Tomasz Idziaszek	Tomasz Idziaszek, Paweł Parys	Karol Pokorski
Treść zadania	Opracowanie	Program

Dostępna pamięć: 128 MB. *OI, etap II, dzień drugi, 11.02.2016*

Wcale nie Nim

Bajtoni i jego młodszy braciszek Bajtuś często grają w grę Nim. Bajtoni objaśnił braciszkowi, jaka jest strategia wygrywająca w tej grze, ale Bajtuś jeszcze nie radzi sobie z jej stosowaniem, i często przegrywa. Z tego powodu co rusz proponuje zmiany w regułach gry, mając nadzieję, że rozgrywka będzie łatwiejsza.

Właśnie zaproponował nową wersję: mamy n par stosów, przy czym stosy z i-tej pary zawierają początkowo po a_i kamieni. Gracze wykonują ruchy na przemian. Bajtuś w swoim ruchu zabiera niezerową liczbę kamieni z dowolnego wybranego przez siebie stosu. Z kolei Bajtoni w swoim ruchu przekłada niezerową liczbę kamieni pomiędzy stosami w wybranej przez niego parze. Bajtuś wykonuje ruch jako pierwszy. Przegrywa ten, kto nie może wykonać już żadnego ruchu.

Bajtoni od razu zauważył, że przy takich zasadach nie ma żadnych szans na zwycięstwo, ale nie chcąc robić przykrości braciszkowi, zgodził się zagrać. Postawił sobie jednak za punkt honoru jak najdłużej odwlekać nieuchronną przegraną. Pomóż mu i napisz program, który stwierdzi, jak długo może potrwać rozgrywka, jeśli obaj bracia grają optymalnie (Bajtuś dąży do zwycięstwa w najmniejszej liczbie ruchów, zaś Bajtoni dąży do maksymalnego wydłużenia gry).

Wejście

W pierwszym wierszu standardowego wejścia znajduje się dodatnia liczba całkowita n oznaczająca liczbę par stosów. W drugim wierszu znajduje się ciąg n dodatnich liczb całkowitych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pooddzielanych pojedynczymi odstępami, oznaczających liczności kolejnych par stosów.

Wyjście

W jedynym wierszu standardowego wyjścia należy zapisać jedną liczbę całkowitą oznaczającą liczbę ruchów, po których nastąpi koniec gry, jeśli obaj bracia grają optymalnie.

Przykład

Dla danych wejściowych:
```
2
1 2
```
poprawnym wynikiem jest:
```
7
```

Wyjaśnienie do przykładu: *Optymalna rozgrywka może wyglądać następująco:*

$1\,1\,2\,2 \to 1\,1\,2\,0 \to 1\,1\,1\,1 \to 1\,1\,1\,0 \to 1\,1\,0\,1 \to 1\,1\,0\,0 \to 2\,0\,0\,0 \to 0\,0\,0\,0$

Testy „ocen”:

`1ocen`: $n = 1$, $a_1 = 100$, *wynik 15*,

`2ocen`: $n = 5$, *wszystkie stosy po 2 kamienie, wynik 21*,

`3ocen`: $n = 3$, $a_1 = 10^7$, $a_2 = 10^8$, $a_3 = 10^9$, *wynik 163*,

`4ocen`: $n = 3000$, $a_i = i$, *wynik 65 197*,

`5ocen`: $n = 100\,000$, *wszystkie stosy po 1 kamieniu, wynik 200 001*.

Ocenianie

Zestaw testów dzieli się na podzadania spełniające następujące warunki. Testy do każdego podzadania składają się z jednej lub większej liczby osobnych grup testów. We wszystkich podzadaniach zachodzi $a_i \leqslant 1\,000\,000\,000$.

Podzadanie	Warunki	Liczba punktów
1	$n = 1$	10
2	suma wartości $a_i \leqslant 10$	10
3	$n \leqslant 3$	20
4	$n \leqslant 3\,000$	20
5	$n \leqslant 500\,000$	40

Rozwiązanie

W zadaniu mamy do czynienia z grą dla dwóch graczy, a naszym celem jest ustalenie, jaka jest optymalna strategia gry dla każdego z nich. Jak zobaczymy później, samo zaprogramowanie wyliczania liczby ruchów, które zostaną wykonane przez graczy przy zastosowaniu tych strategii, będzie już proste.

Na początku opiszemy, mniej lub bardziej intuicyjny, sposób dochodzenia do rozwiązania; formalny dowód poprawności zaprezentowanych strategii zostanie przedstawiony w dalszej części.

Jak grać w grę?

Dla łatwiejszego rozróżniania graczy, nazwijmy gracza pierwszego A, a drugiego B. Gracz A chce jak najszybciej zakończyć grę, zatem chce minimalizować liczbę kamieni na stosach. Dość łatwo więc zgodzić się z następującą obserwacją:

Obserwacja 1. *Gdy gracz A ustali, z której pary stosów zabierze kamienie w następnym ruchu, to najbardziej opłaca mu się zabrać wszystkie kamienie z większego ze stosów z pary.*

Skoro wiemy już, że ruchy A powodują opróżnienie większego ze stosów z pary, to celem B powinno być zmaksymalizowanie liczby kamieni na mniejszym ze stosów w parze. Czynimy więc kolejną obserwację:

Obserwacja 2. *Gdy gracz B ustali, że w następnym ruchu będzie przekładał kamienie w pewnej parze stosów zawierającej a i b kamieni ($a+b=k$), to najbardziej opłaca mu się:*

- *wyrównać zawartość stosów do $(\frac{k}{2}, \frac{k}{2})$, gdy k jest parzyste i $a \neq b$,*
- *lekko odejść od równowagi, do $(\frac{k}{2}-1, \frac{k}{2}+1)$, gdy k jest parzyste i $a=b=\frac{k}{2}$,*
- *„prawie" wyrównać do $(\frac{k-1}{2}, \frac{k+1}{2})$, gdy k jest nieparzyste.*

Początkowo dla wszystkich par stosów łączna ilość kamieni na obu stosach z pary jest parzysta i kamienie te są równo rozłożone. Zatem nie ma powodu, aby B psuł na nich równowagę, bo może tylko stracić. Natomiast gdy A usuwa wszystkie kamienie z jakiegoś stosu, to B zapewne będzie chciał wyrównać układ na parze, do której należał ten stos, bo inaczej A w następnym ruchu zdejmie od razu wszystkie kamienie z drugiego stosu, zamiast robić to w wielu ruchach. Możemy więc przyjąć za prawdziwą (bez ścisłego dowodu) następującą obserwację:

Obserwacja 3. *O ile w parze stosów, z której ostatnio usuwał gracz A, są jeszcze jakieś kamienie, to graczowi B najbardziej opłaca się ruszać w tej parze.*

Zatem jeśli para, z której ostatnio usuwał gracz A, jest postaci $(k,0)$ dla $k \neq 0$, to B wyrówna do $(\frac{k}{2}, \frac{k}{2})$ dla k parzystego lub „prawie" wyrówna do $(\frac{k-1}{2}, \frac{k+1}{2})$ dla k nieparzystego.

