МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕГ МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

(государственный университет)

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ ДЛЯ СТУДЕНТОВ 2-го СЕМЕСТРА І-го КУРСА

Учебно-методичекое пособие Составитель А. А. Бурцев

> МОСКВА МФТИ 2011

Содержание

Введение	4
Некоторые обозначения	4
§ 1. Вариант МФТИ-54	(
§ 2. Вариант МФТИ-61	38
§3. Вариант МФТИ-71	48
$\S 4$. Вариант МФТИ-81	56
§5. Вариант МФТИ-02	62
Литература	68

Введение

В пособии приводятся решения задач по математическому анализу, которые входят в письменную экзаменационную работу по математическому анализу для студентов первого курса МФТИ во 2-м семестре. Рассматриваются экзаменационные работы вторых семестров 2004/2005, 2005/2006, 2006/2007, 2007/2008, 2009/2010 уч. гг., по одному из четырёх вариантов работ, предлагавшихся на экзамене в каждом учебном году. Приводятся подробные решения задач и ответы, даются методические указания, разбираются типичные ошибки, рассматриваются соответствующие контрпримеры, формулируются, а иногда и доказываются необходимые утверждения, взятые, как правило, из лекций по математическому анализу, читающихся для студентов 1-го курса МФТИ. Некоторые задачи решаются несколькими способами, изложенными в одном или разных вариантах. Цель пособия – оказать помощь студенту в освоении методов решения задач, что необходимо для успешного выполнения экзаменационной работы, а также может быть полезным для усвоения теоретического курса математического анализа в объёме 2-го семестра. Отметим, что данное учебное пособие не заменяет курса лекций и учебников. Составитель благодарит А. Ю. Петровича и Р. Н. Бояринова за ценные советы и замечания. Работа поддержана АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», проект 2.1.1/1662.

Некоторые обозначения

∀ — любой

∃ — существует

∄ — не существует

⇔ — равносильно

 \Rightarrow — следовательно

 $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

$$\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty, \infty\}$$

 $\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty, \infty\} \cup \{x+0, x-0 : x \in \mathbb{R}\}$

 $x \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow x$ есть действительное число или один из символов $+\infty, -\infty$

 $x \in \widehat{\mathbb{R}} \Leftrightarrow x$ есть действительное число или один из символов $+\infty$, $-\infty$, ∞

 $x \in \widetilde{\mathbb{R}} \Leftrightarrow x$ есть действительное число или один из символов $+\infty$, $-\infty$, ∞ , a+0, a-0, где a — действительное число

$$f(x) o b$$
, если $x o a \Leftrightarrow \lim_{x o a} f(x) = b$, где $a \in \widetilde{\mathbb{R}}, \ b \in \widetilde{\mathbb{R}}$ $f(a+0) = \lim_{x o a+0} f(x), \ a \in \mathbb{R}$

$$f(a-0) = \lim_{x \to a-0} f(x), \ a \in \mathbb{R}$$

f(x) — значение функции f в точке x, а также иногда этот знак обозначает функцию f

 $\min\{a,b\}$ — минимум из a и b, где $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$

 $\max\{a,b\}$ — максимум из a и b, где $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$

 \sim — эквивалентно

 \checkmark — не эквивалентно

 $f(x) \sim g(x)$ и $g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестости $a \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1; \ a \in \widetilde{\mathbb{R}}$

 $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a \Leftrightarrow f(x) - g(x) = o(g(x))$ при $x \to a \Leftrightarrow g(x) = o(g(x))$ $\Leftrightarrow f(x)=\lambda(x)g(x)$ при $x \to a$, причём $\lim_{x \to a}\lambda(x)=1; \ a \in \widetilde{\mathbb{R}}$

 $x_n \sim y_n$ при $n o \infty \Leftrightarrow x_n - y_n = o(y_n)$ при $n o \infty$

o(1) — бесконечно малая функция при $x \to a, a \in \mathbb{R}$, или бесконечно малая последовательность при $n \to \infty$

 $C[a, +\infty)$ — множество всех функций, непрерывных на луче $[a, +\infty), a \in \mathbb{R}$

 $f \in C[a, +\infty)$ — функция f непрерывна на луче $[a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$

R[a,b] — множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке [a, b], где $a, b \in \mathbb{R}$, b > a

 $f \in R[a,b]$ — функция f интегрируема по Риману на отрезке [a,b], где $a,b \in \mathbb{R}$, b>a

$$f\downarrow --f$$
 убывает

 $f \perp \!\!\! \perp - f$ строго убывает

 $f \downarrow \downarrow a$ на луче $[x_0; +\infty)$ — f строго убывает на луче $[x_0; +\infty)$ и $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$

 $f\downarrow$ при $x\to +\infty$ — f убывает на луче $[x_0,+\infty)$ для некоторого $x_0 \in \mathbb{R}$

 $f\downarrow a$ при $x\to +\infty$ — f убывает на луче $[x_0,+\infty)$ для некоторого $x_0 \in \mathbb{R}$ и $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$

 $f \uparrow \uparrow - f$ строго возрастает

 $f \uparrow \uparrow a$ на луче $[x_0; +\infty)$ — f строго возрастает на луче $[x_0; +\infty)$ и $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$

⇒ — сходится равномерно

 $f(x)|_{x=a}$ — знак подстановки, здесь f(a)

 $|f(x)|_a^b$ — знак подстановки, здесь f(b) - f(a)

 $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n = 2^n (n!)$

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) = \frac{(2n)!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)}$$

[x] – целая часть числа $x \in \mathbb{R}$ – наибольшее целое число, не превосходящее x. Для всех $x \in \mathbb{R}$ имеют место неравенства: $[x] \leqslant x < [x] + 1$

окрестность $+\infty$ — интервал $(c, +\infty)$, c > 0

промежуток — отрезок, интервал или полуинтервал

критическая точка производной — значение аргумента, при котором производная обращается в ноль либо не существует

 $\rho(M,N)$ — расстояние между точками M и N $A \wedge B$ — конъюнкция утверждений A и B

§ 1. Вариант МФТИ-54¹

 4^2 Найти первый и второй дифферен-Задача 1.

циалы в точке D(1;1) функции f(x,y), если f(x,y) = $=ue^{2xy-x-y}$. Разложить функцию f(x,y) по формуле Тейлора в окрестности точки D(1;1) до $o((x-1)^2+(y-1)^2)$.

Решение. I способ («формальное дифференцирование»). Формально дифференцируя тождество $f = ye^{2xy-x-y}$, находим $df = dy \cdot e^{2xy-x-y} + ye^{2xy-x-y}(2dx \cdot y + 2xdy - dx - dy)$ (1). Подставляя в (1) x = 1, y = 1, находим df(1; 1) = dx + 2dy.

Формально дифференцируя тождество (1), считая dx и dyпостоянными, а $d(df) = d^2 f$, находим $d^2 f = dy \cdot e^{2xy - x - y} (2dx \cdot y + y)$ $+2xdy - dx - dy + dy \cdot e^{2xy - x - y}(2dx \cdot y + 2xdy - dx - dy) +$ $+ ye^{2xy-x-y}(2dx \cdot y + 2xdy - dx - dy)^2 + ye^{2xy-x-y}(2dxdy + ye^{2xy-x-y})^2$ +2dxdy) (2). Подставляя в (2) x=1, y=1, находим $d^2 f(1;1)=$ $= 2dy(dx + dy) + (dx + dy)^{2} + 4dxdy = dx^{2} + 8dxdy + 3dy^{2}.$

Формула Тейлора имеет вид: f(x,y) - f(1;1) = df(1;1) + $+\frac{d^2f(1,1)}{2!}+o(\rho^2)$. Учитывая, что $dx=(x-1),\ dy=(y-1),$ $\rho^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2$, находим $f(x,y) = 1 + (x-1) + 2(y-1) + (y-1)^2$ $+\frac{1}{2}(x-1)^2+4(x-1)(y-1)+\frac{3}{2}(y-1)^2+o((x-1)^2+(y-1)^2).$

II способ («вычисление частных производных»).

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{2xy - x - y}(2y - 1);$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{2xy-x-y}(2y-1);$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{2xy-x-y} + ye^{2xy-x-y}(2x-1);$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy;$$

$$df(1;1) = dx + 2dy;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1;1) = \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial x}(x,1)\right)|_{x=1} = \frac{d}{dx}e^{x-1}|_{x=1} = e^{x-1}|_{x=1} = 1;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1;1) = \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial x}(1,y)|_{y=1} = \frac{d}{dy} y e^{y-1} (2y-1)|_{y=1} =$$

$$= (4y-1)e^{y-1} + (2y^2 - y)e^{y-1}|_{y=1} = 4;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1;1) = \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial y}(1,y)|_{y=1} = \frac{d}{dy} (e^{y-1} + ye^{y-1})|_{y=1} = 2e^{y-1} + ye^{y-1}|_{y=1} = 3;$$

$$d^{2}f = \frac{\partial^{2} f}{\partial x^{2}} dx^{2} + 2 \frac{\partial^{2} f}{\partial y \partial x} dx dy + \frac{\partial^{2} f}{\partial y^{2}} dy^{2};$$

$$d^2 f(1;1) = dx^2 + 8dxdy + 3dy^2.$$

Формула Тейлора имеет вид: f(x,y) - f(1;1) = df(1;1) + $+\frac{d^2f(1,1)}{2!}+o(\rho^2)$. Отсюда $f(x,y)=1+(x-1)+2(y-1)+\frac{1}{2}(x-1)$ $(x-1)^{2} + 4(x-1)(y-1) + \frac{3}{2}(y-1)^{2} + o((x-1)^{2} + (y-1)^{2}).$

 $^{^{1}{}m M}\Phi{
m T}{
m H}$ -54 — наименование варианта: 4-й вариант 2005 г.

 $^{^{2}}$ Цифра в квадрате означает максимальное количество очков на экзаменационной контрольной, выставляемое за верно решённую задачу.

III способ («использование стандартных разложений»). Сделаем замену: $u=x-1=dx, \ v=y-1=dy.$ Тогда $f(x,y)=f(u+1,v+1)=g(u,v)=(v+1)e^{2uv+u+v}=e^{2uv+u+v}+ve^{2uv+u+v}=(1+(2uv+u+v)+\frac{1}{2}(u^2+2uv+v^2)+o(\rho^2))+(v+uv+v^2+o(\rho^2))=1+u+2v+\frac{1}{2}u^2+4uv+\frac{3}{2}v^2+o(\rho^2),$ где $\rho^2=(x-1)^2+(y-1)^2.$ Таким образом, $f(x,y)=1+(x-1)+(y-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2+4(x-1)(y-1)+\frac{3}{2}(y-1)^2+o((x-1)^2+(y-1)^2)$ – искомое тейлоровское разложение, откуда также видно, что $df(1;1)=dx+2dy,\ d^2f(1;1)=dx^2+8dxdy+3dy^2.$

IV способ («логарифмическое дифференцирование»). Логарифмируя тождество $f=ye^{2xy-x-y}$, находим $\ln f=\ln y+2xy-x-y$ (1). Формально дифференцируя тождество (1), находим $\frac{df}{f}=\frac{dy}{y}+2ydx+2xdy-dx-dy$ (2). Подставляя x=1, $y=1,\ f=f(D)=f(1;1)=1$, находим df(1;1)=dx+2dy.

Формально дифференцируя тождество (2), считая dx и dy постоянными, находим $\frac{fd^2f-(df)^2}{f^2}=-\frac{dy^2}{y^2}+4dxdy$. Подставляя $x=1,\ y=1,\ f=1,\ df=dx+2dy$, находим $d^2f(1,1)=(dx+2dy)^2-dy^2+4dxdy=dx^2+8dxdy+3dy^2$.

Формула Тейлора имеет вид: $f(x,y)-f(1,1)=df(1,1)+df(1,1)+df(1,1)+o(\rho^2)$. Учитывая, что $dx=(x-1),\ dy=(y-1),\ \rho^2=(x-1)^2+(y-1)^2,$ находим $f(x,y)=1+(x-1)+2(y-1)+df(x-1)^2$

Этот способ в данном примере упрощает вычисления при формальном дифференцировании.

Ответ: df(D) = dx + 2dy; $d^2f(D) = dx^2 + 8dxdy + 3dy^2$; $f(x,y) = 1 + (x-1) + 2(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + 4(x-1)(y-1) + \frac{3}{2}(y-1)^2 + o((x-1)^2 + (y-1)^2)$.

Замечание. Второй дифференциал не содержит ни линейных, ни свободного членов.

Замечание. Формула Тейлора для функции одной или нескольких переменных с остаточным членом в форме Пеано может быть представлена в следующем виде: $\Delta f = \sum_{k=1}^n \frac{d^k f}{k!} + o(\rho^n)$. В частности, для функции двух аргументов

в точке $M(x_0,y_0): \Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0), \ d^k f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^k f(x_0,y_0), \ \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \ \Delta x = x - x_0 = dx, \ \Delta y = y - y_0 = dy.$ Для функции двух аргументов формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа в точке $M(x_0,y_0)$ может быть представлена в виде: $\Delta f = \sum_{k=1}^n \frac{d^k f(x_0,y_0)}{k!} + \frac{d^{n+1} f(\xi,\eta)}{(n+1)!}$. Точка (ξ,η) делит отрезок с концами (x_0,y_0) и (x,y) в отношении $\theta:(1-\theta)$. Применяя формулы из аналитической геометрии о делении отрезка в заданном отношении, находим $\xi = \theta x_0 + (1-\theta)x, \ \eta = \theta y_0 + (1-\theta)y, \ \theta \in (0;1)$.

Задача 2. $\boxed{4}$ Найти длину дуги кривой $x=\cos^4 t,\ y=\sin^4 t,\ t\in[0,\frac{\pi}{2}].$

Решение. Длина дуги кривой

$$\begin{split} l &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-4\cos^3t\sin t)^2 + (4\sin^3t\cos t)^2} dt = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t \sqrt{\sin^4t + \cos^4t} dt. \quad \text{Tak kak } \sin^4x + \\ &+ \cos^4x = (\sin^2x + \cos^2x)^2 - 2\sin^2x\cos^2x, \quad \text{to} \\ 4 \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t \sqrt{\sin^4t + \cos^4t} dt = 2 \int_0^{\pi/2} \sin 2t \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^22t} dt = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^22t} d\cos 2t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \sqrt{1 + z^2} dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{z\sqrt{1+z^2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(z + \sqrt{1+z^2}) \right) \big|_{-1}^1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1 + \sqrt{2}). \end{split}$$

Замечание. При решении подобного рода задач часто возникают следующие интегралы:

$$\begin{split} &\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C, \quad a \neq 0 \ (|x| > |a|), \\ &\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C, \quad a \neq 0, \\ &\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x\sqrt{x^2 + a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C, \\ &\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C, \end{split}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{|a|} + C.$$

Задача 3. $\boxed{3}$ Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=3$ функцию $y=\mathrm{arcctg}\,\frac{2x^2-12x+19}{6x-x^2-7}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

Решение. Пусть t=x-3. Тогда x=t+3; $y(x)=y(t+3)=z(t)=\arccos\frac{2t^2+1}{2-t^2}$; $z'(t)=\frac{-2t}{1+t^4}=-2t\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^{4n}=\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^{n+1}t^{4n+1}$. Поскольку радиус сходимости основного разложения $\frac{1}{1+u}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nu^n$ равен 1, то полученный для z'(t) ряд абсолютно сходится, если $|t^4|<1$, то есть при |t|<1, и расходится, если $|t^4|>1$, то есть при |t|>1. Значит, радиус сходимости ряда для z'(t) равен 1. $z(t)=z(0)+\int\limits_{\tau=0}^{t}z'(\tau)d\tau=$ = $\arccos\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}t^{4n+2}$. При почленном интегрировании степенного ряда радиус сходимости не меняется. Поэтому R=1. Произведя обратную замену переменной, получаем ответ: $y(x)=\arccos\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}(x-3)^{4n+2}$, R=1.

Замечание. Радиус сходимости для z'(t) можно найти по формуле Коши—Адамара: $\frac{1}{R}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}}\sqrt{|a_n|}==\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}\sqrt{|2(-1)^{n+1}|}}{|a_n|}=1$. Следовательно, R=1.

Опибочным является нахождение радиуса сходимости для z'(t) по формуле $\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|2(-1)^{n+1}|} = 1$ или по формуле $\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{2(-1)^{n+2}}{2(-1)^{n+1}}\right| = 1$, поскольку разложение в данном случае имеет место по степеням t^{4n+1} , а не по степеням t^n . К подобным формулам нужно относиться с осторожностью, ведь в других случаях, действуя так, можно получить неправильный ответ.

Контрпример³: $\ln(1+2t^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n}{n} t^{2n}$. Ошибочное вычисление по формуле $\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{n+1}n}{(n+1)2^n} = 2$ приводит к неправильному ответу: $R = \frac{1}{2}$. Во избежание ошибок можно рассуждать, например, так: по признаку Даламбера указанный ряд абсолютно сходится, если $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{2^{n+1}t^{2n+2}n}{(n+1)2^nt^{2n}} \right| = 2t^2 < 1$, а если $2t^2 > 1$, то абсолютной сходимости нет. Тогда радиус сходимости находится из условия: $2t^2 < 1$, откуда $|t| < \frac{1}{\sqrt{2}} = R$. Ошибочное вычисление по формуле $\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}} = 2$ приводит к неправильному ответу $R = \frac{1}{2}$. По признаку Коши радиус сходимости определяется из условия $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{2^nt^{2n}}{n}} = 2t^2 < 1$, откуда $|t| < \frac{1}{\sqrt{2}} = R$. Значит, $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Радиус сходимости можно найти по формуле Коши— Адамара: $\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[2n]{\left|\frac{(-1)^{n+1}2^n}{n}\right|} = \sqrt{2}.$ Следовательно, $R = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Замечание. Рассмотрим два степенных ряда A и B с центрами в одной точке x_0 и радиусами сходимости R и r соответственно. Если $R \neq r$, то радиус сходимости их линейной комбинации с отличными от нуля коэффициентами (обозначим её C), в частности их суммы или разности, есть $\min\{R,r\}$. В самом деле, если, например, r < R, то ряд C сходится при $|x-x_0| < r$ и расходится при $|x-x_0| \in (r,R) \subset \mathbb{R}$. Учитывая структуру множества точек сходимости степенного ряда, мы видим, что радиусом сходимости ряда C может быть только r. Если оба радиуса бесконечны, то, очевидно, и радиус указанной линейной комбинации бесконечен. Нетривиальный случай, если радиусы конечны и равны (R = r). В этом случае если один из рядов не сходится в некоторой точке на

³Выбор слова *контрпример* обусловлен [10]. Рекомендуем читателю ознакомиться с этой книгой.

границе круга сходимости, а другой сходится, то их сумма не сходится в этой точке, и радиус сходимости ряда C по теореме Абеля будет R. Если же оба ряда имеют одну и ту же область сходимости, то радиус сходимости ряда C может оказаться больше, чем R, и здесь требуется исследование. При оформлении решения желательно ссылаться на используемые теоремы. Отметим, что умножение ряда на ненулевой многочлен не меняет радиус сходимости. Многочлен, даже нулевой степени, расписанный по возрастанию степеней $(x-x_0)^n$, представляет собой степенной ряд с бесконечным радиусом сходимости.

Задача 4. $\boxed{2}$ Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2(n-1)^n)^n}{n^{(n^2)}}.$

Решение. $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2(n-1)^n}{n^n} = 2\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{2}{e} < 1, \ n \to \infty.$ По признаку Коши ряд сходится.

3 амечание. $\forall x \in \mathbb{R} \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$. При оформлении письменной работы этот факт можно считать известным.

 Π р и м е р. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\ln\left(n^{\sin\frac{1}{n}}\right)\right)^n$.

