Wojciech Nadara Treść zadania, Opracowanie

Bartosz Kostka Program

Dostępna pamięć: 256 MB. *OI, etap III, dzień drugi, 14.04.2016*

Niebanalne podróże

Bajtazar ostatnio połknął bakcyla podróżowania po Bajtocji. W kraju tym jest n miast (które dla uproszczenia numerujemy liczbami od 1 do n), a bajtocka kolej oferuje podróżnym m dwukierunkowych połączeń kolejowych pomiędzy niektórymi parami miast. Używając tych połączeń, Bajtazar może się dostać do każdego miasta w Bajtocji (być może musi się przy tym przesiadać).

Nasz bohater szczególnie upodobał sobie podróże, w których wyrusza z pewnego miasta, by na końcu do niego wrócić, ale nie odwiedzając przy tym w trakcie podróży żadnego miasta dwukrotnie ani nie używając żadnego połączenia dwukrotnie. Takie podróże nazywa **niebanalnymi**.

W trakcie kolejnej ze swoich wielu podróży Bajtazar zauważył, że każda niebanalna podróż, w którą wyruszył, używała tyle samo połączeń kolejowych. Podejrzewa on, że jest to uniwersalna własność sieci kolejowej w Bajtocji, i poprosił Ciebie o zweryfikowanie tej hipotezy. Ponadto, jeżeli hipoteza jest prawdziwa, to chciałby on także poznać liczbę różnych niebanalnych podróży, które może odbyć. Z wiadomych sobie powodów Bajtazar zadowoli się jedynie resztą z dzielenia liczby takich podróży przez $10^9 + 7$.

Podróż możemy formalnie opisać za pomocą ciągu liczb oznaczających kolejno odwiedzane miasta. Dwie podróże o tej samej długości są różne, jeśli istnieje taki indeks i, że i-te miasta z kolei odwiedzone w trakcie tych podróży są różne. Przez długość podróży rozumiemy liczbę połączeń, których ona używa.

Wejście

W pierwszym wierszu standardowego wejścia znajdują się dwie liczby całkowite n i m ($n \geqslant 1$, $m \geqslant 0$) oddzielone pojedynczym odstępem, oznaczające odpowiednio liczbę miast w Bajtocji oraz liczbę oferowanych połączeń. Dalej następuje m wierszy opisujących oferowane połączenia. W i-tym z tych wierszy znajdują się dwie liczby całkowite a_i i b_i ($1 \leqslant a_i, b_i \leqslant n$, $a_i \neq b_i$) oddzielone pojedynczym odstępem, oznaczające, że istnieje dwukierunkowe połączenie kolejowe umożliwiające podróż pomiędzy miastami o numerach a_i i b_i. Między każdą parą miast biegnie co najwyżej jedno bezpośrednie połączenie kolejowe.

Wyjście

Jeżeli pechowo okazało się, że nie istnieje ani jedna niebanalna podróż, to na standardowe wyjście należy wypisać jedno słowo `BRAK`*. Jeżeli istnieją takie podróże, ale nie wszystkie mają tę samą długość (czyli hipoteza Bajtazara jest fałszywa), należy wypisać jedno słowo* `NIE`*. W końcu jeżeli wszystkie niebanalne podróże mają taką samą długość (czyli hipoteza jest prawdziwa), to należy wypisać jedno słowo* `TAK`*, a w kolejnym wierszu dwie liczby całkowite oddzielone pojedynczym odstępem, oznaczające długość niebanalnych podróży oraz resztę z dzielenia liczby niebanalnych podróży przez $10^9 + 7$.*

