Wojciech Guzicki — Treść zadania, Opracowanie
Łukasz Kowalik — Program

Zgadywanka

Bajtazar stał się nałogowym hazardzistą. Wszystkie pieniądze przepuszcza w kasynie grając w „zgadywankę". Twierdzi, że można opracować system gry pozwalający wygrać z kasynem.

Jedna rozgrywka zgadywanki polega na tym, że losujemy kolejno 9 różnych liczb rzeczywistych z przedziału $(0;1)$, przy jednostajnym rozkładzie prawdopodobieństwa. Bezpośrednio po wylosowaniu każdej liczby należy od razu określić, którą co do wielkości jest to liczba. Oczywiście nie da się tego przewidzieć, trzeba próbować to zgadnąć. Jeżeli trafnie określi się uporządkowanie wszystkich 9 liczb, wygrywa się. W przeciwnym przypadku przegrywa się. Jeśli, na przykład, pierwszą wylosowaną liczbę określimy jako drugą co do wielkości, a potem wylosujemy jeszcze dwie liczby mniejsze od niej, to przegramy.

Zadanie

Pomóż Bajtazarowi! Zaprogramuj jak najlepszą strategię grania w zgadywankę. Napisz program, który rozegra wiele rozgrywek opisanej gry i wygra jak najwięcej razy. Ocena Twojego programu będzie tym wyższa, im więcej rozgrywek on wygra. Dokładniej, za każdą wygraną kasyno płaci graczowi 423,99 bajtalarów, natomiast za każdą przegraną pobiera od gracza 13,53 bajtalarów. Twój program rozegra 10^6 rozgrywek. Otrzymasz tyle punktów, ile wynosi całkowity uzyskany zysk podzielony przez 10^4 i zaokrąglony do najbliższej liczby całkowitej z przedziału $[0,100]$.

Musisz zaprogramować moduł zawierający następujące trzy procedury i funkcje:

- **`procedure`** `inicjalizuj` / **`void`** `inicjalizuj()` — *ta procedura zostanie wywołana tylko raz, na początku, przed rozegraniem wszystkich rozgrywek; możesz jej użyć do zainicjalizowania swoich struktur danych.*
- **`procedure`** `nowa_rozgrywka` / `void nowa_rozgrywka ()` — *ta procedura będzie wywołana na początku każdej rozgrywki. Możesz jej użyć by zainicjalizować zmienne związane z jedną rozgrywką.*
- **`function`** `kolejna_liczba (x : Double) : Integer` /
`int kolejna_liczba (double x)` — *ta funkcja dostaje jako parametr kolejną wylosowaną liczbę x; $0 < x < 1$, podaną z precyzją do 12 miejsc dziesiętnych. Funkcja powinna obliczyć, która co do wielkości jest to liczba wśród 9 liczb losowanych w aktualnej rozgrywce i zwrócić wynik. Jeśli rozgrywka jest przegrana, funkcja może zwrócić dowolną liczbę całkowitą od 1 do 9.*

Pliki (Pascal)

W katalogu `zga_pas` *znajdziesz następujące pliki:*

- `zga.pas` — *szkielet modułu grającego zawierający puste procedury i funkcje* `inicjalizuj`, `nowa_rozgrywka`, `kolejna_liczba`. *Powinieneś napisać kod tych funkcji.*

- `kasyno.pas` — *program generujący wiele rozgrywek (tyle ile określono w stałej* `ILE_ZESTAWOW`*) zgadywanki. Każda rozgrywka jest rozgrywana z użyciem procedur i funkcji modułu grającego* `zga.pas`*. Możesz użyć tego programu do testowania swojego modułu grającego.*

- `makefile` — *plik umożliwia skompilowanie programu* `kasyno.pas` *z dołączonym modułem* `zga.pas` *za pomocą polecenia* `make`*.*

Pliki (C/C++)

W katalogu `zga_c` */* `zga_cpp` *znajdziesz następujące pliki:*

- `zga.h` — *plik zawierający nagłówki funkcji* `inicjalizuj`*,* `nowa_rozgrywka` *i* `kolejna_liczba`*.*

- `zga.c` / `zga.cpp` — *szkielet modułu grającego zawierający puste definicje funkcji zadeklarowanych w pliku nagłówkowym* `zga.h`*. Powinieneś napisać kod tych funkcji.*

- `kasyno.c` / `kasyno.cpp` — *program generujący wiele rozgrywek (tyle ile określono w stałej* `ILE_ZESTAWOW`*) zgadywanki. Każda rozgrywka jest rozgrywana z użyciem procedur i funkcji modułu grającego* `zga.c` */* `zga.cpp`*. Możesz użyć tego programu do testowania swojego modułu grającego.*

- `makefile` — *plik umożliwia skompilowanie programu* `kasyno.c` */* `kasyno.cpp` *z dołączonym modułem* `zga.c` */* `zga.cpp` *za pomocą polecenia* `make`*.*

Rozwiązanie

Wynikiem Twojej pracy powinien być tylko jeden plik `zga.c` *albo* `zga.cpp` *albo* `zga.pas`*.*

Przykład

Przykładowa interakcja z programem może wyglądać następująco (pochyłym krojem zaznaczono liczby zwracane przez funkcję `kolejna_liczba`*; rozegrano 2 rozgrywki):*

Rozgrywka 1

0.043319026120
1
0.933801434041
8
0.992050359372
9
0.145189967093
4
0.518803250649
6

`0.093583048537`
2
`0.764309529654`
7
`0.338653748790`
5
`0.119437652934`
3 Wygrana

Rozgrywka 2

`0.164020610610`
2
`0.205594263575`
3
`0.042637391231`
1
`0.147521628974`
1 Przegrana
`0.946549875333`
1
`0.772946216573`
1
`0.152956276544`
1
`0.539653928563`
1
`0.552047936535`
1

Rozwiązanie

Zanim rozwiążemy zadanie w całej ogólności, popatrzmy na rozwiązanie w kilku prostszych przypadkach. Niech zatem najpierw gra polega na losowaniu pary różnych liczb (x,y) z przedziału $(0,1)$. Narzuca się następująca strategia: jeśli $x < \frac{1}{2}$, to umieszczamy x na pierwszym miejscu (a więc będziemy musieli umieścić y na drugim miejscu), jeśli zaś $x \geqslant \frac{1}{2}$, to umieszczamy x na drugim miejscu (i umieścimy y na pierwszym miejscu). Czy jest to najlepsza strategia? Przyjrzyjmy się strategiom podobnym, ale liczbę $\frac{1}{2}$ zastąpmy inną liczbą.

