \cdots \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
u_nv_0 & u_nv_1 & u_nv_2 & \cdots & u_nv_n & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & &
\end{tikzcd}$$

Рис. 17.4

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!} \cdot \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!}.$$

Разложение для функции e^z обосновано.

Теперь при всех $z \in \mathbb{C}$ получим

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

(так как ряд абсолютно сходится, то его можно суммировать в любом порядке). Значит,

$$e^{iz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}\,. \tag{17.9}$$

Подставим $-z$ вместо z:

$$e^{-iz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} - i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}\,. \tag{17.10}$$

Складывая и вычитая равенства (17.9) и (17.10), получим при всех $z \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z;$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z. \qquad \blacksquare$$

Упражнения к главе XVII

17.1. Найти радиусы сходимости рядов с комплексными членами:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (2+3i)^n z^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^n}}{n!}\, z^n$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{nz}{e}\right)^n$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{5^n}\, z^{3n}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! z^{n!}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{2n^3} (z-1)^n$.

17.2. Найти множество точек сходимости ряда с действительными членами; в концах интервала сходимости исследовать также абсолютную сходимость ряда:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3n+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-2}{5}\right)^n$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1) x^n$, $a > 0$.

17.3. Привести пример двух степенных рядов с действительными членами $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$ таких, что

$a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$ (следовательно, они имеют один и тот же радиус сходимости R), но в точке $x_0 + R$ первый ряд сходится, а второй — нет. Может ли при этом первый ряд сходиться абсолютно в точке $x_0 + R$?

17.4. Доказать, что если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \in$ $\in [0; +\infty]$, то радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ равен $\frac{1}{\rho}$. Привести пример степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, все коэффициенты которого отличны от нуля, но аналог формулы Коши–Адамара $R = \dfrac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$ не имеет места.

17.5. Пусть степенной ряд с действительными членами $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при всех $x \in (0; 1)$ к сумме $f(x)$. Если существует $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = S$, то говорят, что числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем к числу S методом Абеля–Пуассона. Доказать, что если числовой ряд сходится к числу S, то он суммируем методом Абеля–Пуассона к S.

17.6. Доказать, что числовые ряды:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha$, $\alpha \in [0; 2\pi]$; г) $\frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos n\alpha$, $\alpha \in (0; 2\pi)$

суммируемы методом Абеля–Пуассона и найти их «обобщённые суммы».

17.7. Доказать, что если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ с радиусом сходимости $R \in (0; +\infty)$ равномерно сходится на интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$, то он сходится в точках $x = x_0 \pm R$.

17.8. Доказать, что если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ равномерно сходится на всей числовой прямой, то лишь конечное число его коэффициентов отлично от нуля (т.е. он является многочленом).

17.9. Разложить в ряды по степеням x функции $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ и $\dfrac{1}{(1-x)^3}$, найти радиусы сходимости этих рядов. Доказать, что если в эти ряды вместо переменной $x \in \mathbb{R}$ подставить $z \in \mathbb{C}$, то суммы этих рядов в круге сходимости равны соответственно $\dfrac{1}{(1-z)^2}$ и $\dfrac{1}{(1-z)^3}$.

17.10. Разложить в ряд по степеням x функцию $\arcsin x$, найти радиус сходимости полученного ряда. Исследовать сходимость ряда в концах интервала сходимости. Написав разложение функции $\arcsin x$ в точке $x = 1$, получить формулу для разложения числа π в ряд.

17.11. Разложить функции в ряды по степеням $x - x_0$ и найти радиусы сходимости полученных рядов:

а) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 6x + 8}$, $x_0 = 0$ и $x_0 = 3$;

б) $f(x) = \ln \dfrac{|x^2 - 2|}{x^2 + 1}$, $x_0 = 0$;

в) $f(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 4})$, $x_0 = 0$;

г) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 18}}$, $x_0 = 3$;

д) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{2x - 3}{x + 6}$, $x_0 = 0$.

17.12. Пусть функции f и g являются аналитическими в точке x_0 и существует последовательность точек x_n такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $x_n \neq x_0$, $f(x_n) = g(x_n)$ при $n = 1,\ 2,\ \ldots$ Доказать, что $f(x) = g(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 (теорема единственности для аналитических функций).

17.13. Доказать, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n^2 x}{2^n}$ (см. упражнение 16.15) бесконечно дифференцируема на всей числовой прямой, но ряд Тейлора $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$ сходится в единственной точке $x = 0$ (т.е. бесконечно дифференцируемая функция может не быть аналитической не только потому, что ряд Тейлора не сходится к ней ни в какой окрестности соответствующей точки, как в примере 17.11, но и потому, что ряд Тейлора имеет нулевой радиус сходимости).

17.14. Применяя почленное дифференцирование степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, найти суммы рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^n$, $-1 < x < 1$.

17.15. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 1, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

бесконечно дифференцируема в точке $x = 0$.

17.16. Применяя разложение подынтегральной функции в ряд Маклорена, вычислить $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$ с точностью до 10^{-3}.

17.17. Доказать, что если функция f бесконечно дифференцируема на интервале $I = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $\delta > 0$ и

$$\exists\, M > 0 : \quad \forall\, x \in I, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \to |f^{(n)}(x)| \leqslant M^n,$$

то ряд Тейлора функции f сходится к $f(x)$ при всех $x \in I$ (усиление леммы 17.5).

17.18. Доказать, что функция $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{4n}}{(4n)!}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y^{(4)} = y$. Вычислить сумму указанного ряда при всех $x \in \mathbb{R}$.

17.19. Доказать, что для всех $z \in \mathbb{C}$ имеют место равенства

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}\,; \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.$$

17.20. Разложить в ряд по степеням x функцию $e^x \cos x$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

Литература

1. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Т. 1. – М.: Высшая школа, 1981. – 688 с.
2. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Т. 1. – 4-е изд. – М.: Наука, 1990. – 528 с.
3. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. – М.: Наука, 1988. – 816 с.
4. *Яковлев Г.Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. – М.: Физматлит, 2001. – 400 с.
5. *Бесов О.В.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. – М.: МФТИ, 2004. – 328 с.
6. *Иванов Г.Е.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. – М.: МФТИ, 2011. – 318 с.
7. *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды /под ред. Л.Д. Кудрявцева. – 2-е изд. – М.: Физматлит, 2003. – 504 с.
8. *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных /под ред. Л.Д. Кудрявцева. – 2-е изд. – М.: Физматлит, 2003. – 472 с.
9. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – 10-е изд. – М.: Наука, 1990. – 624 с.
10. *Петрович А.Ю.* Лекции по математическому анализу. Ч.1. Введение в математический анализ. – М.: МФТИ, 2012. — 275 с.

Учебное издание

Петрович Александр Юрьевич

ЛЕКЦИИ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
Часть 2
Многомерный анализ, интегралы и ряды

Редактор *О.П. Котова*
Корректор *И.А. Волкова*

Подписано в печать 21.06.2012. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Усл. печ. л. 16,75.
Уч.-изд. л. 16,0. Тираж 600 экз. Заказ № 164.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: rio@mail.mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9