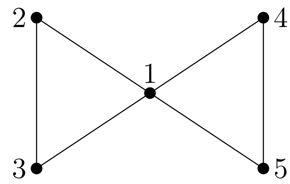
Przykład

Dla danych wejściowych:

```
5 6
1 2
2 3
3 1
1 4
4 5
5 1
```

poprawnym wynikiem jest:

```
TAK
3 12
```



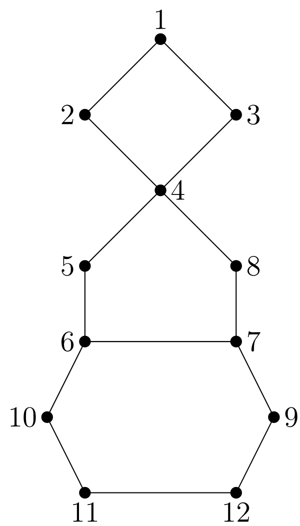
Wyjaśnienie do przykładu: *Wszystkie niebanalne podróże mają długość 3 i jest ich 12. Są to kolejno 1-2-3-1, 1-3-2-1, 2-1-3-2, 2-3-1-2, 3-1-2-3, 3-2-1-3, 1-4-5-1, 1-5-4-1, 4-1-5-4, 4-5-1-4, 5-1-4-5, 5-4-1-5.*

Natomiast dla danych wejściowych:

```
12 14
1 2
2 4
3 1
4 3
4 5
5 6
6 7
7 8
8 4
7 9
9 12
12 11
11 10
10 6
```

poprawną odpowiedzią jest:

```
NIE
```



Testy „ocen”:

`1ocen`: *$n = 500\,000$, miasta w Bajtocji leżą na ścieżce, odpowiedź to oczywiście* `BRAK`.

Ocenianie

Zestaw testów dzieli się na następujące podzadania. Testy do każdego podzadania składają się z jednej lub większej liczby osobnych grup testów.

Podzadanie	Warunki	Liczba punktów
1	$n \leqslant 18$	20
2	$n, m \leqslant 2000$	40
3	$n \leqslant 500\,000$, $m \leqslant 1\,000\,000$	40

Rozwiązanie

Pojęcie dwuspójności

Tłumacząc zadanie na język teorii grafów, jesteśmy proszeni o stwierdzenie, czy wszystkie *cykle proste* (tzn. takie, w których żaden wierzchołek ani krawędź się nie powtarzają) w danym grafie nieskierowanym mają taką samą długość. Jeżeli tak jest, to mamy dodatkowo wyznaczyć ich liczbę (i wypisać ją pomnożoną przez dwukrotność tej długości). W tym opracowaniu za każdym razem, gdy będziemy pisali o *cyklach*, będziemy w domyśle mieć na myśli *cykle proste*.

Przypomnijmy pojęcie *grafów dwuspójnych wierzchołkowo*. Są to takie grafy spójne, które po usunięciu dowolnego wierzchołka pozostają spójne. Równoważna definicja stwierdza, że graf dwuspójny to taki graf, w którym dla każdych dwóch krawędzi istnieje cykl prosty je zawierający.

Zbiór krawędzi dowolnego grafu można podzielić na *dwuspójne składowe*. W obrębie dwuspójnej składowej dla każdej pary krawędzi istnieje cykl je zawierający oraz ta własność nie zachodzi dla żadnej pary krawędzi z dwóch różnych składowych. W szczególności, dwuspójną składową może być także pojedyncza krawędź. Żądnym uzasadnienia istnienia takiego podziału zbioru krawędzi można podpowiedzieć, że wystarczy udowodnić, że jeżeli istnieje cykl prosty zawierający krawędzie a oraz b oraz cykl prosty zawierający krawędzie b i c, to istnieje także cykl prosty zawierający krawędzie a i c, co powinno stać się jasne po narysowaniu na kartce kilku przykładów.

Znany jest algorytm działający w złożoności $O(n + m)$ (gdzie n i m to odpowiednio liczby wierzchołków i krawędzi grafu) dzielący krawędzie grafu na dwuspójne składowe. Czytelnikom, którzy o nim nie słyszeli, polecamy się z nim zapoznać np. w książce [4] (jest on także opisany niejawnie w opracowaniu zadania *Blokada* z XV Olimpiady Informatycznej [1]).

