Jakub Pawlewicz — Treść zadania, Opracowanie
Paweł Wolff — Program

Maksymalne rzędy permutacji

Permutacją n-elementową nazywamy różnowartościową funkcję

$$\pi : \{1,2,\ldots,n\} \longmapsto \{1,2,\ldots,n\}.$$

Rzędem permutacji π nazywamy najmniejsze takie $k \geqslant 1$, że dla wszystkich $i = 1,2,\ldots,n$ zachodzi:

$$\underbrace{\pi(\pi(\ldots(\pi}_{k \text{ razy}}(i))\ldots)) = i$$

Na przykład, rzędem trzyelementowej permutacji $\pi(1) = 3, \pi(2) = 2, \pi(3) = 1$ jest 2, bo $\pi(\pi(1)) = 1, \pi(\pi(2)) = 2, \pi(\pi(3)) = 3$.

Dla zadanego n rozważmy permutacje n-elementowe o największym możliwym rzędzie. Na przykład maksymalny rząd permutacji pięcioelementowej wynosi 6. Przykładem permutacji pięcioelementowej, której rząd wynosi 6 jest $\pi(1) = 4, \pi(2) = 5, \pi(3) = 2, \pi(4) = 1, \pi(5) = 3$.

Spośród wszystkich permutacji n-elementowych o maksymalnym rzędzie chcemy znaleźć permutację najwcześniejszą (w porządku leksykograficznym). Dokładniej, mówimy, że permutacja n-elementowa π jest wcześniejsza niż permutacja n-elementowa σ, gdy istnieje takie i, że $\pi(j) = \sigma(j)$ dla argumentów $j < i$ oraz $\pi(i) < \sigma(i)$. Najwcześniejszą permutacją pięcioelementową o rzędzie 6 jest $\pi(1) = 2, \pi(2) = 1, \pi(3) = 4, \pi(4) = 5, \pi(5) = 3$.

Zadanie

Napisz program, który:

- *wczyta ze standardowego wejścia zestaw liczb całkowitych $n_1, n_2, \ldots, n_d$,*
- *dla każdej liczby n_i (dla $i = 1,2,\ldots,d$) wyznaczy najwcześniejszą n_i-elementową permutację o maksymalnym rzędzie,*
- *wypisze na standardowe wyjście wyznaczone permutacje.*

Wejście

W pierwszym wierszu standardowego wejścia znajduje się jedna dodatnia liczba całkowita d, $1 \leqslant d \leqslant 10$. W kolejnych d wierszach znajdują się dodatnie liczby całkowite $n_1, n_2, \ldots, n_d$, po jednej w wierszu, $1 \leqslant n_i \leqslant 10\,000$.

Wyjście

Twój program powinien wypisać na standardowe wyjście d wierszy. Wiersz nr i powinien zawierać ciąg liczb całkowitych oddzielonych pojedynczymi odstępami, będący ciągiem wartości $\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n_i)$ najwcześniejszej permutacji n_i-elementowej o maksymalnym rzędzie.

Przykład

Dla danych wejściowych:

```
2
5
14
```

poprawnym wynikiem jest:

```
2 1 4 5 3
2 3 1 5 6 7 4 9 10 11 12 13 14 8
```

Rozwiązanie

Podstawowe pojęcia i fakty

Zanim przystąpimy do omawiania problemu, należy przypomnieć parę podstawowych pojęć i faktów.

NWD i NWW

Definicja 1 *Największym wspólnym dzielnikiem* liczb całkowitych $a_1,\ldots,a_k$ nazwiemy największą liczbę całkowitą, która dzieli wszystkie a_i, dla $i = 1,\ldots,k$:

$$\mathrm{NWD}(a_1,\ldots,a_k) = \max\{d : d \mid a_i \text{ dla wszystkich } i = 1,\ldots,k\}.$$

Definicja 2 Powiemy, że liczby całkowite a i b są *względnie pierwsze*, jeśli nie mają wspólnego dzielnika większego od 1, czyli $\mathrm{NWD}(a,b) = 1$.