W przypadku, gdy A usunie ostatni kamień w parze stosów, gracz B nie może wykonać swojego ruchu w tej parze i musi popsuć równowagę w jakiejś innej parze. Jak ma wybrać tę parę, opiszemy nieco dalej.

Z powyższych obserwacji wynika też, że przed ruchem gracza A wszystkie pary stosów będą jednego z trzech rodzajów wymienionych w obserwacji 2. Istotnie, na początku gry wszystkie pary są wyrównane, a potem po każdym ruchu A, który psuje którąś parę, gracz B poprawia tę parę, a po każdym ruchu A opróżniającym parę, gracz B lekko odchodzi od równowagi w innej parze (jeśli wszystkie są wyrównane) lub robi ruch zamieniający kolejność stosów w pewnej „niewyrównanej" parze.

Przyjrzyjmy się bliżej, jakie ruchy A ma do dyspozycji. Załóżmy, że przed ruchem gracza A w parze stosów znajduje się $a+b=k$ kamieni. Zapiszmy w systemie dwójkowym łączną liczbę kamieni k i zobaczmy, jak zapis ten zmieni się po ruchu gracza A. Otóż, jeśli k było parzyste i była równowaga lub jeśli k było nieparzyste i była „prawie"-równowaga, to ruch A usuwa ostatnią cyfrę z liczby k, np.:

$$\begin{aligned} k = 44 = 101100_2 \quad &\rightarrow \quad \tfrac{k}{2} = 22 = 10110_2, \\ k = 45 = 101101_2 \quad &\rightarrow \quad \tfrac{k-1}{2} = 22 = 10110_2. \end{aligned}$$

Natomiast jeśli k było parzyste i równowaga była zaburzona, to ruch A zamienia k na $\frac{k}{2}-1$, czyli najpierw usuwa ostatnią cyfrę, po czym ostatnią jedynkę w zapisie zamienia na zero, a zera za nią zamienia na jedynki:

$$k = 44 = 101\underline{10}0_2 \quad \rightarrow \quad \tfrac{k}{2}-1 = 21 = 101\underline{01}_2.$$

Nazwijmy ten pierwszy rodzaj ruchu gracza A ruchem *zwykłym*, a ten drugi ruchem *ulepszonym*. Z tego, co powiedzieliśmy o tym, jak wyglądają stosy przed ruchem gracza A, wynika, że są to jedyne rodzaje ruchów, które może wykonać A. Ponadto, jeśli ruchy te nie czyszczą pary stosów, to następny ruch gracza B na tej parze przywróci na niej równowagę lub „prawie”-równowagę.

Zastanówmy się teraz, ile ruchów będzie potrzebował A, żeby wyczyścić ustaloną parę stosów, na której znajduje się $a+b=k$ kamieni. Jeśli A będzie wykonywał same ruchy zwykłe, to będzie musiał wykonać tyle ruchów, ile cyfr ma zapis dwójkowy liczby k. Oznaczmy tę wartość przez $\ell(k) = \lfloor \log_2 k \rfloor + 1$.

Przeanalizujmy, czy używanie ruchów ulepszonych umożliwia graczowi A szybsze wyczyszczenie pary stosów (pomińmy na razie fakt, że wykonanie ruchu ulepszonego nie zawsze jest możliwe). Zauważmy, że dla większości liczb k ruch ulepszony również powoduje usunięcie jednej cyfry z zapisu dwójkowego. Wyjątkiem jest na przykład $k = 2 = 10_2$, gdzie pojedynczy ruch ulepszony powoduje opróżnienie pary stosów, czym skraca zapis dwójkowy o *dwie* cyfry.

Wynika z tego, że dla dowolnej liczby kamieni k, która w zapisie binarnym zaczyna się od jedynki i zera, możliwe jest wyczyszczenie stosów, używając $\ell(k) - 1$ ruchów. Najpierw wykonujemy $\ell(k) - 2$ ruchów zwykłych, doprowadzając do 10_2, a potem jeden ruch ulepszony.

W przypadku liczb k, których zapis binarny zaczyna się od większej liczby jedynek, jest nieco trudniej. Dla przykładu dla $k = 6 = 110_2$ wykonanie ruchu zwykłego prowadzi do liczby nieparzystej $3 = 11_2$, co uniemożliwia użycie ruchu ulepszonego. W tym przypadku lepiej jest od razu zacząć od ruchu ulepszonego, który prowadzi do 10_2, a następnie wykonać drugi ruch ulepszony. W ogólności, jeśli zapis dwójkowy liczby k zaczyna się od j jedynek, po których następuje zero, a potem $\ell(k) - 1 - j$ dowolnych cyfr, to A może wyczyścić taką parę, wykonując najpierw $\ell(k) - 1 - j$ ruchów zwykłych, a następnie j ruchów ulepszonych; zatem w sumie wykonując $\ell(k) - 1$ ruchów.

Zatem A, chcąc opróżnić ustaloną parę stosów, mógłby poprawić swój wynik o jeden ruch, jeśli tylko mógłby zapewnić sobie wykonanie tylu ruchów ulepszonych, ile jest jedynek na początku zapisu dwójkowego liczby kamieni w tej parze. Nietrudna analiza pokazuje, że lepiej się nie da (nie można poprawić wyniku o więcej niż jeden ruch, a aby poprawić o jeden ruch, nie wystarczy wykonanie mniejszej liczby ruchów ulepszonych).

Musimy jednak uwzględnić fakt, że wykonanie przez A na parze stosów ruchu ulepszonego możliwe jest tylko, gdy para ta spełnia następujące dwa warunki:

- liczba kamieni w parze k w zapisie binarnym składa się z pewnej liczby jedynek, po której następuje zero, czyli $k = 2^m - 2$ dla $m \geqslant 2$; oznaczmy zbiór wszystkich takich liczb przez M;
- para stosów ma zaburzoną równowagę przez gracza B.