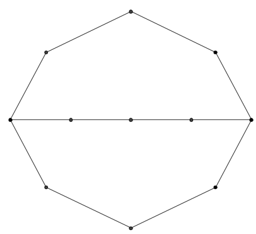
Dlaczego jednak interesujemy się podziałem grafu na dwuspójne dwuspójne? Otóż każdy cykl zawiera się w jednej takiej składowej. Jest to oczywisty wniosek z faktu, że nie istnieje cykl przechodzący przez dwie krawędzie z różnych składowych, co stwierdziliśmy powyżej. Możemy zatem oryginalne zadanie rozwiązać dla każdej dwuspójnej składowej z osobna. Jeżeli w żadnej z nich nie ma żadnego cyklu (czyli każda z nich jest pojedynczą krawędzią, a wejściowy graf jest drzewem), to wypisujemy `BRAK`. Jeżeli w którejkolwiek dwuspójnej składowej istnieją dwa cykle różnych długości, to wypisujemy `NIE`. Załóżmy natomiast, że dla każdej dwuspójnej składowej, w której istnieje cykl, wszystkie cykle są tej samej długości. Jeżeli dla pewnych dwóch dwuspójnych składowych te długości są różne, to wypisujemy `NIE`. Jeżeli jednak dla wszystkich dwuspójnych składowych ta długość jest taka sama, to wszystkie cykle w danym grafie mają tę samą długość i ich liczba jest sumą ich liczności we wszystkich dwuspójnych składowych.

Od tego momentu możemy zatem ograniczyć się do rozwiązania oryginalnego zadania dla grafów dwuspójnych wierzchołkowo, gdyż potrafimy podzielić nasz graf na dwuspójne składowe i potrafimy obliczyć całkowity wynik na podstawie wyników ze wszystkich składowych.

Algorytm dla grafów dwuspójnych

Jeżeli graf dwuspójny ma co najwyżej dwa wierzchołki, to odpowiedzią jest `BRAK`. Spróbujmy znaleźć jakieś przykłady grafów dwuspójnych, w których wszystkie cykle mają tę samą długość. Niewątpliwie takimi grafami są cykle, lecz, jak można się spodziewać, nie są to wszystkie takie grafy.

Wprowadźmy pewien typ grafu, który nazwiemy (c,l)-*cebulą*. Będziemy tak nazywać graf powstały przez połączenie dwóch wierzchołków za pomocą c ścieżek o długości l; patrz rys. 1.



Rys. 1: (3,4)-cebula

Niewątpliwie w (c,l)-cebuli wszystkie cykle są długości $2l$ i jest ich $\binom{c}{2}$. Postawimy teraz odważną hipotezę, na której oprzemy wzorcowy algorytm.

Lemat 1. Cykle oraz (c,l)-cebule (dla $c \geqslant 3$) to jedyne grafy dwuspójne wierzchołkowo, w których wszystkie cykle mają tę samą długość.

Spróbujmy zaprojektować algorytm na podstawie tego lematu. Nad jego prawdziwością zastanowimy się w następnej sekcji.