Ustalmy liczbę a taką, że $0 < a < 1$. Tę liczbę a nazwiemy *progiem*. Losujemy kolejno dwie liczby x i y. Strategia polega na tym, że jeśli $x < a$, to umieszczamy x na pierwszym miejscu, a y na drugim; jeśli zaś $x \geqslant a$, to umieszczamy x na drugim miejscu i y na pierwszym. Popatrzmy, dla jakiego progu a prawdopodobieństwo końcowego sukcesu będzie największe. Zastosujemy tzw. prawdopodobieństwo geometryczne. Zdarzeniem elementarnym będzie para liczb (x,y) z przedziału $(0,1)$; zbiór zdarzeń elementarnych Ω będzie więc kwadratem jednostkowym (bez dwóch boków i przekątnej):

$$\Omega = \big\{(x,y):\ x,y \in (0,1)\ \wedge\ x \neq y\big\}.$$

Prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $A \subseteq \Omega$ otrzymujemy dzieląc pole zdarzenia A przez pole całego zbioru Ω:

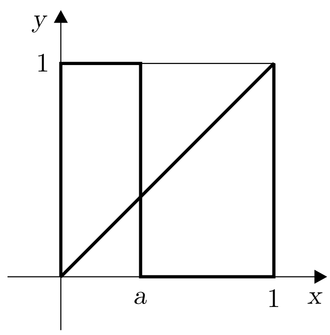
$$P(A) = \frac{Pole(A)}{Pole(\Omega)}.$$

Ponieważ w naszym przypadku $Pole(\Omega) = 1$, więc po prostu $P(A) = Pole(A)$.

Popatrzmy na zdarzenie A_a (rys. 1) polegające na tym, że strategia z progiem a zastosowana do pary (x,y) da sukces:

$$A_a = \big\{(x,y) : (x < a \wedge x < y) \vee (x \geqslant a \wedge y < x)\big\}.$$

Nietrudno obliczyć, że $Pole(A_a) = \frac{1}{2} + a - a^2$. Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A_a będzie największe, jeśli $a = \frac{1}{2}$ i wynosi ono wtedy $\frac{3}{4}$.



Rysunek 1: Zdarzenie A_a

Rozwiążmy podobne zadanie dla trzech liczb. Losujemy więc kolejno trzy różne liczby: (x,y,z). Narzuca się następująca strategia:

- Jeśli $x < \frac{1}{3}$, to umieszczamy x na pierwszym miejscu. Następnie, jeśli $y < x$, to grę oczywiście przegraliśmy; jeśli zaś $y > x$, to stosujemy strategię dla dwóch liczb z progiem wypadającym w środku przedziału $(x,1)$: jeśli $y < \frac{x+1}{2}$, to umieszczamy y na drugim miejscu, jeśli zaś $y \geqslant \frac{x+1}{2}$, to umieszczamy y na trzecim miejscu. Oczywiście liczbę z umieszczamy na wolnym miejscu.

- Jeśli $\frac{1}{3} \leqslant x < \frac{2}{3}$, to umieszczamy x na drugim miejscu. Następnie, jeśli $y < x$, to umieszczamy y na pierwszym miejscu, jeśli zaś $y > x$, to umieszczamy y na trzecim miejscu. Liczbę z umieszczamy na pozostałym wolnym miejscu.

- Jeśli $x \geqslant \frac{2}{3}$, to umieszczamy x na trzecim miejscu. Następnie, jeśli $y > x$, to umieszczamy y gdziekolwiek — grę już przegraliśmy. Jeśli zaś $y < x$, to stosujemy strategię dla dwóch liczb z progiem w środku przedziału $(0,x)$: jeśli $y < \frac{x}{2}$, to umieszczamy y na pierwszym miejscu, jeśli zaś $y \geqslant \frac{x}{2}$, to umieszczamy y na drugim miejscu. Liczbę z umieszczamy na pozostałym wolnym miejscu.

Czy ta strategia jest optymalna? Okazuje się, że nie. Spróbujemy znaleźć lepszą. Przede wszystkim wybierzmy dwa *progi* a_1 i a_2 zamiast $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$. Oznaczmy $a = a_1$ i $b = 1 - a_2$, czyli progami będą liczby a i $1 - b$, a nasza strategia wygląda następująco:

- Jeśli $x < a$, to umieszczamy x na pierwszym miejscu. Następnie, jeśli $y < x$, to grę oczywiście przegraliśmy; jeśli zaś $y > x$, to stosujemy strategię dla dwóch liczb z progiem wypadającym w środku przedziału $(x,1)$: jeśli $y < \frac{x+1}{2}$, to umieszczamy y na drugim miejscu, jeśli zaś $y \geqslant \frac{x+1}{2}$, to umieszczamy y na trzecim miejscu. Oczywiście liczbę z umieszczamy na pozostałym wolnym miejscu.

- Jeśli $a \leqslant x < 1 - b$, to umieszczamy x na drugim miejscu. Następnie, jeśli $y < x$, to umieszczamy y na pierwszym miejscu, jeśli zaś $y > x$, to umieszczamy y na trzecim miejscu. Liczbę z umieszczamy na pozostałym wolnym miejscu.

- Jeśli $x \geqslant 1 - b$, to umieszczamy x na trzecim miejscu. Następnie, jeśli $y > x$, to umieszczamy y gdziekolwiek — grę już przegraliśmy. Jeśli zaś $y < x$, to stosujemy strategię dla dwóch liczb z progiem w środku przedziału $(0,x)$: jeśli $y < \frac{x}{2}$, to umieszczamy y na pierwszym miejscu, jeśli zaś $y \geqslant \frac{x}{2}$, to umieszczamy y na drugim miejscu. Liczbę z umieszczamy na pozostałym wolnym miejscu.

Musimy obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia $A_{a,b}$ polegającego na tym, że strategia z progami a i $1 - b$ zastosowana do trójki liczb (x,y,z) da sukces. Znów skorzystamy z prawdopodobieństwa geometrycznego. Tym razem zbiorem zdarzeń elementarnych będzie sześcian (otwarty) o objętości 1:

$$\Omega = \big\{(x,y,z):\ x,y,z \in (0,1)\ \wedge x \neq y\ \wedge x \neq z\ \wedge\ y \neq z\big\}.$$

Prawdopodobieństwem dowolnego zdarzenia $A \subseteq \Omega$ będzie tym razem objętość bryły A. Popatrzmy na nasze zdarzenie $A_{a,b}$. Jest ono sumą sześciu wielościanów:

$$A_{a,b} = W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4 \cup W_5 \cup W_6,$$

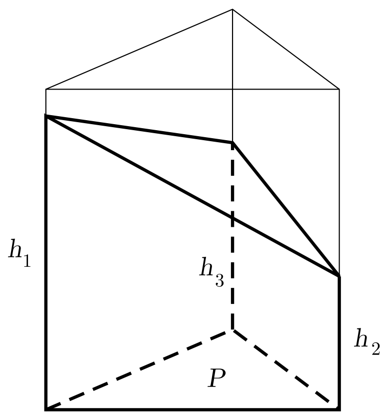
gdzie

$$\begin{aligned}
W_1 &= \big\{(x,y,z) \in \Omega:\ x < a\ \wedge\ x < y < \tfrac{1+x}{2}\ \wedge\ y < z\big\},\\
W_2 &= \big\{(x,y,z) \in \Omega:\ x < a\ \wedge\ y \geqslant \tfrac{1+x}{2}\ \wedge\ x < z < y\big\},\\
W_3 &= \big\{(x,y,z) \in \Omega:\ a \leqslant x < 1-b\ \wedge\ y < x\ \wedge\ z > x\big\},\\
W_4 &= \big\{(x,y,z) \in \Omega:\ a \leqslant x < 1-b\ \wedge\ x < y\ \wedge\ z < x\big\},\\
W_5 &= \big\{(x,y,z) \in \Omega:\ x \geqslant 1-b\ \wedge\ \tfrac{x}{2} \leqslant y < x\ \wedge\ z < y\big\},\\
W_6 &= \big\{(x,y,z) \in \Omega:\ x \geqslant 1-b\ \wedge\ y < \tfrac{x}{2}\ \wedge\ y < z < x\big\}.
\end{aligned}$$

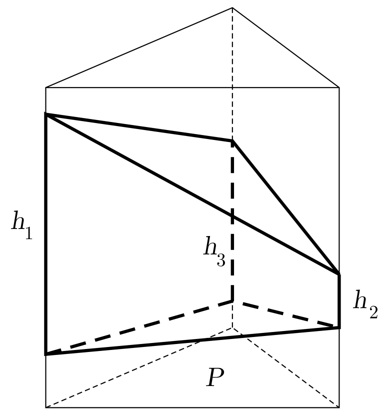
Obliczymy objętość każdego z tych wielościanów.