Gracz A łatwo może zapewnić, że zaburzanie równowagi przez gracza B będzie odbywać się tylko na takich parach stosów, dla których liczba kamieni jest już w zbiorze M. Wystarczy, że początkowo, wykonując tylko ruchy zwykłe (nie czyszcząc w międzyczasie żadnej pary stosów do końca) dla każdej pary stosów usunie z zapisu dwójkowego liczby kamieni wszystkie cyfry występujące za pierwszym zerem z lewej strony. Bez straty ogólności możemy zatem założyć, że liczba kamieni dla *każdej* pary jest w zbiorze M.

Przy powyższych założeniach odnośnie strategii graczy A i B, pozostaje im już niewielki wybór. Otóż gracz A może (musi) wybrać, dla której pary stosów rezygnuje z poprawiania wyniku o jeden i czyści tę parę ruchami zwykłymi. Gdy to zrobi, gracz B może (musi) wybrać, dla której pary stosów zaburzy równowagę, czyli pozwoli graczowi A na wykonanie ruchu ulepszonego, który kasuje *jedną* jedynkę z zapisu dwójkowego liczby kamieni. Jeśli to była akurat ostatnia jedynka, to kolejka powraca do gracza B, który znowu musi wybrać, dla której pary stosów zaburzy równowagę. Jeśli nie była to ostatnia jedynka, to znowu musi wybierać gracz A.

Do skompletowania strategii potrzebna jest jeszcze jedna obserwacja:

Obserwacja 4. *Załóżmy, że wszystkie liczby kamieni na parach stosów są ze zbioru M i jest na nich równowaga. Jeśli jest ruch gracza A, to wybiera on najliczniejszą parę i wykonuje na niej ruchy aż do opróżnienia. Jeśli jest ruch gracza B, to wybiera on najliczniejszą parę i zaburza na niej równowagę.*

Aby ściśle uzasadnić tę obserwację (jak również poprzednie), zredukujemy naszą grę (nazwijmy ją G) do pewnej nowej gry (nazwijmy ją H). W grze H będzie n stosów, które dla odmiany zawierają zapałki. Jeśli w grze G początkowa liczba kamieni na i-tej parze stosów w zapisie dwójkowym zaczyna się od j jedynek, to na i-tym stosie w grze H znajduje się początkowo j zapałek. Gracze ruszają się na zmianę, zaczyna gracz A. Gracz A może opróżnić dowolny niepusty stos. Gracz B może natomiast usunąć dowolną dodatnią liczbę zapałek z dowolnie wybranych stosów, pod warunkiem że:

- co najmniej jedna usuwana zapałka nie była ostatnią zapałką na stosie, lub
- ruch opróżnia wszystkie stosy.

Gra kończy się, gdy wszystkie stosy są puste. Celem gracza A jest wykonanie jak najmniejszej liczby ruchów (czyli celem B jest zapewnienie, że A będzie ruszał się jak najwięcej razy). Dotychczasowe rozumowanie sugeruje, że prawdziwy powinien być następujący lemat:

Lemat 1. *Niech s będzie łączna długością (liczbą cyfr) zapisów dwójkowych liczb a_i. Przy optymalnej grze obu graczy w obu grach, liczba ruchów gracza A w G jest o s większa od liczby ruchów gracza A w grze H.*

Zanim udowodnimy ten lemat, powiedzmy, jak rozwiązać grę H. Po pierwsze, oczywiste jest, że gracz B będzie usuwał tylko jedną zapałkę na raz (za wyjątkiem ostatniego ruchu, kiedy to musi opróżnić wszystkie stosy mające po jednej zapałce); możliwość usuwania jeszcze jakichś dodatkowych zapałek nic mu nie daje, skoro chce usunąć ich jak najmniej, zostawiając jak najwięcej graczowi A. Dalej, dość łatwo przekonać się, że graczowi A zawsze najbardziej opłaca się opróżnienie największego stosu (bo gdy zostaną małe stosy, to B, czyszczący stosy po jednej zapałce, zdąży ich więcej opróżnić, zastępując w tym gracza A, który chce minimalizować liczbę swoich ruchów). Jeśli to wiemy, to widzimy także, że graczowi B również najbardziej opłaca się zabranie zapałki z najliczniejszego stosu (bo ten stos i tak zostanie szybko opróżniony przez A, natomiast zapałki z niższych stosów gracz B może usuwać później).

Rozwiązanie zadania wygląda więc następująco. Najpierw konstruujemy grę H (czyli liczymy długości liczb a_i w zapisie dwójkowym oraz liczbę jedynek na początku każdego zapisu). Następnie gramy w H, wykonując opisane powyżej optymalne strategie obu graczy; liczymy przy tym, ile ruchów wykona gracz A. Możemy po prostu grać ruch po ruchu, bo ruchów jest niewiele (w zasadzie równie dobrze można wykonywać ruchy od razu w G, symulując optymalne strategie obu graczy). Do wyznaczania najliczniejszego stosu w H możemy skorzystać z kolejki priorytetowej (za każdym razem wyjmujemy maksimum i wstawiamy wynik ruchu).

Ponieważ w grze H gracz A wykona co najwyżej n ruchów, a każdy ruch gracza wymaga czasu $O(\log n)$ na kolejce priorytetowej, to powyższe rozwiązanie ma złożoność czasową $O(n \log n)$.

Wszędzie tu pisaliśmy o liczbie ruchów gracza A, natomiast w zadaniu mamy wypisać łączną liczbę ruchów obu graczy. Łatwo jednak zauważyć, że między tymi wielkościami zachodzi następująca zależność: jeśli gracz A ruszał się x razy, to obaj gracze ruszali się $2x - 1$ razy.

Opisane powyżej rozwiązanie zostało zaimplementowane w pliku `wca.cpp`. Alternatywna implementacja w plikach `wca1.cpp`, `wca2.pas` nie używa kolejki priorytetowej. Zamiast tego dla każdego j pamięta, ile liczb zaczyna się od j jedynek (różnych j jest mało, bo co najwyżej $\log_2 a_i$). W takiej tablicy łatwo znajdujemy, jaka jest maksymalna liczba jedynek w jakiejś liczbie; możemy też tę liczbę usunąć, czy zmniejszyć jej liczbę jedynek o jeden.