Definicja 3 *Najmniejszą wspólną wielokrotnością* liczb całkowitych $a_1,\ldots,a_k$ nazwiemy najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą, która jest podzielna przez każdą z liczb a_i, dla $i = 1,\ldots,k$.

$$\mathrm{NWW}(a_1,\ldots,a_k) = \min\{d > 0 : a_i \mid d \text{ dla wszystkich } i = 1,\ldots,k\}.$$

Fakt 1 Zachodzą następujące własności NWW:

(i) Dla liczb całkowitych $b,c,a_1,\ldots,a_k$:

$$\mathrm{NWW}(b,c,a_1,\ldots,a_k) = \mathrm{NWW}(\mathrm{NWW}(b,c),a_1,\ldots,a_k).$$

(ii) Jeśli a i b są względnie pierwsze, to:

$$\mathrm{NWW}(a,b) = ab.$$

Permutacje, rozkłady na cykle, rząd permutacji

Definicja 4 *Cyklem długości c* w permutacji π nazwiemy taki ciąg indeksów $(i_1 \cdots i_c)$, że $\pi(i_1) = i_2, \pi(i_2) = i_3, \ldots, \pi(i_{c-1}) = i_c, \pi(i_c) = i_1$.

Definicja 5 *Rozkładem na cykle* permutacji n–elementowej π nazwiemy takie rozbicie zbioru $\{1,\ldots,n\}$ na ciągi $(i_{1,1}\cdots i_{1,c_1})\,(i_{2,1}\cdots i_{2,c_2})\cdots(i_{l,1}\cdots i_{l,c_l})$, że każdy z ciągów $(i_{j,1}\cdots i_{j,c_j})$, dla $j=1,\ldots,l$, jest cyklem długości c_j w permutacji π.

Przykład 1 Dla permutacji $\pi(1)=4, \pi(2)=5, \pi(3)=2, \pi(4)=1, \pi(5)=3$ rozkład na cykle wynosi: $(1\,4)\,(2\,5\,3)$.

Teraz w inny sposób zdefiniujemy rząd permutacji.

Definicja 6 Permutację powstałą przez k–krotne złożenie n–elementowej permutacji π ze sobą, dla $k \geqslant 1$, oznaczamy π^k:

$$\pi^k(i) = \underbrace{\pi(\pi(\ldots(\pi}_{k \text{ razy}}(i))\ldots)) \qquad \text{dla } i=1,\ldots,n.$$

Definicja 7 n–elementową permutację *identycznościową* oznaczamy przez id:

$$\mathrm{id}(i) = i \qquad \text{dla } i=1,\ldots,n.$$

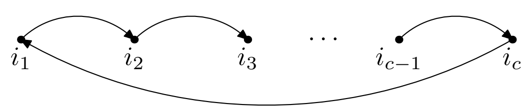
Definicja 8 *Rzędem* permutacji π nazywamy najmniejsze $k \geqslant 1$, dla którego zachodzi $\pi^k \equiv \mathrm{id}$:

$$\mathrm{rz}\,\pi = \min\{k \geqslant 1 : \pi^k \equiv \mathrm{id}\}.$$

Aby zrozumieć istotę problemu, jaka zaszyta jest w treści zadania, pokażemy w jaki sposób liczy się rząd permutacji.

Lemat 1 *Niech permutacja π zawiera cykl $(i_1\, i_2 \cdots i_c)$ długości c. W permutacji π^k, $k \geqslant 1$, elementy cyklu przejdą na siebie wtedy i tylko wtedy, gdy k jest wielokrotnością c:*

$$\pi^k(j) = j \text{ dla } j \in \{i_1,\ldots,i_c\} \text{ wtw, gdy } c \mid k.$$



Rysunek 1: Cykl w permutacji

Dowód Na cykl w permutacji możemy patrzeć jak na graf, którego krawędzie są postaci $i \longrightarrow \pi(i)$ (Rysunek 1). Oczywiste jest, że każda ścieżka z danego wierzchołka do tego samego wierzchołka będzie miała długość, która jest wielokrotnością długości cyklu. ∎

Fakt 2 Rząd permutacji π, której cykle są długości $c_1,\ldots,c_l$, wyraża się wzorem:

$$\mathrm{rz}\,\pi = \mathrm{NWW}(c_1,\ldots,c_l).$$

Dowód Z lematu 1 wynika, że w permutacji π^k, j–ty cykl, $j=1,\ldots,l$, przejdzie na siebie wtedy i tylko wtedy, gdy k jest wielokrotnością c_j. Zatem rzędem π będzie najmniejsza wspólna wielokrotność $c_1,\ldots,c_l$. ∎

Przykład 2 Permutacja z przykładu 1 ma cykle długości 2 i 3, więc jej rząd wynosi $\mathrm{NWW}(2,3)=6$.