Naszym celem jest stwierdzenie, czy dany dwuspójny wierzchołkowo graf jest cyklem lub (c,l)-cebulą. Policzmy stopnie wierzchołków naszego grafu (*stopień wierzchołka* to liczba wychodzących z niego krawędzi). Jeżeli wszystkie one są równe dwa, to mamy do czynienia z cyklem (pamiętajmy, że nasz graf jest dwuspójny, zatem w szczególności także spójny). W przeciwnym przypadku, jeżeli nasz graf ma być (c,l)-cebulą, to dokładnie dwa wierzchołki powinny mieć stopień różny od dwóch. Jak jednak stwierdzić, czy graf spełniający taką własność jest (c,l)-cebulą? Nazwijmy te wierzchołki u i v. Weźmy pewną krawędź wychodzącą z u. Jeżeli zaczniemy spacerować od u w kierunku wyznaczonym przez tę krawędź, to napotkamy pewną liczbę wierzchołków o stopniu dwa, aż do momentu, w którym napotkamy albo u albo v. Gdybyśmy napotkali u, to jednak byłoby to sprzeczne z założeniem, że nasz graf jest dwuspójny, zatem napotkany wierzchołek musiał być wierzchołkiem v. Stąd wniosek, że jeżeli dwuspójny wierzchołkowo graf ma dokładnie dwa wierzchołki o stopniu większym od dwóch, to ma on postać dwóch wierzchołków połączonych zbiorem ścieżek. Pozostaje nam stwierdzić, czy wszystkie owe ścieżki mają taką samą długość. W tym celu wykorzystamy przeszukiwanie grafu wszerz (tzw. BFS) z wierzchołka u, w którym obliczymy odległości wszystkich wierzchołków w grafie od wierzchołka u. Niech $d[w]$ oznacza odległość wierzchołka w od wierzchołka u.

Lemat 2. Graf spełniający wymienione wcześniej warunki jest cebulą wtedy i tylko wtedy, gdy $d[v]$ jest większe od wszystkich pozostałych elementów tablicy d.

Dowód: Łatwo zauważyć, że jeżeli wszystkie ścieżki mają taką samą długość równą l, to wtedy podany warunek jest prawdziwy i $d[v] = l$. Załóżmy przeciwnie, że $d[v] = a$, ale wśród ścieżek łączących u i v pewna ma długość $b > a$. Wtedy wierzchołek poprzedzający v na tej ścieżce znajduje się w odległości od u nie większej niż a (konkretniej, jeżeli nazwiemy go t, to $d[t] = \min(b-1, a+1) \geqslant a = d[v]$), co dowodzi prawdziwości lematu. ■

Jeżeli zatem $d[v]$ jest ściśle największą wartością w tablicy odległości, to nasz graf jest (c, l)-cebulą, przy czym c jest stopniem u, a $l = d[v]$. To kończy opis algorytmu dla grafów dwuspójnych. Pozostaje nam jedynie udowodnić lemat o charakteryzacji grafów dwuspójnych, w których wszystkie cykle mają taką samą długość.

Dowód charakteryzacji interesujących nas grafów

Dowód lematu 1 będzie opierał się na pojęciu *dekompozycji uchowej*. Niech G będzie grafem dwuspójnym wierzchołkowo. Jeżeli G ma co najmniej trzy wierzchołki, to zawiera on cykl. Wyróżnijmy zatem dowolny cykl w G. Twierdzimy, że cały graf można uzyskać w procesie, w którym wielokrotnie do już uzyskanej części grafu (początkowo jest to ów ustalony cykl) doklejamy ścieżkę, której część wspólna z wcześniejszą częścią grafu to jedynie początkowy i końcowy wierzchołek (w szczególności, ścieżka ta może być pojedynczą krawędzią). W przypadku grafów dwuspójnych wierzchołkowo początkowy i końcowy wierzchołek takiej ścieżki muszą być różne, jednak jeżeli pominiemy to ograniczenie, to otrzymamy analogiczną charakteryzację grafów dwuspójnych krawędziowo. Formalnie, twierdzimy, że istnieje taki ciąg grafów $G_1, \ldots, G_k$, że G_1 to dowolny cykl w G, $G_k = G$ oraz dla każdego $i = 1, \ldots, k-1$ zachodzi własność, że $E(G_{i+1}) \setminus E(G_i)$ to zbiór krawędzi tworzących ścieżkę, której część wspólna z G_i jest równa jej początkowi i końcowi (które są różne). Przyjmujemy konwencję, że do kolejnych grafów G_i należą tylko wierzchołki, z których wychodzi co najmniej jedna krawędź. Taki ciąg grafów nazywamy *dekompozycją uchową* grafu G.