Odpowiedniość między grami G i H

W tej sekcji udowodnimy lemat 1, czyli formalnie pokażemy odpowiedniość między oryginalną grą G, a grą H.

Lemat 1 (**implikacja w jedną stronę**). *Jeśli A może zakończyć grę H, wykonując x ruchów, to może zakończyć grę G, wykonując $x + s$ ruchów.*

Dowód: Zagrajmy równocześnie w obie gry. Ruchy gracza A w G będziemy konstruować, patrząc na to, co dzieje się w H, a ruchy gracza B w H będziemy konstruować, patrząc na to, co dzieje się w grze G. Gracz A, grając w G oznacza sobie pary stosów jedną z liter X, Z. Początkowo wszystkie stosy oznaczone są literą X.

Będziemy utrzymywać następujący niezmiennik:

- Jeśli i-ta para stosów w G jest oznaczona literą X, to zapis dwójkowy łącznej liczby kamieni na stosach z tej pary zawiera zero, a liczba jedynek na początku tego zapisu jest równa liczbie zapałek na i-tym stosie w H.
- Jeśli i-ta para stosów w G jest oznaczona literą Z, to i-ty stos w H jest pusty.

Widzimy, że niezmiennik jest spełniony, gdy obie gry są w sytuacji początkowej (w szczególności łączna liczba kamieni na obu stosach w parze jest parzysta, czyli jej zapis dwójkowy zawiera zero).

Symulacja przebiega następująco:

1. Na samym początku pozwalamy graczowi A ruszyć się w H; usuwa on wszystkie zapałki ze stosu numer i, a my oznaczamy i-tą parę stosów w G literą Z. Niezmiennik pozostaje spełniony: napisaliśmy Z, a w H stos jest pusty.

2. Niech k_i to liczba kamieni na i-tej parze stosów w G (dla każdego i). Gracz A rusza się w G w następujący sposób:

   (a) Znajduje (o ile istnieje) takie i, że i-ta para jest oznaczona przez X oraz $k_i \notin M \cup \{0\}$ i usuwa z i-tej pary $\lceil \frac{k_i}{2} \rceil$ kamieni (na większym ze stosów jest co najmniej tyle). Ponieważ zapis dwójkowy k_i zawiera zero i $k_i \notin M$ (czyli ostatnia cyfra nie jest jedynym zerem), to po usunięciu ostatniej cyfry nadal będzie jakieś zero, a liczba jedynek na początku nie zmienia się; zatem niezmiennik pozostaje prawdziwy.

   (b) Jeśli nie było i jak wyżej, znajduje (o ile istnieje) takie i, że i-ta para jest oznaczona przez X, $k_i \in M$ oraz kamienie nie są rozłożone po równo na stosach; usuwa z i-tej pary $\frac{k_i}{2} + 1$ kamieni (na większym ze stosów jest co najmniej tyle). Jednocześnie w H gracz B usuwa jedną zapałkę z i-tego stosu (ruchy gracza B w H opisujemy zapałka po zapałce, wiele takich ruchów składa się na jeden pełny ruch). Opisany ruch A w G powoduje usunięcie jednej jedynki w zapisie dwójkowym liczby kamieni w i-tej parze stosów, czyli liczba jedynek na początku tego zapisu spada o 1. Jednocześnie usunęliśmy jedną zapałkę z i-tego stosu w H, więc niezmiennik pozostaje zachowany (a niezmiennik przed ruchem zapewnia, że rzeczywiście na i-tym stosie w H była jakaś zapałka i B może ją usunąć).

   (c) Jeśli nie było i jak wyżej, znajduje (o ile istnieje) takie i, że i-ta para jest oznaczona przez Z oraz $k_i > 0$ i usuwa z i-tej pary $\lceil \frac{k_i}{2} \rceil$ kamieni (na większym ze stosów jest co najmniej tyle). Niezmiennik jest zachowany w trywialny sposób.

   (d) Jeśli nie było i jak wyżej, to kończymy ruch gracza B w H i pozwalamy ruszyć się graczowi A (udowodnimy później, że rzeczywiście uzyskaliśmy poprawny ruch gracza B oraz że gra H jeszcze się nie skończyła); on usuwa wszystkie zapałki ze stosu numer i, a my oznaczamy i-tą parę stosów literą Z. Niezmiennik pozostaje spełniony: napisaliśmy Z, a w H stos jest pusty. Zwróćmy uwagę, że i-ta para stosów była wcześniej oznaczona literą X (gdyby była oznaczona przez Z, to i-ty stos w H byłby pusty) oraz jest tam jakiś kamień (liczba jedynek na początku zapisu dwójkowego liczby kamieni była równa liczbie zapałek na i-tym stosie, która była niezerowa). Następnie próbujemy ponownie wykonać punkt (c), w którym teraz już na pewno szukanie i zakończy się sukcesem.

3. Jeśli wszystkie stosy w G są puste, to gra się kończy. W tej sytuacji niezmiennik zapewnia, że również w H wszystkie stosy są puste.

4. Pozwalamy ruszyć się graczowi B w G i wracamy do punktu 2. Zauważmy, że niezależnie od jego ruchu, niezmiennik nadal jest spełniony.