Postać maksymalnego rzędu permutacji n–elementowej

W tej sekcji przyjrzymy się jaką postać ma maksymalny rząd permutacji.

Definicja 9 Skończony ciąg liczb całkowitych dodatnich $a_1, \ldots, a_l$ nazwiemy *podziałem* liczby n, jeśli zachodzi:

$$\sum_{i=1}^{l} a_i = n.$$

Z faktu 2 wynika, że musimy szukać permutacji n–elementowej, w taki sposób, żeby $\mathrm{NWW}(c_1, \ldots, c_l)$ było największe, gdzie $c_1, \ldots, c_l$ oznaczają długości cyklów permutacji. Zatem szukanie maksymalnego rzędu sprowadza się do maksymalizowania wartości $\mathrm{NWW}(c_1, \ldots, c_l)$ po wszystkich podziałach $c_1, \ldots, c_l$ liczby n.

Przechodzimy do omówienia własności podziałów n o maksymalnej NWW. Posłużymy się oczywistą nierównością:

Fakt 3 Dla liczb całkowitych $2 \leqslant x < y$ zachodzi nierówność:

$$x + y < xy. \tag{11}$$

Dowód $2 < y \Leftrightarrow y + 2 < 2y \Leftrightarrow y < 2(y-1) \Rightarrow y < x(y-1) \Leftrightarrow x + y < xy.$ ■

Wśród podziałów n o maksymalnej NWW, jak się później okaże, będą nas interesowały podziały o największej liczbie jedynek. Poniższy lemat mówi o podstawowych własnościach takich podziałów.

Lemat 2 *Podział $c_1, \ldots, c_l$ liczby n o maksymalnej* NWW *i o największej liczbie jedynek spełnia warunki:*

(i) Dla każdego $i = 1, \ldots, l$, c_i jest dodatnią potęgą liczby pierwszej lub jedynką.

(ii) Każde dwie liczby podziału c_i i c_j są względnie pierwsze, dla $i, j = 1, \ldots, l$, $i \neq j$.

Dowód Dowody obu punktów są nie wprost. Zakładamy, że podział $c_1, \ldots, c_l$ liczby n jest podziałem o maksymalnej NWW i ma największą liczbę jedynek wśród takich podziałów.

(i) Załóżmy, że $c_i > 1$ jest iloczynem liczb względnie pierwszych: $c_i = ab$, $\mathrm{NWD}(a, b) = 1$, $2 \leqslant a < b$. Z (11) mamy $a + b < ab$. Zatem jeśli zamiast jednej liczby ab podziału n weźmiemy liczby a, b oraz $ab - a - b$ jedynek otrzymamy nowy podział n, który będzie miał więcej jedynek. Ponadto NWW otrzymanego podziału się nie zmieni, gdyż $\mathrm{NWW}(a, b) = ab$. Mamy więc nowy podział o maksymalnej NWW i większej liczbie jedynek. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $c_i = p^{\alpha}$ dla pewnej liczby pierwszej p i $\alpha \geqslant 1$.

(ii) Załóżmy, że dla pewnych $i \neq j$ jest $\mathrm{NWD}(c_i, c_j) > 1$. Na podstawie (i) wiemy, że c_i i c_j są potęgami liczb pierwszych. Ponieważ mają wspólny dzielnik, więc muszą być potęgami tej samej liczby pierwszej. Przyjmijmy $c_i = p^{\alpha}$ i $c_j = p^{\beta}$. Bez straty ogólności załóżmy, że $\alpha \leqslant \beta$, wtedy $\mathrm{NWW}(c_i, c_j) = c_j$. Zatem możemy w podziale n zamiast c_i wziąć c_i jedynek nie zmieniając NWW. Sprzeczność dowodzi, że $\mathrm{NWD}(c_i, c_j) = 1$.

■

Bezpośrednio z lematu 2 wynika twierdzenie.