W tym celu skorzystamy ze wzoru na objętość graniastosłupa trójkątnego ściętego (rys. 2). Jeśli graniastosłup prosty o podstawie trójkątnej o polu P zetniemy płaszczyzną w taki sposób, że krawędzie boczne będą miały długości h_1, h_2 i h_3, to objętość tego graniastosłupa ściętego wyraża się wzorem

$$V = P \cdot \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}$$



Rysunek 2: Graniastosłup trójkątny prosty ścięty z jednej strony



Rysunek 3: Graniastosłup trójkątny prosty ścięty z obu stron

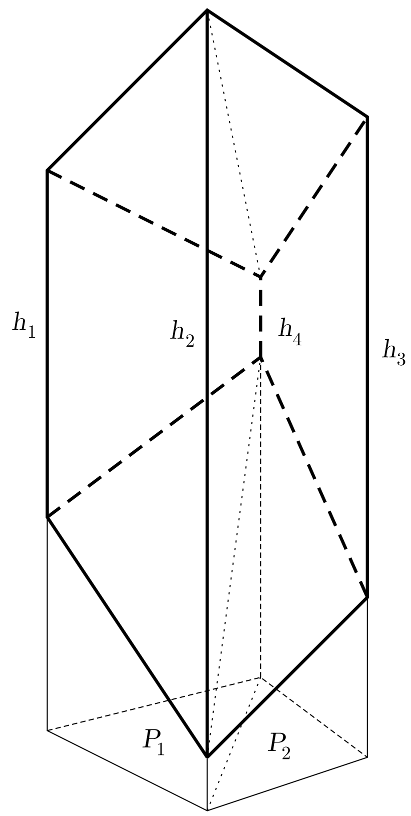
(por. [16], str. 212).

Ten sam wzór będzie wyrażał objętość graniastosłupa trójkątnego prostego, ściętego z obu stron (rys. 3). Dokładniej, jeśli mamy wielościan, którego krawędzie boczne są równoległe, mają długości h_1, h_2 i h_3 oraz którego przekrój płaski płaszczyzną przecinającą prostopadle te krawędzie boczne ma pole P, to objętość tego wielościanu wyraża się tym samym wzorem:

$$V = P \cdot \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}.$$

Objętość graniastosłupa czworokątnego, ściętego z obu stron, obliczamy w podobny sposób: rozcinamy go na dwa graniastosłupy trójkątne i dodajemy objętości tych dwóch graniastosłupów. Objętość graniastosłupa czworokątnego przedstawionego na rysunku 4 wyraża się zatem wzorem

$$V = P_1 \cdot \frac{h_1 + h_2 + h_4}{3} + P_2 \cdot \frac{h_2 + h_3 + h_4}{3}.$$



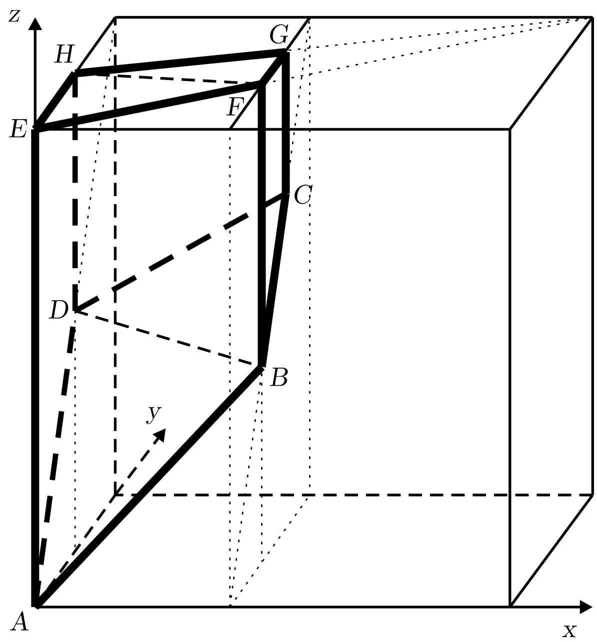
Rysunek 4: Graniastosłup czworokątny prosty ścięty z obu stron

Narysujmy teraz każdy z tych sześciu wielościanów. Okazuje się, że są one graniastosłupami ściętymi (z jednej lub obu stron). Oto te graniastosłupy:

- **Wielościan W_1 (rys. 5)**
  Płaszczyzna $BCGF$ ma równanie $x = a$.

$$|EH| = \tfrac{1}{2},$$
$$|GF| = \tfrac{1-a}{2},$$
$$|AE| = 1,$$
$$|BF| = 1 - a,$$
$$|CG| = \tfrac{1-a}{2},$$
$$|DH| = \tfrac{1}{2},$$
$$Pole(EFH) = \tfrac{a}{4},$$
$$Pole(HFG) = \tfrac{a(1-a)}{4},$$
$$V = \tfrac{a^3-3a^2+3a}{8}.$$

gdzie $|AB|$ oznacza długość odcinka AB.



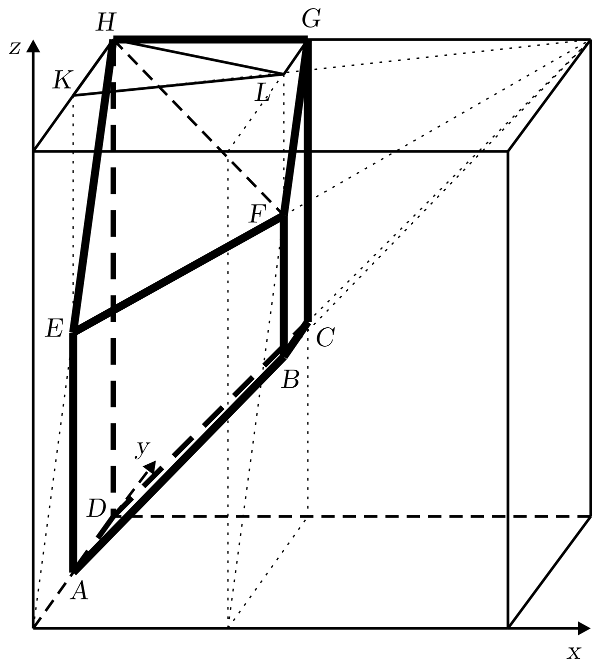
Rysunek 5: Wielościan W_1

- **Wielościan** W_2 **(rys. 6)**
  Płaszczyzna $BCGF$ ma równanie $x = a$.