Musimy teraz udowodnić, że w punkcie 2(d) możemy rzeczywiście zakończyć w H ruch gracza B i czekać na ruch gracza A. Ruch gracza B trwał od ostatniego momentu, gdy jakąś niepustą parę stosów oznaczyliśmy przez Z (w punkcie 1 lub 2(d)); zatem na początku tego ruchu istniała niepusta para oznaczona przez Z (dokładnie jedna, ale to dla nas bez znaczenia), a teraz nie istnieje (skoro jej znalezienie w 2(c) się nie powiodło i przeszliśmy do 2(d)). Spójrzmy na moment, gdy ostatni kamień z tej pary stosów został usunięty przez A. Stało się to w punkcie 2(c), czyli nie udało się wówczas znalezienie i ani w punkcie 2(a), ani w punkcie 2(b). Oznacza to, że dla każdej pary stosów i oznaczonej przez X zachodziło $k_i \in M \cup \{0\}$ i na obu stosach tej pary było po tyle samo kamieni. Po rozważanym ruchu gracza A z punktu 2(c), usuwającym ostatni kamień z pary stosów oznaczonej Z, gracz B musi wykonać jakiś ruch i jedyne, co może zrobić, to zaburzyć równowagę w pewnej parze stosów i oznaczonej X, dla której $k_i \in M \cup \{0\}$. W kolejnym kroku gracz A na pewno zrobi ruch według punktu 2(b), dla tego i, zdejmując graczem B jedną zapałkę w grze H. Jeśli było $k_i > 2$, to zapałka usunięta w H nie była ostatnią na stosie, co zapewnia poprawność ruchu gracza B w H. Jeśli jednak $k_i = 2$, to A usuwa oba kamienie z tego stosu i B musi ruszyć się gdzie indziej, czyli znowu jedyne co może zrobić to zaburzyć równowagę w pewnej parze stosów i oznaczonej X, dla której $k_i \in M \cup \{0\}$; sytuacja się powtarza. Jedyny sposób wyjścia z tej pętli to albo przypadek $k_i > 2$, albo koniec gry. Skoro jednak ileś ruchów później doszliśmy do punktu 2(d), to musieliśmy przejść przez przypadek $k_i > 2$, czyli zapewnić poprawność ruchu gracza B w H. To kończy dowód poprawności ruchu gracza B w H. Musimy jeszcze zobaczyć, że H jeszcze się nie skończyła i jest sens czekać w niej na ruch gracza A. Skoro jednak G się nie skończyła, a jednocześnie nie ma tam niepustej pary stosów oznaczonej przez Z, to jest niepusta para stosów oznaczona przez X; niezmiennik zapewnia, że odpowiadający jej stos w H także jest niepusty.

Pozostaje porównać liczbę ruchów gracza A w obu grach. Niech s_i będzie liczbą cyfr w zapisie dwójkowym liczby a_i. Widzimy, że dla każdego i zachodzą następujące własności:

1. Jeśli na koniec i-ta para stosów jest oznaczona przez X, to aby ją opróżnić A wykonał s_i ruchów. Istotnie, początkowo na tej parze stosów mamy $2a_i$ kamieni (zapis dwójkowy długości $s_i + 1$, na pewno zawiera jakieś zero). Dopóki liczba kamieni nie jest w M, każdy ruch A dotyczący tej pary (z punktu 2(a)) usuwa ostatnią cyfrę z zapisu dwójkowego, skracając go o jeden. W pewnym momencie na pewno liczba kamieni zacznie być w M (gdy usuniemy wszystkie cyfry za pierwszym zerem). Wówczas każdy ruch A (z punktu 2(b)) usuwa jedną jedynkę z zapisu dwójkowego, w szczególności ostatni ruch przechodzi od $2 = 10_2$ kamieni od razu do 0 kamieni, skracając zapis dwójkowy o dwie cyfry. Ruchów A musiało więc być rzeczywiście s_i.

2. Jeśli na koniec i-ta para stosów jest oznaczona przez Z, to aby ją opróżnić A wykonał $s_i + 1$ ruchów. Istotnie, w tej sytuacji początek gry przebiega jak poprzednio, czyli każdy ruch A skraca zapis dwójkowy łącznej liczby kamieni o jedną cyfrę. W pewnym momencie (gdy jest jeszcze niepusta) para zostaje oznaczona przez Z. Później każdy ruch A na tej parze (z punktu 2(c)) powoduje usunięcie ostatniej cyfry z zapisu dwójkowego łącznej liczby kamieni, czyli skrócenie tego zapisu o jedną cyfrę. Skrócenie liczby $(s_i + 1)$-cyfrowej do 0-cyfrowej zajmuje więc rzeczywiście $s_i + 1$ ruchów.

Jednocześnie widzimy, że oznaczenie pary stosów przez Z występuje dokładnie wtedy, gdy gracz A rusza się w H. Zatem jeśli A w grze H wykonał x ruchów, to w G wykonał $x + s$ ruchów. ■

Lemat 1 (implikacja w drugą stronę). *Jeśli A może zakończyć grę G, wykonując $x+s$ ruchów, to może zakończyć grę H, wykonując x ruchów.*

Dowód: Znowu gramy równocześnie w obie gry. Ruchy gracza A w H będziemy konstruować, patrząc na to, co dzieje się w G, a ruchy gracza B w G będziemy konstruować, patrząc na to, co dzieje się w H. Z każdą parą stosów w grze G skojarzymy dwie liczby: r_i oraz z_i. Liczba r_i początkowo będzie równa długości zapisu dwójkowego liczby $2a_i$ (czyli łącznej liczby kamieni na i-tej parze stosów w G), natomiast z_i będzie równa liczbie jedynek na początku $2a_i$ (czyli liczbie zapałek na i-tym stosie w H). Dla dowolnych liczb naturalnych r, z zdefiniujmy:

$$m(r,z) = \begin{cases} \lfloor (2^z - 1) \cdot 2^{r-z} \rfloor & \text{gdy } z > 0, \\ \lceil 2^{r-1} - 1 \rceil & \text{gdy } z = 0. \end{cases}$$

Zatem gdy $z > 0$, liczba ta w zapisie dwójkowym jest długości r i zaczyna się od $\min(r, z)$ jedynek, po których są same zera. Jeśli zaś $z = 0$, to jest to po prostu $\max(0, r-1)$ jedynek. Początkowe wyrazy tego ciągu to:

$$\begin{array}{lllll} m(0,0) = 0, & m(1,0) = 0, & m(2,0) = 1, & m(3,0) = 3, & m(4,0) = 7, \\ m(0,1) = 0, & m(1,1) = 1, & m(2,1) = 2, & m(3,1) = 4, & m(4,1) = 8, \\ m(0,2) = 0, & m(1,2) = 1, & m(2,2) = 3, & m(3,2) = 6, & m(4,2) = 12. \end{array}$$

Zauważmy, że zawsze $\lfloor \frac{m(r+1,z)}{2} \rfloor = m(r,z)$ (zmniejszenie r o jeden powoduje podzielenie liczby $m(r,z)$ przez dwa, z zaokrągleniem w dół).

Przed każdym ruchem gracza A w G prawdziwy będzie następujący niezmiennik (dla każdego i):

1. na i-tej parze stosów w G jest co najmniej $m(r_i, z_i)$ kamieni, przy czym na każdym ze stosów w parze co najmniej $\lfloor \frac{m(r_i,z_i)}{2} \rfloor$ kamieni,
2. na i-tym stosie w H jest co najwyżej z_i zapałek,
3. jeśli $r_i = 0$ to $z_i \leqslant 1$, oraz
4. $z_i = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy gra H już się skończyła.