Twierdzenie 3 *Podział n o maksymalnej* NWW *i największej liczbie jedynek składa się z jedynek oraz liczb postaci $p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_k^{\alpha_k}$, gdzie $p_1, \ldots, p_k$ są różnymi liczbami pierwszymi, a $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ dodatnimi liczbami całkowitymi.*

Przykład 3 Weźmy wszystkie podziały 22 o maksymalnej NWW, która wynosi 420. Są to:

$$22 = 4+5+6+7 = 3+3+4+5+7 = 1+2+3+4+5+7 = 1+1+1+3+4+5+7.$$

W pierwszym podziale 6 rozkłada się na iloczyn liczb względnie pierwszych 2 i 3. W drugim i trzecim znajdujemy pary liczb, które nie są względnie pierwsze: $3,3$ oraz $2,4$. Ostatni podział spełnia warunki lematu 2. Każda liczba różna od jedynki jest potęgą liczby pierwszej: $2^2, 3^1, 5^1, 7^1$, a zatem według twierdzenia 3 ma największą liczbę jedynek wśród podziałów o maksymalnej NWW.

Wniosek 4 *Maksymalny rząd permutacji n–elementowej wyraża się wzorem:*

$$p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

gdzie $p_1, \ldots, p_k$ są różnymi liczbami pierwszymi, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ dodatnimi liczbami całkowitymi takimi, że:

$$\sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} \leqslant n.$$

Permutacje najmniejsze leksykograficznie

Pokażemy jak konstruować permutacje najmniejsze leksykograficznie wśród permutacji o zadanych długościach cykli.

Twierdzenie 5 *Najmniejszą leksykograficznie permutacją rozkładającą się na cykle długości $c_1 \leqslant c_2 \leqslant \ldots \leqslant c_l$ jest permutacja π wyrażająca się wzorami (dla $r = 1, \ldots, l$):*

$$\pi(C_{r-1} + j) = \begin{cases} C_{r-1} + j + 1 & \text{dla } j = 1, \ldots, c_r - 1, \\ C_{r-1} + 1 & \text{dla } j = c_r, \end{cases} \tag{12}$$

gdzie

$$C_0 = 0 \text{ i } C_r = \sum_{i=1}^{r} c_i, \text{ dla } r > 0.$$

Przyjrzyjmy się, co mówi to twierdzenie. Wzory (12) przedstawiają zapis cyklu c_r–elementowego. Zatem konstrukcja permutacji najmniejszej leksykograficznie polega na zapisaniu kolejnych cykli od najkrótszego do najdłuższego, gdzie cykl długości c jest postaci $(j \quad j+1 \quad j+2 \;\cdots\; j+c-1)$.

Dowód Udowodnimy indukcyjnie po i tezę:

> Wartości $\pi(1),\ldots,\pi(i)$ najmniejszej leksykograficznie permutacji π, wśród permutacji rozkładających się na cykle długości $c_1 \leqslant \ldots \leqslant c_l$, spełniają wzór (12). (13)

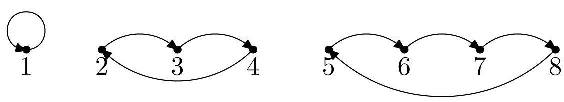
Dla $i = 0$ teza (13) jest oczywista. Niech $i \geqslant 1$, wtedy $i = C_{r-1} + j$ dla pewnych $1 \leqslant r \leqslant l$ i $1 \leqslant j \leqslant c_r$. Załóżmy, że wartości $\pi(1),\ldots,\pi(i-1)$ są wyznaczone przez wzory (12). Zobaczmy co oznacza to założenie. $\pi(1),\ldots,\pi(C_{r-1})$ reprezentują cykle długości $c_1,\ldots,c_{r-1}$, więc pozostaje nam już tylko utworzyć cykle długości $c_r,\ldots,c_l$. Ponadto zbiór wartości wynosi $\{\pi(1),\ldots,\pi(C_{r-1})\} = \{1,\ldots,C_{r-1}\}$. Pozostałe znane wartości to $\pi(C_{r-1}+1),\ldots,\pi(C_{r-1}+j-1)$, które wynoszą odpowiednio $C_{r-1}+2,\ldots,C_{r-1}+j$. Zatem dostępne wartości, które może przyjąć $\pi(i)$, wynoszą $C_{r-1}+1$ oraz $C_{r-1}+j+1,\ldots,n$. Najmniejszą z nich jest $C_{r-1}+1$. Jeśli przyjmiemy