$$|HK| = \tfrac{1}{2},$$
$$|GL| = \tfrac{1-a}{2},$$
$$|AE| = \tfrac{1}{2},$$
$$|BF| = \tfrac{1-a}{2},$$
$$|CG| = 1-a,$$
$$|DH| = 1,$$
$$Pole(KLH) = \tfrac{a}{4},$$
$$Pole(HLG) = \tfrac{a(1-a)}{4},$$
$$V = \tfrac{a^3-3a^2+3a}{8}.$$

- **Wielościan** W_3 **(rys. 7)**
  Płaszczyzna $ADHE$ ma równanie $x = a$. Płaszczyzna $BCGF$ ma równanie $x = 1-b$.

$$|AD| = 1-a,$$
$$|BC| = b,$$
$$|AE| = a,$$
$$|BF| = 1-b,$$
$$|CG| = 1-b,$$
$$|DH| = a,$$
$$Pole(ABD) = \tfrac{(1-a)(1-a-b)}{2},$$



Rysunek 6: Wielościan W_2

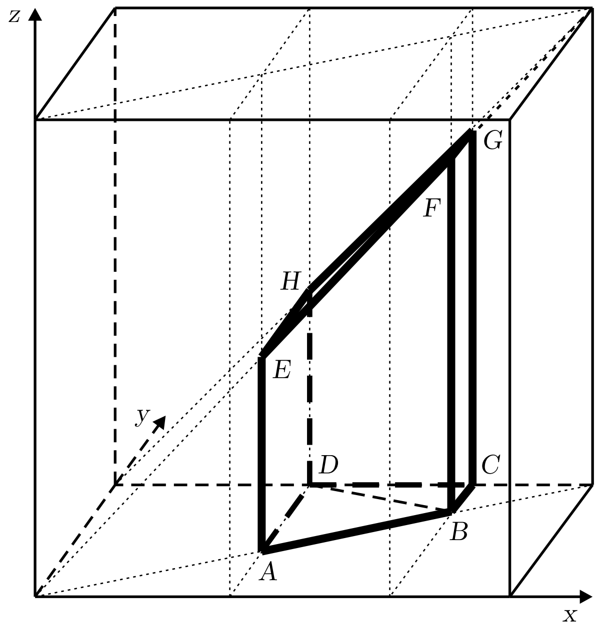
$$Pole(BCD) = \frac{b(1-a-b)}{2},$$
$$V = \frac{2a^3+2b^3-3a^2-3b^2+1}{6}.$$

- **Wielościan W_4 (rys. 8)**
  Płaszczyzna $ADHE$ ma równanie $x = a$. Płaszczyzna $BCGF$ ma równanie $x = 1-b$.

$$|HE| = a,$$
$$|GF| = 1-b,$$
$$|AE| = 1-a,$$
$$|BF| = b,$$
$$|CG| = b,$$
$$|DH| = 1-a,$$
$$Pole(HEF) = \frac{a(1-a-b)}{2},$$
$$Pole(BCD) = \frac{(1-b)(1-a-b)}{2},$$
$$V = \frac{2a^3+2b^3-3a^2-3b^2+1}{6}.$$

- **Wielościan W_5 (rys. 9)**
  Płaszczyzna $ADHE$ ma równanie $x = 1-b$.

$$|AD| = \frac{1-b}{2},$$
$$|BC| = \frac{1}{2},$$

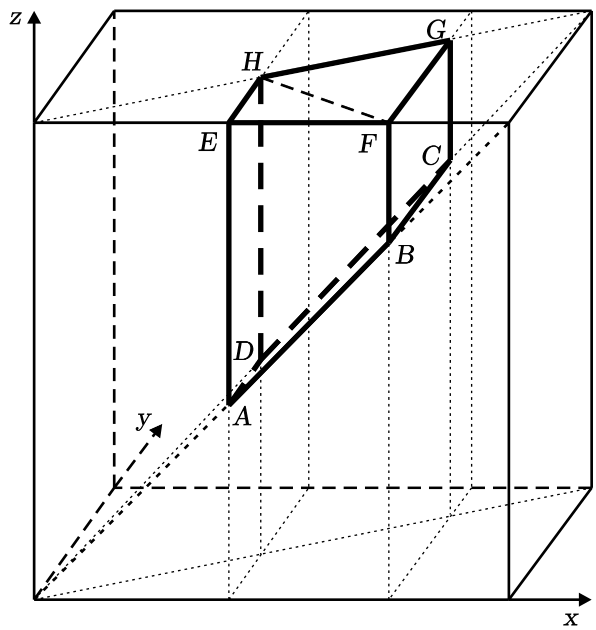


Rysunek 7: Wielościan W_3

$$|AE| = \tfrac{1-b}{2},$$
$$|BF| = \tfrac{1}{2},$$
$$|CG| = 1,$$
$$|DH| = 1-b,$$
$$Pole(ABD) = \tfrac{b(1-b)}{4},$$
$$Pole(BCD) = \tfrac{b}{4},$$
$$V = \tfrac{b^3-3b^2+3b}{8}.$$

- **Wielościan W_6 (rys. 10)**
  Płaszczyzna $ADHE$ ma równanie $x = 1-b$.

$$|AL| = \tfrac{1-b}{2},$$
$$|BK| = \tfrac{1}{2},$$
$$|AE| = 1-b,$$
$$|BF| = 1,$$
$$|CG| = \tfrac{1}{2},$$
$$|DH| = \tfrac{1-b}{2},$$
$$Pole(ABL) = \tfrac{b(1-b)}{4},$$
$$Pole(BKL) = \tfrac{b}{4},$$
$$V = \tfrac{b^3-3b^2+3b}{8}.$$



Rysunek 8: Wielościan W_4

Po dodaniu objętości wielościanów od W_1 do W_6 otrzymamy

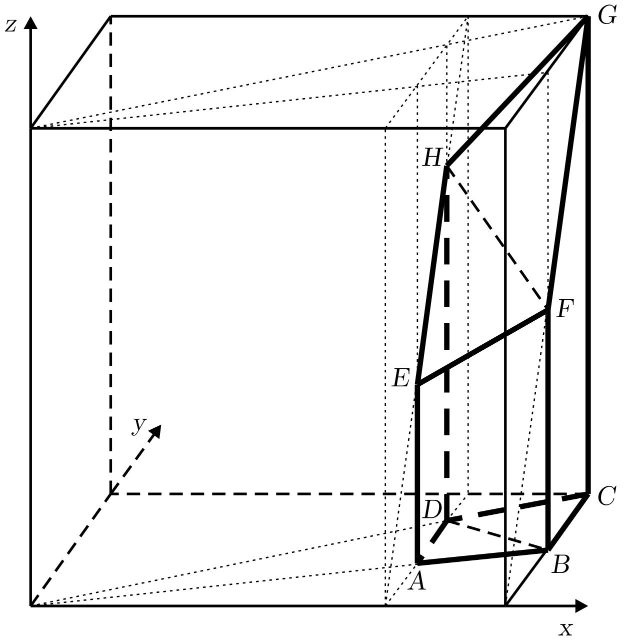
$$P(A_{a,b}) = \frac{11a^3 - 21a^2 + 9a + 2}{6} + \frac{11b^3 - 21b^2 + 9b + 2}{6}.$$