Решение. При достаточно больших n общий член ряда $a_n = \left(1 - \ln\left(n^{\sin\frac{1}{n}}\right)\right)^n > 0$. Так как $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ и $\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, признаки Коши и Даламбера неприменимы, но $a_n = e^{n\ln\left(1 - \left(\sin\frac{1}{n}\right)\ln n\right)} = e^{n\ln\left(1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right)} = e^{-\ln n + o\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)} \sim \frac{1}{n}$ при $n \to \infty$. Общий член ряда эквивалентен общему члену расходящегося гармонического ряда. Ряд расходится по признаку сравнения.

 Π р и м е р. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+rac{n}{3}}\sinrac{1}{n}
ight)^{-n^3}$.

Решение.
$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{3n^2}} \cdot n \sin \frac{1}{n}\right)^{-n^2} =$$

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{9n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \left(1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]^{-n^2} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{18n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{-n^2} = e^{-n^2 \ln\left(1 - \frac{1}{18n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} =$$

$$= e^{\frac{1}{18} + o(1)} \to e^{\frac{1}{18}} > 1, n \to \infty.$$

По признаку Коши ряд расходится.

Ошибочным является рассуждение: поскольку $n\sin\frac{1}{n}\sim 1,\ n\to\infty,\ \text{то}\ \sqrt[n]{|a_n|}=\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{3n^2}}\cdot n\sin\frac{1}{n}\right)^{-n^2}\sim \left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{3n^2}}\right)^{-n^2}\sim \left(1+\frac{1}{9n^2}\right)^{-n^2}\to e^{-\frac{1}{9}}<1,\ n\to\infty.$ По признаку Коши ряд сходится. Ошибка в том, что при нахождении пределов показательно-степенной функции нельзя в общем случае заменять основание или показатель степени на эквивалентные величины!

Задача 5а. 4 Исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{e^x - e^{\sin x}}{(\cosh^2 x - \cos^2 x)^{\alpha}} dx.$$

Решение. Интеграл имеет две особенности: в нуле и в $+\infty$. $I=\int\limits_0^{+\infty}f(x)dx=\int\limits_0^1f(x)dx+\int\limits_1^{+\infty}f(x)dx=I_1+I_2$. Каждый из интегралов I_1 и I_2 имеет уже одну особенность: I_1 — в нижнем пределе, а I_2 — в верхнем пределе интегрирования. При x>0 $f(x)=\frac{e^x-e^{\sin x}}{(\operatorname{ch}^2x-\cos^2x)^{\alpha}}\geqslant 0$. При $x\to 0$ имеем: $e^x-e^{\sin x}=\frac{x^3}{6}+o(x^3)\sim\frac{x^3}{6}$, $\operatorname{ch}^2x-\cos^2x=2x^2+o(x^2)\sim2x^2$, $f(x)\sim\frac{C}{x^2\alpha-3}$. По признаку сравнения интеграл I_1 сходится \Leftrightarrow $\Leftrightarrow 2\alpha-3<1\Leftrightarrow \alpha<2$. Так как $f(x)\sim\frac{C}{e^{(2\alpha-1)x}}$ при $x\to +\infty$, то по признаку сравнения интеграл I_2 сходится \Leftrightarrow $2\alpha-1>0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \alpha>\frac{1}{2}$. Интеграл I сходится \Leftrightarrow интеграл I_1 сходится и интеграл I_2 сходится \Leftrightarrow $\frac{1}{2}<\alpha<2$. Сходимость абсолютная.

Замечание. Признак сравнения для несобственных интегралов $I=\int\limits_a^bf(x)dx$ и $ilde{I}=\int\limits_a^bg(x)dx$ с единственной особенностью, например в верхнем пределе интегрирования, можно сформулировать следующим образом: если $\forall b' \in$ $\in (a,b)$ $f,g \in R[a,b']$ $\bowtie \exists a' \geqslant a \forall x \in [a',b) \ 0 \leqslant f(x) \leqslant$ $\leqslant g(x)$, то из сходимости интеграла \tilde{I} следует сходимость интеграла I, а из расходимости I следует расходимость \tilde{I} . В частности, если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to b-0$ или $\exists \lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} =$ =k>0, то интегралы I и \tilde{I} сходятся или расходятся одновременно. Здесь $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$; запись $x \to \infty$ $\rightarrow b-0$ при $b=+\infty$ нужно понимать как $x\to+\infty$. Метод исследования на сходимость несобственного интеграла от знакопостоянной функции с единственной особенностью в каком-либо из пределов интегрирования состоит в том, чтобы заменить подынтегральную функцию на эквивалентную в окрестности особой точки более простую, ещё лучше, «эталонную» функцию. Эталонами являются следующие интегралы $(C \neq 0)$:

 $I_1 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{C}{x^{\alpha}} \ dx - \text{сходится, если } \alpha > 1, \text{ и расходится, если } \alpha \leqslant 1,$

 $I_2=\int\limits_0^1 rac{C}{x^{lpha}}\ dx$ — сходится, если lpha<1, и расходится, если $lpha\geqslant 1,$

 $I_3 = \int\limits_2^{+\infty} \frac{C}{x^{\alpha} \ln^{\beta} x} \ dx$ — сходится, если $\alpha > 1$ при любом β ; если $\alpha = 1$, сходится при $\beta > 1$; во всех остальных случаях — расходится,

 $I_4 = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{C}{x^{lpha} |\ln x|^{eta}} \ dx$ — сходится, если lpha < 1 при любом eta; если lpha = 1, сходится при eta > 1; во всех остальных случаях — расходится.

Отметим, что при $c\in(a,b)$ интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_c^b f(x)dx$ с единственной особенностью в верхнем пределе интегрирования сходятся или расходятся одновременно, и интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^c f(x)dx$ с единственной особенностью в нижнем пределе интегрирования сходятся или расходятся одновременно.

Задача 56. 6 Исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл

$$\int_{1}^{+\infty} x^{\alpha} \left(\sinh \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) \cos \sqrt{x} \ dx.$$

Решение. Заменой $t=\sqrt{x}$ задача сводится к исследованию на сходимость и абсолютную сходимость несобственного интеграла:

$$I = \int\limits_{1}^{+\infty} f(t)dt = \int\limits_{1}^{+\infty} t^{2\alpha+1} \left(\sinh\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2} \right) \cos t \ dt = \int\limits_{1}^{+\infty} g(t) \cos t dt,$$
 где $g(t) = t^{2\alpha+1} \left(\sinh\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2} \right)$. Ясно, что $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{t^{2\alpha-5}}{6} = 0 \Leftrightarrow 2\alpha - 5 < 0 \Leftrightarrow \alpha < \frac{5}{2}$. Покажем, что при $\alpha < \frac{5}{2}$ интеграл I сходится по признаку Дирихле, а при $\alpha \geqslant \frac{5}{2}$ расходится по критерию Коши.

I) Сходимость. $g(t)=t^{2\alpha-5}t^6\left(\sinh\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2}\right)$. При $\alpha<\frac{5}{2}$ функция $\varphi(t)=t^{2\alpha-5}$ $\downarrow \!\!\!\downarrow$ на луче $[1;+\infty)$. Функция $h(t)=t^6\left(\sinh\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2}\right)$ $\downarrow \!\!\!\downarrow$ на луче $[t_0,+\infty)$ для некоторого $t_0\geqslant 1$, так как производная $h'(t)=2t^3\left[3t^2\left(\sinh\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2}\right)-\left(\cosh\frac{1}{t^2}-1\right)\right]=t^2-\frac{2}{t^5}\left(\frac{2}{120}+o(1)\right)<0$ при достаточно больших t, поскольку $|o(1)|<\frac{1}{120}$ при достаточно больших t. Таким образом, |g(t)| |g(t)| 0 на луче $|t_0,+\infty)$, |g(t)| |f(t)| |g(t)| 0 на луче |f(t)| |f(t)|

 $=|\sin\xi-\sin1|\leqslant 2$. По признаку Дирихле интеграл I сходится при всех $\alpha<\frac{5}{2}$.

II) Расходимость. $\forall \ \alpha > \frac{5}{2} \lim_{t \to +\infty} g(t) = +\infty$, при $\alpha = \frac{5}{2}$ $\lim_{t \to +\infty} g(t) = \frac{1}{6}$. Тогда при $\alpha \geqslant \frac{5}{2} \exists \ t_0 \geqslant 1 \ \forall \ t \geqslant t_0 \ g(t) \geqslant \frac{1}{12}$. Значит, $\forall \ \alpha \geqslant \frac{5}{2} \exists \ t_0 \geqslant 1 \ \forall \ \delta > t_0 \ \exists \ n = \left[\frac{\delta}{2\pi}\right] + 1 > \frac{\delta}{2\pi} \ \exists \ \xi' = 2\pi n > \delta$, $\exists \ \xi'' = \frac{\pi}{2} + 2\pi n > \delta$: $\left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(t) \ dt \right| = \int_{\xi'}^{\xi''} g(t) \cos t \ dt \geqslant \frac{1}{12} \int_{\xi'}^{\xi''} \cos t \ dt = \frac{1}{12}$. Итак, $\forall \ \alpha \geqslant \frac{5}{2} \ \exists \ \varepsilon_0 = \frac{1}{12} > 0 \ \forall \ \delta > 1 \ \exists \ \xi' > \delta \ \exists \ \xi'' > \delta \ \exists \ \xi'' > \delta : \left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(t) \ dt \right| \geqslant \varepsilon_0$. Справедливо отрицание условия Коши критерия Коши сходимости несобственного интеграла $I = \int_{1}^{+\infty} f(t) \ dt$. По критерию Коши интеграл I расходится при всех $\alpha \geqslant \frac{5}{2}$.

III) Абсолютная сходимость. Интеграл I может абсолютно сходиться лишь при тех значениях α , при которых он сходится. При $\alpha<\frac{5}{2}$ интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}g(t)\cos 2t\ dt$ сходится по признаку Дирихле. Тогда по признаку сравнения из цепочки неравенств $\int\limits_{1}^{+\infty}g(t)\ dt\geqslant\int\limits_{1}^{+\infty}g(t)|\cos t|\ dt\geqslant\int\limits_{1}^{+\infty}g(t)\cos^2t\ dt=$ = $\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{+\infty}g(t)\ dt+\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{+\infty}g(t)\cos 2t\ dt\geqslant 0$ следует, что интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}|f(t)|\ dt=\int\limits_{1}^{+\infty}g(t)|\cos t|\ dt$ сходится \Leftrightarrow интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}g(t)\ dt$ сходится \Leftrightarrow 10 сходится \Leftrightarrow 11 сходится \Leftrightarrow 12.

Вывод. Результаты исследования позволяют сделать следующий вывод: данный в условии задачи несобственный интеграл сходится тогда и только тогда, когда $\alpha < \frac{5}{2}$, и

абсолютно сходится тогда и только тогда, когда $\alpha < 2$. Этот результат можно сформулировать по-другому: интеграл сходится абсолютно, если $\alpha < 2$; сходится условно, если $2 \leqslant \alpha < \frac{5}{2}$, и расходится, если $\alpha \geqslant \frac{5}{2}$.

Замечание. Если $h'(x) \sim \varphi'(x) < 0$ при $x \to +\infty$, то в некоторой окрестности $+\infty$ h'(x) < 0. Если $h'(x) \sim \varphi'(x) > 0$ при $x \to +\infty$, то в некоторой окрестности $+\infty$ h'(x) > 0. В задаче 56 $h'(t) \sim -\frac{1}{30t^5} < 0$ при $t \to +\infty$. Значит, $h(t) \downarrow \!\!\downarrow$ при $t \to +\infty$. При нахождении эквивалентной функции необходимо учитывать, что в общем случае сумма функций не эквивалентна сумме эквивалентных им функций. Например, $\left(1+\frac{1}{t^2}\right)-\sqrt{1-\frac{2}{t}}=\frac{1}{t}+o\left(\frac{1}{t}\right)\sim \frac{1}{t}$ при $t \to +\infty$, но $\left(1+\frac{1}{t^2}\right)-\sqrt{1-\frac{2}{t}}\not\sim \left(1+\frac{1}{t^2}\right)-1$ при $t \to +\infty$. Во избежание ошибок нужно корректно применять формулу Тейлора [7].

3амечание. Поскольку $I=\int\limits_1^{+\infty}t^{2\alpha+1}\left(\sh{\frac{1}{t^2}}-\frac{1}{t^2}\right)\cos t\ dt=$ $=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{5-2\alpha}} t^6\left(\sh{\frac{1}{t^2}}-\frac{1}{t^2}\right)dt, \quad \text{а функция } h(t)=$ $=t^6\left(\sh{\frac{1}{t^2}}-\frac{1}{t^2}\right)$ $\downarrow\downarrow$ $\frac{1}{6}\neq 0$ при $t\geqslant t_0$, то по следствию из признака Абеля⁴ задача сводится к исследованию на сходимость и абсолютную сходимость несобственного интеграла $\tilde{I}=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{5-2\alpha}}\ dt,$ который, как известно, сходится абсолютно, если $5-2\alpha>1$, сходится условно, если $0<5-2\alpha\leqslant 1$, и расходится, если $5-2\alpha\leqslant 0$. Следствие из признака Абеля заключается в следующем.

 $[\]overline{\ \ }^4\Pi$ ризнак Абеля. Пусть функция f(x) интегрируема на любом отрезке $[a,\xi]$. Тогда если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а функция g(x) монотонна и ограничена на промежутке $[a,+\infty)$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ тоже сходится [4].

Теорема. Пусть для некоторого $a \in \mathbb{R}$ функция f(x) интегрируема на любом отрезке $[a,\xi]$, а функция g(x) монотонна на промежутке $[a,+\infty)$ и $\exists \lim_{x \to +\infty} g(x) = k \neq 0$. Тогда несобственные интегралы $I = \int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ и $\tilde{I} = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходятся и абсолютно сходятся одновременно.

Заключение теоремы означает, что несобственные интегралы I и \tilde{I} либо оба сходятся абсолютно, либо оба сходятся условно, либо оба расходятся.

Заключение теоремы остаётся верным, если функция g(x) монотонна на луче $[x_0, +\infty)$ для некоторого $x_0 > a$, а функция f(x)g(x) интегрируема на отрезке $[a, x_0]$.

Доказательство. Согласно условию теоремы и свойствам интегрируемых по Риману функций, функции $g(x), \ f(x)g(x), |f(x)|, \ |f(x)g(x)|$ интегрируемы на любом отрезке $[a,\xi].$

Поскольку $k \neq 0$, в некоторой окрестности $+\infty$ справедливы неравенства $0 < |k| - \frac{|k|}{2} \leqslant |g(x)| \leqslant |k| + \frac{|k|}{2}$, откуда вытекает, что монотонная функция g(x) в выбранной окрестности $+\infty$ сохраняет знак. Тогда в этой окрестности функции g(x), |g(x)|, $\frac{1}{g(x)}$, $\frac{1}{|g(x)|}$ определены, ограничены и монотонны.

Так как несобственные интегралы I и \widetilde{I} имеют единственную особенность $+\infty$, то без ограничения общности полагаем, что a принадлежит выбранной окрестности $+\infty$.

Замечая, что $f(x)=(f(x)g(x))\frac{1}{g(x)},$ по признаку Абеля [4, 9] получаем заключение теоремы.

В самом деле, если интеграл $\widetilde{I}=\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ сходится, то интеграл $I=\int\limits_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$ сходится по признаку Абеля. Обратно, если интеграл $I=\int\limits_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$ сходится, то интеграл $\widetilde{I}=\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx=\int\limits_a^{+\infty}(f(x)g(x))\cdot\frac{1}{g(x)}dx$ сходится по признаку Абеля. Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)g(x)|dx=\int\limits_a^{+\infty}|f(x)||g(x)|dx$ сходится по признаку Абеля. Обратно, если интеграл $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)g(x)|dx$ сходится, то интеграл $\widetilde{I}=\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx=\int\limits_a^{+\infty}|f(x)g(x)|\cdot\frac{1}{|g(x)|}dx$ сходится по признаку Абеля.

Следствием из признака Абеля можно пользоваться в письменной работе без доказательства лишь в том случае, если эта теорема была доказана на лекциях.

Замечание. Если под знаком sin или сов в условии задачи стоит не линейная функция, рекомендуется делать замену переменной. Заменять подынтегральную функцию на эквивалентную в окрестности единственной особой точки нельзя, как в предыдущей задаче 5а, поскольку она не знакопостоянна, и в общем случае такая замена не приводит к эквивалентному в смысле сходимости несобственному интегралу. Например, интеграл $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}-\cos x} dx$ сходится условно, а интеграл $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}-\sin x} dx$ расходится. В каждом

 $^{^5 \}Pi$ ри $c \in (a,b)$ интегралы $\int\limits_a^b f(x) dx$ и $\int\limits_c^b f(x) dx$ с единственной особенностью в верхнем пределе интегрирования сходятся и абсолютно сходятся одновременно и интегралы $\int\limits_a^b f(x) dx$ и $\int\limits_a^c f(x) dx$ с единственной особенностью в нижнем пределе интегрирования сходятся и абсолютно сходятся одновременно.

из этих случаев подынтегральная функция эквивалентна функции $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ при $x \to +\infty$, и интеграл $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ сходится условно (см. [6]). Этот пример также показывает, что от условия монотонности в признаке Дирихле нельзя отказаться.

Из стремления подынтегральной функции к нулю не следует сходимость несобственного интеграла, равно как из неограниченности (даже всюду положительной и непрерывной) подынтегральной функции не следует расходимость несобственного интеграла. Из эквивалентности данной функции некоторой монотонной функции при $x \to a$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, не следует монотонность исходной функции в некоторой окрестности a. Эталонами можно считать интегралы, которые рассматривались на лекциях.

При $\omega \neq 0$ интегралы

$$I_5 = \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin(\omega x + \varphi)}{x^{\alpha}} dx, \ I_6 = \int_{1}^{+\infty} \frac{\cos(\omega x + \varphi)}{x^{\alpha}} dx$$

сходятся абсолютно, если $\alpha>1$; сходятся условно, если $0<<\alpha\leqslant 1$, и расходятся, если $\alpha\leqslant 0$.

Замечание. Считая интегралы I_5 , I_6 эталонами, можно в задаче 56 исследовать абсолютную сходимость следующим образом: так как $|f(t)| = g(t)|\cos t| \sim \frac{C|\cos t|}{t^{5-2\alpha}}$ при $t \to +\infty$, то по признаку сравнения интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{C|\cos t|}{t^{5-2\alpha}} \, dt$ сходится $\Leftrightarrow 5-2\alpha>1 \Leftrightarrow \alpha<2$.

Тригонометрический признак сходимости. Пусть функция g(x) непрерывно дифференцируема на луче $[a; +\infty)$ и $g(x) \downarrow 0$ при $x \to +\infty$. Тогда $\forall k \neq 0, \forall p$ интегралы $+\infty \atop a g(x) \sin(kx+p)dx$ и $\int\limits_a^+ g(x)\cos(kx+p)dx$ сходятся.

Доказательство. Функции $\sin(kx+p)$ и $\cos(kx+p)$ имеют ограниченные первообразные. Осталось воспользоваться признаком Дирихле.

Тригонометрический признак абсолютной сходимости. Пусть функция g(x) непрерывно дифференцируема на луче $[a; +\infty)$ и $g(x) \downarrow 0$ при $x \to +\infty$. Тогда $\forall \ k \neq 0, \forall \ p$ интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |g(x)\sin(kx+p)|dx$ сходится \Leftrightarrow интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |g(x)\cos(kx+p)|dx$ сходится \Leftrightarrow интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |g(x)\cos(kx+p)|dx$ сходится \Leftrightarrow интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится.