$$\pi(i) = C_{r-1}+1$$

utworzymy cykl $(C_{r-1}+1 \quad C_{r-1}+2 \ \cdots \ C_{r-1}+j)$ o długości j. Najmniejszy cykl jaki możemy utworzyć ma długość c_r. Zatem możemy przyjąć $\pi(i) = C_{r-1}+1$ tylko wtedy, gdy $j = c_r$. Jeśli $j < c_r$, to za $\pi(i)$ przyjmujemy drugą najmniejszą możliwą wartość:

$$\pi(i) = C_{r-1}+j+1.$$

■



Rysunek 2: Najmniejsza leksykograficznie permutacja o długościach cykli $1,3,4$

Przykład 4 Najmniejszą leksykograficznie permutacją, która rozkłada się na cykle długości $1,3,4$ jest

$$\pi(1) = 1, \pi(2) = 3, \pi(3) = 4, \pi(4) = 2, \pi(5) = 6, \pi(6) = 7, \pi(7) = 8, \pi(8) = 5$$

(Rysunek 2).

Umiemy już konstruować permutacje najmniejsze leksykograficznie o zadanych długościach cykli. Jeśli dodatkowo mamy możliwość decydowania jakie są długości cykli permutacji, to chcemy wiedzieć, który zestaw długości cykli umożliwi utworzenie permutacji najmniejszej leksykograficznie.

Lemat 6 *Dane są dwa ciągi $c_1 \leqslant \ldots \leqslant c_l$ oraz $c'_1 \leqslant \ldots \leqslant c'_{l'}$ takie, że*

$$n = \sum_{i=1}^{l} c_i = \sum_{i=1}^{l'} c'_i,$$

i o tej własności, że ciąg $c_1, \ldots, c_l$ jest mniejszy leksykograficznie od ciągu $c'_1, \ldots, c_{l'}$, tzn., że istnieje takie r, że $c_i = c'_i$ dla $i = 1, \ldots, r-1$ oraz $c_r < c'_r$. Wśród permutacji, której cykle są długości $c_1, \ldots, c_l$ lub $c'_1, \ldots, c'_{l'}$ najmniejszą leksykograficznie jest najmniejsza leksykograficznie permutacja o cyklach długości $c_1, \ldots, c_l$.

Dowód Jest to wniosek z twierdzenia 5. Wystarczy wziąć najmniejszą leksykograficznie permutację dla ciągu $c_1, \ldots, c_l$ oraz dla ciągu $c'_1, \ldots, c'_{l'}$ i sprawdzić, że ta pierwsza jest mniejsza leksykograficznie. ■

Wniosek 7 *Jeśli ciąg $c_1, \ldots, c_l$ ma więcej jedynek niż ciąg $c'_1, \ldots, c'_{l'}$, to najmniejsza leksykograficznie permutacja o cyklach długości $c_1, \ldots, c_l$ jest mniejsza od najmniejszej leksykograficznie permutacji o cyklach długości $c'_1, \ldots, c'_{l'}$.*

Na podstawie twierdzenia 3 i wniosku 7 możemy sformułować twierdzenie, które mówi nam w jakiej klasie permutacji szukać rozwiązania naszego zadania.

Twierdzenie 8 *Permutacja n–elementowa o największym rzędzie, która jest najmniejsza leksykograficznie, składa się z cykli długości $1, \ldots, 1, p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_k^{\alpha_k}$, dla pewnych różnych liczb pierwszych $p_1, \ldots, p_k$ i dodatnich liczb całkowitych $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ takich, że:*

$$\sum_{i=1}^{k} {p_i}^{\alpha_i} \leqslant n.$$

Szukanie maksymalnego rzędu

Wiemy jaka jest postać szukanej permutacji n–elementowej. Pozostaje pytanie jak znaleźć maksymalny rząd. Możemy to zrobić stosując podejście programowania dynamicznego. Od teraz $p_1, p_2, p_3, \ldots$ oznaczają kolejne liczby pierwsze.