Prawdopodobieństwo $P(A_{a,b})$ będzie największe dla takich wartości $a, b \in (0, \frac{1}{2})$, dla których wielomian $f(x) = 11x^3 - 21x^2 + 9x + 2$ przyjmuje wartość największą. Obliczmy zatem pochodną tego wielomianu:

$$f'(x) = 33x^2 - 42x + 9 = 3(11x^2 - 14x + 3).$$

Pochodna ta ma miejsce zerowe w punkcie $x = \frac{3}{11}$ i można łatwo sprawdzić, że w tym punkcie wielomian $f(x)$ ma maksimum lokalne; jest to jednocześnie największa wartość tego wielomianu w przedziale $(0,1)$. Maksymalna wartość prawdopodobieństwa $P(A_{a,b})$ jest równa $\frac{377}{726} \approx 0{,}519284$. Jednym progiem jest $a = \frac{3}{11}$, drugim jest $1 - b = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}$. Warto zauważyć, że dla $a = b = \frac{1}{3}$ prawdopodobieństwo sukcesu jest równe $\frac{83}{162} \approx 0{,}512345$. Różnica wynosi ok. $\frac{7}{1000}$. Przy milionie doświadczeń jest już wyraźna.

Zauważmy, że progi $\frac{3}{11}$ i $\frac{8}{11}$ można też wyznaczyć łatwiej. Zastanówmy się, gdzie umieścić pierwszą liczbę x. Dokładniej: jakie jest prawdopodobieństwo sukcesu, jeśli umieścimy ją na pierwszym miejscu? Oczywiście wtedy y i z muszą być większe od x (prawdopodobieństwo tego zdarzenia wynosi $(1-x)^2$) i wtedy odniesiemy sukces z prawdopodobieństwem $\frac{3}{4}$. Zatem, jeśli umieścimy liczbę x na pierwszym miejscu, to prawdopodobieństwo sukcesu będzie równe $\frac{3}{4}(1-x)^2$. Jeśli natomiast umieścimy x na drugim miejscu, to sukces odniesiemy wtedy, gdy $y < x$ i $z > x$ (prawdopodobieństwo tego zdarzenia wynosi $x(1-x)$) lub



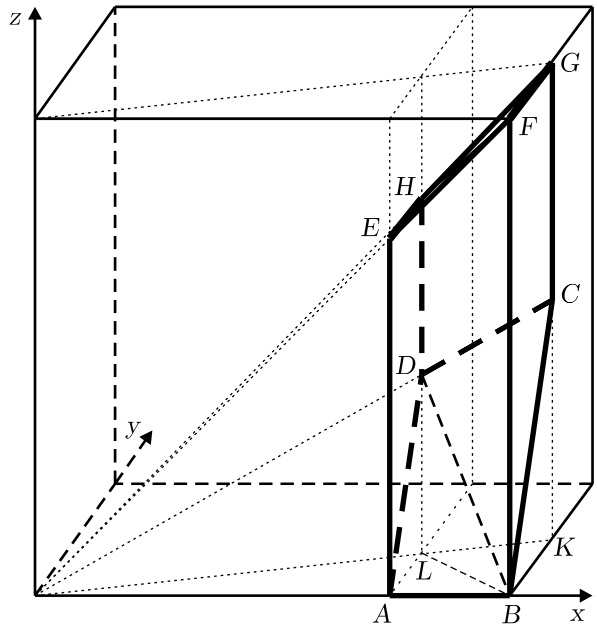
Rysunek 9: Wielościan W_5

$y > x$ i $z < x$ (prawdopodobieństwo sukcesu wynosi też $x(1-x)$). Łącznie w tym przypadku prawdopodobieństwo sukcesu wynosi $2x(1-x)$. Zatem opłaca się umieścić x na pierwszym miejscu wtedy i tylko wtedy, gdy pierwsze prawdopodobieństwo jest większe od drugiego, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{3}{4}(1-x)^2 > 2x(1-x).$$

Rozwiązując tę nierówność, dostajemy $x < \frac{3}{11}$. A więc na pierwszym miejscu opłaca się umieszczać liczby mniejsze od $\frac{3}{11}$; stąd pierwszym progiem jest $a = \frac{3}{11}$. W podobny sposób, porównując prawdopodobieństwa sukcesu, gdy umieścimy x na drugim i trzecim miejscu, otrzymamy drugi próg $\frac{8}{11}$. Zauważmy, że do tego potrzebne było prawdopodobieństwo sukcesu w grze, w której losujemy dwie liczby. Spostrzegawczy Czytelnik z pewnością zauważył, że wielokrotnie korzystaliśmy w tym rozumowaniu z pojęcia prawdopodobieństwa warunkowego.

Mając teraz obliczone również prawdopodobieństwo sukcesu w grze, w której losujemy trzy liczby, możemy w ten sam sposób wyznaczyć progi w grze z czterema liczbami. Umieśćmy zatem pierwszą liczbę x na pierwszym miejscu i obliczmy prawdopodobieństwo sukcesu: trzy pozostałe liczby muszą być większe od x i wtedy uzyskamy sukces z prawdopodobieństwem $\frac{377}{726}$. Łącznie prawdopodobieństwo sukcesu w tym przypadku jest równe $\frac{377}{726}(1-x)^3$. Jeśli natomiast umieścimy x na drugim miejscu, to jedna z pozostałych liczb musi być mniejsza od x i dwie muszą być większe. Prawdopodobieństwo tego zdarzenia wynosi $3x(1-x)^2$: wystarczy zastosować wzór na prawdopodobieństwo tego, że w trzech próbach Bernoulliego uzyskamy dokładnie jeden sukces: sukcesem będzie tu wylosowanie



Rysunek 10: Wielościan W_6

liczby mniejszej od x, porażką wylosowanie liczby większej od x. Jednak wylosowanie tych liczb nie wystarczy: musimy umieścić prawidłowo obie liczy większe od x i prawdopodobieństwo tego zdarzenia wynosi $\frac{3}{4}$. Zatem prawdopodobieństwo całkowitego sukcesu w tym przypadku wynosi $\frac{3}{4} \cdot 3x(1-x)^2 = \frac{9}{4}x(1-x)^2$. Liczbę x należy więc umieścić na pierwszym miejscu wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{377}{726}(1-x)^3 > \frac{9}{4}x(1-x)^2.$$

Rozwiążmy tę nierówność:

$$\begin{aligned}
4 \cdot 377 \cdot (1-x) &> 726 \cdot 9 \cdot x,\\
2 \cdot 377 \cdot (1-x) &> 363 \cdot 9 \cdot x,\\
754 - 754x &> 3267x,\\
4021x &< 754,\\
x &< \frac{754}{4021}.
\end{aligned}$$

Zatem pierwszym progiem jest $a = \frac{754}{4021} \approx 0{,}187516$. Podobnie wyznaczamy pozostałe progi: $\frac{1}{2}$ i $\frac{3267}{4021} \approx 0{,}812484$. Mamy zatem optymalną strategię w grze z czterema liczbami. Losujemy cztery różne liczby (x,y,z,t). Nasza strategia wygląda następująco:

- Jeśli $x < \frac{754}{4021}$, to umieszczamy x na pierwszym miejscu i pozostałe liczby umieszczamy zgodnie ze strategią dla trzech liczb z progami: $x + \frac{3}{11}(1-x)$ i $x + \frac{8}{11}(1-x)$. Inaczej mówiąc wywołujemy procedurę rekurencyjnie dla trzech liczb i przedziału $(x,1)$.