Доказательство. Интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{g(x)}{2} \cos(2kx+2p) dx$ сходится по тригонометрическому признаку сходимости. Тогда по признаку сравнения из цепочек неравенств $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x) dx \geqslant \int\limits_{a}^{+\infty} |g(x) \sin(kx+p)| dx \geqslant \int\limits_{a}^{+\infty} g(x) \sin^{2}(kx+p) dx = \int\limits_{a}^{+\infty} \frac{g(x)}{2} dx - \int\limits_{a}^{+\infty} \frac{g(x)}{2} \cos(2kx+2p) dx \geqslant 0$ и $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x) dx \geqslant \int\limits_{a}^{+\infty} |g(x) \cos(kx+p)| dx \geqslant \int\limits_{a}^{+\infty} |g(x) \cos(kx+p)| dx \geqslant \int\limits_{a}^{+\infty} g(x) \cos^{2}(kx+p) dx = \int\limits_{a}^{+\infty} \frac{g(x)}{2} dx + \int\limits_{a}^{+\infty} \frac{g(x)}{2} \cos(2kx+2p) dx \geqslant 0$ следует заключение теоремы.

Тригонометрический признак расходимости. Пусть функция g(x) интегрируема по Риману на любом отрезке [a,b], b>a, причём $\exists\lim_{x\to +\infty}g(x)=C>0$ или $\exists\lim_{x\to +\infty}g(x)=$ $=+\infty.$ Тогда $\forall\;k\neq 0, \forall\;p$ интегралы $\int\limits_a^{+\infty}g(x)\sin(kx+p)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty}g(x)\cos(kx+p)dx$ расходятся. Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to +\infty}g(x)=C.$ Так как $\exists\;x_0\geqslant$

 $\geqslant a \ \forall \ x \geqslant x_0 \ g(x) \geqslant \frac{C}{2} > 0$, то $\forall \ k > 0 \ \exists \ x_0 \geqslant a \ \forall \ \delta > x_0 \ \exists \ n \in \mathbb{N}$ $\exists \ \xi' = \frac{2\pi n - p}{k} > \delta$, $\exists \ \xi'' = \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi n - p}{k} > \delta$: $\begin{vmatrix} \xi'' \\ \int_{\xi'} g(x) \sin(kx + p) \ dx \end{vmatrix} \geqslant \frac{C}{2} \int_{\xi'}^{\xi''} \sin(kx + p) \ dx \geqslant \frac{C}{2k} > 0$ и $\begin{vmatrix} \xi'' \\ \int_{\xi'} g(x) \cos(kx + p) \ dx \end{vmatrix} \geqslant \frac{C}{2} \int_{\xi'}^{\xi''} \cos(kx + p) \ dx \geqslant \frac{C}{2k} > 0$. Из критерия Коши для k > 0 следует заключение теоремы. Если $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, полагаем C = 1.

Пользоваться тригонометрическими признаками в письменной работе без доказательства можно только в том случае, если они были доказаны на лекциях.

Пример *громоздкой задачи*⁶. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\cos(2x^2+1)}{(x\ln^2 x - \arctan x)^{\alpha}} dx.$

Решение. $\int_{3}^{+\infty} \frac{\cos(2x^{2}+1)}{(x\ln^{2}x - \operatorname{arctg}x)^{\alpha}} dx = \frac{1}{2} \int_{9}^{+\infty} g(t) \cos(2t+1) dt,$ где $t = x^{2}$, $dx = \frac{1}{2}t^{-1/2} dt$, $g(t) = \frac{1}{t^{1/2}(t^{1/2}\ln^{2}\sqrt{t} - \operatorname{arctg}\sqrt{t})^{\alpha}} =$ $= \frac{4^{\alpha}}{t^{1/2}(t^{1/2}\ln^{2}t - 4\operatorname{arctg}\sqrt{t})^{\alpha}} = \frac{C}{t^{\frac{1+\alpha}{2}}(\ln t)^{2\alpha}\left(1 - \frac{4\operatorname{arctg}\sqrt{t}}{\sqrt{t}\ln^{2}t}\right)^{\alpha}}.$ Функция $\left(\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right) \ \, \downarrow \,$ при $t \to +\infty$, поскольку её производная $\frac{1}{2t\sqrt{t}}\left(\frac{\sqrt{t}}{1+t} - \operatorname{arctg}\sqrt{t}\right) < 0$ при достаточно больших t. Тогда функция $\varphi(t) = \left(1 - \frac{4\operatorname{arctg}\sqrt{t}}{\sqrt{t}\ln^{2}t}\right)^{-1} \ \, \downarrow \,$ при $t \to +\infty$. Функция $h(t) = (\varphi(t))^{\alpha}$ монотонна при любом значении α как композиция монотонных функций t. $t \to +\infty$ $t \to +\infty$

к исследованию на сходимость и абсолютную сходимость интеграла $I=\int\limits_{9}^{+\infty}\frac{\cos(2t+1)}{t^{\frac{1+\alpha}{2}}(\ln t)^{2\alpha}}dt$. Так как $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{t^{\frac{1+\alpha}{2}}(\ln t)^{2\alpha}}=0\Leftrightarrow \alpha>-1$ и при $\alpha>-1$ производная $\left(t^{\frac{1+\alpha}{2}}(\ln t)^{2\alpha}\right)'>>0$ при всех достаточно больших t, то интеграл I сходится при всех $\alpha>-1$ и расходится при всех $\alpha\leqslant -1$ по тригонометрическим признакам сходимости и расходимости. По тригонометрическому признаку абсолютной сходимости интеграл $\int\limits_{9}^{+\infty}\left|\frac{\cos(2t+1)}{t^{\frac{1+\alpha}{2}}(\ln t)^{2\alpha}}\right|dt$ сходится \Leftrightarrow интеграл $\int\limits_{9}^{+\infty}\frac{1}{t^{\frac{1+\alpha}{2}}(\ln t)^{2\alpha}}dt$ сходится \Leftrightarrow интеграл

Ответ: абсолютно сходится при $\alpha \geqslant 1$, условно сходится при $-1 < \alpha < 1$, расходится при $\alpha \leqslant -1$.

Пример. В задаче $56\lim_{t\to +\infty}g(t)=\lim_{t\to +\infty}\frac{t^{2\alpha-5}}{6}=0\Leftrightarrow \alpha<<<\frac{5}{2}$ и при $\alpha<\frac{5}{2}$ функция $g(t)\downarrow 0$ на луче $[t_0,+\infty)$. По тригонометрическим признакам сходимости, расходимости и абсолютной сходимости находим, что интеграл I сходится при $\alpha<\frac{5}{2}$, расходится при $\alpha>\frac{5}{2}$ и абсолютно сходится тогда и только тогда, когда $5-2\alpha>1\Leftrightarrow \alpha<2$.

 Π р и м е р. — Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость при $\omega \neq 0$ интегралы

$$I_7 = \int_{2}^{+\infty} \frac{\sin(\omega x + \varphi)}{x^{\alpha} \ln^{\beta} x} dx, \quad I_8 = \int_{2}^{+\infty} \frac{\cos(\omega x + \varphi)}{x^{\alpha} \ln^{\beta} x} dx.$$

Решение. Пусть $g(x)=\frac{1}{x^{\alpha}\ln^{\beta}x}$. Тогда $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0\Leftrightarrow$ \Leftrightarrow $\begin{cases} \alpha>0,\ \forall\ \beta\\ \alpha=0,\ \beta>0 \end{cases}$. Для каждой пары значений α и β из полученных для α и β значений найдётся такое $x_0>2$, что для

⁶Тригонометрические признаки и пример громоздкой задачи взяты из лекций по математическому анализу А. Ю. Петровича.

 $^{^{7}}$ Композиция монотонных функций монотонна. Если, например, $f \uparrow$, а $g \downarrow$ на $[a, +\infty)$ и $h = f \circ g$, то из $x_1 > x_2 \Rightarrow g(x_1) \leqslant g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) \leqslant$

 $[\]leqslant f(g(x_2)) \Rightarrow h(x_1) \leqslant h(x_2)$. Значит, $h \downarrow$ на $[a, +\infty)$. Аналогично рассматриваются другие случаи.

всех $x \geqslant x_0$ производная $g'(x) = \frac{-1}{(x^\alpha \ln^\beta x)^2} (x^{\alpha-1} \ln^{\beta-1} x) (\alpha \ln x + \beta) < 0$. Значит, функция g(x) монотонна на луче $[x_0, +\infty)$. По тригонометрическим признакам интегралы I_7 , I_8 сходятся $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 0, \ \forall \ \beta \\ \alpha = 0, \ \beta > 0 \end{cases}$ и абсолютно сходятся $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1, \ \forall \ \beta \\ \alpha = 1, \ \beta > 1 \end{cases}$.

 Π р и м е р. 8 Исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл $I=\int\limits_1^{+\infty}\sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}\right)dx.$

Решение. Пусть $z=z(x)=\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}$. Тогда $\lim_{x\to +\infty}z(x)=0$, $\sin z=z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{120}+o(z^5)$ при $z\to 0$, $I=\int\limits_1^{+\infty}\sin zdx=\frac{z^5}{120}$ $=\frac{1}{120}$ $=\frac{1}{120}$

$$\left|\frac{z^5}{120} + o(z^5)\right| = |z|^5 \left|\frac{1}{120} + o(1)\right| \leqslant |z|^5 = \frac{|\sin x|^5}{x^{5/3}} \leqslant \frac{1}{x^{5/3}}$$
 и интеграл
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{5/3}}$$
 сходится (эталон), то интеграл
$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{z^5}{120} + o(z^5)\right| dx$$
 сходится по признаку сравнения. Итак, интеграл I_2 сходится (и даже абсолютно). Докажем сходимость интеграла
$$I_1 = \int_1^{+\infty} \left(z - \frac{z^3}{6}\right) dx = \int_1^{+\infty} z dx - \frac{1}{6} \int_1^{+\infty} z^3 dx.$$
 Интеграл
$$\int_1^{+\infty} z dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$
 сходится по признаку Дирихле:
$$1) \ \forall \ \xi \in [1; +\infty) \ \left|\int_1^{\xi} \sin x dx\right| = |\cos 1 - \cos \xi| \leqslant 2; 2) \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0;$$

3) функция $\psi(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ монотонно убывает при x>1. Интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}z^{3}dx=\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\sin^{3}x}{x}dx$ сходится по признаку Дирихле: 1) \forall ξ \in $\in [1; +\infty) \left| \int_{1}^{\xi} \sin^3 x dx \right| = \left| \left(\frac{\cos^3 \xi}{3} - \cos \xi \right) - \left(\frac{\cos^3 1}{3} - \cos 1 \right) \right| \leqslant 4;$ 2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$; 3) функция $\psi(x) = \frac{1}{x}$ монотонно убывает при x>1. Сходимость I_1 доказана. Из сходимости интегралов I_1 и I_2 следует сходимость интеграла $I=I_1+I_2$. Абсолютной сходимости нет. Действительно, $|\sin z(x)| \sim |z(x)|$ при $x \to +\infty$, поэтому интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} |\sin z(x)| dx$ сходится $\Leftrightarrow \int\limits_{1}^{+\infty} |z| dx$ сходится. Но $\int_{-\infty}^{+\infty} |z| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{\sqrt[3]{x}} dx \geqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} dx$ $-\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x}}dx\geqslant 0$, интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ расходится (эталон), а интеграл $\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x}} dx$ сходится по признаку Дирихле: 1) $\forall \xi \in$ \in $[1;+\infty)$ $\int\limits_{1}^{\xi}\cos 2x dx$ \leqslant 2; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ = 0; 3) функция $\varphi(x)=rac{1}{\sqrt[3]{x}}$ монотонно убывает при x>1. Значит, интеграл $\int_{1}^{\infty} |z| \, dx$ оценивается снизу расходящимся к $+\infty$ интегралом и расходится по признаку сравнения.

Ответ: интеграл I сходится условно.

Замечание. Порядок малости в разложении $\sin z$ выбирался таким образом, чтобы интеграл I_2 сходился абсолютно. Достаточно выбрать наименьший такой порядок.

Замечание. Так как $I=I_1+I_2$ и интеграл I_2 сходится абсолютно, то интегралы I и I_1 сходятся и абсолютно сходятся одновременно. Это утверждение следует из признака сравнения и означает, что итегралы I и I_1 эквивалентны в

⁸Это важный пример другого класса экзаменационных задач на эту тему.

смысле сходимости: они либо оба сходятся абсолютно, либо оба сходятся условно, либо оба расходятся.

Предложение. 9 Непрерывная нечётная периодическая функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ на любом луче $[a,+\infty)$ имеет ограниченную первообразную.

Доказательство. В силу непрерывности функция fинтегрируема по Риману на любом отрезке. Пусть T>0– период функции f. \forall a \in \mathbb{R} $\int\limits_{-\infty}^{a+T}f(x)dx$ = $\int\limits_{-\infty}^{a}f(t+T)dt$ = $=\int\limits_0^a f(t)dt.$ Тогда $\forall \ a\in \mathbb{R}\int\limits_a^{a+T} f(x)dx=\int\limits_a^0 f(x)dx+\int\limits_0^T f(x)dx+\int\limits_a^T f(x)dx$ $+\int\limits_{-T}^{a+T}f(x)dx=\int\limits_{0}^{T}f(x)dx.$ Полагая $a=-rac{T}{2},$ в силу нечётности fимеем: $\int_{0}^{T} f(x)dx = \int_{-T}^{\frac{T}{2}} f(x)dx = -\int_{0}^{-\frac{T}{2}} f(-x)d(-x) + \int_{0}^{\frac{T}{2}} f(x)dx =$ $=-\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}f(t)dt+\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}f(x)dx=0.$ Значит, $\forall~a\in\mathbb{R}\int\limits_{a}^{a+T}f(x)dx=0.$ По индукции $\forall \ a \in \mathbb{R} \ \forall \ n \in \mathbb{N} \ \int\limits_{-\infty}^{a+nT} f(x) dx = \ 0.$ Далее, $\forall \ b > a$ $\exists n = \left[\frac{b-a}{T}\right] : n \leqslant \frac{b-a}{T} < n+1$. Тогда $0 \leqslant b-a-Tn < T$ и $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^{a+nT} f(x)dx + \int\limits_{a+nT}^b f(x)dx = \int\limits_{\beta}^b f(x)dx$, где $\beta = \int\limits_{\beta}^a f(x)dx = \int\limits_{\beta}^a f(x)dx$ = a + nT, $0 \le b - \beta < T$. Tak kak $\forall x_0 \exists n = \left\lceil \frac{x_0}{T} \right\rceil \in \mathbb{Z}$: $n \leqslant \frac{x_0}{T} < n+1, \ 0 \leqslant x_0 - nT < T, \ \text{TO} \ f(x_0) = f(x_0 - nT) \leqslant$ $\leq M = \sup\{f(x) : x \in [0,T]\} \text{ M } f(x_0) = f(x_0 - nT) \geq \mu = 0$ $=\inf\{f(x): x \in [0,T]\}$. Числа M и μ существуют по теореме Вейерштрасса о непрерывных на отрезке функциях. Значит,

 $\exists \ C = |M| + |\mu| + 1 > 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R} \ |f(x)| < C.$ Тогда $\forall \ a \in \mathbb{R}$ $\forall \ b>a$ верно, что $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|=\left|\int\limits_{\beta}^b f(x)dx\right|\leqslant \int\limits_{\beta}^b |f(x)|dx\leqslant \ CT.$

Предложение доказано. Опираясь на это предложение, можно мгновенно заключить, что первообразные функций $\sin x$ и $\sin^3 x$ из предыдущего примера ограничены.

Упражнение. Исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл $\int_{2}^{+\infty} \arctan\left(\frac{\cos x \cdot \ln(x+x^2)}{\sqrt[9]{x^4}}\right) dx$.

Ответ: сходится условно.

Задача ба. 5 Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1,+\infty)$ функциональную последовательность

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}} \cos \frac{nx}{1+e^{nx}}.$$

Решение

- 1) $\forall x \in E_1 \cup E_2 \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}} = f(x).$
- 2) Рассмотрим $E_1 = (0, 1)$.

$$|R_n(x)| = |f(x) - f_n(x)| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+2}} \left(1 - \cos \frac{nx}{1+e^{nx}} \right) = \frac{2}{\sqrt{x+2}} \sin^2 \frac{nx}{2(1+e^{nx})};$$

$$x_n = \frac{1}{n} \in E_1 \text{ при } n \geqslant 2;$$

$$|R_n(x_n)| = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{n}+2}} \sin^2 \frac{1}{2(1+e)} \Rightarrow$$

$$|R_n(x_n)| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n} + 2}} \sin^2 \frac{1}{2(1+e)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall n \geqslant 2 \sup\{|R_n(x)| : a$$

 $\Rightarrow \forall n \geqslant 2 \sup\{|R_n(x)| : x \in E_1\} \geqslant |R_n(x_n)| = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{n}+2}} \sin^2 \frac{1}{2(1+e)}.$

Если предел $\lim_{n\to\infty}\sup\{|R_n(x)|\ :\ x\in E_1\}$ существует, то $\lim_{n \to \infty} \sup \{ |R_n(x)| : x \in E_1 \} \geqslant \lim_{n \to \infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{n} + 2}} \sin^2 \frac{1}{2(1+e)} =$ $=\sqrt{2}\sin^2\frac{1}{2(1+e)}>0.$

Таким образом, либо предел $\lim_{n \to \infty} \sup\{|R_n(x)| : x \in E_1\}$ не существует, либо если существует, то отличен от нуля.

⁹Как упражнение это предложение иногда обо*с*новывается на семинарских занятиях, но пользоваться им в письменной работе без доказательства можно только в том случае, если оно было доказано на лекциях.

В любом случае функциональная последовательность $f_n(x)$ не является равномерно сходящейся к f(x) на E_1 .

 $f_n(x)$ сходится к f(x) неравномерно на E_1 .

Замечание. Приведённое решение можно оформить несколько иначе, заметив, что

$$\exists n_0\geqslant 2\ \forall\ n\geqslant n_0\ \sup\{|R_n(x)|\ :\ x\in E_1\}\geqslant |R_n(x_n)|==rac{2}{\sqrt{\frac{1}{n}+2}}\sin^2\frac{1}{2(1+e)}\geqslant rac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}rac{2}{\sqrt{\frac{1}{n}+2}}\sin^2\frac{1}{2(1+e)}=rac{\sqrt{2}}{2}\sin^2\frac{1}{2(1+e)}>0.$$
 Тогда неверно, что $\lim_{n\to\infty}\sup\{|R_n(x)|\ :\ x\in E_1\}=0.$ Значит, функциональная последовательность $f_n(x)$ не является равномерно сходящейся к $f(x)$ на E_1 .

 $f_n(x)$ сходится к f(x) неравномерно на E_1 .

Замечание. Приведённое решение основано на следующем определении (см. [1]): $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ на $E \subset R^n \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \sup\{|f(x) - f_n(x)| : x \in E\} = 0$. Равносильное определение (2) состоит в том, что $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ на $E \subset R^n \Leftrightarrow \Leftrightarrow \forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ N \in \mathbb{N} \ \forall \ n \geqslant N \ \forall \ x \in E \ |f(x) - f_n(x)| < < \varepsilon$. В нашем примере $\lim_{n \to \infty} |R_n\left(\frac{1}{n}\right)| = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{n} + 2}} \sin^2 \frac{1}{2(1 + e)} = = \sqrt{2} \sin^2 \frac{1}{2(1 + e)} = 2\varepsilon_0 > 0$. Значит, $\exists \ \varepsilon_0 > 0 \ \forall \ N \in \mathbb{N} \ \exists \ n \geqslant N$ $\exists \ x_n = \frac{1}{n} \in E_1 : |R_n(x_n)| \geqslant \varepsilon_0$. Согласно определению (2), сходимость на E_1 неравномерная.

