Paweł Parys
Treść zadania, Opracowanie

Tomasz Malesiński
Program

Szpiedzy

Bajtocka Agencja Wywiadowcza ma w swoich szeregach szpiegów. Każdy szpieg w ramach obowiązków służbowych śledzi dokładnie jednego innego szpiega.

Król Bajtazar chce powierzyć tajną misję jak największej liczbie szpiegów. Misja jest jednak na tyle ważna, że każdy szpieg biorący w niej udział musi być śledzony przez przynajmniej jednego szpiega niebiorącego udziału w misji (przydział obowiązków związanych ze śledzeniem innych szpiegów nie ulega zmianie).

Zadanie

Napisz program, który:

- *wczyta ze standardowego wejścia opis tego, którzy szpiedzy śledzą których,*
- *obliczy, ilu maksymalnie szpiegów można wysłać z tajną misją tak, aby każdy z nich był śledzony przez przynajmniej jednego szpiega nie biorącego udziału w misji,*
- *wypisze wynik na standardowe wyjście.*

Wejście

W pierwszym wierszu wejścia zapisano jedną dodatnią liczbę całkowitą n — liczbę szpiegów, $2 \leqslant n \leqslant 1\,000\,000$. Szpiedzy są ponumerowani od 1 do n. W kolejnych n wierszach opisano kogo śledzi każdy ze szpiegów. W każdym z tych wierszy znajduje się po jednej dodatniej liczbie całkowitej. Liczba a_k znajdująca się w wierszu o numerze $k+1$ oznacza, że szpieg numer k śledzi szpiega numer a_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant a_k \leqslant n$, $a_k \neq k$.

Wyjście

Twój program powinien wypisać w pierwszym wierszu wyjścia jedną liczbę całkowitą — maksymalną liczbę szpiegów, których można wysłać z tajną misją.

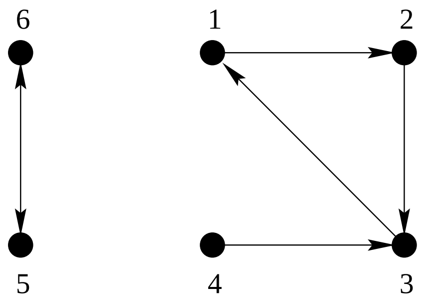
Przykład

Dla danych wejściowych:

```
6
2
3
1
3
6
5
```

poprawnym wynikiem jest:

```
3
```



Rozwiązanie

Rozmiar danych sugeruje, że rozwiązanie powinno działać w czasie liniowym. Będzie to rozwiązanie zachłanne. Należy znajdować pary: szpieg pilnujący i szpieg uczestniczący w akcji, a następnie rozpatrywać pozostałych szpiegów. Ogólna idea jest taka, żeby znajdować szpiega, który nie jest przez nikogo śledzony. Może on albo kogoś pilnować, albo nic nie robić, więc lepiej żeby kogoś pilnował.

Grafem śledzenia będziemy nazywać graf skierowany, którego wierzchołkami są szpiedzy, a krawędź od szpiega s do szpiega t istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy szpieg s śledzi szpiega t. Zadanie sprowadza się do znalezienia liczności maksymalnego skojarzenia w grafie śledzenia. Nie będziemy tu używać jakiegoś ogólnego algorytmu rozwiązywania tego problemu, gdyż byłby on wolniejszy, a ponadto bardziej skomplikowany. Trzeba tutaj skorzystać ze specjalnej postaci grafu, czyli z tego, że każdy szpieg śledzi tylko jednego innego szpiega.

Rozwiązanie wzorcowe

Rozpatrzmy ogólniejszy problem, w którym niektórzy szpiedzy mogą nie śledzić żadnego innego szpiega (takie sytuacje będą powstawały w czasie działania algorytmu). Krok naszego algorytmu wygląda następująco:

- Jeśli istnieje szpieg s, którego nikt nie śledzi i śledzi on szpiega t, to wyślij szpiega t na misję i niech s go śledzi. Usuń s i t z grafu śledzenia (jeśli ktoś śledził t, to teraz nie śledzi nikogo).
- Jeśli istnieje szpieg s, którego nikt nie śledzi i który nikogo nie śledzi, to usuń go z grafu.
- W przeciwnym przypadku w grafie zostały już tylko cykle, bo każdy jest śledzony przez co najmniej jednego innego szpiega, ale każdy może śledzić co najwyżej jednego innego, więc każdy śledzi dokładnie jednego i jest śledzony przez dokładnie jednego. Wybierz z każdego cyklu $\lfloor l/2 \rfloor$, gdzie l jest długością cyklu, szpiegów do udziału w misji (biorąc co drugiego).