- Jeśli $\frac{754}{4021} \leqslant x < \frac{1}{2}$, to umieszczamy x na drugim miejscu. Jeśli któraś z następnych liczb jest mniejsza od x, to umieszczamy ją na pierwszym miejscu; jeśli jest większa od x, to stosujemy do niej strategię dla dwóch licz i przedziału $(x,1)$ — próg zatem wynosi $\frac{x+1}{2}$.

- Jeśli $\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{3267}{4021}$, to umieszczamy x na trzecim miejscu i postępujemy analogicznie do przypadku (2).

- Jeśli $x \geqslant \frac{3267}{4021}$, to umieszczamy x na czwartym miejscu i postępujemy analogicznie jak w pierwszym przypadku.

Widzimy, że strategia jest wyznaczona jednoznacznie przez progi. Jeśli losujemy m liczb, to pierwszą liczbę umieścimy na miejscu wyznaczonym przez progi dla m liczb. Umieszczenie każdej liczby dzieli przedział na mniejsze przedziały. Jeśli wylosujemy liczbę z pewnego przedziału (x,y) i mamy tam do dyspozycji k miejsc, to tę liczbę umieszczamy na miejscu wyznaczonym przez progi w grze z k liczbami dla przedziału (x,y). Napisanie odpowiedniego programu jest dość łatwe. Zadanie sprowadza się więc do wyznaczenia progów w grach z m liczbami dla $m \leqslant 9$.

Niestety, nie widać prostego sposobu wyznaczenia prawdopodobieństwa sukcesu już w grze z czterema liczbami, a jest ono potrzebne do wyznaczenia progów w grze z pięcioma liczbami. Potem prawdopodobieństwo sukcesu w grze z pięcioma liczbami będzie potrzebne do wyznaczenia progów dla 6 liczb i tak dalej.

Spróbujmy teraz rozwiązać zadanie ogólnie. Losujemy m liczb i jako pierwszą wylosowaliśmy liczbę $x \in (0,1)$. Dajemy ją do jednego z przedziałów:

$$[a_0,a_1), \quad [a_1,a_2), \quad [a_2,a_3), \quad \dots, \quad [a_{k-1},a_k), \quad [a_k,a_{k+1}), \quad \dots, \quad [a_{m-1},a_m).$$

O liczbach $a_0,a_1,\dots,a_m$ zakładamy, że

$$0 = a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{k-1} < a_k < a_{k+1} < \ldots < a_{m-1} < a_m = 1.$$

Te liczby tak jak poprzednio nazywamy progami.

Przez P_m będziemy oznaczać prawdopodobieństwo tego, że przy optymalnej strategii (tzn. przy optymalnym wyborze progów) m losowych liczb z przedziału $(0,1)$ uporządkujemy we właściwy sposób.

Zakładamy, że znane są już liczby P_i dla $i < m$. Chcemy wyznaczyć optymalne progi przy podziale na m przedziałów i obliczyć P_m.

Przypuśćmy, że liczbę x damy do k-tego przedziału, tzn. $x \in [a_{k-1},a_k)$. Aby wszystkie liczby udało się uporządkować właściwie, muszą być spełnione dwa warunki:

1. Wśród pozostałych liczb ma być dokładnie $k-1$ liczb mniejszych od x i $m-k$ liczb większych od x. Prawdopodobieństwo tego zdarzenia obliczamy ze wzoru na liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego: sukcesem jest wylosowanie liczby mniejszej od x (prawdopodobieństwo sukcesu wynosi x); porażką — wylosowanie liczby większej od x (prawdopodobieństwo porażki wynosi zatem $1-x$). Prawdopodobieństwo uzyskania dokładnie $k-1$ sukcesów w $m-1$ próbach Bernoulliego wynosi $\binom{m-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{m-k}$.

2. Zarówno liczby mniejsze od x, jak i większe od x, musimy uporządkować poprawnie. Prawdopodobieństwo koniunkcji tych zdarzeń niezależnych wynosi $P_{k-1} \cdot P_{m-k}$.

Łącznie, prawdopodobieństwo poprawnego uporządkowania wszystkich liczb wyniesie w tym przypadku

$$\binom{m-1}{k-1}\cdot P_{k-1}\cdot P_{m-k}\cdot x^{k-1}(1-x)^{m-k}.$$

Przypuśćmy teraz, że liczbę x umieszczamy w następnym przedziale, tzn. $x\in[a_k,a_{k+1})$. Rozumując analogicznie, znajdujemy wzór na prawdopodobieństwo poprawnego uporządkowania wszystkich liczb w tym przypadku:

$$\binom{m-1}{k}\cdot P_k\cdot P_{m-k-1}\cdot x^k(1-x)^{m-k-1}.$$

Próg a_k jest wyznaczony optymalnie, jeśli nierówność $x<a_k$ jest równoważna nierówności

$$\binom{m-1}{k-1}\cdot P_{k-1}\cdot P_{m-k}\cdot x^{k-1}(1-x)^{m-k}>\binom{m-1}{k}\cdot P_k\cdot P_{m-k-1}\cdot x^k(1-x)^{m-k-1}.$$

Mianowicie liczbę x wolimy zakwalifikować do przedziału $[a_{k-1},a_k)$ niż do przedziału $[a_k,a_{k+1})$ wtedy i tylko wtedy, gdy prawdopodobieństwo sukcesu w pierwszym przypadku jest większe niż w drugim przypadku. Rozwiążmy tę nierówność:

$$\binom{m-1}{k-1}\cdot P_{k-1}\cdot P_{m-k}\cdot x^{k-1}(1-x)^{m-k}>\binom{m-1}{k}\cdot P_k\cdot P_{m-k-1}\cdot x^k(1-x)^{m-k-1},$$

$$\frac{(m-1)!}{(k-1)!\cdot(m-k)!}\cdot P_{k-1}\cdot P_{m-k}\cdot(1-x)>\frac{(m-1)!}{k!\cdot(m-1-k)!}\cdot P_k\cdot P_{m-k-1}\cdot x,$$

$$\frac{1}{m-k}\cdot P_{k-1}\cdot P_{m-k}\cdot(1-x)>\frac{1}{k}\cdot P_k\cdot P_{m-k-1}\cdot x,$$

$$k\cdot P_{k-1}\cdot P_{m-k}\cdot(1-x)>(m-k)\cdot P_k\cdot P_{m-k-1}\cdot x,$$

$$x<\frac{k\cdot P_{k-1}\cdot P_{m-k}}{k\cdot P_{k-1}\cdot P_{m-k}+(m-k)\cdot P_k\cdot P_{m-k-1}}.$$

Stąd otrzymujemy wzór na optymalny próg a_k:

$$a_k=\frac{k\cdot P_{k-1}\cdot P_{m-k}}{k\cdot P_{k-1}\cdot P_{m-k}+(m-k)\cdot P_k\cdot P_{m-k-1}}. \tag{1}$$