3) Рассмотрим $E_2=(1,+\infty)$. $\forall \, n\in\mathbb{N} \, \forall \, x\in E_2 \, |R_n(x)|=|f(x)-f_n(x)|=\frac{2}{\sqrt{x+2}}\sin^2\frac{nx}{2(1+e^{nx})}\leqslant \leqslant \left(\frac{nx}{e^{nx}}\right)^2\leqslant \left(\frac{n}{e^n}\right)^2$, поскольку при любом фиксированном $n\in\mathbb{N}$ при $x\in E_2$ производная $\left(\frac{nx}{e^{nx}}\right)_x'=\frac{n(1-nx)}{e^{nx}}<0$ и функция $\varphi_n(x)=\left(\frac{nx}{e^{nx}}\right)^2\downarrow\downarrow 0$, так что $\forall \, n\in\mathbb{N} \, \forall \, x\in\mathbb{N} \, \forall \, x\in\mathbb{N} \, \exists \, x\in\mathbb{N$

и функциональная последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится к f(x) на E_2 .

Другой способ. Так как $\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in E_2 \ |R_n(x)| = |f(x) - f_n(x)| = \frac{2}{\sqrt{x+2}} \sin^2 \frac{nx}{2(1+e^{nx})} \leqslant \left(\frac{nx}{e^{nx}}\right)^2 \leqslant \left(\frac{n}{e^n}\right)^2 < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_0(\varepsilon)$, где положительное ε произвольно, то, согласно определению (2), сходимость на E_2 равномерная.

Задача 66. 6 Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1=(0,1)$ и $E_2=(1,+\infty)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{xn}{x^2+n^2}}{1+\ln^2 n}.$

Решение. 1) Сходимость. Поскольку $\forall x \in E_1 \cup E_2 \ \forall n \in \mathbb{N}$ $0 < u_n(x) = \frac{\sin \frac{xn}{x^2 + n^2}}{1 + \ln^2 n} \sim \frac{C}{n \ln^2 n}, \ n \to \infty$ и числовой ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{C}{n \ln^2 n}$ сходится (эталон), то $\forall x \in E_1 \cup E_2$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится по признаку сравнения.

Замечание. Эталонами являются следующие числовые ряды $(C \neq 0)$:

$$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n^{\alpha}}$$
 – сходится, если $\alpha>1,$ и расходится, если $\alpha\leqslant1;$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{C}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n} - \text{сходится, если } \alpha > 1 \text{ при любом } \beta; \text{ если } \alpha = 1,$$
 то сходится при $\beta > 1$; во всех остальных случаях – расходится.

Сходимость или расходимость этих рядов при $\alpha>0,\ \forall\ \beta$ и при $\alpha=0,\ \beta>0$ устанавливается по интегральному признаку (следует из сходимости или расходимости соответствующих несобственных интегралов); во всех остальных случаях указанные числовые ряды расходятся, поскольку общий член каждого из них не стремится к нулю при $n\to\infty$.

2) Так как
$$\forall x \in E_1 \ \forall n > 1 \ |u_n(x)| \leqslant \frac{xn}{(x^2+n^2)(1+\ln^2 n)} \leqslant$$
 $\leqslant \frac{1}{n \ln^2 n}$ и числовой ряд $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln^2 n}$ сходится, то по признаку

Вейерштрасса функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на E_1 .

3) Общий член ряда $u_n(x) \rightrightarrows 0$ на $E_1 \cup E_2$. В самом деле, $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant n_0 \ \forall x \in E_1 \cup E_2 \left| \frac{\sin \frac{xn}{x^2 + n^2}}{1 + \ln^2 n} \right| \leqslant$ $\leq \frac{1}{\ln^2 n} < \varepsilon$. Таким образом, необходимое условие равномерной сходимости на E_2 функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ выполнено, и ряд может сходиться как равномерно, так и не равномерно (сходимость ряда установлена в пункте 1). Докажем при помощи критерия Коши отсутствие равномерной сходимости на E_2 у ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$. Так как $\forall x \in E_2$ $\left|\sum_{k=n+1}^{2n}u_k(x)\right| =$ $=rac{\sinrac{x(n+1)}{x^2+(n+1)^2}}{rac{1+\ln^2(n+1)}{1+\ln^2(2n)}}+\cdots+rac{\sinrac{x2n}{x^2+(2n)^2}}{rac{1+\ln^2(2n)}{2n}}\geqslantrac{n\sinrac{nx}{x^2+4n^2}}{1+\ln^22n},$ то при $x=x_n=1$ $=n\in E_2\left|\sum_{k=n+1}^{2n}u_k(x_n)\right|\geqslant \frac{n\sin\frac{nx}{x^2+4n^2}}{1+\ln^22n}|_{x=n}=\frac{n\sin\frac{1}{5}}{1+\ln^22n}\geqslant 1,\ orall\ n\geqslant n_0>1,\ и,\ аким\ образом,\ \exists\ arepsilon_0=1>0\ \exists\ n_0\in\mathbb{N}\ orall\ N\in\mathbb{N}$ $\exists n = \max\{N, n_0\} \geqslant N \exists p = n \exists x_n = n \in E_2 : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_n) \right| \geqslant n$ $\geqslant \varepsilon_0$, как и требовалось. Ряд сходится неравномерно на E_2 . Замечание. $\forall x \in E_2 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall k \in \mathbb{N} \to 0 < \frac{x(n+k)}{x^2+(n+k)^2} =$ $=\frac{1}{\frac{x}{n+k}+\frac{n+k}{2}}\leqslant \frac{1}{2},$ откуда вытекает использованная в решении

Замечание. При оформлении решения в данном случае не нужно доказывать, что $u_n(x) \rightrightarrows 0$ на $E_1 \cup E_2$.

монотонность синуса.

 \exists амечание. Формальное отрицание условия Коши вытекает из условия $\exists \varepsilon_0 = 1 > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall \ n \geqslant n_0 \ \exists \ p = n \ \exists \ x_n = n \in E_2 : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_n) \right| \geqslant \varepsilon_0$, что позволяет записать решение следующим образом: так как $\exists \varepsilon_0 = 1 > 0$

$$>0$$
 \exists $n_0\in\mathbb{N}$ \forall $n\geqslant n_0$ \exists $p=n$ \exists $x_n=n\in E_2$: $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x_n)\right|==\frac{\sin\frac{x(n+1)}{x^2+(n+1)^2}}{1+\ln^2(n+1)}+\cdots+\frac{\sin\frac{x2n}{x^2+(2n)^2}}{1+\ln^2(2n)}|_{x=n}\geqslant \frac{n\sin\frac{nx}{x^2+4n^2}}{1+\ln^22n}|_{x=n}=\frac{n\sin\frac{1}{5}}{1+\ln^22n}\geqslant 1$, то условие Коши не выполняется и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ не является равномерно сходящимся на E_2 .

|g(n)|, что $\left|\sum_{k=n+1}^{2n}u_k(x_n)\right|\geqslant |g(n)|\to C>0,\ n\to\infty.$ Тогда в рассуждении достаточно взять $\varepsilon_0=\frac{C}{2}.$ В случае $\lim_{n\to\infty}|g(n)|=1$ $=+\infty,$ как, например, в указанном решении, подойдёт любое $\varepsilon_0>0,$ например, $\varepsilon_0=1.$

Замечание. Если критерий Коши равномерной сходимости на множестве E функционального ряда не выполняется, 10 то ряд либо сходится неравномерно на множестве E, либо расходится хотя бы в одной точке множества E. Поточечная сходимость исследуется отдельно в пункте 1. При решении таких задач (иссследовать на поточечную и равномерную сходимость на множестве E функциональную последовательность или функциональный ряд) во избежание ошибок всегда надо в первую очередь провести исследование поточечной сходимости.

Пример. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множестве $E=(1;+\infty)$ ряд $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}.$

Решение. На множестве E ряд сходится по интегральному признаку, но, по критерию Коши, неравномерно. В самом

¹⁰Строго говоря здесь предполагается, что не выполняется условие Коши критерия Коши. Критерий Коши всегда выпоняется, будучи верной теоремой. Помня об этом, мы допускаем вольность речи.

деле, так как $\left|\sum_{k=n+1}^{2n}u_k(x)\right|=\frac{1}{(n+1)^x}+\frac{1}{(n+2)^x}+\dots+\frac{1}{(2n)^x}\geqslant \frac{n}{(2n)^x},$ то при $x=x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)\in E_2$ $\left|\sum_{k=n+1}^{2n}u_k(x_n)\right|\geqslant \frac{n}{(2n)^x}|_{x=1+\frac{1}{n}}=$ $=\frac{n}{(2n)^{1+\frac{1}{n}}}\to \frac{1}{2}$ при $n\to\infty.$ Таким образом, $\exists\ \varepsilon_0=\frac{1}{4}>0\ \exists\ n_0\in\mathbb{N}\ \forall\ n\geqslant n_0\ \exists\ p=n\ \exists\ x_n=n\in E_2:$ $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x_n)\right|\geqslant$ $\geqslant \varepsilon_0,$ откуда вытекает справедливость формального отрицания критерия Коши равномерной сходимости функционального ряда.

Ошибочным является рассуждение (при решении задачи 66): поскольку $\forall x \in E_1 \ \forall n > 1 \ \left(0 < u_n(x) \sim \frac{x}{n \ln^2 n}\right)$ при $n \to \infty$, $\left|\frac{x}{n \ln^2 n}\right| \leqslant \frac{1}{n \ln^2 n}$ и числовой ряд $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln^2 n}$ сходится, то по теореме Вейерштрасса функциональный ряд $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ сходится равномерно на E_1 .

Контрпример: ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$
 на $E=[1,+\infty)$, где $u_n(x)=\begin{cases} \frac{1}{xn^2}, & \text{если } x\neq n, \\ 1+\frac{1}{n^2}, & \text{если } x=n. \end{cases}$

Так как $\forall \ x \in E \ u_n(x) \sim \frac{C}{n^2}$ при $n \to \infty$, то ряд сходится на E. Так как $\forall \ n \in \mathbb{N}$ $\sup\{|u_n(x)|: x \in E\} \geqslant |u_n(n)| = 1 + \frac{1}{n^2} \geqslant 1$, то общий член ряда $u_n(x) \not \rightrightarrows 0$ на E и ряд сходится неравномерно на E, так как не выполнено необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда. Однако $0 < u_n(x) \sim \frac{1}{xn^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится. По теореме Вейерштрасса функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{xn^2}$ сходится равномерно на E, а ряд

с эквивалентным общим членом $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, как было показано, сходится на E неравномерно.

Вывод. При исследовании равномерной сходимости общий член ряда, даже знакопостоянного, нельзя менять на эквивалентную величину.

Ошибочным является рассуждение: при подстановке в функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{xn}{x^2+n^2}}{1+\ln^2 n}$ при $x\in E_2$ вместо x значений $x=x_n=n\in\mathbb{N}$ получается числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{2}}{1+\ln^2 n}$. Поскольку указанный числовой ряд расходится, для него справедливо отрицание условия Коши критерия Коши: $\exists \ \varepsilon_0 > 0 \ \forall \ N\in\mathbb{N} \ \exists \ n>N \ \exists \ p\in\mathbb{N} \ \exists \ x_n=n\in E_2: \left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_n) \right| \geqslant \varepsilon_0$. На основании критерия Коши о равномерной сходимости функциональных рядов заключаем отсутствие равномерной сходимости на E_2 у ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Контрпример: ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$
 на $E=[1,+\infty),$ где $u_n(x)=\begin{cases} \frac{1}{xn^2}, & \text{если } x\neq n, \\ \frac{1}{n}, & \text{если } x=n. \end{cases}$

Так как
$$\forall \, \varepsilon > 0 \, \exists \, N \in \mathbb{N} \, \forall \, n > N \, \forall \, p \in \mathbb{N} \, \forall \, x \in E \, \left| \substack{n+p \\ k=n+1} u_k(x) \right| \leqslant$$
 $\leqslant \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} \right) + \frac{1}{n+1} \, \leqslant \left(\frac{1}{n(n+1)} + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \right) + \frac{1}{n+1} =$ $= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right) + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} -$ $- \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+1} \, \leqslant \, \frac{2}{n} \, \leqslant \, \varepsilon$, то по критерию Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $E = [1, +\infty)$. Однако $u_n(n) = \frac{1}{n}$,

числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится. По указанному ошибочному рассуждению получается, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится неравномерно на E.

Фактически таким рассуждением показано, что $\exists \ \varepsilon_0 > 0$ $\forall \ N \in \mathbb{N} \ \exists \ n > N \ \exists \ p \in \mathbb{N} \ \exists \ x_{n+1} = (n+1) \in E_2, \ \dots, \ \exists \ x_{n+p} = = (n+p) \in E_2 : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_k) \right| \geqslant \varepsilon_0$, а это не есть формальное отрицание условия Коши, как заявлено.

Ошибочным является рассуждение: поскольку $\left| \sum_{k=n+1}^{2n} u_k(k) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin \frac{1}{2}}{1 + \ln^2 k} \right| \geqslant \frac{n \sin \frac{1}{2}}{1 + \ln^2 2n} \geqslant 1, \ \forall \ n \geqslant n_0 > 1,$ то $\exists \ \varepsilon_0 = 1 > 0 \ \forall \ N \in \mathbb{N} \ \exists \ n = \max\{N, n_0\} \geqslant N \ \exists \ p = n \ \exists \ x_n =$ $= n \in E_2 : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_n) \right| \geqslant \varepsilon_0. \text{ На основании критерия Коши }$ заключаем отсутствие равномерной сходимости на E_2 у ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$

Контрпример тот же, что в предыдущем случае.

Во избежание ошибок в рассуждении точку $x = x_n$ нужно подставлять уже после оценки снизу модуля отрезка ряда!

Фактически таким рассуждением показано, что $\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \ N \in \mathbb{N} \ \exists \ n > N \ \exists \ p \in \mathbb{N} \ \exists \ x_{n+1} = (n+1) \in E_2, \dots, \ \exists \ x_{n+p} = (n+p) \in E_2 : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_k) \right| \geqslant \varepsilon_0$, а это не есть формальное отрицание условия Коши, как заявлено.

Отметим, что в качестве контрпримера в этом и в предыдущем случае можно взять более простой ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$

на $E = [1, +\infty)$, где

$$u_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq n, \\ \frac{1}{n}, & \text{если } x = n. \end{cases}$$

Задача 7. [6] Исследовать на дифференцируемость в точке D(1,1) функцию

$$z(x,y) = (2x^2 - y^2 - 1)\sqrt{x^2 + y^2 - xy - x - y + 1}.$$

Решение. Из теоремы о дифференцируемости композиции дифференцируемых функций следует, что заменой $u=x-1,\ v=y-1$ задача сводится к исследованию на дифференцируемость в точке O(0,0) функции $f(u,v)=z(u+1,v+1),\ f(u,v)=(2u^2+4u-v^2-2v)\sqrt{u^2+v^2-uv}.$ Нетрудно видеть, что $f(0,0)=0,\ \frac{\partial f}{\partial u}(0,0)=\frac{d}{du}f(u,0)|_{u=0}=\frac{d}{du}f(u,0)|_{u=0}=\frac{d}{dv}f(0,v)|_{v=0}=\lim_{u\to 0}\frac{(2u^2+4u)|u|}{u}=\lim_{u\to 0}(2u+4)|u|=0$ $\lim_{u\to 0}\frac{(2u^2+4u)|u|}{u}=\lim_{u\to 0}(2u+4)|u|=0$ $\lim_{u\to 0}\frac{(-v^2-2v)|v|}{v}=\lim_{v\to 0}(-v-2)|v|=0,\$ и, таким образом, функция f(u,v) дифференцируема в точке (0,0) тогда и только тогда, когда $\lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{(2u^2+4u-v^2-2v)\sqrt{u^2+v^2-uv}}{\sqrt{u^2+v^2}}=0.$

Перейдём к полярным координатам: $u = \rho \cos \varphi, v = \rho \sin \varphi$. Тогда $\forall \rho > 0 \ \forall \varphi \in [0, 2\pi) \ \left| \frac{(2u^2 + 4u - v^2 - 2v)\sqrt{u^2 + v^2 - uv}}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right| =$ $= \ \left| \frac{(2\rho^2 \cos^2 \varphi + 4\rho \cos \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi - 2\rho \sin \varphi)\sqrt{\rho^2 - \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi}}{\rho} \right| \leqslant$ $\leqslant \sqrt{2}\rho(3\rho + 6) \to 0, \text{ если } \rho \to +0.$ Следовательно, $\exists \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{(2u^2 + 4u - v^2 - 2v)\sqrt{u^2 + v^2 - uv}}{\sqrt{u^2 + v^2}} = 0, \text{ и функция } f(u,v)$ дифференцируема в точке (0,0).

Ответ: функция z(x,y) дифференцируема в точке D(1,1).

Замечание. Подчеркнём, что окончательная оценка модуля $\left| \frac{f(\rho\cos\varphi,\,\rho\sin\varphi)}{\rho} \right| \leqslant \sqrt{2}\rho(3\rho+6)$ не должна содержать φ , она должна содержать только ρ .

Ошибочным является рассуждение: $\forall \varphi \in [0,2\pi)$ $\exists \lim_{\rho \to +0} \frac{(2\rho^2 \cos^2 \varphi + 4\rho \cos \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi - 2\rho \sin \varphi) \sqrt{\rho^2 - \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi}}{\rho} = \lim_{\rho \to +0} \rho (2\rho \cos^2 \varphi + 4\cos \varphi - \rho \sin^2 \varphi - 2\sin \varphi) \sqrt{1 - \cos \varphi \sin \varphi} = 0$ (предел равен нулю, например, как произведение бесконечно малой ρ на ограниченную функцию: полагаем $\rho < 1$). Следовательно, $\exists \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{(2u^2 + 4u - v^2 - 2v)\sqrt{u^2 + v^2 - uv}}{\sqrt{u^2 + v^2}} = 0$. Этим рассуждением (посылка импликации) установлено лишь, что предел по каждому направлению равен нулю, откуда ещё не следует существование соответствующего двойного предела. Не редко указанное ошибочное рассуждение оформляется в виде равенства $\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{(2u^2 + 4u - v^2 - 2v)\sqrt{u^2 + v^2 - uv}}{\sqrt{u^2 + v^2}} = 0$, которое не доказывает требуемое, так как в общем случае равенство $\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{f(u,v)}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \lim_{\rho \to +0} \frac{f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)}{\rho}$ не является верным. 11

Замечание. Можно обойтись без перехода к полярным координатам [3]. Заметим, что для всех $x, y \in \mathbb{R}$ $|x| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$ и $|y| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$. Пусть $0 < \rho = \sqrt{u^2 + v^2} < 1$. Тогда $0 \leqslant \left| \frac{(2u^2 + 4u - v^2 - 2v)\sqrt{u^2 + v^2} - uv}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right| \leqslant \frac{(2\rho^2 + 4\rho + \rho^2 + 2\rho)\sqrt{\rho^2 + 2\rho^2}}{\rho} \leqslant \rho$ $\leqslant \rho(3\rho + 6)\sqrt{3} \leqslant 18\rho = 18\sqrt{u^2 + v^2} \to 0$, если $(u, v) \to 0$ 0, 0). Следовательно, $\exists \lim_{(u,v) \to (0,0)} \frac{(2u^2 + 4u - v^2 - 2v)\sqrt{u^2 + v^2 - uv}}{\sqrt{u^2 + v^2}} = 0$, и функция f(u,v) дифференцируема в точке (0,0).

Пример. Исследовать на дифференцируемость в точке M(0,0) функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} \sin(3x), & x \neq 0, \\ y^3 + |y|^{3/2}, & x = 0. \end{cases}$$
 Решение. $f(0,0) = 0. \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x,0) - f(0,0)}{\Delta x} =$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0. \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \left(\frac{d}{dy}f(0,y)\right)|_{y=0} = (y^3 + |y|^{3/2})'|_{y=0} =$$
$$= (y^3)'|_{y=0} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sqrt{|\Delta y|^3}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{|\Delta y|}{\Delta y} \sqrt{|\Delta y|} = 0.$$
 Докажем, что $\exists \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{f(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0. \quad (*)$

I способ. Пусть $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \in (0, \rho_0)$, где положительное ρ_0 столь мало, что $|\operatorname{sh}(3\Delta x)| < 6|\Delta x|$. Тогда при $\Delta x \neq 0$ $\left| \frac{f(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| = \left| \frac{\Delta y^2 \operatorname{sh}(3\Delta x)}{\Delta x \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \leqslant \frac{6\Delta y^2}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \leqslant \frac{6(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$, если $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ по множеству определения (при $\Delta x \neq 0$).

