Wojciech Guzicki **Arkadiusz Paterek**
Treść zadania, Opracowanie Program

OI, Etap III, dzień 1, 6–04–2005

Dwa przyjęcia

Król Bajtazar postanowił urządzić dwa wielkie przyjęcia, na które chce zaprosić wszystkich mieszkańców Bajtocji, przy czym każdego na dokładnie jedno z tych przyjęć. Król z własnego doświadczenia wie, że osoba dobrze bawi się na przyjęciu, gdy jest na nim parzysta liczba jej znajomych. Zażądał więc od Ciebie, abyś tak podzielił mieszkańców kraju pomiędzy dwa przyjęcia, żeby jak najwięcej osób miało na swoim przyjęciu parzystą liczbę znajomych. Możliwy jest również taki podział, w którym na jedno z przyjęć nikt nie przyjdzie. Relacja znajomości jest symetryczna, tzn. jeśli osoba A zna osobę B, to osoba B zna osobę A.

Zadanie

Napisz program, który:

- *wczyta ze standardowego wejścia liczbę mieszkańców Bajtocji i opis ich znajomości,*
- *podzieli mieszkańców pomiędzy dwa przyjęcia tak, aby liczba osób, które mają na swoim przyjęciu parzystą liczbę znajomych, była jak największa,*
- *wypisze na standardowe wyjście listę osób, które powinny przyjść na pierwsze przyjęcie.*

Wejście

W pierwszym wierszu standardowego wejścia zapisana jest jedna liczba całkowita n ($1 \leqslant n \leqslant 200$) — jest to liczba mieszkańców Bajtocji. Mieszkańcy są ponumerowani od 1 do n. W kolejnych n wierszach znajdują się opisy znajomości kolejnych osób. Na początku $(i+1)$-szego wiersza występuje liczba całkowita l_i ($0 \leqslant l_i \leqslant n-1$) — liczba znajomych i-tego mieszkańca. Dalej w tym samym wierszu zapisanych jest l_i parami różnych numerów znajomych mieszkańca i. Zakładamy, że żaden mieszkaniec nie jest swoim własnym znajomym, a zatem znajomości wypisane są dwukrotnie: jeśli A i B się znają, to B występuje na liście znajomych A oraz A na liście znajomych B.

Wyjście

W pierwszym wierszu standardowego wejścia Twój program powinien wypisać jedną liczbę całkowitą M — liczbę osób, które mają przyjść na pierwsze z przyjęć. W drugim wierszu należy wymienić M numerów tych właśnie osób. Pozostałe osoby pójdą na drugie przyjęcie.

W tym zadaniu możliwych jest wiele poprawnych wyników — Twój program powinien wypisać dowolny z nich.

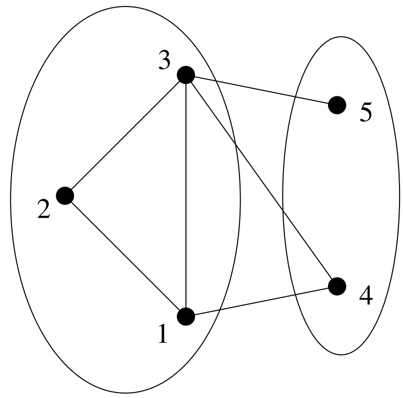
Przykład

Dla danych wejściowych:

```
5
3 2 3 4
2 1 3
4 2 1 4 5
2 1 3
1 3
```

poprawnym wynikiem jest:

```
3
1 2 3
```



W powyższym przykładzie wszystkie osoby będą miały na przyjęciu parzystą liczbę znajomych.

Rozwiązanie

Problem w języku grafów

Sformułujemy zadanie w języku teorii grafów. Dany jest zbiór n osób — będą to wierzchołki naszego grafu G. Wierzchołki v i w są połączone krawędzią, jeśli osoby v i w znają się. Mamy zatem graf nieskierowany bez krawędzi wielokrotnych i pętli (tzn. krawędzi łączących wierzchołek z samym sobą). Dla danego grafu G symbolem $V(G)$ oznaczamy zbiór wierzchołków tego grafu, a symbolem $E(G)$ oznaczamy zbiór krawędzi. Krawędź łączącą wierzchołki v i w oznaczamy symbolem vw (lub wv). Dla danego wierzchołka v symbolem $S(v)$ oznaczamy zbiór sąsiadów v:

$$S(v) = \{w \in V(G) : \; vw \in E(G)\}.$$

Wreszcie dla dowolnego zbioru A symbolem $|A|$ oznaczamy liczbę elementów zbioru A.