Teraz wyznaczymy prawdopodobieństwo sukcesu P_m przy porządkowaniu m liczb. Pokażemy trzy sposoby postępowania. Rozwiązanie wykorzystujące „matematykę wyższą” polega na zastosowaniu rachunku całkowego. Można pokazać, że prawdopodobieństwo P_m wyraża się wzorem

$$P_m=\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m-1}{i}\cdot P_i\cdot P_{m-1-i}\cdot\int_{a_i}^{a_{i+1}}x^i(1-x)^{m-1-i}\,dx.$$

Czytelnikowi znającemu elementy rachunku całkowego pokażemy teraz, w jaki sposób można z tego wzoru otrzymać wzór rekurencyjny na P_m. Mianowicie

$$\int x^i(1-x)^{m-1-i}\,dx \quad =\int\textstyle\sum_{j=0}^{m-1-i}(-1)^j\binom{m-1-j}{j}x^{i+j}\,dx=$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1-i}(-1)^j\binom{m-1-i}{j}\int x^{i+j}\,dx =$$
$$= \sum_{j=0}^{m-1-i}(-1)^j\binom{m-1-i}{j}\cdot\frac{x^{i+j+1}}{i+j+1}+C.$$

Zatem

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} x^i(1-x)^{m-1-i}\,dx = \sum_{j=0}^{m-1-i}(-1)^j\binom{m-1-i}{j}\cdot\frac{a_{i+1}^{i+j+1}-a_i^{i+j+1}}{i+j+1},$$

skąd dostajemy ostatecznie

$$P_m = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1-i}(-1)^j\cdot\binom{m-1}{i}\cdot\binom{m-1-i}{j}\cdot P_i\cdot P_{m-1-i}\cdot\frac{a_{i+1}^{i+j+1}-a_i^{i+j+1}}{i+j+1}. \qquad (2)$$

Teraz już widzimy, w jaki sposób można otrzymać wszystkie wartości progów i prawdopodobieństw P_m. Na początku kładziemy

$$P_0 = P_1 = 1 \quad \text{oraz} \quad P_2 = \frac{3}{4}.$$

Progi dla $m = 2$ też znamy:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = 1.$$

Następnie dla kolejnych $m = 3,\ldots,9$ najpierw obliczamy wartości progów ze wzoru (1), a następnie wartość P_m ze wzoru (2). Napisanie krótkiego programu, który oblicza te wartości, jest już sprawą rutyny programistycznej. Do niniejszego opracowania jest dołączony taki program o nazwie `progi.pas`. A oto przybliżone wartości progów i prawdopodobieństw, otrzymane za pomocą tego programu:

$m = 1$	$P_1 = 1$	$a_0 = 0$, $a_1 = 1$.
$m = 2$	$P_2 = 0,75$	$a_0 = 0$, $a_1 = 0,5$, $a_2 = 1$.
$m = 3$	$P_3 = 0,519284$	$a_0 = 0$, $a_1 = 0{,}272727$, $a_2 = 0{,}727273$, $a_3 = 1$.

$m = 4$	$P_4 = 0{,}343584$	$a_0 = 0$, $a_1 = 0{,}187516$, $a_2 = 0{,}5$, $a_3 = 0{,}812484$, $a_4 = 1$.
$m = 5$	$P_5 = 0{,}221406$	$a_0 = 0$, $a_1 = 0{,}141935$, $a_2 = 0{,}380976$, $a_3 = 0{,}619024$, $a_4 = 0{,}858065$, $a_5 = 1$.
$m = 6$	$P_6 = 0{,}140173$	$a_0 = 0$, $a_1 = 0{,}114166$, $a_2 = 0{,}306086$, $a_3 = 0{,}5$, $a_4 = 0{,}693914$, $a_5 = 0{,}885834$, $a_6 = 1$.
$m = 7$	$P_7 = 0{,}087637$	$a_0 = 0$, $a_1 = 0{,}095446$, $a_2 = 0{,}255776$, $a_3 = 0{,}417492$, $a_4 = 0{,}582508$, $a_5 = 0{,}744224$, $a_6 = 0{,}904554$, $a_7 = 1$.
$m = 8$	$P_8 = 0{,}054279$	$a_0 = 0$, $a_1 = 0{,}081992$, $a_2 = 0{,}219591$, $a_3 = 0{,}358326$, $a_4 = 0{,}5$, $a_5 = 0{,}641674$, $a_6 = 0{,}780409$, $a_7 = 0{,}918008$, $a_8 = 1$.

$m=9 \qquad P_9 = 0{,}033375 \qquad$
$$\begin{aligned} a_0 &= 0,\\ a_1 &= 0{,}071858,\\ a_2 &= 0{,}192359,\\ a_3 &= 0{,}313750,\\ a_4 &= 0{,}437932,\\ a_5 &= 0{,}562068,\\ a_6 &= 0{,}686250,\\ a_7 &= 0{,}807641,\\ a_8 &= 0{,}928142,\\ a_9 &= 1. \end{aligned}$$

Teraz pokażemy drugą metodę wyznaczenia progów i prawdopodobieństw P_m. Pomysł polega na tym, by obliczyć prawdopodobieństwo P_m w sytuacji, w której losujemy liczby z dużego zbioru $\{0,1,2,\ldots,n\}$, a następnie przejść do granicy dla $n\to\infty$. Okaże się, że nie jest to bardzo trudne.

Przypuśćmy więc, że wszystkie progi i prawdopodobieństwa P_i zostały obliczone dla liczb i mniejszych od m. Wartości progów $a_0, \ldots, a_m$ obliczamy ze wzoru (1). Musimy obliczyć P_m. Zauważmy na wstępie, że wszystkie progi i prawdopodobieństwa P_m są liczbami wymiernymi. Wynika to natychmiast ze wzorów rekurencyjnych (1) i (2). Weźmy więc dużą liczbę n, przy tym taką, by wszystkie liczby $a_i n$ były całkowite.

Przypuśćmy teraz, że za pierwszym razem wylosowaliśmy liczbę k. Załóżmy następnie, że $a_i n < k \leqslant a_{i+1}n$, czyli umieszczamy liczbę k w przedziale o numerze $i+1$. Aby udało się uporządkować wszystkie liczby, musimy w dalszym ciągu wylosować i liczb mniejszych od k i pomyślnie uporządkować wszystkie liczby mniejsze od k i wszystkie liczby większe od k. Prawdopodobieństwo tego wynosi

$$\binom{m-1}{k}\cdot P_i\cdot P_{m-1-i}\cdot\frac{k^i(n-k)^{m-1-i}}{n^m}.$$

Sumując po wszystkich k z przedziału $[a_i n+1, a_{i+1}n]$, a następnie po wszystkich przedziałach i przechodząc do granicy, otrzymamy

$$P_m = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}\cdot P_i\cdot P_{m-1-i}\cdot\sum_{k=a_in+1}^{a_{i+1}n}\frac{k^i(n-k)^{m-1-i}}{n^m}.$$

Przekształcamy wzór na P_m:

$$\begin{aligned} P_m &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}\cdot P_i\cdot P_{m-1-i}\cdot\sum_{k=a_in+1}^{a_{i+1}n}\frac{k^i(n-k)^{m-1-i}}{n^m} = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}\cdot P_i\cdot P_{m-1-i}\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{k=a_in+1}^{a_{i+1}n}\frac{k^i(n-k)^{m-1-i}}{n^m} = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}\cdot P_i\cdot P_{m-1-i}\cdot \end{aligned}$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{a_i n}\frac{k^i(n-k)^{m-1-i}}{n^m}-\sum_{k=0}^{a_{i+1}n}\frac{k^i(n-k)^{m-1-i}}{n^m}\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}\cdot P_i\cdot P_{m-1-i}\cdot$$

$$\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{a_i n}\frac{k^i(n-k)^{m-1-i}}{n^m}-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{a_{i+1}n}\frac{k^i(n-k)^{m-1-i}}{n^m}\right).$$