Definicja 10 Maksymalny rząd permutacji n–elementowej, w której występują tylko cykle o długości 1 lub postaci p^α, dla $p \leqslant p_k$, oznaczamy przez $R_{n,k}$.

Bezpośrednio z tej definicji wynika, że wartości $R_{n,k}$ będą rosły wraz z wzrostem n i k:

Fakt 4

$$R_{n_1,k_1} \leqslant R_{n_2,k_2} \quad \text{dla } k_1 \leqslant k_2, \ i\ n_1 \leqslant n_2.$$

Do wyliczania $R_{n,k}$ w sposób systematyczny wykorzystujemy twierdzenie:

Twierdzenie 9 *Wartości $R_{n,k}$ możemy wyliczać rekurencyjnie według wzoru:*

$$R_{n,k} = \max\{R_{n,k-1}\} \cup \{p_k^\alpha R_{n-p_k^\alpha,k-1} : 1 < p_k^\alpha \leqslant n\}, \tag{14}$$

przy warunkach brzegowych

$$R_{n,0} = 1.$$

Dowód Permutacja może nie zawierać cyklu postaci p_k^α co daje $R_{n,k-1}$. Jeśli jednak zawiera cykl postaci p_k^α, to maksymalny rząd n–elementowej permutacji z cyklami o długościach postaci p^β, $p \leqslant p_k$, będzie wynosił tyle, co maksymalny rząd permutacji mającej mniej o p_k^α elementów z cyklami o długościach postaci p^β, $p \leqslant p_{k-1}$, pomnożony przez długość cyklu p_k^α. ■

Żeby znaleźć maksymalny rząd permutacji n–elementowej wystarczy wyliczyć $R_{n,k}$ dla odpowiednio dużego k. Musi ono być na tyle duże, że powiększenie k nie powiększy już $R_{n,k}$. Zatem algorytm na szukanie maksymalnego rzędu permutacji n–elementowej wygląda następująco:

```
1: for i := 0 to n do
2:    R_{i,0} := 1
3:    for k := 1 to „odpowiednio duże k” do
4:       R_{i,k} := max{R_{i,k−1}} ∪ {p_k^α R_{i−p_k^α,k−1} : 1 < p_k^α ⩽ i}
5: maksymalny rząd permutacji n–elementowej wynosi R_{n,k},
   gdzie k jest „odpowiednio duże”
```

Ograniczanie k

Co oznacza „odpowiednio duże k”? Przyjmijmy parę oznaczeń.

Definicja 11 Niech K_n oznacza najmniejsze k takie, że dla wszystkich $k' \geqslant k$ jest $R_{n,k'} = R_{n,k}$.

Definicja 12 Niech $\overline{K}_n$ oznacza najmniejsze k takie, że dla wszystkich $k' \geqslant k$ i dowolnego $n' \leqslant n$ jest $R_{n',k'} = R_{n',k}$.

Wartość $\overline{K}_n$ można też opisać za pomocą K_n:

$$\overline{K}_n = \max_{0 \leqslant n' \leqslant n} K_{n'}.$$

Możemy teraz powiedzieć, że przez “odpowiednio duże k” rozumiemy dowolne k, o którym wiemy, że jest większe od $\overline{K}_n$.

Jak duże jest K_n? Na pewno zachodzi $p_{K_n} \leqslant n$. W ten sposób dla $n = 10\,000$ dostajemy bardzo słabe ograniczenie $\overline{K}_n \leqslant 1229$, gdyż $p_{1229} = 9973 < 10\,000 < 10\,007 = p_{1230}$. Do „rozsądnego” ograniczania K_n pomocny jest następujący lemat.

Lemat 10 *Niech $n \geqslant 1$. Niech h będzie najmniejszą liczbą spełniającą jeden z warunków:*

(i) $p_{h+1} > n$,

(ii) $h \geqslant \overline{K}_{n-1}$ *i* $R_{n,h} \geqslant nR_{n-p_{h+1},h}$,

wtedy h jest ograniczeniem na K_n:

$$K_n \leqslant h.$$

Dowód Jeżeli $p_{h+1} > n$, to dla każdego $k' > h$ będzie $p_{k'} > n$, a co za tym idzie, ze wzoru (14) mamy $R_{n,k'} = R_{n,k'-1}$. Czyli $R_{n,k'} = R_{n,h}$ dla każdego $k' \geqslant h$, zatem $K_n \leqslant h$.