При
$$\Delta x = 0$$
, $\Delta y \neq 0$ $\left| \frac{f(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| = \left| \frac{\Delta y^3 + |\Delta y|^{3/2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \leqslant \frac{|\Delta y|^3 + |\Delta y|^{3/2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \leqslant \frac{\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)^3 + \left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)^{3/2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \leqslant (\Delta x^2 + \Delta y^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 +$

каждому направлению равен 0, а двойной предел не существует, так как, например, $f(x,x^2)=\frac{1}{2}$. См. [5].

 $^{^{-11}}$ Для функции $f(x,y)=rac{x^2y}{x^4+y^2},\,\,x^2+y^2>0,$ в точке (0;0) предел по

 $+\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)^{1/2} \to 0$, если $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ по множеству определения (при $\Delta x = 0, \ \Delta y \neq 0$).

Таким образом, для всех достаточно малых Δx и Δy , не равных одновременно нулю, выполнено $\left|\frac{f(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\right| \leqslant \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} + (\Delta x^2 + \Delta y^2) + (\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})^{1/2} \to 0$ при $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. Значит, $\exists \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)} \frac{f(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$.

II способ. Перейдём к полярным координатам:

$$\begin{cases} \Delta x = \rho \cos \varphi, \\ \Delta y = \rho \sin \varphi, \ \rho > 0, \ \varphi \in [0, 2\pi). \end{cases}$$

1-й случай: $\Delta x \neq 0$. $\exists \rho_0 > 0 \ \forall \rho \in (0,\rho_0) \ \forall \varphi \in [0,2\pi) \setminus \{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\} \ \left| \frac{f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)}{\rho} \right| = \left| \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} \operatorname{sh}(3\rho\cos\varphi) \right| = \left| 6\rho\sin^2\varphi \cdot \frac{\operatorname{sh}(3\rho\cos\varphi)}{6\rho\cos\varphi} \right| \leqslant |6\rho\sin^2\varphi| \leqslant 6\rho = F_1(\rho), \text{ поскольку}$ для некоторого $\alpha_0 > 0$, $0 < \frac{\operatorname{sh}\alpha}{2\alpha} < 1$ для всех $\alpha : 0 < |\alpha| < \alpha_0$. 2-й случай: $\Delta x = 0$. $\forall \rho > 0 \ \forall \varphi \in \{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\} \ \left| \frac{f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)}{\rho} \right| = \left| \rho^2\sin^3\varphi + \sqrt{\rho}|\sin\varphi|^{3/2} \right| \leqslant \rho^2 + \sqrt{\rho} = F_2(\rho)$. Таким образом, $\exists \rho_0 > 0 \ \forall \rho \in (0,\rho_0) \ \forall \varphi \in [0,2\pi) \ \left| \frac{f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)}{\rho} \right| \leqslant F_1(\rho) + F_2(\rho) = 6\rho + \rho^2 + \sqrt{\rho} \to 0 \text{ при } \rho \to +0$, что и требовалось доказать.

Утверждение (*) равносильно дифференцируемости функции f(x,y) в точке M(0,0).

Ответ: f(x,y) дифференцируема в точке M(0,0).

§ 2. Вариант МФТИ-61

Задача 1. $\boxed{5}$ Найти первый и второй дифференциалы в точке (0,1) функции z=z(x,y), заданной неявно уравнением $z^2-2xy=\ln z+y$, где z(0,1)=1. Разложить функцию z=z(x,y) по формуле Тейлора в окрестности этой точки до $o(x^2+(y-1)^2)$.

Решение. Формально дифференцируя тождество $z^2 - 2xy = \ln z + y$, находим $2zdz - 2ydx - 2xdy = \frac{dz}{z} + dy$ (1). Подставляя в (1) x = 0, y = 1, z = 1, находим dz = 2dx + dy (2).

Формально дифференцируя (1) и считая dx и dy постоянными, находим $2dz^2+2zd^2z-2dxdy-2dxdy=\frac{d^2z\cdot z-dz^2}{z^2}$. Подставляя $x=0,\ y=1,\ z=1,$ находим $d^2z=4dxdy-3dz^2$. Подставляя вместо dz сумму 2dx+dy из (2), находим $d^2z=-12dx^2-8dxdy-3dy^2$.

Формула Тейлора имеет вид: $z-1=dz+\frac{d^2z}{2!}+o(\rho^2)$. Учитывая, что $dx=(x-0),\ dy=(y-1),\ \rho^2=x^2+(y-1)^2,$ находим, что $z(x,y)=1+2(x-0)+1\cdot(y-1)+\frac{1}{2}(-12(x-0)^2-8(x-0)(y-1)-3(y-1)^2)+o(x^2+(y-1)^2).$

Задача 2. $\boxed{4}$ Найти длину дуги кривой $y = \ln(1 + \cos x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$

Решение. Длина дуги кривой $l=\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1+y'^2}dx==\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1+\left(\frac{-\sin x}{1+\cos x}\right)^2}dx=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{\cos \frac{x}{2}}=2\int\limits_0^{\pi/4}\frac{dy}{\cos y}=2\int\limits_0^{\pi/4}\frac{d\sin y}{1-\sin^2 y}==2\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dt}{1-t^2}=\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=2\ln(1+\sqrt{2}).$

Задача 3. 4 Исследовать на дифференцируемость в точке M(0,0) функцию

$$z(x, y) = \begin{cases} \ln\left(1 + x\sin\sqrt[3]{\frac{y^4}{x}}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Решение. Так как $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=\frac{d}{dx}z(x,0)|_{x=0}=\frac{d}{dx}0=0,$ $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)=\frac{d}{dy}z(0,y)|_{y=0}=\frac{d}{dy}0=0,$ z(0,0)=0, то функция z(x,y) дифференцируема в точке (0,0) тогда и только тогда, когда $\exists\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{z(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$

I способ. Поскольку для всех достаточно малых x и y, не равных одновременно нулю, выполнено $0\leqslant \left|\frac{z(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant \leqslant \frac{2\sqrt[3]{x^2y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant \frac{2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant 2\sqrt{x^2+y^2}\to 0$ при $(x,y)\to(0,0),$ то $\exists\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{z(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ и функция z(x,y) дифференцируема в точке M(0,0).

II способ. Перейдём к полярным координатам: x= = $\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Поскольку для всех действительных значений переменной t справедливо неравенство $|\sin t|\leqslant |t|$ и для всех достаточно малых по модулю действительных значений переменной t справедливо неравенство $|\ln(1+t)|\leqslant |2t|$, то $\exists \rho_0>0 \ \forall \rho\in (0,\rho_0) \ \forall \varphi\in [0,2\pi)\setminus\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\}$ $\left|\frac{\ln\left(1+x\sin\sqrt[3]{\frac{y^4}{x}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\left|\frac{\ln\left(1+\rho\cos\varphi\cdot\sin\sqrt[3]{\frac{\rho^4\sin^4\varphi}{\rho\cos\varphi}}\right)}{\rho}\right|\leqslant 2\rho\sqrt[3]{\cos^2\varphi\sin^4\varphi}\leqslant 2\rho$. Следовательно, $\forall \rho>0 \ \forall \varphi\in [0,2\pi)$ $\left|\frac{z(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\left|\frac{z(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)}{\rho}\right|\leqslant 2\rho\to 0$, если $\rho\to+0$. Следовательно, $\exists\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{z(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ и функция z(x,y) дифференцируема в точке M(0,0).

Задача 4. 4 Разложить по степеням x функцию

$$f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{2x^2}{\sqrt{9 - 4x^4}}$$

и найти радиус сходимости полученного ряда.

Решение.

$$f'(x) = -\frac{4}{3}x\left(1-\frac{4}{9}x^4\right)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{-\frac{1}{2}}^n \frac{(-1)^{n+1}4^{n+1}}{3^{2n+1}} x^{4n+1}.$$
 Радиус сходимости полученного ряда определяется из условия $\left|\frac{4}{9}x^4\right| < < 1,$ откуда $|x| < \sqrt{\frac{3}{2}} = R.$ Тогда $f(x) = f(0) + \int\limits_0^x f'(t)dt =$

 $=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}C_{-\frac{1}{2}}^{n}\frac{(-1)^{n+1}4^{n+1}}{(4n+2)\cdot 3^{2n+1}}x^{4n+2}$. При почленном интегрировании степенного ряда радиус сходимости не меняется. Поэтому $R==\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Отметим, что $C_{-\frac{1}{2}}^n=\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)=$ = $\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n(n!)}$ для всех натуральных n; $C_{-\frac{1}{2}}^0=1.$ Но эти преобразования делать не обязательно: C_{α}^n – стандартный символ.

Задача 5. 3 Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{(3n)!}{(2n)^{3n}}}.$$

Решение.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \sqrt{\frac{(3n+3)!(2n)^{3n}}{(2n+2)^{3n+3}(3n)!}} = \sqrt{\frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(2n+2)^3\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}}} \rightarrow \sqrt{\frac{27}{8e^3}} < 1, \ n \rightarrow \infty$$
. По признаку Даламбера ряд сходится.

Задача 6a. 4 Исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{(\sqrt[3]{x} + x^3)^{\alpha}}{(x^{17} + 2)\arcsin\frac{x^2}{x^2 + 2}} dx.$$

Решение. $f(x) = \frac{(\sqrt[3]{x} + x^3)^{\alpha}}{(x^{17} + 2)\arcsin\frac{x^2}{x^2 + 2}} \geqslant 0$ при x > 0. Интеграл имеет две особенности: в нуле и в $+\infty$. $I = \int\limits_{0}^{+\infty} f(x) dx = \int\limits_{0}^{1} f(x) dx + \int\limits_{1}^{+\infty} f(x) dx = I_1 + I_2$. Каждый из интегралов I_1 и I_2 имеет уже одну особенность: I_1 — в нижнем пределе, а I_2 — в верхнем пределе интегрирования. Для исследования сходимости интегралов I_1 и I_2 воспользуемся признаком сравнения. Так как $f(x) \sim \frac{C}{x^{2-\frac{\alpha}{3}}}$ при $x \to 0$, то I_1 сходится $\Leftrightarrow 2 - \frac{\alpha}{3} < 1 \Leftrightarrow \alpha > 3$. Так как $f(x) \sim \frac{C}{x^{17-3\alpha}}$ при $x \to +\infty$, то I_2 сходится $\Leftrightarrow 17 - 3\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{16}{3}$. Интеграл

I сходится \Leftrightarrow интеграл I_1 сходится и интеграл I_2 сходится \Leftrightarrow $4 < \alpha < \frac{16}{3}$. Сходимость абсолютная.

Задача 66. 6 Исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x^3 \, dx}{(x + \cos \ln x)^{\alpha}}.$$

Решение. Заменой $t=x^3$ задача сводится к исследованию на сходимость и абсолютную сходимость несобственного интеграла $I=\int\limits_{1}^{+\infty}f(t)dt=\int\limits_{1}^{+\infty}g(t)\sin tdt,$ где $g(t)=\frac{1}{t^{\frac{2+\alpha}{3}}\left(1+\frac{\cos\ln\frac{3\sqrt{t}}{3\sqrt{t}}}\right)^{\alpha}}>0.$ Ясно, что $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=0\Leftrightarrow\frac{2+\alpha}{3}>0$ > $0\Leftrightarrow\alpha>-2$. Покажем, что при $\alpha>-2$ интеграл сходится по признаку Дирихле, а при $\alpha\leqslant-2$ – расходится по критерию Коши.

I) Сходимость. 1) $\forall \xi \in [1; +\infty) \left| \int_{1}^{\xi} \sin t \ dt \right| \leqslant 2$.

2) Проверим, что $g(t) \downarrow \!\!\!\downarrow 0$ при $t \geqslant t_0$ и $\alpha > -2$. Достаточно доказать, что $h(t) = \frac{1}{g(t)} \uparrow \!\!\!\uparrow$ при $t \geqslant t_0$ и $\alpha > -2$, а это вытекает из следующего утверждения: $\forall \; \alpha > -2$

$$\exists t_0 \geqslant 1 \ \forall t \geqslant t_0 \ h'(t) = \left(\frac{2+\alpha}{3}\right) t^{\frac{\alpha-2}{3}} \left(1 + \frac{\cos\ln\sqrt[3]{t}}{\sqrt[3]{t}}\right)^{\alpha} \times \left[\sqrt[3]{t} - \frac{\alpha\sqrt{2}}{2+\alpha}\left(1 + \frac{\cos\ln\sqrt[3]{t}}{\sqrt[3]{t}}\right)^{-1} \sin\left(\ln\sqrt[3]{t} + \frac{\pi}{4}\right)\right] > 0, \ \text{поскольку}$$
 функция в квадратных скобках стремится к $+\infty$ при $t \to +\infty$.

Из 1) – 2) по признаку Дирихле заключаем, что при $\alpha > -2$ интеграл I сходится.

II) Расходимость. Так как $\forall \ \alpha \leqslant -2 \lim_{t \to +\infty} g(t) \geqslant 1$, то $\forall \ \alpha \leqslant -2 \ \exists \ t_0 \geqslant 1 \ \forall \ t \geqslant t_0 \ g(t) \geqslant \frac{1}{2}$. Значит, $\forall \ \alpha \leqslant -2 \ \exists \ t_0 \geqslant 1$ $\forall \ \delta > t_0 \ \exists \ n = \left[\frac{\delta}{2\pi}\right] + 1 > \frac{\delta}{2\pi} \ \exists \ \xi' = 2\pi n > \delta, \ \exists \ \xi'' = \frac{\pi}{2} + 2\pi n > \delta:$ $\begin{vmatrix} \xi'' \\ \xi' \end{vmatrix} f(t) \ dt = \int_{\xi'}^{\xi''} g(t) \sin t \ dt \geqslant \frac{1}{2} \int_{\xi'}^{\xi''} \sin t \ dt = \frac{1}{2}. \ \text{Итак},$

 $\forall \ \alpha \leqslant -2 \ \exists \ \varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0 \ \forall \ \delta > 1 \ \exists \ \xi' > \delta \ \exists \ \xi'' > \delta : \left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(t) \ dt \right| \geqslant \varepsilon_0.$ По критерию Коши интеграл I расходится при $\alpha \leqslant -2$.

III) Абсолютная сходимость. Интеграл I может абсолютно сходиться лишь при тех значениях α , при которых он сходится. При $\alpha > -2$ интеграл $\int\limits_1^{+\infty} g(t)\cos 2t\ dt$ сходится по признаку Дирихле. Тогда по признаку сравнения из цепочки неравенств $\int\limits_1^{+\infty} g(t)\ dt \geqslant \int\limits_1^{+\infty} g(t)|\sin t|\ dt \geqslant \int\limits_1^{+\infty} g(t)\sin^2t\ dt = = \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} g(t)\ dt - \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} g(t)\cos 2t\ dt \geqslant 0$ следует, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} |f(t)|\ dt = \int\limits_1^{+\infty} g(t)|\sin t|\ dt$ сходится \Leftrightarrow интеграл $\int\limits_1^{+\infty} g(t)\ dt$ сходится $\Leftrightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{C}{t^{\frac{2+\alpha}{3}}}\ dt$ сходится $\Leftrightarrow \frac{2+\alpha}{3} > 1 \Leftrightarrow \alpha > 1$.

Ответ: сходится абсолютно, если $\alpha > 1$; сходится условно, если $-2 < \alpha \leqslant 1$, и расходится, если $\alpha \leqslant -2$.

Задача 7а. $\boxed{5}$ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1=(0,1)$ и $E_2=(1,+\infty)$ функциональную последовательность

$$f_n(x) = \frac{n^2}{x} \sin \frac{x}{n^2} + \sin x.$$

Решение.

- 1) $\forall x \in E_1 \cup E_2 \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 1 + \sin x = f(x).$
- 2) Рассмотрим $E_2 = (1, +\infty)$.

$$|R_n(x)| = |f(x) - f_n(x)| = \left|1 - \frac{n^2}{x} \sin \frac{x}{n^2}\right|,$$

 $x_n = n^2 \in E_2$ при $n \geqslant 2$,

$$|R_n(x_n)| = |1 - \sin 1| \Rightarrow$$

 $\Rightarrow \forall n > 1 \quad \sup\{|R_n(x)| : x \in E_2\} \geqslant |R_n(x_n)| = |1 - \sin 1| > 0 \Rightarrow$ \Rightarrow функциональная последовательность $f_n(x)$ не является равномерно сходящейся к f(x) на E_2 .

 $f_n(x)$ сходится к f(x) неравномерно на E_2 .

3) Рассмотрим $E_1 = (0,1)$.

I способ. Так как $\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in E_1 \ 0 < \frac{x}{n^2} < 1$, то по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа имеем: $\sin\frac{x}{n^2}=\frac{x}{n^2}-\frac{\sin\xi}{2!}\cdot\frac{x^2}{n^4},\ 0<\xi<1.$ Таким образом, $\forall\ n\in\mathbb{N}\ \forall\ x\in E_1\ \exists\ \xi\in(0;1):|R_n(x)|=|f(x)-f_n(x)|=|1 -rac{n^2}{x}\sinrac{x}{n^2}|=\left|rac{x\sin\xi}{2n^2}
ight|\leqslantrac{1}{2n^2} o 0$ при $n o\infty\Rightarrow$ функциональная последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится к f(x) на E_1 .

Замечание. Безоговорочное применение формулы Маклорена с остаточным членом в форме Пеано здесь не корректно: например, $|R_n(x)| = |o\left(\frac{x}{n^2}\right)| \to 0$ при $n \to \infty$ при любом фиксированном x, но $o\left(\frac{x}{n^2}\right)$ зависит как от n, так и от x, и, может быть, стремление к нулю по x неравномерное. Например, на множестве $E_2 |R_n(x)| = |o(\frac{x}{n^2})| \to 0$ при $n \to \infty$ при любом фиксированном x, но неравномерно.

Замечание. Формула Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа в частном случае выглядит следующим образом: $f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(\xi)}{2!}t^2$, $0 < \xi < t$. При необходимости можно взять больше членов разложения. В приведённом решении $f(t) = \sin t$, $t = \frac{x}{n^2}$. Точка ξ существует и удовлетворяет указанным неравенствам. Так как $\xi = \xi(n,x)$ зависит от x, окончательная оценка не должна содержать ξ .

II способ. Исследуем поведение функции $R_n(x) = f(x)$ — $-f_n(x)=1-\frac{n^2}{x}\sin\frac{x}{n^2}$ на E_1 при фиксированном n с помощью производной: $R'_n(x) = -\frac{n^2}{x^2} \left(\frac{x}{n^2} \cos \frac{x}{n^2} - \sin \frac{x}{n^2} \right) =$ $=-\frac{n^2}{r^2}\cos\frac{x}{r^2}\left(\frac{x}{r^2}-\operatorname{tg}\frac{x}{r^2}\right)>0$, так как $\operatorname{tg}\alpha>\alpha$, если $0<\alpha\leqslant$ $\leqslant 1$. Здесь $\alpha = \frac{x}{n^2}$. Значит, $R_n(x) \uparrow \uparrow$ на полуинтервале (0;1]. Тогда $0 < R_n(x) < R_n(1) = 1 - n^2 \sin \frac{1}{n^2}$. Таким образом, $\forall n \in$ $\in \mathbb{N} \ \forall \ x \in E_1 \ |R_n(x)| = |f(x) - f_n(x)| = |1 - \frac{n^2}{x} \sin \frac{x}{n^2}| < 1 - n^2 \sin \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \to 0$ при $n \to \infty \Rightarrow$ функциональная последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится к f(x) на E_1 .

III способ. Используем неравенства $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$, справедливые для всех $x \ge 0$.