Dla dowolnej liczby c obliczymy teraz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{cn}\frac{k^i(n-k)^{m-1-i}}{n^m}.$$

Najpierw ze wzoru dwumianowego Newtona dostajemy

$$k^i(n-k)^{m-1-i}=\sum_{j=0}^{m-1-i}\binom{m-1-i}{j}\cdot(-1)^j\cdot n^{m-1-i-j}k^{i+j},$$

czyli

$$\frac{k^i(n-k)^{m-1-i}}{n^m}=\sum_{j=0}^{m-1-i}\binom{m-1-i}{j}\cdot(-1)^j\cdot\frac{k^{i+j}}{n^{i+j+1}}.$$

Zatem

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{cn}\frac{k^i(n-k)^{m-1-i}}{n^m} &= \sum_{k=0}^{cn}\sum_{j=0}^{m-1-i}\binom{m-1-i}{j}\cdot(-1)^j\cdot\frac{k^{i+j}}{n^{i+j+1}}=\\ &= \sum_{j=0}^{m-1-i}\sum_{k=0}^{cn}\binom{m-1-i}{j}\cdot(-1)^j\cdot\frac{k^{i+j}}{n^{i+j+1}}=\\ &= \sum_{j=0}^{m-1-i}\binom{m-1-i}{j}\cdot\frac{(-1)^j}{n^{i+j+1}}\cdot\sum_{k=0}^{cn}k^{i+j}.\end{aligned}$$

Zajmijmy się teraz sumą $\sum_{k=0}^{r}k^p$, gdzie p i r są liczbami naturalnymi. Okazuje się, że istnieje wielomian $W_p(x)$ stopnia $p+1$ taki, że

$$\sum_{k=0}^{r}k^p=W(r).$$

Przykłady takich wielomianów są znane ze szkoły (są to typowe zadania na indukcję):

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k &= 1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}\cdot n^2+\frac{1}{2}\cdot n,\\ \sum_{k=0}^{n}k^2 &= 1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{3}\cdot n^3+\frac{1}{2}\cdot n^2+\frac{1}{6}\cdot n,\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 \quad = \quad 1^3+2^3+\ldots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1}{4}\cdot n^4 + \frac{1}{2}\cdot n^3 + \frac{1}{4}\cdot n^2.$$

Zatem wielomiany $W_p(x)$ mają postać:

$$\begin{aligned}
W_1(x) &= \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x,\\
W_2(x) &= \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x,\\
W_3(x) &= \frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x.
\end{aligned}$$

Te trzy wielomiany znamy ze szkoły. Potrzebne nam będą następne. Można je znaleźć w książce [20] lub wyznaczyć np. za pomocą programu Derive. Oto one:

$$\begin{aligned}
W_4(x) &= \frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x,\\
W_5(x) &= \frac{1}{6}x^6+\frac{1}{2}x^5+\frac{5}{12}x^4-\frac{1}{12}x^2,\\
W_6(x) &= \frac{1}{7}x^7+\frac{1}{2}x^6+\frac{1}{2}x^5-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{42}x,\\
W_7(x) &= \frac{1}{8}x^8+\frac{1}{2}x^7+\frac{7}{12}x^6-\frac{7}{24}x^4+\frac{1}{12}x^2,\\
W_8(x) &= \frac{1}{9}x^9+\frac{1}{2}x^8+\frac{2}{3}x^7-\frac{7}{15}x^5+\frac{2}{9}x^3-\frac{1}{30}x,\\
W_9(x) &= \frac{1}{10}x^{10}+\frac{1}{2}x^9+\frac{3}{4}x^8-\frac{7}{10}x^6+\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{20}x^2.
\end{aligned}$$

Zauważamy, że te wielomiany mają następującą postać:

$$W_p(x) = \frac{1}{p}\cdot x^{p+1} + V_p(x),$$

gdzie V_p jest wielomianem stopnia p. Zatem

$$\sum_{k=0}^{cn} k^p = \frac{c^{p+1}n^{p+1}}{p+1} + V_p(cn).$$

Stąd wynika, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\cdot\sum_{k=0}^{cn}k^p = \lim_{n\to\infty}\frac{c^{p+1}}{p+1}+\frac{V_p(cn)}{n^{p+1}} = \frac{c^{p+1}}{p+1},$$

gdyż wielomian $V_p(cn)$ jest stopnia p i $\lim_{n\to\infty}\frac{V_p(cn)}{n^{p+1}} = 0$. Zatem

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{cn}\frac{k^i(n-k)^{m-1-i}}{n^m} \quad = \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{m-1-i}\binom{m-1-i}{j}\cdot\frac{(-1)^j}{n^{i+j+1}}\cdot\sum_{k=0}^{cn}k^{i+j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1-i} (-1)^j \cdot \binom{m-1-i}{j} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{i+j+1}} \cdot \sum_{k=0}^{cn} k^{i+j}.$$
$$= \sum_{j=0}^{m-1-i} (-1)^j \cdot \binom{m-1-i}{j} \cdot \frac{c^{i+j+1}}{i+j+1}.$$

Stąd dostajemy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{a_{i+1}n} \frac{k^i(n-k)^{m-1-i}}{n^m} = \sum_{j=0}^{m-1-i} (-1)^j \cdot \binom{m-1-i}{j} \cdot \frac{a_{i+1}^{i+j+1}}{i+j+1},$$
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{a_in} \frac{k^i(n-k)^{m-1-i}}{n^m} = \sum_{j=0}^{m-1-i} (-1)^j \cdot \binom{m-1-i}{j} \cdot \frac{a_{i}^{i+j+1}}{i+j+1},$$

czyli

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{a_{i+1}n} \frac{k^i(n-k)^{m-1-i}}{n^m} - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{a_in} \frac{k^i(n-k)^{m-1-i}}{n^m} =$$
$$= \sum_{j=0}^{m-1-i} (-1)^j \cdot \binom{m-1-i}{j} \cdot \frac{a_{i+1}^{i+j+1} - a_i^{i+j+1}}{i+j+1}.$$

Podstawiając tę różnicę granic do wzoru na P_m, otrzymujemy wzór rekurencyjny (2).

$$P_m = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1-i} (-1)^j \cdot \binom{m-1}{i} \cdot \binom{m-1-i}{j} \cdot P_i \cdot P_{m-1-i} \cdot \frac{a_{i+1}^{i+j+1} - a_i^{i+j+1}}{i+j+1}. \qquad (2)$$

Wreszcie naszkicujemy trzeci sposób wyznaczenia prawdopodobieństwa P_m. Jeśli znamy już progi w grze z m liczbami, to piszemy program symulujący naszą grę. Wykonujemy np. milion (lub lepiej 10 milionów) prób i zliczamy, ile było udanych. Stosunek liczby udanych prób do wszystkich możemy przyjąć za prawdopodobieństwo sukcesu. Tę metodę przyjęto w programie wzorcowym.