Załóżmy teraz, że zachodzi (ii). Udowodnimy indukcyjnie, że dla $k' > h$ jest

$$R_{n,k'} = R_{n,h}. \tag{15}$$

Zakładamy, że $R_{n,k'-1} = R_{n,h}$. Jeżeli $p_{k'} > n$, to równość (15) otrzymujemy bezpośrednio z (14). Zatem niech $p_{k'} \leqslant n$. Weźmy α takie, że $p_{k'}^{\alpha} \leqslant n$. Z tego, że $h \geqslant \overline{K}_{n-1}$ mamy

$$p_{k'}^{\alpha} R_{n-p_{k'}^{\alpha},k'-1} = p_{k'}^{\alpha} R_{n-p_{k'}^{\alpha},h}.$$

Zachodzi $n - p_{k'}^{\alpha} \leqslant n - p_{h+1}$, więc z faktu 4 mamy

$$p_{k'}^{\alpha} R_{n-p_{k'}^{\alpha},h} \leqslant p_{k'}^{\alpha} R_{n-p_{h+1},h}.$$

Dalej szacujemy:

$$p_{k'}^{\alpha} R_{n-p_{h+1},h} \leqslant n R_{n-p_{h+1},h} \leqslant R_{n,h}.$$

W końcu z założenia indukcyjnego mamy

$$R_{n,h} = R_{n,k'-1}.$$

Podsumowując powyższe rozumowanie otrzymujemy:

$$p_{k'}^{\alpha} R_{n-p_{k'}^{\alpha},k'-1} \leqslant R_{n,k'-1},$$

skąd wynika, że $R_{n,k'} = R_{n,k'-1} = R_{n,h}$, a to kończy dowód indukcyjny.

■

Z pomocą lematu 10 możemy termin „odpowiednio duże k” zastąpić warunkiem:

$$p_{k+1} > i \vee (k \geqslant \overline{K}_{i-1} \wedge R_{i,k} \geqslant i R_{i-p_{k+1},k}). \qquad (16)$$

Możemy teraz uzupełnić algorytm:

$\overline{K}_0 := 0$
for $i := 0$ **to** n **do**
  $R_{i,0} := 1$
  $k := 0$
  while $p_{k+1} \leqslant i \wedge (k < \overline{K}_{i-1} \vee R_{i,k} < i R_{i-p_{k+1},k})$ **do**
    $k := k+1$
    $R_{i,k} := \max\{R_{i,k-1}\} \cup \{p_k^{\alpha} R_{i-p_k^{\alpha},k-1} : 1 < p_k^{\alpha} \leqslant i\}$
  while $k > 0 \vee R_{i,k} = R_{i,k-1}$ **do** $k := k-1$ { Szukamy wartości K_i }
  $K_i := k$, $\overline{K}_i := \max(\overline{K}_{i-1}, K_i)$
maksymalny rząd permutacji n–elementowej wynosi R_{n,K_n}

Okazuje się, że w tym algorytmie dla $n \leqslant 10\,000$ największe k dla jakiego będziemy liczyć $R_{i,k}$ wynosi 99. Natomiast największe K_i wynosi 70. Wynika stąd, że za ograniczenie k wystarczyło przyjąć dowolną liczbę nie mniejszą od 70.

Reprezentacja $R_{n,k}$

Jak duże mogą być $R_{n,k}$? Okazuje się, że są na tyle duże, że trzeba implementować duże liczby całkowite. Przy czym na dużych liczbach potrzebujemy tylko operacji:

- dodawania,
- mnożenia przez liczbę z przedziału $[1, 10000]$,
- porównywania.

Zauważmy, że nie potrzebujemy wypisywania dużej liczby i za podstawę możemy wziąć potęgę dwójki. Najwygodniej za podstawę jest wziąć 2^{16}. Rozmiar pamiętanej liczby można ustalać dynamicznie przy zapamiętywaniu nowo wyliczanej wartości $R_{n,k}$. W przypadku, gdy chcemy przydzielić pamięć statycznie, trzeba określić maksymalny rozmiar liczby jaką będziemy pamiętać. W tym celu musimy sprawdzić jakie jest największe $R_{n,k}$. Największe $R_{n,k}$ wynosi tyle co rząd permutacji n–elementowej dla $n = 10\,000$. Można eksperymentalnie sprawdzić, że wartość ta wynosi w przybliżeniu $1.8 \cdot 2^{454} < 2^{464} = 2^{16\cdot 29}$. Zatem można reprezentować wartości $R_{n,k}$ przez 29–cyfrowe liczby o podstawie 2^{16}.