Czemu taka dekompozycja istnieje? Załóżmy, że mamy do czynienia z grafem G_i powstałym w wyniku doklejenia pewnej liczby ścieżek. Jeżeli nie jest on jeszcze równy G, to istnieje jakaś krawędź grafu G niezawarta w G_i, która ma co najmniej jeden swój wierzchołek w grafie G_i. Nazwijmy ją e, a jej końce u i v, gdzie $u \in V(G_i)$. Jeżeli $v \in V(G_i)$, to G_{i+1} to graf G_i z dołożoną krawędzią e. Załóżmy zatem, że $v \notin V(G_i)$. Niech f będzie dowolną krawędzią z G_i. Skoro graf G jest dwuspójny, to istnieje cykl zawierający zarówno e jak i f. Idąc kolejnymi krawędziami tego cyklu, zaczynając od v w kierunku przeciwnym do e, musimy kiedyś dojść do jakiegoś wierzchołka z G_i –

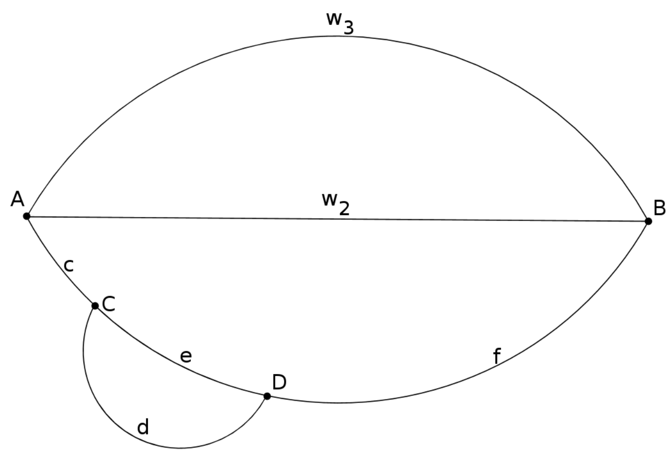
nazwijmy go w. Ten wierzchołek będzie różny od u, gdyż nasz cykl miał być cyklem prostym. Tak stworzona ścieżka – zawierająca e, a potem ścieżkę od v do w – jest ścieżką, którą dokładamy do G_i, aby otrzymać G_{i+1}. Zatem jeżeli G_i nie jest jeszcze równy G, to jesteśmy w stanie dołożyć do niego nowe „ucho". Z racji, że G_{i+1} ma więcej krawędzi niż G_i, ten proces oczywiście musi się kiedyś skończyć.

Zastanówmy się, jak możemy wykorzystać pojęcie dekompozycji uchowej do udowodnienia lematu o charakteryzacji.

Załóżmy, że graf G, w którym zachodzi własność równych długości cykli, sam nie jest cyklem. Wyróżnijmy w nim dowolny cykl G_1. Jesteśmy w stanie do niego dołożyć jakieś ucho. Graf G_2 jest zbiorem trzech ścieżek między dwoma wierzchołkami. Te dwa wierzchołki nazwijmy A i B, a ścieżki nazwijmy w_1, w_2 i w_3. Jeżeli wszystkie cykle w G mają taką samą długość, to ścieżki w_1, w_2 i w_3 mają taką samą długość. Poprzez rozważenie kilku przypadków udowodnimy, że każde kolejne ucho musi być ścieżką łączącą wierzchołki A i B o tej samej długości co trzy ścieżki w_i.

Jeżeli w jest ścieżką, to niech $|w|$ oznacza jej długość (liczoną jako liczba krawędzi). Jeżeli $p_1, \ldots, p_k$ są ścieżkami w grafie, które połączone kolejno tworzą cykl prosty, to ten cykl oznaczmy $p_1p_2\ldots p_k$, a przez $|p_1p_2\ldots p_k| = |p_1| + \ldots + |p_k|$ oznaczmy jego długość. Załóżmy, że nowe ucho jest ścieżką pomiędzy C i D. Rozpatrzmy kilka przypadków ze względu na to, gdzie są umiejscowione w grafie te wierzchołki.