Неравенство $\sin x \leqslant x$ доказывалось на лекциях. Докажем

неравенство $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x$ при помощи теоремы Лагранжа о среднем $\varphi(x) - \dot{\varphi(0)} = \varphi'(\xi)x, \ 0 < \xi < x$. Дважды применяя теорему Лагранжа, находим: $\varphi(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6} = (\cos \xi - 1 + 1)$ $(-\sin \eta + \eta)\xi x \ge 0, \ 0 < \eta < \xi < x,$ как и требовалось. Следовательно, $\forall \ t \in \mathbb{R} \ |t - \sin t| \leqslant \frac{|t|^3}{6}$ и $|R_n(x)| =$ $=rac{n^2}{x}\left|rac{x}{n^2}-\sinrac{x}{n^2}
ight|\leqslantrac{n^2}{x}\cdotrac{x^3}{6n^6}=rac{x^2}{6n^4}\leqslantrac{1}{6n^4} o 0$ при $n o\infty.$ $f_n(x)$ равномерно сходится к f(x) на E_1 .

Пример. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1,+\infty)$ последовательность функций $f_n(x) = n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

Решение. 1) $\forall x \in E_1 \cup E_2 \lim_{n \to \infty} f_n(x) = x = f(x)$.

- 2) Рассмотрим $E_1 = (0,1)$. Докажем, что для всех $t \geqslant 0$ справедливы неравенства $t-\frac{t^2}{2}\leqslant \ln(1+t)\leqslant t$. Применяя теорему Лагранжа о средем, находим: $\varphi(t) = t - \ln(1+t) =$ $=\frac{\xi}{1+\xi}t\geqslant 0$ и $\psi(t)=\ln(1+t)-t+\frac{t^2}{2}=\frac{\eta^2}{1+\eta}t\geqslant 0,\ 0<\eta,\ \xi< t,$ как и требовалось. ¹² Следовательно, $\forall t \ge 0 |t - \ln(1+t)| \le \frac{t^2}{2}$ $|R_n(x)| = |x - n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)| = n \left|\frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)\right| \leqslant n \cdot \frac{x^2}{2n^2} = n$ $=\frac{x^2}{2n}\leqslant \frac{1}{2n}\to 0$ при $n\to\infty$. Сходимость на E_1 равномерная.
- 3) Рассмотрим $E_2 = (1, +\infty)$. $|R_n(n)| = n |\ln 2 1| \to +\infty$ при $n \to \infty$. Сходимость на E_2 неравномерная.

Пример. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0, a)$ и $E_2 = (a, +\infty)$ последовательность функций $f_n(x) = \frac{x \ln(xn)}{n^2}$. **Решение.** 1) $\forall x \in E_1 \cup E_2 \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0 = f(x)$.

2) Пусть $R_n(x) = f_n(x) - 0 = \frac{x}{n^2} \ln(xn)$. $\forall n \in \mathbb{N} \ R'_n(x) = \frac{\ln(xn)+1}{n^2}, \ R'_n(x) = 0$ при $x_n = \frac{1}{ne}, \ R_n(x_n) = \frac{1}{ne}$

 $^{^{12}}$ Возможно, неравенство $\ln(1+t) \leqslant t$ доказывалось на лекциях. В таком случае не надо доказывать это неравенство.

 $=-rac{1}{en^3},\;|R_n(x_n)|=rac{1}{en^3},\;|R_n(+0)|=0,\;|R_n(a-0)|=$ $=rac{a}{n^2}|\ln an|,\;\sup\{|R_n(x)|:x\in E_1\}=\max\{rac{1}{en^3},\;rac{a}{n^2}|\ln an|\}\leqslant$ $\leqslantrac{1}{en^3}+rac{a}{n^2}|\ln an| o 0$ при $n o\infty$. Сходимость на E_1 равномерная.

3) $\forall n \in \mathbb{N} \sup\{|R_n(x)| : x \in E_2\} = |R_n(+\infty)| = +\infty.$ Сходимость на E_2 неравномерная.

Задача 76. $\boxed{4}$ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1=(0,1)$ и $E_2=(1,+\infty)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{x+n} \sinh \frac{x}{n}.$

Решение. 1) Так как $\forall x \in E_1 \cup E_2 \ \forall n \in \mathbb{N} \ 0 < u_n(x) = \frac{x}{x+n} \sinh \frac{x}{n} \sim \frac{C}{n^2}, \ n \to \infty$ и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^2}$ сходится (эталон), то $\forall x \in E_1 \cup E_2$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится по признаку сравнения.

2) Так как $\forall x \in E_1 \ \forall n \in \mathbb{N} \ |u_n(x)| \leqslant \frac{1}{n} \sinh \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^2}, \ n \to \infty$ и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то по теореме Вейерштрасса функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на E_1 .

3) Рассмотрим E_2 .

Докажем, что общий член функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ неравномерно на E_2 стремится к нулю. Так как на E_2 ряд сходится, то $\forall x \in E_2 \lim_{n \to \infty} u_n(x) = 0$. Далее, $|u_n(x)| =$ $= \left|\frac{x}{x+n} \operatorname{sh} \frac{x}{n}\right|$; $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n = 2n \in E_2$; $|u_n(x_n)| =$ $= \frac{2}{3} \operatorname{sh} 2 > 0 \Rightarrow$ общий член ряда $u_n(x)$ стремится к нулю неравномерно, откуда следует неравномерная сходимость на E_2 самого функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, так как не выполнено необходимое условие его равномерной сходимости (сходимость ряда установлена в пункте 1).

Замечание. Из критерия Коши следует, что если

предел $\lim_{n\to\infty}|u_n(x_n)|>0$, то равномерной сходимости у функционального ряда нет. В самом деле, условие Коши $\forall \ \varepsilon>0 \ \exists \ N\in \mathbb{N} \ \forall \ n\geqslant N \ \forall \ p \ \forall \ x\in E \ \left|\sum_{k=n}^{n+p-1}u_k(x)\right|<\varepsilon$ для p=1 имеет вид: $\forall \ \varepsilon>0 \ \exists \ N\in \mathbb{N} \ \forall \ n\geqslant N \ \forall \ x\in E \ |u_n(x)|<\varepsilon$. Поскольку предел $\lim_{n\to\infty}|u_n(x_n)|=2\varepsilon_0>0$, то $(*)\ \exists \ \varepsilon_0>0 \ \forall \ N\in \mathbb{N} \ \exists \ n\geqslant N \ \exists \ x_n\in E: |u_n(x_n)|\geqslant \varepsilon_0$. Значит, условие Коши не выполняется и по критерию Коши ряд не является равномерно сходящимся на E. В нашем примере $\lim_{n\to\infty}|u_n(x_n)|=\frac{2}{3} \sin 2>0$.

Этот факт можно объяснить по-другому. Поскольку предел $\lim_{n\to\infty}|u_n(x_n)|=2\varepsilon_0>0$, то выполнено условие (*). Значит, общий член ряда $u_n(x)$ либо не стремится поточечно к нулю на E, либо стремится к нулю неравномерно на E. Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ не является равномерно сходящимся на E, так как для него не выполнено необходимое условие равномерной сходимости функциональных рядов: у равномерно сходящегося на E функционального ряда общий член ряда равномерно на E стремится к нулю.

Если предел $\lim_{n\to\infty}|u_n(x_n)|$ не существует, то условие (*) выполнено. В самом деле, допустив противное, находим, что общий член ряда $u_n(x) \Rightarrow 0$ на E. Но тогда $\exists \lim_{n\to\infty} \sup\{|u_n(x)|: x\in E\} = 0$ и из цепочки неравенств $\sup\{|u_n(x)|: x\in E\} \geqslant |u_n(x_n)| \geqslant 0$ по теореме о зажатой последовательности вытекает, что $\exists \lim_{n\to\infty}|u_n(x_n)|=0$ вопреки условию. Значит, и в этом случае ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ не является равномерно сходящимся на E.

¹³Этим фактом можно пользоваться в письменной работе без доказательства.

Задача 8. [5] Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится. Верно ли, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ сходится? Доказать, или опровергнуть примером.

Решение. Ввиду верного неравенства $\left|\frac{a_n}{n}\right| \leqslant \frac{a_n^2 + \frac{1}{n^2}}{2}$ (между средним геометрическим и средним арифметическим) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится по признаку сравнения. Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ абсолютно сходится, значит, он сходится.

§3. Вариант МФТИ-71

Задача 1. $\boxed{4}$ Найти первый и второй дифференциалы в точке A(1,0) функции $f(x,y)=\ln(\sinh\frac{y}{x}+3)$. Разложить данную функцию по формуле Тейлора в окрестности точки A(1,0) до $o((x-1)^2+y^2)$.

Решение.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-1}{\operatorname{sh} \frac{y}{x} + 3} \left(\operatorname{ch} \frac{y}{x} \right) \frac{y}{x^{2}};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{y}{x} + 3} \left(\operatorname{ch} \frac{y}{x} \right) \frac{1}{x};$$

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy;$$

$$df(1, 0) = \frac{1}{3} dy;$$

$$\frac{\partial^{2} f}{\partial x^{2}} (1, 0) = \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial x} (x, 0) \right) |_{x=1} = \frac{d}{dx} 0 = 0;$$

$$\frac{\partial^{2} f}{\partial x \partial y} (1, 0) = \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y} (x, 0) \right) |_{x=1} = \left(\frac{d}{dx} \frac{1}{3x} \right) |_{x=1} = \frac{-1}{3x^{2}} |_{x=1} = \frac{-1}{3};$$

$$\frac{\partial^{2} f}{\partial y^{2}} (1, 0) = \left(\frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial y} (1, y) \right) |_{y=0} = \left(\frac{d}{dy} \frac{\operatorname{ch} y}{\operatorname{sh} y + 3} \right) |_{y=0} =$$

$$= \frac{\operatorname{sh} y (\operatorname{sh} y + 3) - \operatorname{ch} y \operatorname{ch} y}{(\operatorname{sh} y + 3)^{2}} |_{y=0} = \frac{-1}{9};$$

$$d^{2} f = \frac{\partial^{2} f}{\partial x^{2}} dx^{2} + 2 \frac{\partial^{2} f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^{2} f}{\partial y^{2}} dy^{2};$$

$$d^{2} f(1, 0) = -\frac{2}{3} dx dy - \frac{1}{9} dy^{2}.$$

Формула Тейлора имеет вид: $\triangle f = df + \frac{d^2f}{2!} + o(\rho^2)$. Учитывая, что $dx = (x-1), dy = (y-0), \triangle f(1,0) = f(x,y)$ —

$$-f(1,0) = f(x,y) - \ln 3, \ \rho^2 = (x-1)^2 + y^2, \text{ находим } f(x,y) = \\ = \ln 3 + \frac{1}{3}(y-0) - \frac{1}{3}(x-1)(y-0) - \frac{1}{18}(y-0)^2 + o((x-1)^2 + y^2). \\ \textbf{Ответ:} \ df(A) = \frac{1}{3}dy; \ d^2f(A) = -\frac{2}{3}dxdy - \frac{1}{9}dy^2; \ f(x,y) = \\ = \ln 3 + \frac{1}{3}(y-0) - \frac{1}{3}(x-1)(y-0) - \frac{1}{18}(y-0)^2 + o((x-1)^2 + y^2).$$

Задача 2. $\boxed{3}$ Найти длину дуги кривой: $y = \frac{1}{2}(\ln \cos x + \ln \sin x), \quad \frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}.$

Решение. Длина дуги кривой $l = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+y'^2} \ dx$. Поскольку $y' = \frac{1}{2} \left(\frac{-\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \frac{\cos 2x}{2 \sin x \cos x}, \ \sqrt{1+y'^2} =$ $= \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 2x} = \frac{1}{\sin 2x}, \ \text{то} \ l = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin 2x} = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dy}{\sin y} =$ $= -\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{d\cos y}{1-\cos^2 y} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{4} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt =$ $= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| |_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 3}{2}.$

Задача 3. 4 Исследовать на дифференцируемость в точке M(0,0) функцию $z(x,y) = \ln(2+y+\sqrt[5]{x^2y^4})$.

Решение. Докажем, что функция $f(x,y)=2+y+\sqrt[5]{x^2y^4}$ дифференцируема в точке M(0,0). Так как $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{d}{dx}f(x,0)|_{x=0}=\frac{d}{dx}2=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\frac{d}{dy}f(0,y)|_{y=0}=\frac{d}{dy}(2+y)|_{y=0}=1$ и f(0,0)=2, то функция f(x,y) дифференцируема в точке M(0,0) тогда и только тогда, когда $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left(2+y+\sqrt[5]{x^2y^4}\right)-2-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$

I способ. Пусть
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$
. Тогда $0 \leqslant \left| \frac{\sqrt[5]{x^2 y^4}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leqslant$ $\leqslant \frac{\rho^{2/5} \rho^{4/5}}{\rho} = \sqrt[5]{\rho} = \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^{1/5} \to 0$ при $(x, y) \to (0, 0)$. Следовательно, $\exists \lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{(2 + y + \sqrt[5]{x^2 y^4}) - 2 - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ и функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(0, 0)$.

II способ. Перейдём к полярным координатам: x= = $\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Тогда $\forall~\rho>0~\forall~\varphi\in[0,2\pi)~\left|\frac{\sqrt[5]{x^2y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=$ = $\left|\frac{\sqrt[5]{\rho^6\cos^2\varphi\sin^4\varphi}}{\rho}\right|~\leqslant~\sqrt[5]{\rho}~\to~0$ при $\rho~\to~+0$. Следовательно, $\exists~\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(2+y+\sqrt[5]{x^2y^4})-2-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ и функция f(x,y) дифференцируема в точке M(0,0).

Далее, так как функция одной переменной $\ln u$ дифференцируема в точке $u_0=2=f(0,0)$, то сложная функция $z(x,y)=\ln f(x,y)$ дифференцируема в точке M(0,0) по теореме о дифференцируемости композиции дифференцируемых функций.

Ответ: функция z(x, y) дифференцируема в точке M(0, 0).

Задача 4. [3] Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n!)^3}{(3n)!} \operatorname{sh}^2 n.$$

Решение. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{2^{n+1}((n+1)!)^3(3n)!}{(3n+3)!2^n(n!)^3}\cdot\frac{\sinh^2(n+1)}{\sinh^2n}=$ $=\frac{2(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}\cdot\frac{\sinh^2(n+1)}{\sinh^2n}\to\frac{2e^2}{27}<1,\ n\to\infty.$ По признаку Даламбера ряд сходится.

Задача 5а. 4 Исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} x - 1 - \ln(1 + \frac{x^2}{2})}{(e^x - 1 - x)(\sqrt{x} + \sqrt[6]{x})^{\alpha}} \ dx.$

Решение. $f(x) = \frac{\operatorname{ch} x - 1 - \ln(1 + \frac{x^2}{2})}{(e^x - 1 - x)(\sqrt{x} + \sqrt[6]{x})^{\alpha}} \geqslant 0$ при x > 0. Интеграл имеет две особенности: в нуле и в $+\infty$. $I = \int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{+\infty} f(x) dx = I_1 + I_2$. Каждый из интегралов I_1 и I_2 имеет уже ровно одну особенность: I_1 – в нижнем, а I_2 – в верхнем пределе интегрирования. Для исследования сходимости интегралов I_1 и I_2 воспользуемся

признаком сравнения. Так как при $x \to 0$ имеем $\operatorname{ch} x - 1 - \ln(1 + \frac{x^2}{2}) = \frac{1}{6}x^4 + o(x^4), \ e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2), \ \sqrt{x} + \sqrt[6]{x} = \frac{6}{\sqrt{x}} + o(\sqrt[6]{x}), \ \text{то} \ f(x) \sim \frac{C}{x^{\frac{\alpha}{6}-2}}, \ x \to 0.$ Поэтому I_1 сходится $\Leftrightarrow \frac{\alpha}{6} - 2 < 1 \Leftrightarrow \alpha < 18$. Так как $f(x) \sim \frac{C}{x^{\frac{\alpha}{2}}}$ при $x \to +\infty$, то I_2 сходится $\Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} > 1 \Leftrightarrow \alpha > 2$. Интеграл I сходится $\Leftrightarrow I_1$ сходится и I_2 сходится $\Leftrightarrow 2 < \alpha < 18$. Сходимость абсолютная.

Задача 56. **5** Исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{x - \arctan x}{x^{\alpha}} \sin(2x + 3) dx.$$

Решение. 14 $I=\int\limits_{1}^{+\infty}f(x)dx=\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{x-\arctan x}{x^{\alpha}}\sin(2x+3)dx=$ $=\int\limits_{1}^{+\infty}g(x)\sin(2x+3)dx,$ где $g(x)=\frac{x-\arctan x}{x^{\alpha}}.$

I) Абсолютная сходимость. $|f(x)| \leqslant \left| \frac{x - \arctan x}{x^{\alpha}} \right| \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ при $x \to +\infty$. По признаку сравнения интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится, если интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} dx$ сходится. Интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} dx$ сходится $\Leftrightarrow \alpha - 1 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 2$. Таким образом, если $\alpha > 2$, то интеграл I сходится абсолютно.

II) Сходимость. Воспользуемся признаком Дирихле.

1)
$$\forall \xi \in [1; +\infty)$$
 $\left| \int_{1}^{\xi} \sin(2x+3) \ dx \right| \leqslant 1.$

2)
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{\arctan x}{x}}{x^{\alpha - 1}} = 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

¹⁴В решении приводится т.н. схема из четырёх ступенек (т.е. этапов, или пунктов исследования). Последовательность этих пунктов можно определённым образом менять. Удобно, например, вначале исследовать сходимость и расходимость, а затем абсолютную и условную сходимость (см. [2]). В предыдущих параграфах применялась схема из трёх ступенек.

3) $\forall \alpha > 1 \; \exists \; x_0 \geqslant 1 \; \forall \; x \geqslant x_0 \; g'(x) = x^{-\alpha} \left[\frac{\alpha \arctan x}{x} - \frac{1}{1+x^2} - (\alpha - 1) \right] = x^{-\alpha} (1 - \alpha + o(1)) < 0$ и, таким образом, $g(x) \downarrow \!\!\downarrow$ при $x \in [x_0, +\infty)$.

Из 1) — 3) по признаку Дирихле находим, что $\forall \ \alpha > 1$ интеграл I сходится.

III) Условная сходимость. Покажем, что $\forall \alpha \in \{(1;2]$ интеграл I сходится условно. Так как сходимость I в указанном промежутке значений параметра α установлена, достаточно доказать отсутствие абсолютной сходимости интеграла I, то есть расходимость несобственного интеграла $\hat{I} = \int\limits_{1}^{+\infty} |f(x)| \ dx$ при $\alpha \in (1;2]$. Согласно свойствам монотонности и линейности несобственного интеграла, $\hat{I} = \int\limits_{1}^{+\infty} g(x) |\sin(2x+3)| \ dx \geqslant \int\limits_{1}^{+\infty} g(x) \sin^2(2x+3) \ dx = \frac{1}{2} \int\limits_{1}^{+\infty} g(x) \ dx - \frac{1}{2} \int\limits_{1}^{+\infty} g(x) \cos 2(2x+3) \ dx \geqslant 0$. Интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} g(x) \ dx$ расходится при $\alpha \in (1;2]$. Это установлено в пункте (I). Интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} g(x) \cos 2(2x+3) \ dx$ сходится по признаку Дирихле, так как в пункте (II) установлено, что $g(x) \downarrow 0$ при $x \geqslant x_0$, и, кроме того, $\forall \xi \in [1;+\infty)$ $\int\limits_{1}^{\xi} \cos 2(2x+3) \ dx \leqslant 1$.

Таким образом, интеграл $\int\limits_1^{+\infty}g(x)\sin^2(2x+3)\;dx$ расходится как линейная комбинация с отличными от нуля коэффициентами сходящегося и расходящегося интегралов в одних и тех же пределах интегрирования. Интеграл \hat{I} расходится по признаку сравнения.