Widzimy, że niezmiennik jest spełniony, gdy obie gry są w sytuacji początkowej (w szczególności zarówno $m(r_i, z_i)$ jak i liczba kamieni na i-tej parze stosów jest długości r_i i zaczyna się od z_i jedynek, przy czym w $m(r_i, z_i)$ po tych jedynkach są same zera, co daje pierwszy punkt).

Podczas symulacji powtarzamy następujące operacje:

1. Czekamy w G na ruch gracza A, który usuwa kamienie z pary stosów numer i. Może to zaburzyć pierwszy punkt niezmiennika, natomiast ciągle wiemy, że na jednym ze stosów w tej parze (na tym, którego A nie ruszał) jest co najmniej $\lfloor \frac{m(r_i,z_i)}{2} \rfloor$ kamieni.
2. Jeśli na którymś ze stosów w i-tej parze pozostało co najmniej $m(r_i, z_i)$ kamieni, to nic nie robimy, a jeśli nie (wtedy w szczególności na pewno jest

$r_i > 0$), to zmniejszamy r_i o 1. Po takim zmniejszeniu już na pewno na którymś ze stosów w i-tej parze pozostało co najmniej $m(r_i, z_i)$ kamieni, bo $\lfloor\frac{m(r_i+1,z_i)}{2}\rfloor = m(r_i, z_i)$; w szczególności punkt 1 niezmiennika jest już prawdziwy. Zauważmy, że może to zaburzyć trzeci punkt niezmiennika, ale tylko, gdy oba stosy stały się puste (jeśli któryś stos był niepusty, a r_i było 1, to byśmy nie zmniejszyli r_i, bo $m(1, z_i) \leqslant 1$).

3. Załóżmy, że po ruchu gracza A na parze stosów numer i pozostały jeszcze jakieś kamienie. Wówczas gracz B odpowiada na tym samym stosie. Jeśli $m(r_i, z_i) = 0$, to po prostu bierze dowolny kamień i przekłada; niezmiennik w trywialny sposób pozostaje prawdziwy. Jeśli $m(r_i, z_i) \geqslant 1$, to gracz B przekłada $\lceil\frac{m(r_i,z_i)}{2}\rceil$ kamieni (to jest $\geqslant 1$) ze stosu, na którym jest co najmniej $m(r_i, z_i)$ kamieni, na drugi stos, zapewniając prawdziwość niezmiennika. W tym przypadku to już koniec rozważań, wracamy do punktu 1, czekając na kolejny ruch gracza A.

4. Teraz rozważamy już tylko sytuację, że po ruchu gracza A na parze stosów numer i nie ma już kamieni. Skoro na którymś ze stosów w tej parze jest co najmniej $m(r_i, z_i)$ kamieni, to $m(r_i, z_i) = 0$ (czyli jeśli $z_i = 0$ to $r_i \leqslant 1$, a jeśli $z_i > 0$, to $r_i = 0$). Mamy trzy podprzypadki:

   (a) Być może gra H już się skończyła. Wtedy także punkt 3 niezmiennika jest prawdziwy (bo $z_i = 0$). Jeśli także gra G już się skończyła, to po prostu kończymy symulację. Załóżmy, że G jeszcze trwa i wybierzmy dowolną niepustą parę stosów j. Gracz B przekłada tam jeden kamień ze stosu nie mniejszego na nie większy (czyli z większego na mniejszy lub między równymi). Niezmiennik zapewnia, że $z_j = 0$, czyli $m(r_j, z_j)$ jest nieparzyste lub jest zerem. Jeśli $m(r_j, z_j) = 0$, to niezmiennik oczywiście pozostaje spełniony. Jeśli $m(r_j, z_j) > 0$, to z niezmiennika wiemy, że na większym ze stosów musiało być co najmniej $\lfloor\frac{m(r_j,z_j)}{2}\rfloor+1$ kamieni, po ruchu na każdym stosie pozostaje co najmniej $\lfloor\frac{m(r_j,z_j)}{2}\rfloor$ kamieni. Wracamy do punktu 1.

   (b) Przypuśćmy jednak teraz, że H jeszcze się nie skończyła. Wówczas $z_i > 0$, czyli $r_i = 0$. Gracz A wykonuje ruch w H: jeśli i-ty stos jest niepusty, to opróżnia i-ty, a jeśli pusty, to opróżnia dowolny niepusty stos. Swobodnie (tzn. nie martwiąc się o prawdziwość punktu 2 niezmiennika) możemy teraz zmniejszyć z_i do 1, przywracając prawdziwość niezmiennika (w szczególności punktu 3). Jeśli ten ruch nie kończy gry H, to gracz B odpowiada, usuwając pewną liczbę zapałek. Jeśli nie kończy przy tym gry H, to z definicji gry H gracz B usuwa przynajmniej jedną zapałkę z jakiegoś stosu j zawierającego co najmniej 2 zapałki. Załóżmy, że rzeczywiście gra H nadal się nie skończyła. Wtedy $z_j \geqslant 2$ (z punktu 2 niezmiennika) oraz $r_j \geqslant 1$ (z punktu 3 niezmiennika), co daje $m(r_j, z_j) \geqslant 1$. Zmniejszamy z_j o jeden; ponieważ usunęliśmy zapałkę, to nadal zapałek na j-tym stosie w H będzie nie więcej niż z_j (niezmiennik pozostaje prawdziwy). Jeśli $m(r_j, z_j)$ jest nieparzyste, to na j-tej parze stosów gracz B po prostu przekłada jeden kamień z nie mniejszego stosu na nie większy i niezmiennik (w szczególności punkt 1) pozostanie prawdziwy. Jeśli zaś $m(r_j, z_j)$ jest parzyste, to jest ściśle mniejsze niż $m(r_j, z_j+1)$ (wartość przed zmniejszeniem z_j), więc także gracz B po prostu przekłada jeden kamień z nie mniejszego stosu na nie większy i niezmiennik pozostanie prawdziwy. Wracamy do punktu 1.

(c) Pozostaje do rozważenia sytuacja, gdy podczas wykonywania punktu 4(b) gra H się skończyła (albo od razu po wykonaniu w niej ruchu gracza A, albo dopiero po ruchu gracza B). Wtedy zmieniamy wszystkie z_k na 0, co zapewnia poprawność punktu 4 niezmiennika dla każdego k. Jednocześnie pozostałe punkty niezmiennika pozostają prawdziwe. Następnie wracamy do punktu 4(a).