Dowód poprawności

Poprawność algorytmu jest oczywista w przypadku, gdy w grafie zostały tylko cykle oraz szpiedzy nie śledzący i nie śledzeni przez nikogo. Wtedy jasne jest, że więcej szpiegów nie może brać udziału w misji. W przeciwnym przypadku niech G będzie grafem śledzenia, s szpiegiem, którego nikt nie śledzi, a t szpiegiem śledzonym przez s. Załóżmy, że istnieje rozwiązanie optymalne, w którym t nie bierze udziału w misji lub s go nie śledzi. Chcemy udowodnić, że w tym rozwiązaniu optymalnym wynik jest taki sam jak w naszym, czyli w pewnym takim, że t bierze udział w misji śledzony przez s. Mamy kilka przypadków:

- W danym rozwiązaniu optymalnym t śledzi szpiega v biorącego udział w misji. Wtedy rozwiązanie, w którym s śledzi wysłanego z misją t, a v nie uczestniczy w misji jest również optymalne.

- W danym rozwiązaniu optymalnym t bierze udział w misji, ale jest śledzony przez $v \neq s$. Wtedy rozwiązanie, w którym s śledzi t, a v nie śledzi nikogo jest również optymalne.

- W danym rozwiązaniu optymalnym t nie bierze udziału w misji i nie śledzi innego szpiega wysłanego z misją. Tak nie może się zdarzyć w rozwiązaniu optymalnym, bo można w takim przypadku jeszcze wysłać t z misją i s, żeby go śledził.

Zatem istnieje rozwiązanie optymalne, w którym t bierze udział w misji, a s go śledzi. Niech S będzie zbiorem szpiegów wysłanych z misją w tym rozwiązaniu. Niech S' będzie zbiorem szpiegów biorących udział w misji w optymalnym rozwiązaniu dla grafu G bez szpiegów s i t. Załóżmy, że $|S| > |S' \cup \{t\}|$. Tak jednak być nie może, bo wtedy $S - \{t\}$ byłoby poprawnym rozwiązaniem, lepszym od S', dla grafu G bez szpiegów s i t. Zatem wybranie szpiega t do udziału w misji i rozwiązanie problemu dla grafu G bez szpiegów s i t prowadzi do optymalnego rozwiązania.

Implementacja rozwiązania

Pozostaje jeszcze problem, w jaki sposób znajdować szpiegów opisanych w rozwiązaniu. Jest to jednak stosunkowo proste. Wystarczy dla każdego szpiega pamiętać ilu szpiegów aktualnie go śledzi. W programie wzorcowym `szp.c` służy do tego tablica `Deg`. Ponadto mamy kolejkę szpiegów, którzy nie są przez nikogo śledzeni (kolejka `Q`). Obie te struktury można łatwo uaktualniać przy usuwaniu wierzchołków z grafu. Przetwarzamy więc kolejnych szpiegów z kolejki. Gdy kolejka jest pusta, to trzeba już tylko posprawdzać długości cykli. Rozwiązanie działa więc w czasie i pamięci $O(n)$.

Testy

Zadanie testowane było na zestawie 12 danych testowych.

nr testu	typ testu	n	wynik
1	mały test	27	12
2	drzewa	1 237	609
3	cykl z ogonami	21 252	9 413
4	test losowy	10 000	4 330
5	test losowy	200 000	18 703
6	test rozgałęziony	701 011	1 005
7	długie ciągi	818 315	409 157
8	test rozgałęziony	1 000 000	4
9	długi ciąg	1 000 000	500 000
10	losowe cykle	1 000 000	499 997
11	test losowy	700 000	19 215
12	test losowy	1 000 000	19 358

Paru słów komentarza wymaga zastosowana tu terminologia:

Drzewa Cykl z podoczepianymi drzewami dwumianowymi.

Cykl z ogonami Jest to jeden duży cykl, do którego dochodzą różnej długości ścieżki.

Test rozgałęziony W teście 8 prawie wszyscy szpiedzy śledzą jednego. W teście 6 jest tysiąc szpiegów głównych śledzących jednego, a każdy z nich jest śledzony przez siedmiuset innych.

Długi ciąg Większość testu to jedna długa ścieżka szpiegów śledzących każdy następnego.

Długie ciągi Test składa się z wielu długich ścieżek zakończonych pojedynczymi pętelkami.

Losowe cykle Test zawiera wiele cykli różnej długości i nic poza tym.

Test losowy Każdy szpieg śledzi losowo wybranego innego szpiega.