Naszym zadaniem jest podzielić zbiór wierzchołków grafu G na dwa rozłączne zbiory A i B, takie że $A \cup B = V(G)$ oraz:

(1) dla każdego wierzchołka $v \in A$ zbiór $S(v) \cap A$ ma parzystą liczbę elementów;

(2) dla każdego wierzchołka $v \in B$ zbiór $S(v) \cap B$ ma parzystą liczbę elementów.

Podział taki nazwiemy *dobrym podziałem*.

Każdy może dobrze się bawić

Pokażemy, że dla *każdych* danych istnieje rozwiązanie, w którym *każdy* mieszkaniec Bajtocji będzie zadowolony: na przyjęciu, w którym uczestniczy, będzie miał parzystą liczbę znajomych.

Twierdzenie 1 *Dla każdego grafu G istnieje dobry podział zbioru wierzchołków $V(G)$.*

Dowód Pokażemy jak wyznaczyć zbiory A_G i B_G stanowiące dobry podział $V(G)$.

Jeśli każdy wierzchołek grafu G ma parzystą liczbę sąsiadów (w szczególności, jeśli graf G ma tylko jeden wierzchołek), to możemy przyjąć $A_G = V(G)$ oraz $B_G = \emptyset$ i widzimy, że jest do dobry podział.

Przypuśćmy zatem, że graf G ma więcej niż jeden wierzchołek i co najmniej jeden z nich ma nieparzystą liczbę sąsiadów. Pokażemy przez indukcję względem liczby wierzchołków, że wierzchołki grafu G można dobrze podzielić.

Załóżmy, że każdy graf mający mniej wierzchołków niż graf G można dobrze podzielić. Niech $v \in V(G)$ będzie wierzchołkiem grafu G mającym nieparzystą liczbę sąsiadów i niech $S = S(v)$ będzie zbiorem tych sąsiadów.

Definiujemy teraz nowy graf H. Przyjmujemy $V(H) = V(G) \setminus \{v\}$, a następnie definiujemy krawędzie grafu H:

- jeśli $u,w \in S$, to $uw \in E(H) \Leftrightarrow uw \notin E(G)$;
- jeśli $u \notin S$ lub $w \notin S$, to $uw \in E(H) \Leftrightarrow uw \in E(G)$.

Z założenia indukcyjnego wynika, że zbiór wierzchołków grafu H można dobrze podzielić — niech A_H i B_H będą zbiorami tworzącymi taki podział. Zbiór S, który ma nieparzystą liczbę elementów, musi mieć parzystą liczbę elementów wspólnych z jednym z tych zbiorów i nieparzystą liczbę elementów wspólnych z drugim. Zdefiniujmy:

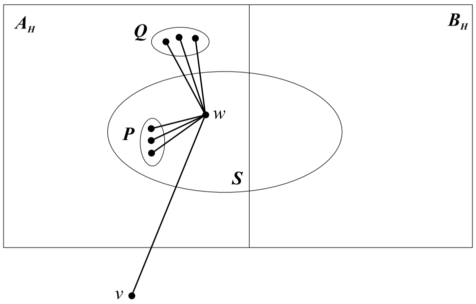
- jeśli liczba $|S \cap A_H|$ jest parzysta, to $A_G = A_H \cup \{v\}$ oraz $B_G = B_H$,
- jeśli liczba $|S \cap B_H|$ jest parzysta, to $A_G = A_H$ oraz $B_G = B_H \cup \{v\}$.

Udowodnimy teraz, że zbiory A_G i B_G tworzą dobry podział dla grafu G. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że to zbiór $S \cap A_H$ ma parzystą liczbę elementów, w przeciwnym przypadku rozumowanie będzie przebiegać analogicznie. Niech w będzie wierzchołkiem grafu G. Aby sprawdzić, że w grafie G ma on parzystą liczbę sąsiadów w zbiorze, do którego należy, rozważymy oddzielnie trzy przypadki.

Przypadek 1 Niech $w = v$. Wierzchołek v oczywiście należy do zbioru $A_G = A_H \cup \{v\}$ i ma w tym zbiorze parzystą liczbę sąsiadów: są nimi elementy zbioru $S \cap A_H$.