Nasza symulacja przebiega aż do momentu, gdy gra G się skończy. Widzimy, że może to nastąpić jedynie w punkcie 4(a), czyli już po tym, gdy gra H się skończyła. Pozostaje porównać liczbę ruchów gracza A w obu grach. Niech s_i będzie liczbą cyfr w zapisie dwójkowym liczby a_i. Początkowo r_i jest równe s_i+1. Liczbę r_i zmniejszamy jedynie w punkcie 2, po tym jak A zrobi ruch w G. Na koniec musi być $m(r_i, z_i) = 0$ (punkt 1 niezmiennika), czyli $r_i \leqslant 1$. Zmniejszenie wszystkich r_i do 1 wymaga więc co najmniej $\sum_i s_i = s$ ruchów A w G. Zobaczmy też, że A rusza się w H jedynie w punkcie 4(b), czyli wtedy, gdy $r_i = 0$; zatem gracz A, aby ruszyć się w H, musi także zrobić dodatkowy ruch w G. Czyli jeśli w H wykonał x ruchów, to w G musiał wykonać przynajmniej $x + s$ ruchów. ∎

Optymalne strategie w grze H

Pozostaje nam udowodnienie, jak wyglądają optymalne strategie w grze H. Zaczniemy od gracza A, ale wcześniej udowodnimy lemat pomocniczy.

Lemat 2. *Rozważmy dwie sytuacje C i D w grze H, przy czym D powstaje z C przez usunięcie pewnych zapałek z pewnych stosów. Załóżmy, że z sytuacji C gracz A może zakończyć grę, wykonując co najwyżej x ruchów. Wówczas także z sytuacji D gracz A może zakończyć grę, wykonując co najwyżej x ruchów.*

Dowód: Jeśli w D jest koniec gry, to teza zachodzi w sposób trywialny.

Przyjrzyjmy się najpierw przypadkowi, że w C i D jest kolej gracza B. Zakładając, że w D jest ruch gracza B, który wymusza więcej niż x ruchów gracza A, rozważmy ten właśnie ruch gracza B. Prowadzi on do sytuacji D', z której A musi wykonać w najgorszym razie więcej niż x ruchów. Ale z C również istnieje ruch gracza B, który prowadzi do D': najpierw usuwamy pewne zapałki sprowadzając sytuację do D, a potem ruszamy się jak w D. To jest sprzeczne z założeniem, że z C gracz A może zakończyć grę, wykonując co najwyżej x ruchów.

Rozważmy teraz przypadek, że w C i D jest kolej gracza A. Weźmy ruch gracza A z sytuacji C, który zapewnia zakończenie gry w co najwyżej x ruchach. Prowadzi on do sytuacji C', powstającej z C przez opróżnienie stosu o pewnym numerze i; z C' gracz A może zakończyć grę, wykonując co najwyżej $x-1$ ruchów. Jeśli w D stos i-ty jest niepusty, to rozważamy ruch gracza A opróżniający stos i-ty; jeśli zaś jest pusty, to opróżniamy dowolny niepusty stos. W obu tych przypadkach sytuacja D' powstała po tym ruchu powstaje z C' poprzez usunięcie pewnych zapałek z pewnych stosów. Z przypadku pierwszego dostajemy, że z D' gracz A może zakończyć grę, wykonując co najwyżej $x-1$ ruchów. Zatem z D gracz A może zakończyć grę, wykonując co najwyżej x ruchów. ■

Lemat 3. *Rozważmy sytuację w grze H, z której A może zakończyć grę, wykonując co najwyżej x ruchów. Wówczas, jeśli A będzie cały czas opróżniał stos zawierający najwięcej zapałek, to także zakończy grę, wykonując co najwyżej x ruchów.*

Dowód: Dowód jest przez indukcję po x. Jeśli jest akurat kolej na gracza B, to wykonujemy jego ruch, sprowadzając do sytuacji, w której jest kolej gracza A. Załóżmy, że jest kolej gracza A. Jeśli w optymalnej strategii gracz A także opróżnia stos zawierający najwięcej zapałek (strategie różnią się później), to korzystamy z założenia indukcyjnego dla $x-1$. Załóżmy, że optymalna strategia opróżnia stos numer i, prowadząc do sytuacji C, natomiast opróżnienie stosu numer j, mającego najwięcej zapałek, prowadzi do sytuacji D. Zamieniając numerami stosy numer i i j w D, możemy założyć, że D różni się od C tylko tym, że w C na j-tym stosie jest więcej zapałek niż w D. Zatem C i D podpadają pod lemat 2, który mówi, że z D gracz A może zakończyć grę, wykonując co najwyżej $x-1$ ruchów (bo z C gracz A może zakończyć grę, wykonując co najwyżej $x-1$ ruchów). ■

Następnie udowodnimy, że także gracz B powinien zawsze zabierać jedną zapałkę ze stosu zawierającego najwięcej zapałek (chyba że na każdym stosie jest już tylko co najwyżej jedna zapałka, to wtedy B musi usunąć wszystkie). Dowód jest podzielony na trzy lematy.

Lemat 4. *Rozważmy sytuację w grze H, z której jest ruch gracza B, przy czym istnieje stos zawierający więcej niż jedną zapałkę. Załóżmy, że B może wymusić, że A wykona więcej niż x ruchów do końca gry. Wówczas istnieje taki ruch B, który usuwa tylko jedną zapałkę i po którym nadal B może wymusić, że A wykona więcej niż x ruchów do końca gry.*

Dowód: Rozważmy ruch gracza B w strategii, która wymusza, że A wykona więcej niż x ruchów do końca gry; prowadzi on do pewnej sytuacji D. Ponieważ istnieje stos zawierający więcej niż jedną zapałkę, to ruch ten usuwa przynajmniej jedną nieostatnią zapałkę (definicja gry H). Rozważmy także alternatywny ruch gracza B, który usuwa tylko tę jedną zapałkę; prowadzi on do pewnej sytuacji C. Widzimy, że D powstaje z C przez usunięcie pewnych zapałek z pewnych stosów (lub $D=C$). Z lematu 2 wynika, że jeśli z C gracz A mógłby zakończyć grę, wykonując co najwyżej x ruchów, to mógłby także z D, co kończy dowód. ■