IV) Расходимость. Пользуясь критерием Коши, докажем расходимость интеграла I при всех $\alpha\leqslant 1$. Так как $\forall\;\alpha\leqslant 1\;\lim_{x\to +\infty}g(x)\geqslant 1$, то $\forall\;\alpha\leqslant 1\;\exists\;x_0\geqslant 1\;\forall\;x\geqslant x_0\;g(x)\geqslant \frac{1}{2}.$

Тогда $\forall \ \alpha \leqslant 1 \ \exists \ x_0 \geqslant 1 \ \forall \ \delta > x_0 \ \exists \ n \in \mathbb{N} \ \exists \ \xi' = \frac{2\pi n - 3}{2} >$ $> \delta, \ \exists \ \xi'' = \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi n - 3}{2} > \delta: \ \left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x) \ dx \right| = \int_{\xi'}^{\xi''} g(x) \sin(2x + 3) \ dx \geqslant \frac{1}{2} \int_{\xi'}^{\xi''} \sin(2x + 3) \ dx = \frac{1}{4}.$ Таким образом, $\forall \ \alpha \leqslant 1$ $\exists \ \varepsilon_0 = \frac{1}{4} > 0 \ \forall \ \delta > 1 \ \exists \ \xi' > \delta \ \exists \ \xi'' > \delta: \ \left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x) \ dx \right| \geqslant$ $\geqslant \varepsilon_0$ — справедливо отрицание условия Коши критерия Коши сходимости несобственного интеграла $I = \int_{1}^{+\infty} f(x) \ dx$. По критерию Коши интеграл I расходится при всех $\alpha \leqslant 1$.

Замечание. ξ' и ξ'' для критерия Коши выбирались таким образом, чтобы для всех $x\in[\xi',\xi'']$ выполнялось двойное неравенство $2\pi n\leqslant(2x+3)\leqslant\frac{\pi}{2}+2\pi n.$

$$\xi'$$
 и ξ'' находятся из условий $2\pi n = 2\xi' + 3$, $2\xi'' + 3 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Ответ: сходится абсолютно, если $\alpha > 2$; сходится условно, если $1 < \alpha \leqslant 2$, и расходится, если $\alpha \leqslant 1$.

Задача 6а. $\boxed{4}$ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1=(0,1)$ и $E_2=(1,+\infty)$ функциональную последовательность $f_n(x)=n(e^{\frac{1}{nx}}-1)$.

Решение.

1)
$$\forall x \in E_1 \cup E_2 \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \frac{1}{x} = f(x).$$

2) Рассмотрим $E_1 = (0, 1)$.

$$|R_n(x)| = |f(x) - f_n(x)| = \left| \frac{1}{x} - n(e^{\frac{1}{nx}} - 1) \right|,$$

 $x_n = \frac{1}{n} \in E_1$ при $n \geqslant 2$,

$$|R_n(x_n)| = n|2 - e| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall n \geqslant 2 \quad \sup\{|R_n(x)| : x \in E_1\} \geqslant |R_n(x_n)| = n|2 - e| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \sup\{|R_n(x)| : x \in E_1\} \neq 0 \Rightarrow$$

 \Rightarrow функциональная последовательность $f_n(x)$ не является равномерно сходящейся к f(x) на E_1 .

Ha E_1 $f_n(x)$ сходится к f(x) неравномерно.

Замечание. Запись $\limsup_{n \to \infty} \{|R_n(x)| : x \in E_1\} \neq 0$ означает $\#\limsup_{n \to \infty} \{|R_n(x)| : x \in E_1\} = 0$, то есть либо $\#\limsup_{n \to \infty} \{|R_n(x)| : x \in E_1\}$, либо $\#\limsup_{n \to \infty} \{|R_n(x)| : x \in E_1\}$, но $\limsup_{n \to \infty} \{|R_n(x)| : x \in E_1\} \neq 0$.

3) Рассмотрим $E_2 = (1, +\infty)$.

I способ. Так как $\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in E_2 \ 0 < \frac{1}{nx} < 1$, то по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа имеем: $e^{\frac{1}{nx}} = 1 + \frac{1}{nx} + \frac{e^{\xi}}{2!} \cdot \frac{1}{n^2x^2}, \ 0 < \xi < 1$. Таким образом, $\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in E_2 \ \exists \ \xi \in (0;1) : |R_n(x)| = |f(x) - f_n(x)| = \left|\frac{1}{x} - n(e^{\frac{1}{nx}} - 1)\right| = \left|\frac{e^{\xi}}{2nx^2}\right| \leqslant \frac{e}{2n} \Rightarrow \exists \lim_{n \to \infty} \sup\{|R_n(x)| : x \in E_2\} = 0 \Rightarrow функциональная последовательность <math>f_n(x)$ равномерно сходится к f(x) на E_2 .

II способ. Исследуем поведение функции $R_n(x) = f(x) - f_n(x) = \frac{1}{x} - n(e^{\frac{1}{nx}} - 1)$ на E_2 при фиксированном n с помощью производной: $R'_n(x) = \frac{1}{x^2} \left(e^{\frac{1}{nx}} - 1 \right) > 0$ при $x \in [1; +\infty)$. Так как для всех t > 0 выполняется $e^t > 1 + t$, то $R_n(x) = n \left(1 + \frac{1}{nx} - e^{\frac{1}{nx}} \right) < 0$. Значит, $R_n(x) \uparrow 0$ на E_2 и $\sup\{|R_n(x)|: x \in E_2\} = -R_n(1) = n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) - 1$. Таким образом, $\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in E_2 \ |R_n(x)| = |f(x) - f_n(x)| = \left| \frac{1}{x} - n(e^{\frac{1}{nx}} - 1) \right| < n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) - 1$; $\lim_{n \to \infty} n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) - 1 = \lim_{n \to \infty} n \left(1 + \frac{1}{n} + o \left(\frac{1}{n} \right) - 1 \right) - 1 = 0 \Rightarrow \exists \lim_{n \to \infty} \sup\{|R_n(x)|: x \in E_2\} = 0 \Rightarrow функциональная последовательность <math>f_n(x)$ равномерно сходится к f(x) на E_2 .

Задача 66. $\boxed{4}$ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1=(0,1)$ и $E_2=(1,+\infty)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^3n^3}{x^6+n^2}\operatorname{th}\left(\frac{x}{n}\right)^3$.

Решение. 1) Так как $\forall x \in E_1 \cup E_2 \ \forall n \in \mathbb{N} \ 0 < u_n(x) = \frac{x^3n^3}{x^6+n^2} \operatorname{th}\left(\frac{x}{n}\right)^3 \sim \frac{C}{n^2}$ при $n \to \infty$ и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^2}$ сходится

(эталон), то $\forall x \in E_1 \cup E_2$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится по признаку сравнения.

- 2) Так как $\forall x \in E_1 \ \forall n \in \mathbb{N} \ |u_n(x)| \leqslant \frac{x^3 n^3}{x^6 + n^2} \cdot \frac{x^3}{n^3} \leqslant \frac{1}{n^2}$ и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то по теореме Вейерштрасса функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на E_1 .
- 3) Так как $\lim_{n\to\infty} |u_n(n)| = \tanh 1 > 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ не является равномерно сходящимся на E_2 . Ряд сходится неравномерно на E_2 (сходимость ряда установлена в пункте 1).

Задача 7. $\boxed{4}$ Разложить по степеням x функцию f(x)= = $\arccos \frac{x^2}{\sqrt{4+x^4}}$ и найти радиус сходимости полученного ряда. Решение.

$$f'(x) = \frac{-4x}{4+x^4} = \frac{-x}{4\left(1+\frac{x^4}{4}\right)} = -x\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{4^n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{4n+1}}{4^n}.$$
 Радиус сходимости полученного ряда определяется из условия $\left|\frac{x^4}{4}\right| < 1$, откуда $|x| < \sqrt{2} = R$.

 $f(x)=f(0)+\int\limits_{0}^{x}f'(t)dt=\frac{\pi}{2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{4n+2}}{4^{n}(4n+2)}.$ При почленном интегрировании степенного ряда радиус сходимости не меняется. Поэтому $R=\sqrt{2}$.

Задача 8. 4 Является ли функция $z(x,y) = \sin \frac{1}{x^2 + y^2 + 2y}$ равномерно-непрерывной в области $G = \{x^2 + y^2 + y < 0\}$?

Решение. Заменой переменных: $u=x,\ v=y+1$ задача сводится к вопросу: является ли функция f(u,v)= $=-\sin\frac{1}{1-u^2-v^2}$ равномерно-непрерывной в области H= $=\left\{u^2+\left(v-\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{4}\right\}$? В этой области функция f(u,v) не является равномерно-непрерывной. В самом деле, для последовательностей $M_n=(u_n,v_n)=\left(0,\sqrt{1-\frac{1}{2\pi n}}\right)\in H$ и

 $M_n' = (u_n', v_n') = \left(0, \sqrt{1 - \frac{2}{\pi(1+4n)}}\right) \in H$ имеем: $\rho(M_n, M_n') = \sqrt{(u_n - u_n')^2 + (v_n - v_n')^2} = \left|\sqrt{1 - \frac{1}{2\pi n}} - \sqrt{1 - \frac{2}{\pi(1+4n)}}\right| \to 0$ при $n \to \infty$, однако $\forall n \in \mathbb{N} \mid |f(M_n) - f(M_n')| = \left|-\sin 2\pi n + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\right| = 1$. Таким образом, $\exists \ \varepsilon_0 = 1 > 0 \ \forall \ \delta > 0 \ \exists \ M_n \in H \ \exists \ M_n' \in H : \ \rho(M_n, M_n') < \delta \land |f(M_n) - f(M_n')| \geqslant \varepsilon_0$, то есть выполнено формальное отрицание необходимого и достаточного условия равномерной непрерывности.

§ 4. Вариант МФТИ-81

Задача 1. $\boxed{4}$ Найти первый и второй дифференциалы в точке A(1,1,1) функции z=z(x,y), заданной неявно уравнением $\frac{\pi}{4}+z-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}-\arctan z = 0.$

Решение. Формально дифференцируя тождество $\frac{\pi}{4} + z - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - \arctan z = 0$, находим $dz - xdx - ydy - \frac{dz}{1+z^2} = 0$ (1). Подставляя x = 1, y = 1, z = 1, находим dz = 2dx + 2dy (2).

Формально дифференцируя (1) и считая dx и dy постоянными, находим $d^2z-dx^2-dy^2-\frac{d^2z\cdot(1+z^2)-2zdz^2}{(1+z^2)^2}=0$. Подставляя $x=1,\ y=1,\ z=1,$ находим $d^2z=2dx^2+2dy^2-dz^2$. Подставляя вместо dz сумму 2dx+2dy из (2), находим $d^2z=-2dx^2-8dxdy-2dy^2$.

Ответ: dz(A) = 2dx + 2dy, $d^2z(A) = -2dx^2 - 8dxdy - 2dy^2$.

Задача 2. 4 Найти площадь боковой поверхности, образованной вращением кривой $x=2\sin t,\ y=2\cos^2 t$ вокругоси $Oy,\ t\in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Искомая площадь боковой поверхности

$$\sigma = 2\pi \int_{0}^{\pi/2} |x| \sqrt{x'^2 + y'^2} dt =$$

$$= 2\pi \int_{0}^{\pi/2} 2\sin t \sqrt{4\cos^2 t + 16\cos^2 t \sin^2 t} dt =$$

$$= 4\pi \int_{0}^{\pi/2} 2\sin t \cos t \sqrt{1 + 4\sin^{2}t} dt =$$

$$= 4\pi \int_{0}^{\pi/2} \sin 2t \sqrt{1 + 2(1 - \cos 2t)} dt =$$

$$= \pi \int_{0}^{\pi/2} \sqrt{3 - 2\cos 2t} d(3 - 2\cos 2t) =$$

$$= \pi \int_{1}^{5} \sqrt{u} du = \frac{2\pi}{3} (5\sqrt{5} - 1).$$

Задача 3. 3 Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(n+1)^n}.$$

Решение. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!(n+1)^n}{(n+2)^{n+1}2^n n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{(n+2)\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{2}{e} < 1.$ По признаку Даламбера ряд сходится.

Задача 4. $\boxed{4}$ Разложить функцию $y(x)=(x+2)\ln(2x^2+8x+9)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=-2$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

Решение. Пусть t=x+2. Тогда x=t-2 и $y(x)=y(t-2)=y(t-2)=t\ln(1+2t^2)=t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n}{n}t^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n}{n}t^{2n+1}$. Радиус сходимости полученного ряда определяется из условия $|2t^2|<1$, откуда $|t|<\frac{1}{\sqrt{2}}=R$. Произведя обратную замену переменной, находим ответ: $y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n}{n}(x+2)^{2n+1}$; $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Задача 5а. $\boxed{5}$ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1=(0,1)$ и $E_2=(1,+\infty)$

функциональную последовательность

$$f_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{2 + n^2 x}\right).$$

Решение.

- 1) $\forall x \in E_1 \cup E_2 \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0 = f(x).$
- 2) Рассмотрим $E_2=(1,+\infty)$. $\forall n\in\mathbb{N}\ \forall x\in E_2$ выполнено $|R_n(x)|=|f(x)-f_n(x)|=\left|\sin\left(\frac{\pi n}{2+n^2x}\right)\right|\leqslant\left|\left(\frac{\pi n}{2+n^2x}\right)\right|\leqslant\frac{\pi}{nx}\leqslant\frac{\pi}{n}$

 $\Rightarrow \forall \ n \in \mathbb{N} \ 0 \leqslant \sup\{|R_n(x)| : x \in E_2\} \leqslant \frac{\pi}{n} \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists \lim_{n \to \infty} \sup\{|R_n(x)| : x \in E_2\} = 0 \Rightarrow$

- \Rightarrow функциональная последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится к f(x) на E_2 .
 - 3) Рассмотрим $E_1 = (0,1)$. $|R_n(x)| = |f(x) f_n(x)| = \left| \sin \left(\frac{\pi n}{2 + n^2 x} \right) \right|,$ $x_n = \frac{1}{n^2} \in E_1$ при $n \geqslant 2$, $|R_n(x_n)| = |\sin \frac{\pi n}{3}| \Rightarrow$ $\Rightarrow \sup\{|R_n(x)| : x \in E_1\} \geqslant |\sin \frac{\pi n}{3}| \geqslant 0.$

Предположив, что $\exists \lim_{n \to \infty} \sup\{|R_n(x)| : x \in E_1\} = 0$, по теореме о зажатой последовательности находим, что $\exists \lim_{n \to \infty} |\sin \frac{\pi n}{3}| = 0$, а это не так. Значит, $\lim_{n \to \infty} \sup\{|R_n(x)| : x \in E_1\} \neq 0$ и функциональная последовательность $f_n(x)$ не является равномерно сходящейся к f(x) = 0 на E_1 . $f_n(x)$ сходится к f(x) неравномерно на E_1 .

Задача 56. 5 Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1=(0,1)$ и $E_2=(1,+\infty)$ функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{x^2}{n}} \left(\operatorname{ch} \frac{x^3}{n} - 1 \right)$.

Решение. 1) Так как $\forall \ x \in E_1 \cup E_2 \ \forall \ n \in \mathbb{N} \ 0 < u_n(x) = n^{-\frac{x^2}{n}} \left(\operatorname{ch} \frac{x^3}{n} - 1 \right) \sim \frac{x^6}{2n^2}, \ n \to \infty$ и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^2}$

сходится (эталон), то $\forall x \in E_1 \cup E_2$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится по признаку сравнения.

2) Рассмотрим $E_1=(0,1).$ Так как $\forall n\in\mathbb{N}\ \forall x\in E_1\ 0<<\frac{x^3}{n}<1,$ то по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа имеем: $\left(\operatorname{ch}\frac{x^3}{n}-1\right)=\frac{x^6\operatorname{ch}\xi}{2n^2},\ 0<\xi<1.$ Кроме того, $\left|n^{-\frac{x^2}{n}}\right|\leqslant 1.$ Поскольку $\forall\ x\in E_1\ \forall\ n\in\mathbb{N}\ |u_n(x)|\leqslant \frac{\operatorname{ch}1}{2n^2}$ и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n^2}$ сходится, то по теореме Вейерштрасса

функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на E_1 .

3) $\forall n \geqslant 2$ $x_n = \sqrt[3]{n} \in E_2$. Так как $\lim_{n \to \infty} |u_n(x_n)| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{n-1/3}} |\cosh 1 - 1| = |\cosh 1 - 1| > 0$, то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится неравномерно на E_2 (сходимость ряда установлена в пункте 1).

Задача 6a. 5 Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln^{\alpha}(1+x^2)}{\sqrt{\sqrt{x}+x^4}} \ dx.$$

Решение. $f(x) = \frac{\ln^{\alpha}(1+x^2)}{\sqrt{\sqrt{x}+x^4}} \geqslant 0$ для x > 0 и всех α . Интеграл имеет две особенности: в нуле и в $+\infty$. $I = \int\limits_0^{+\infty} f(x) dx = \int\limits_0^1 f(x) dx + \int\limits_1^{+\infty} f(x) dx = I_1 + I_2$. Каждый из интегралов I_1 и I_2 имеет уже одну особенность: I_1 — в нижнем пределе, а I_2 — в верхнем пределе интегрирования. Для исследования сходимости интегралов I_1 и I_2 воспользуемся признаком сравнения. Так как $f(x) \sim \frac{C}{x^{\frac{1}{4}-2\alpha}}$ при $x \to 0$, то I_1 сходится $\Leftrightarrow \frac{1}{4} - 2\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha > -\frac{3}{8}$. Так как $f(x) \sim \frac{C}{x^2 \ln^{-\alpha} x}$ при $x \to +\infty$, то I_2 сходится при всех α из \mathbb{R} . Интеграл I

сходится $\Leftrightarrow I_1$ сходится и I_2 сходится $\Leftrightarrow \alpha > -\frac{3}{8}$. Сходимость абсолютная.

Задача 66. 5 Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} e^{\alpha \operatorname{ctg} x} \cos(\operatorname{ctg} x) \ dx.$$

Решение. Заменой $t=\cot g x$ задача сводится к исследованию на сходимость и абсолютную сходимость несобственного интеграла $I=\int\limits_{1}^{+\infty}f(t)dt=\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{e^{\alpha t}\cos t}{1+t^2}\;dt=$ $=\int\limits_{1}^{+\infty}g(t)\cos t\;dt,$ где $g(t)=\frac{e^{\alpha t}}{1+t^2}.$ $\lim\limits_{t\to +\infty}g(t)=0\Leftrightarrow \alpha\leqslant 0.$ Покажем, что интеграл I сходится абсолютно при $\alpha\leqslant 0$ по признаку сравнения и расходится при $\alpha>0$ по критерию Коши.

Абсолютная сходимость. $\forall \ \alpha\leqslant 0 \ \forall \ t\geqslant 1 \ |f(t)|\leqslant \leqslant \frac{e^{\alpha t}}{1+t^2}\leqslant \frac{1}{t^2}.$ Интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ сходится (эталон). По признаку сравнения интеграл $\int\limits_1^{+\infty}|f(t)|dt$ сходится.

Расходимость. Так как $\forall \ \alpha > 0 \lim_{t \to +\infty} g(t) = +\infty$, то $\forall \ \alpha > 0 \ \exists \ t_0 \geqslant 1 \ \forall \ t \geqslant t_0 \ g(t) \geqslant 1$. Поэтому $\forall \ \alpha > 0 \ \exists \ t_0 \geqslant 1 \ \forall \ \delta > t_0 \ \exists \ n = \left \lfloor \frac{\delta}{2\pi} \right \rfloor + 1 > \frac{\delta}{2\pi} \ \exists \ \xi' = 2\pi n > \delta, \ \exists \ \xi'' = \frac{\pi}{2} + 2\pi n > \delta : \left | \int_{\xi'}^{\xi''} f(t) \ dt \right | = \int_{\xi'}^{\xi''} g(t) \cos t \ dt \geqslant \int_{\xi'}^{\xi''} \cos t \ dt = 1$. Таким образом, $\forall \ \alpha > 0 \ \exists \ \varepsilon_0 = 1 > 0 \ \forall \ \delta > 1 \ \exists \ \xi' > \delta \ \exists \ \xi'' > \delta : \left | \int_{\xi'}^{\xi''} f(t) \ dt \right | \geqslant \varepsilon_0$ – справедливо отрицание условия Коши критерия Коши сходимости несобственного интеграла

 $I=\int\limits_{1}^{+\infty}f(t)\;dt.$ По критерию Коши интеграл I расходится при всех $\alpha>0.$

Ответ: абсолютно сходится, если $\alpha \leqslant 0$, и расходится, если $\alpha > 0$.