Przypadek 2 Niech $w \neq v$ oraz $w \notin S$. Zauważmy, że wierzchołek w w obu grafach G i H ma tych samych sąsiadów. Ponadto jeśli należał do zbioru A_H, to należy do A_G, a jeśli należał do B_H, to należy do B_G. Ponieważ w grafie H ma parzystą liczbę sąsiadów w zbiorze, do którego należy, więc także ma tę własność w grafie G.

Przypadek 3 Pozostaje sprawdzić warunki (1) i (2) dla wierzchołków $w \in S$. Załóżmy najpierw, że $w \in A_H$. Niech $P = (S \cap S(w)) \cap A_H$ oraz $Q = (S(w) \setminus S) \cap A_H$ i oznaczmy $p = |P|$ oraz $q = |Q|$. Mamy więc sytuację, którą możemy zilustrować następującym rysunkiem:

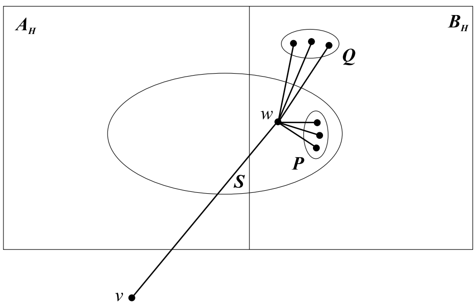


Sąsiadami wierzchołka w w grafie H w części A_H są wierzchołki należące do zbioru $Q \cup \big((S \cap A_H) \setminus (P \cup \{w\})\big)$ — jest ich $q + |S \cap A_H| - p - 1$. Z drugiej strony, ponieważ A_H, B_H jest dobrym podziałem grafu H, więc wiemy, że ich liczba jest parzysta. Ponieważ również liczba $|S \cap A_H|$ jest parzysta, więc także liczba $q - p - 1$ jest parzysta. Zatem liczba

$$p + q + 1 = (q - p - 1) + (2p + 2)$$

jest parzysta. Ale wierzchołek w ma w zbiorze $A_G = A_H \cup \{v\}$ właśnie $p + q + 1$ sąsiadów. To dowodzi, że jest spełniony warunek (1).

Załóżmy teraz, że $w \in B_H$ i zdefiniujmy odpowiednio $P = (S \cap S(w)) \cap B_H$, $Q = (S(w) \setminus S) \cap B_H$, $p = |P|$ oraz $q = |Q|$. Sytuację ilustruje teraz rysunek:



Sąsiadami wierzchołka w w grafie H w części B_H są wierzchołki należące do zbioru $Q \cup \big((S \cap B_H) \setminus (P \cup \{w\})\big)$. Jest ich $q + |S \cap B_H| - p - 1$. Ponieważ A_H, B_H jest dobrym podziałem grafu H, więc musi to być liczba parzysta. Ale liczba $|S \cap B_H|$ jest nieparzysta, więc liczba $q - p$ jest parzysta. Stąd wynika, że także liczba $p + q$ jest parzysta. Ale wierzchołek w ma w zbiorze B_G (równym w tym przypadku zbiorowi B_H) właśnie $p + q$ sąsiadów, co dowodzi, że jest spełniony warunek (2).

W ten sposób na mocy zasady indukcji uwodniliśmy prawdziwość twierdzenia. ■

Program wzorcowy

W dowodzie twierdzenia jest zawarty opis algorytmu. Możemy go podsumować następująco:

1. Najpierw sprawdzamy, czy każdy wierzchołek grafu G ma parzystą liczbę sąsiadów. Jeśli tak, to jako wynik zwracamy podział zbioru $V(G)$ na zbiory: $A = V(G)$ i $B = \emptyset$.
2. Jeśli w grafie G istnieje wierzchołek v stopnia nieparzystego, to konstruujemy graf H, a następnie:
   (a) wywołujemy rekurencyjnie procedurę dla grafu H — w wyniku dostajemy podział zbioru $V(G) \setminus \{v\}$ na zbiory A i B;
   (b) dołączamy v do tego zbioru, w którym ma on parzystą liczbę sąsiadów;
   (c) zwracamy zbiory A i B, jako dobry podział $V(G)$.