Lemat 5. *Rozważmy dwie sytuacje C i D w grze H, przy czym D powstaje z C poprzez przeniesienie jednej zapałki z pewnego stosu i zawierającego $z_i \geqslant 2$ zapałek na pewien stos j zawierający $z_j \geqslant z_i$ zapałek. Załóżmy, że z sytuacji C gracz A może zakończyć grę, wykonując co najwyżej x ruchów. Wówczas także z sytuacji D gracz A może zakończyć grę, wykonując co najwyżej x ruchów.*

Dowód: Indukcja po x. Rozważmy najpierw przypadek, że w C i D jest kolej gracza A. Z lematu 3 wiemy, że A może zapewnić sobie zakończenie gry z C w co najwyżej x ruchach, usuwając największy stos; oznaczmy go przez k. Jeśli $z_j > z_i$, to na pewno

$k \neq i$; również jeśli $z_j = z_i$, to możemy założyć, że $k \neq i$ (nie ma znaczenia, czy usuwamy stos i-ty, czy równoliczny z nim j-ty). Rozważmy także ruch gracza A z D polegający na opróżnieniu stosu k. Niech C' i D' to sytuacje po tych ruchach. Jeśli $k = j$, to D' powstaje z C' przez usunięcie jednej zapałki ze stosu i; wystarczy więc skorzystać z lematu 2. Jeśli zaś $k \neq j$ (oraz ciągle $k \neq i$), to nadal D' powstaje z C' poprzez przeniesienie jednej zapałki ze stosu i zawierającego $z_i \geqslant 2$ zapałek na stos j zawierający $z_j \geqslant z_i$ zapałek. Wystarczy teraz skorzystać z założenia indukcyjnego (gracz A z C' może zakończyć grę, wykonując co najwyżej $x - 1$ ruchów).

Przyjrzyjmy się teraz przypadkowi, że w C i D jest kolej gracza B. Zakładając, że z D jest ruch gracza B, który wymusza więcej niż x ruchów gracza A, rozważmy ten właśnie ruch gracza B. Dzięki lematowi 4 (na j-tym stosie w D mamy co najmniej 3 zapałki, więc założenia są spełnione) możemy założyć, że ruch ten polega na usunięciu jednej, nieostatniej, zapałki z jakiegoś stosu k. Wynikową sytuację oznaczmy D'. Jeśli $k = j$, to z C gracz B usuwa zapałkę ze stosu i (nieostatnią, bo $z_i \geqslant 2$), sprowadzając również C do D'. W przeciwnym przypadku z C gracz B usuwa zapałkę ze stosu k. Wynikowa sytuacja C' również ma tę własność, że D' powstaje z C' poprzez przeniesienie jednej zapałki ze stosu i zawierającego $z'_i \geqslant 2$ zapałek na stos j zawierający $z_j \geqslant z'_i$ zapałek. Faktycznie mamy $z'_i \geqslant 2$, bo jeśli $k \neq i$ to $z'_i = z_i$, a jeśli $k = i$, to na i-tym stosie w D musiały być przynajmniej 2 zapałki (bo usuwaliśmy nieostatnią), czyli w C co najmniej 3, czyli w C' znowu co najmniej 2. Możemy więc użyć pierwszego przypadku dla C' i D'. ■

Lemat 6. *Rozważmy sytuację w grze H, z której jest ruch gracza B. Załóżmy, że B może wymusić, że A wykona więcej niż x ruchów do końca gry. Wówczas B, aby to zrobić, może zacząć od usunięcia jednej zapałki z największego stosu (chyba że wszystkie stosy są rozmiaru co najwyżej* 1*; wtedy musi usunąć wszystkie zapałki).*

Dowód: Jeśli wszystkie stosy są rozmiaru co najwyżej 1, to gracz B nie ma wyboru. Załóżmy więc, że jednak istnieje jakiś stos o liczności co najmniej 2. Rozważmy ruch gracza B w strategii, która wymusza, że A wykona więcej niż x ruchów do końca gry; prowadzi on do pewnej sytuacji D. Dzięki lematowi 4 możemy założyć, że ruch ten polega na usunięciu jednej zapałki z pewnego stosu i. Rozważmy także alternatywny ruch B, który usuwa jedną zapałkę z największego stosu; niech jego numer to j, a sytuacja po tym ruchu to C. Jeśli stosy i i j są tak samo liczne, to nie ma co dowodzić. Jeśli zaś stos i jest mniejszy, to D powstaje z C poprzez przeniesienie jednej zapałki ze stosu i zawierającego $z_i \geqslant 2$ zapałek na pewien stos j zawierający $z_j \geqslant z_i$ zapałek. Mamy przy tym $z_i \geqslant 2$, bo skoro tworząc D usunęliśmy z i-tego stosu nieostatnią zapałkę, to w C muszą tam być co najmniej dwie zapałki. Z kolei $z_j \geqslant z_i$ wynika z tego, że w początkowej sytuacji stos j był najliczniejszy, a stos i mniej liczny od niego. Z lematu 5 wynika więc, że jeśli z C gracz A mógłby zakończyć grę, wykonując co najwyżej x ruchów, to mógłby także z D, co kończy dowód. ■

Rozwiązania częściowe

Dla bardzo małych danych wejściowych możemy napisać rozwiązanie, korzystając z ogólnych metod teorii gier (algorytm min-max), bez analizowania optymalnej strategii konkretnej gry. Wystarczy, że każda rozgrywka jest skończona (każdy ruch gracza A zmniejsza łączną liczbę kamieni na stosach o co najmniej 1, zaś ruchy gracza B nie zmieniają tej liczby). W pliku `wcas1.cpp` zaimplementowano tę metodę; rozwiązanie przechodzi drugie podzadanie.

W przypadku pierwszego podzadania (tylko jedna para stosów), wystarczy jedynie odkryć Obserwacje 1 i 2. Odpowiednie rozwiązanie jest zaimplementowane w pliku `wcab1.cpp`.

Z kolei w pliku `wcas2.cpp` zaimplementowane jest rozwiązanie, które korzysta z obserwacji, co najbardziej opłaca się graczom, gdy już wybiorą stos; wie także, który stos powinien wybierać gracz B. Dla gracza A bada wszystkie możliwości wyboru stosu. Rozwiązanie przechodzi pierwsze trzy podzadania.

Zawody III stopnia

opracowania zadań