Przy takiej reprezentacji pamięć potrzebna na zapamiętanie wszystkich wartości $R_{n,k}$ wynosi $2 \cdot 29 \cdot 10\,000 \cdot 70 = 40\,600\,000 \approx 40$M.

Wypisanie szukanej permutacji

Gdy już mamy wyliczony maksymalny rząd R_{n,K_n} permutacji n–elementowej, pozostaje wypisanie permutacji najmniejszej leksykograficznie. Wpierw musimy odtworzyć długości cykli tej permutacji. Oznaczmy:

$$C_{i,k} = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } R_{i,k} = R_{i,k-1} \\ p_k^{\alpha} & \text{jeśli } R_{i,k} = p_k^{\alpha} R_{i-p_k^{\alpha},k-1} \end{cases}$$

wtedy algorytm wyznaczania długości cykli jest następujący:

1: $i := n$
2: **for** $k := K_n$ **downto** 1 **do**
3:   **if** $C_{i,k} > 0$ **then** zapamiętaj długość cyklu $C_{i,k}$
4:   $i := i - C_{i,k}$
5: do zapamiętanych długości cykli dodaj i cykli długości 1

Wartości $C_{i,k}$ możemy sobie wcześniej zapamiętać podczas wyliczania wartości $R_{i,k}$.

Mając długości cykli możemy już wypisać permutację najmniejszą leksykograficznie. Sortujemy otrzymany ciąg liczb długości cykli od najmniejszej do największej otrzymując ciąg $c_1 \leqslant \ldots \leqslant c_l$, a następnie stosujemy twierdzenie 5.

Wiele wartości n

Dla testu zawierającego wiele wartości n bierzemy to największe. Dla niego stosujemy przedstawiony algorytm do wyliczania wartości $R_{n,k}$ oraz $C_{n,k}$. Mając te wartości możemy wypisać szukane permutacje dla wszystkich n znajdujących się w teście.

Inne rozwiązania

Typ `double` zamiast dużych liczb całkowitych

Można sprawdzić, że dla $n \leqslant 10\,000$ przy wyliczaniu wartości $R_{n,k}$ wszystkie porównania dotyczą liczb różniących się względnie o co najmniej 10^{-5}. Sugeruje to reprezentowanie wartości $R_{n,k}$ przez typ `double`. Rzeczywiście stosując zamiast dużych liczb całkowitych liczby zmiennoprzecinkowe podwójnej precyzji otrzymamy poprawny program dla danych wejściowych w tym zadaniu.

Pamiętanie części wartości $R_{n,k}$

Zauważmy, że we wzorze (14) wartość $R_{n,k}$ zależy tylko od wartości $R_{i,k-1}$, gdzie $i \leqslant n$. Zatem, aby wyznaczyć wszystkie wartości $R_{i,k}$ wystarczy, że będziemy pamiętać wartości $R_{i,k-1}$. Jeśli będziemy liczyć w odpowiedniej kolejności, to wystarczy pamiętać tylko $n+1$ wartości:

```
for i := 0 to n do R_i := 1 { Inicjacja dla k = 0 }
for k := 1 to „odpowiednio duże k” do
   for i := n downto 0 do
      R_i := max{R_i} ∪ {p_k^α R_{i−p_k^α} : 1 < p_k^α ⩽ i}
maksymalny rząd permutacji n–elementowej wynosi R_n
```

Oczywiście, żeby odtworzyć później długości cykli trzeba zapamiętać już wszystkie wartości $C_{i,k}$.

Testy

Zostało przygotowanych piętnaście testów. Maksymalne n w każdym z testów wynosiło kolejno: 5, 10, 20, 79, 789, 2003, 4567, 7890, 8945, 10000, 9878, 9991, 510, 2021, 3705. W ostatnich pięciu testach dane zostały tak dobrane, aby wyłapać rozwiązania nakładające zbyt duże ograniczenie na k.