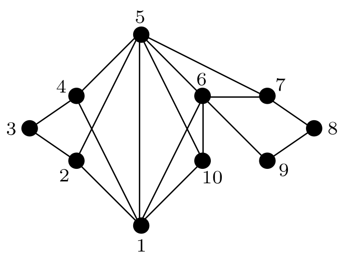
W programie wzorcowym został zaimplementowany powyższy algorytm. Jego czas działania dla grafu o n wierzchołkach i m krawędziach możemy zapisać następującym wzorem rekurencyjnym:

$$T(n) = c \cdot m + T(n-1),$$

gdzie c jest pewną stałą. Po wyliczeniu funkcji T z powyższego równania dostajemy, iż $T(n)$ jest rzędu $O(m \cdot n)$. Ponieważ wiemy, że liczba krawędzi w grafie nie przekracza n^2, więc ostatecznie widzimy, że algorytm działa w czasie $O(n^3)$.

Spory przykład

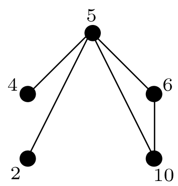
Prześledźmy teraz działanie algorytmu na przykładzie. Rozważmy następujący graf G:



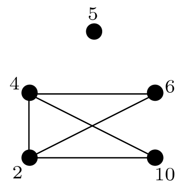
Zauważamy, że wierzchołek 1 ma pięciu sąsiadów:

$$S = S(1) = \{2, 4, 5, 6, 10\}.$$

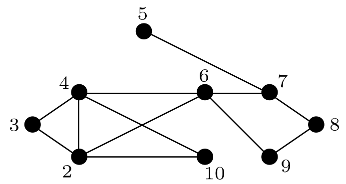
Tworzymy graf H, wyrzucając z grafu G wierzchołek 1. Popatrzmy najpierw na wierzchołki należące do zbioru S i na krawędzie łączące te wierzchołki:



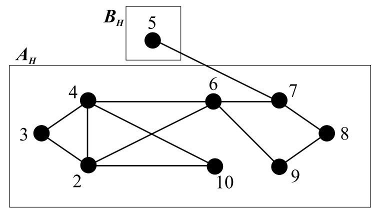
Konstruując graf H usuwamy powyższe krawędzie i dodajemy krawędzie łącząc wierzchołki, które w grafie G połączone nie były:



Graf H wygląda zatem następująco:

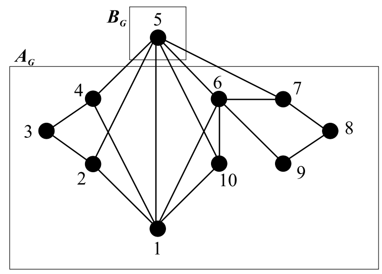


Wierzchołki grafu H można podzielić na zbiory A_H i B_H w następujący sposób (nie ważne skąd wzięliśmy ten podział, powiedzmy, że taki wynik otrzymaliśmy rozważając przykład „rekurencyjnie”):



Ponieważ wierzchołek 1 ma w zbiorze A_H czterech sąsiadów, a w zbiorze B_H jednego, więc dołączamy go do zbioru A_H. W ten sposób otrzymujemy podział zbioru $V(G)$ na zbiory A_G i B_G:

$$A_G = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}, \quad B_G = \{5\}.$$



Testy

W testach, za pomocą których były weryfikowane programy zawodników, grafy zostały zbudowane w sposób losowy. W każdym teście ustalana była liczba wierzchołków grafu, a następnie dla każdej pary wierzchołków krawędź łącząca je była dołączana do grafu z ustalonym prawdopodobieństwem. Liczby wierzchołków i prawdopodobieństwa były następujące:

Nazwa	**n**	**p**
dwa 1.in	10	0,5%
dwa 2.in	20	0,75%
dwa 3.in	30	0,8%
dwa 4.in	50	0,7%
dwa 5.in	50	0,8%
dwa 6.in	50	0,9%
dwa 7.in	100	0,85%
dwa 8.in	100	0,95%
dwa 9.in	150	0,6%
dwa10.in	150	0,99%

Nazwa	**n**	**p**
dwa11.in	200	0,05%
dwa12.in	200	0,1%
dwa13.in	200	0,5%
dwa14.in	200	0,6%
dwa15.in	200	0,7%
dwa16.in	200	0,8%
dwa17.in	200	0,85%
dwa18.in	200	0,9%
dwa19.in	200	0,95%
dwa20.in	200	0,99%