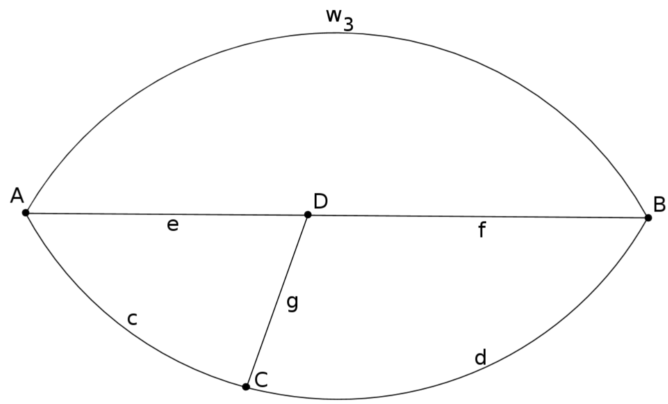
1. C i D oba leżą na jednej ścieżce łączącej A i B (dopuszczamy, że może zachodzić $C \in \{A, B\}$ lub $D \in \{A, B\}$, ale nie oba naraz)



W tym przypadku możemy zauważyć, że cykl de jest krótszy niż cykl dfw_2c, gdyż $|e| < |c| + |e| + |f| = |w_2| < |f| + |w_2| + |c|$. Przeczy to założeniu, że wszystkie cykle proste mają taką samą długość.

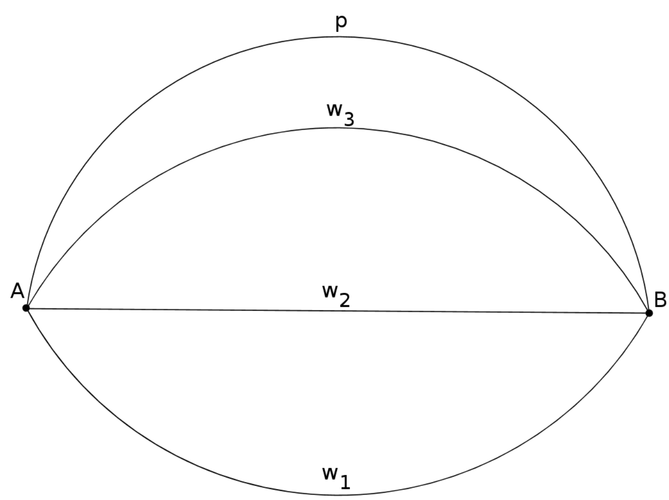
Warto wspomnieć, że na rysunku mogłyby być więcej niż trzy ścieżki łączące A oraz B, jednak istnienie takowych nie jest przeszkodą do uzyskania wspomnianej sprzeczności.

2. C i D leżą we wnętrzach różnych ścieżek łączących A i B



W tym przypadku popatrzmy na cykle $egdw_3$, $cgfw_3$, efw_3 i cdw_3. Mamy $|egdw_3| + |cgfw_3| = (|e| + |f| + |w_3|) + (|c| + |d| + |w_3|) + 2|g| > |efw_3| + |cdw_3|$, skąd wynika, że te cztery cykle nie mogą mieć takich samych długości. Ponownie otrzymujemy sprzeczność.

3. $C = A$ i $B = D$ (lub na odwrót)



Na tym obrazku nowym uchem jest ścieżka p. Jest jasne, że jeżeli wszystkie cykle mają mieć taką samą długość, to musi ona mieć taką samą długość jak każda ze ścieżek w_1, w_2, w_3.

Zaprezentowane przypadki pokrywają wszystkie możliwości. Udowodniliśmy zatem, że każde nowe ucho może być jedynie kolejną ścieżką takiej samej długości łączącą dwa wyróżnione wierzchołki. W ten sposób zakończyliśmy dowód pełnej charakteryzacji dwuspójnych grafów, w których wszystkie cykle są tej samej długości. Rzeczywiście, są to jedynie cykle oraz (c, l)-cebule.