Задача 7. $\boxed{5}$ Исследовать на дифференцируемость в точке O(0,0) функцию

$$z(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5}{y^3} \ln\left(1 + \frac{y^4}{(x^2 + y^2)^2}\right), \ y \neq 0, \\ 0, \qquad y = 0. \end{cases}$$

Решение. Так как $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=\frac{d}{dx}z(x,0)|_{x=0}=\frac{d}{dx}0=0,$ $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)=\frac{d}{dy}z(0,y)|_{y=0}=\frac{d}{dy}0=0,$ z(0,0)=0, то функция z(x,y) дифференцируема в точке (0,0) тогда и только тогда, когда $\exists\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{z(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$

I способ.
$$0\leqslant \left|\frac{\frac{x^5}{y^3}\ln\left(1+\frac{y^4}{(x^2+y^2)^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant \frac{|x|^5|y|}{(x^2+y^2)^2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}\leqslant$$
 $\leqslant \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^5\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^2\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant \sqrt{x^2+y^2}\to 0$ при $(x,y)\to (0,0).$ Следовательно, $\exists\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{z(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ и функция $z(x,y)$ дифференцируема в точке $O(0,0).$

II способ. Перейдём к полярным координатам: $x==\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi.$ Тогда $\forall\ \rho>0\ \forall\ \varphi\in[0,2\pi)\setminus\{0,\pi\}$ справедливо $\left|\frac{x^5}{y^3}\ln\left(1+\frac{y^4}{(x^2+y^2)^2}\right)\right|=\left|\rho\frac{\cos^5\varphi}{\sin^3\varphi}\ln(1+\sin^4\varphi)\right|\leqslant$ $\leqslant|\rho\cos^5\varphi\sin\varphi|\leqslant\rho.$ Следовательно, $\forall\ \rho>0\ \forall\ \varphi\in$ $\in[0,2\pi)\left|\frac{z(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\left|\frac{z(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)}{\rho}\right|\leqslant\rho\to0$ при $\rho\to+0.$ Следовательно, $\exists\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{z(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ и функция z(x,y) дифференцируема в точке O(0,0).

§ 5. Вариант МФТИ-02

Задача 1. 5 Найти первый и второй дифференциалы в точке M(0,1) функции f(x,y), если $f(x,y) = \ln(1 + 1)$ $+y\sin x$). Разложить функцию f(x,y) по формуле Тейлора в окрестности точки M(0,1) до $o(x^2 + (y-1)^2)$.

Решение. Пусть u = x - 0, v = y - 1. Тогда f(x, y) = y - 1 $= f(u, v + 1) = g(u, v) = \ln(1 + (v + 1)\sin u) = \ln(1 + \sin u + 1)$ $+v\sin u$) = $\ln(1+u+uv+o(\rho^2))=u+uv-\frac{1}{2}u^2+o(\rho^2)$, где $\rho^2 = x^2 + (y-1)^2$. Таким образом, f(x,y) = x + x(y-1) - x + x(y-1) $-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2 + (y-1)^2)$ есть искомое тейлоровское разложение, откуда видно, что df(0,1) = dx, $d^2f(0,1) = -dx^2 + 2dxdy$.

Ответ: df(M) = dx: $d^2 f(M) = -dx^2 + 2dxdy$; f(x,y) = x + dx + dx = 0 $+x(y-1)-\frac{1}{2}x^2+o(x^2+(y-1)^2).$

6 Исследовать на непрерывность и Задача 2. дифференцируемость при всех $\alpha \in \mathbb{R}$ в точке O(0,0) функцию:

$$f(x, y) = \begin{cases} \arctan(|x|^{\alpha}|y|^{1/3}), & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Решение. При $\alpha \leq 0$ функция f(x,y) не определена в окрестности точки O(0,0), поэтому не является непрерывной и тем более дифференцируемой в этой точке (полагаем 0^{α} при $\alpha \leqslant 0$ не имеет смысла, при $\alpha > 0$ $0^{\alpha} = 0$). Пусть $\alpha > 0$ и $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$. Тогда $|f(x,y)| \leqslant \rho^{\alpha} \rho^{1/3} = \rho^{\alpha+1/3} \to 0$, если $(x,y) \to (0,0).$ Значит, $\exists \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ и

функция f(x,y) непрерывна в точке O(0,0).

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x,0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0,\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0.$$

$$0\leqslant \left|rac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}
ight|\leqslant rac{
ho^{lpha+1/3}}{
ho}=
ho^{lpha-2/3} o 0$$
 при $(x,y) o (0,0),$ если

 $\alpha>rac{2}{3}.$ Значит, для каждого $\alpha>rac{2}{3}$ $\exists \lim_{(x,y) o(0.0)}rac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ и функция f(x,y) дифференцируема в точке O(0,0).

Пусть $\alpha \in \left(0, \frac{2}{3}\right]$. Тогда по прямой x = 0 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$ y=0, а по прямой y=x $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to 0} \frac{rctg\,|x|^{lpha+1/3}}{\sqrt{2}|x|}
eq 0.$ Значит, функция f(x,y) не дифференцируема в точке O(0,0).

Ответ: непрерывна при $\alpha > 0$ и дифференцируема при $\alpha > \frac{2}{3}$.

Замечание. Непрерывность функции f(x,y) можно понимать как непрерывность по множеству её определения. При $\alpha \leq 0$ этим множеством будет множество $M = \{(x;y) \in$ $\in \mathbb{R}^2$: $x = 0 \Rightarrow y = 0$ }. Тогда при $\alpha = 0$ функция f(x,y) будет непрерывна в точке O(0;0) по множеству M, так как при $\alpha = 0$ и $(x; y) \in M |f(x, y)| \leq \rho^{1/3} \to 0$, если $M \ni (x,y) \to (0,0)$. Значит, $\exists \lim_{M \ni (x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0 =$ = f(0,0), как и требовалось. При $\alpha < 0$ по кривой y = $y=|x|^{-3lpha'}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\to(0,0)}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}rctg\,1=rctg\,1,$ а по кривой $y=|x|^{-6lpha}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\to(0,0)}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}rctg\,|x|^{-lpha}=0.$ По разным кривым разные пределы, значит, $existsign \lim_{M \ni (x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ и при $\alpha < 0$ функция f(x.y) не является непрерывной в точке O(0;0)по множеству M.

Задача 3. 3 Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = e^x \sin x, \ y = 0, \ x = \frac{\pi}{4}$, где $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$

Решение. Дважды интегрируя по частям, находим I = $=\int e^x \sin x dx = -\int e^x d\cos x = -e^x \cos x + \int \cos x de^x = -e^x \cos x + \int e^x d \sin x = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx =$ $=e^x(\sin x-\cos x)-I \Rightarrow I=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C$. Искомая площадь $S = \int_{0}^{\pi/4} e^{x} \sin x dx = \frac{e^{x}}{2} (\sin x - \cos x) \Big|_{0}^{\pi/4} = \frac{1}{2}.$

Задача 4а. $\boxed{4}$ Исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\arctan(x-1)}{e^{x}(x-\sqrt[3]{x})^{\alpha}} \ dx.$

Решение. Заменой t=x-1 задача сводится к исследованию на сходимость и абсолютную сходимость несобственного интеграла $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\arctan t}{e^t(1+t-\sqrt[3]{1+t})^{\alpha}}dt$. Подынтегральная функция $f(t)=\frac{\arctan t}{e^t(1+t-\sqrt[3]{1+t})^{\alpha}}\geqslant 0$ при t>0 и всех α из \mathbb{R} . Интеграл имеет две особенности: в нуле и в $+\infty$. $I=\int\limits_0^{+\infty}f(t)dt=\int\limits_0^1f(t)dt+\int\limits_1^{+\infty}f(t)dt=I_1+I_2$. Каждый из интегралов I_1 и I_2 имеет уже одну особенность: I_1 — в нижнем пределе, а I_2 — в верхнем пределе интегрирования. Для исследования сходимости интегралов I_1 и I_2 воспользуемся признаком сравнения. Так как $f(t)\sim\frac{C}{t^{\alpha-1}}$ при $t\to0$, то интеграл I_1 сходится $\Leftrightarrow \alpha-1<1\Leftrightarrow \alpha<2$. Так как $f(t)\sim\frac{C}{e^tt^{\alpha}}$ при $t\to+\infty$, то I_2 сходится при всех α из \mathbb{R} . Интеграл I сходится $\Leftrightarrow I_1$ сходится и I_2 сходится $\Leftrightarrow \alpha>2$. Сходимость абсолютная.

Задача 4b. 6 Исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл $\int_{1}^{+\infty} \ln^{\alpha} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \sin x^{3} \ dx$.

Решение. Заменой $t=x^3$ задача сводится к исследованию на сходимость и абсолютную сходимость несобственного интеграла $I=\int\limits_{1}^{+\infty}f(t)dt=\int\limits_{1}^{+\infty}g(t)\sin tdt=$ = $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{t^{2/3}}\ln^{\alpha}\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right)\sin t\ dt.$ $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{t^{\frac{2+\alpha}{3}}}=0\Leftrightarrow$ \Leftrightarrow $\alpha>-2$. Докажем, что при $\alpha>-2$ интеграл I сходится по признаку Дирихле, а при $\alpha\leqslant-2$ расходится по критерию Коши.

I) Сходимость. При $\alpha>-2$ производная $g'(t)=-\frac{2}{3}t^{-5/3}\ln^{\alpha}(1+t^{-1/3})+\frac{t^{-2/3}\alpha\ln^{\alpha-1}(1+t^{-1/3})}{(1+t^{-1/3})}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)t^{-4/3}=$

 $= -\frac{1}{3}t^{-2}\ln^{\alpha-1}(1+t^{-1/3})\left(2t^{1/3}\ln(1+t^{-1/3})+\frac{\alpha}{(1+t^{-1/3})}\right) = \\ = -\frac{1}{3}t^{-2}\ln^{\alpha-1}(1+t^{-1/3})(2+\alpha+o(1)) \sim -\frac{2+\alpha}{3}t^{-2}\ln^{\alpha-1}(1+t^{-1/3}) < 0$ при $t\to+\infty$. Таким образом, 1) $g(t) \downarrow 0$ при $t\to+\infty$, 2) \forall $\xi\in[1,+\infty)$ $\left|\int\limits_1^\xi \sin t dt\right| = |-\cos\xi+\cos 1|\leqslant 2$. По признаку Дирихле интеграл I сходится при всех $\alpha>-2$.

II) Расходимость. $\forall \alpha < 2 \lim_{t \to +\infty} g(t) = +\infty$, при $\alpha = -2 \lim_{t \to +\infty} g(t) = 1$. Тогда $\forall \alpha \geqslant -2 \exists t_0 \geqslant 1 \ \forall t \geqslant t_0 \ g(t) \geqslant \frac{1}{2}$. Значит, $\forall \alpha \geqslant -2 \exists t_0 \geqslant 1 \ \forall \delta > t_0 \exists n = \left[\frac{\delta}{2\pi}\right] + 1 > \frac{\delta}{2\pi} \exists \xi' = 2\pi n > \delta$, $\exists \xi'' = \frac{\pi}{2} + 2\pi n > \delta$: $\begin{vmatrix} \xi'' \\ \xi' \end{vmatrix} f(t) \ dt \end{vmatrix} = \int_{\xi'}^{\xi''} g(t) \sin t \ dt \geqslant \frac{\xi''}{\xi'}$ $\geqslant \frac{1}{2} \int_{\xi'}^{\xi''} \sin t \ dt = \frac{1}{2}$. Итак, $\forall \alpha \geqslant -2 \exists \varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0 \ \forall \delta > 1 \ \exists \xi' > \delta \exists \xi'' > \delta \exists \xi'' > \delta$: $\begin{vmatrix} \xi'' \\ \xi' \end{vmatrix} f(t) \ dt \end{vmatrix} \geqslant \varepsilon_0$. Справедливо отрицание условия Коши критерия Коши сходимости несобственного интеграла $I = \int_{1}^{+\infty} f(t) \ dt$. По критерию Коши интеграл I расходится при всех $\alpha \geqslant -2$.

III) Абсолютная сходимость. Воспользуемся признаком сравнения. Так как $|f(t)| \sim \frac{|\sin t|}{t^{\frac{2+\alpha}{3}}}$ при $t \to +\infty$, то интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} |f(t)| dt$ сходится \Leftrightarrow интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^{\frac{2+\alpha}{3}}} dt$ сходится $\Leftrightarrow \frac{2+\alpha}{3} > 1 \Leftrightarrow \alpha > 1$ (эталон).

Ответ: абсолютно сходится при $\alpha > 1$; условно сходится при $-2 < \alpha \le 1$; расходится при $\alpha \le 2$.

Задача 5. $\boxed{2}$ Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}(n!)^4}{(3n)!(n+1)!}$. Решение. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3^{2n+2}(n+1)!^4}{(3n+3)!(n+2)!} \cdot \frac{(3n)!(n+1)!}{3^{2n}(n!)^4} =$

 $=\frac{9(n+1)^4}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)(n+2)}\to \frac{9}{27}<1,\ n\to\infty.$ По признаку Даламбера ряд сходится.

Задача 6. $\boxed{5}$ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1=(0,1)$ и $E_2=(1,+\infty)$ функциональную последовательность $f_n(x)=\sqrt{n}\ln\left(1+\sqrt{\frac{x}{n}}\right)$.

Решение. $\forall \ x \in E_1 \cup E_2 \ \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \sqrt{x} = f(x)$. По формуле Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа имеем: $\forall \ x \in E_1 \ \forall \ n \in \mathbb{N} \ \exists \ \xi \in (0;1) : \ |R_n(x)| = |f(x) - f_n(x)| = \left|\sqrt{x} - \sqrt{n} \ln \left(1 + \sqrt{\frac{x}{n}}\right)\right| \ = \left|\sqrt{x} - \sqrt{n} \left(\sqrt{\frac{x}{n}} - \frac{1}{(1+\xi)^2} \frac{x}{n}\right)\right| \ = \left|\frac{1}{(1+\xi)^2} \frac{x}{\sqrt{n}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \ \text{при} \ n \to \infty$. Значит, $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на E_1 . Так как $|R_n(n)| = |1 - \ln 2|\sqrt{n} \to +\infty$ при $n \to \infty$, то $f_n(x)$ сходится к f(x) неравномерно на E_2 .

Задача 7. 4 Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1=(0,1)$ и $E_2=(1,+\infty)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x^2\sqrt{x}}{\sqrt{n}}\right) \operatorname{arctg}\frac{e^x}{\sqrt{n}}.$

Решение. Общий член ряда $u_n(x) = 2\sin^2\left(\frac{x^{5/2}}{2\sqrt{n}}\right) \operatorname{arctg} \frac{e^x}{\sqrt{n}}.$ На $E_1: 0 \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{2x^5}{4n} \cdot \frac{e^x}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{e}{2n\sqrt{n}},$ числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e}{2n\sqrt{n}}$ сходится (например, по интегральному признаку), функциональный ряд сходится равномерно по теореме Вейерштрасса. На $E_2: u_n(x) \sim \frac{C}{n\sqrt{n}}$ при $n \to \infty$, ряд сходится; $u_n(\sqrt[5]{n}) \sim \pi \sin^2(1/2)$ при $n \to \infty$, ряд сходится неравномерно.

Задача 8. 4 Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = x^4 \operatorname{arcctg} \frac{3x}{\sqrt{1-9x^2}}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

Решение. Разложим в ряд по степеням x функцию $g(x)=\arccos\frac{3x}{\sqrt{1-9x^2}}$. Производная $g'(x)=\frac{-3}{\sqrt{1-9x^2}}=-3(1-9x^2)^{-1/2}=-3\sum_{n=0}^{\infty}C_{-1/2}^n(-9)^nx^{2n}=$

 $=\sum_{n=0}^{\infty}C_{-1/2}^{n}(-1)^{n+1}3^{2n+1}x^{2n}$. Радиус сходимости полученного ряда определяется из условия $\left|-9x^{2}\right|<1$, откуда $|x|<\frac{1}{3}=R$. $g(x)= rcctg 0+\sum_{n=0}^{\infty}C_{-1/2}^{n}(-1)^{n+1}3^{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Тогда $f(x)=x^{4}g(x)=\frac{\pi x^{4}}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}C_{-1/2}^{n}(-1)^{n+1}3^{2n+1}\frac{x^{2n+5}}{2n+1}$. При почленном интегрировании степенного ряда и умножении на ненулевой многочлен радиус сходимости не меняется, поэтому $R=\frac{1}{3}$.

Otbet:
$$f(x) = \frac{\pi x^4}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{-1/2}^n(-1)^{n+1}3^{2n+1}x^{2n+5}}{2n+1}, \ R = \frac{1}{3}.$$

Задача 9. $\boxed{4}$ У непрерывных функций f(x) и g(x) интегралы $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_{1}^{+\infty} g(x)dx$ сходятся условно. Может ли интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)g(x)dx$ а) сходиться абсолютно; b) сходиться условно; c) расходиться?

Ответ:

- а) Может. Например, $f(x)=\frac{\sin x}{x},\ g(x)=\frac{\sin x}{x},\ f(x)g(x)=\frac{\sin^2 x}{x^2}.$
- b) Может. Например, $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $g(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$. $f(x)g(x) = \frac{\sin 2x}{2x}$.
- с) Может. Например, $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $f(x)g(x) = \frac{\sin^2 x}{x}$.

Литература

- Бесов О. В. Лекции по математическому анализу. Ч. І. М.: МФТИ, 2004.
- 2. Иванов Г. Е. Лекции по математическому анализу. Ч. І. М.: МФТИ, 2000, 2004.
- 3. *Тер-Крикоров А. М.*, *Шабунин М. И.* Курс математического анализа. М.: Наука, 1988; М.: МФТИ, 1997; М.: Физматлит, 2003.
- 4. Яковлев Г. Н. Лекции по математичекому анализу. Ч. 1. М.: Физматлит, 2004.
- 5. Петрович А.Ю. Предел, непрерывность и дифференцируемость функций нескольких переменных: учеб.-метод. пособие. М.: МФТИ, 2007. Официальный сайт кафедры высшей математики МФТИ (ГУ). URL: http://math.mipt.ru/study/literature.html
- 6. Кожсевников П. А. Исследование сходимости несобственных интегралов: учеб.-метод. пособие. М.: МФТИ, 2007. Официальный сайт кафедры высшей математики МФТИ (ГУ). URL: http://math.mipt.ru/study/literature.html
- 7. Иванова С. В. Формула Тейлора и её применение при вычислении пределов функций: учеб.-метод. пособие. М.: МФТИ, 2006. Официальный сайт кафедры высшей математики МФТИ (ГУ). URL: http://math.mipt.ru/study/literature.html
- 8. Сборник задач по математическому анализу /под ред. Л.Д. Кудрявцева. Т. 1-3. 2-е изд. М.: Физматлит, 2003.
- 9. *Архипов Г. И.*, *Садовничий В. А.*, *Чубариков В. Н.* Лекции по математичекому анализу. М.: Дрофа, 2003.
- 10. *Гельбаум Б.*, *Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. Волгоград: Изд-во «Платон», 1997. Перевод: Б.И. Голубов, 1967.

Получено