Marek Cygan
Treść zadania, Opracowanie

Bartosz Kostka
Program

Dostępna pamięć: 512 MB. *OI, etap II, dzień pierwszy, 10.02.2016*

Drogi zmiennokierunkowe

Bajtazar zastanawia się nad przeprowadzką do Bajtowa i chce wynająć tam mieszkanie. Bajtów jest pięknym miastem o licznych zaletach, choć niestety nie należy do nich komunikacja. W mieście jest n skrzyżowań połączonych mniej lub bardziej chaotyczną siecią m dróg. Drogi są bardzo wąskie, więc z przyczyn obiektywnych wszystkie są jednokierunkowe. Jakiś czas temu miejscy specjaliści od komunikacji wpadli na pomysłowe rozwiązanie, które bez konieczności poszerzania dróg umożliwia poruszanie się po nich w różnych kierunkach. A mianowicie, codziennie na wszystkich ulicach zmienia się kierunek poruszania. Innymi słowy, w dni nieparzyste ruch odbywa się zgodnie z oryginalnym skierowaniem ulic, natomiast w dni parzyste ruch na wszystkich ulicach odbywa się w przeciwnych kierunkach.

Bajtazar chce wynająć mieszkanie w takim miejscu, z którego będzie mógł wszędzie łatwo dojechać. Konkretnie, interesuje go mieszkanie przy takim skrzyżowaniu, z którego da się dojechać do każdego innego skrzyżowania **w ciągu jednego dnia** *– w przypadku niektórych skrzyżowań może to być tylko nieparzysty dzień, a w przypadku innych tylko parzysty. Drogą powrotną nie trzeba się przejmować, Bajtazar może wrócić do siebie następnego dnia.*

Mając daną sieć drogową w Bajtowie, wyznacz wszystkie skrzyżowania, które spełniają wymagania Bajtazara.

Wejście

W pierwszym wierszu standardowego wejścia znajdują się dwie liczby całkowite n i m ($n \geqslant 2$, $m \geqslant 1$) oddzielone pojedynczym odstępem, oznaczające liczbę skrzyżowań i liczbę dróg w Bajtowie. Skrzyżowania numerujemy od 1 do n. W kolejnych m wierszach zawarte są opisy dróg: i-ty z tych wierszy zawiera dwie liczby całkowite a_i i b_i ($1 \leqslant a_i, b_i \leqslant n$, $a_i \neq b_i$) oddzielone pojedynczym odstępem, oznaczające, że istnieje jednokierunkowa droga ze skrzyżowania o numerze a_i do skrzyżowania o numerze b_i (tzn. w dni nieparzyste można przejechać tą drogą z a_i do b_i, natomiast w dni parzyste można nią przejechać z b_i do a_i). Każda uporządkowana para (a_i, b_i) wystąpi na wejściu co najwyżej raz.

Wyjście

W pierwszym wierszu standardowego wyjścia należy zapisać jedną liczbę całkowitą k oznaczającą liczbę skrzyżowań spełniających wymagania Bajtazara. W drugim wierszu należy zapisać rosnący ciąg k liczb pooddzielanych pojedynczymi odstępami, oznaczających numery tych skrzyżowań. Jeśli $k = 0$, drugi wiersz powinien pozostać pusty (tj. program może wypisać pusty wiersz albo po prostu go nie wypisywać).

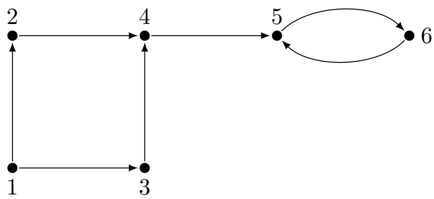
Przykład

Dla danych wejściowych:

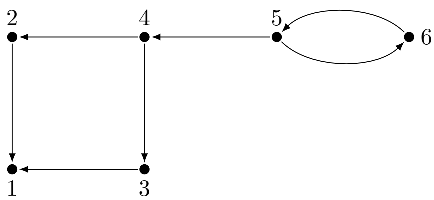
```
6 7
1 2
1 3
2 4
3 4
4 5
5 6
6 5
```

poprawnym wynikiem jest:

```
4
1 4 5 6
```



Sieć dróg w dni nieparzyste.



Sieć dróg w dni parzyste.

Wyjaśnienie do przykładu: *Ze skrzyżowania numer 1 można dojechać do wszystkich innych skrzyżowań w dni nieparzyste. Ze skrzyżowań numer 5 i 6 można dojechać do wszystkich innych skrzyżowań w dni parzyste. Ze skrzyżowania numer 4 do skrzyżowań numer 5 i 6 można dojechać w dni nieparzyste, a do skrzyżowań numer 1, 2 i 3 – w dni parzyste.*

Testy „ocen”:

`1ocen`: $n = 10$, $m = 9$; *„ścieżka”, w której co druga droga jest skierowana w lewo, a co druga w prawo. Żadne skrzyżowanie nie spełnia wymagań Bajtazara.*

`2ocen`: $n = 100\,000$, $m = 100\,000$, *w dni nieparzyste można przejechać bezpośrednią drogą ze skrzyżowania numer 1 do każdego innego skrzyżowania. Dodatkowo, w dni nieparzyste można przejechać bezpośrednią drogą ze skrzyżowania numer* n *do skrzyżowania numer 1. Tylko skrzyżowania numer 1 i* n *spełniają wymagania Bajtazara.*

`3ocen`: $n = 500\,000$, $m = 499\,999$, *„ścieżka”; wszystkie skrzyżowania spełniają wymagania Bajtazara.*

Ocenianie

Zestaw testów dzieli się na podzadania spełniające poniższe warunki. Testy do każdego podzadania składają się z jednej lub większej liczby osobnych grup testów.

Podzadanie	**Warunki**	**Liczba punktów**
1	$n, m \leqslant 5000$	28
2	$n \leqslant 300\,000$, $m \leqslant 1\,000\,000$; *ze wszystkich skrzyżowań spełniających wymagania Bajtazara można dojechać do każdego innego w dzień nieparzysty*	29
3	$n \leqslant 500\,000$, $m \leqslant 1\,000\,000$	43

Rozwiązanie

Sieć dróg w Bajtowie możemy przedstawić jako graf skierowany G. Każdy wierzchołek odpowiada skrzyżowaniu, natomiast skierowana krawędź reprezentuje drogę jednokierunkową. Skrzyżowanie x znajduje się w kręgu zainteresowań Bajtazara, jeśli dla każdego innego skrzyżowania y w ciągu jednego dnia da się dojechać ze skrzyżowania x do skrzyżowania y. Innymi słowy, skoro w kolejnych dniach drogi (krawędzie grafu) zmieniają swoją orientację, dla każdego skrzyżowania y musi być spełniony *co najmniej* jeden z warunków:

- w grafie G istnieje ścieżka z wierzchołka x do wierzchołka y,
- w grafie G istnieje ścieżka z wierzchołka y do wierzchołka x.

W problemach dotyczących ścieżek w grafach skierowanych bardzo często przydaje się pojęcie silnie spójnych składowych. Podobnie jest w przypadku naszego zadania. Przypomnijmy, że dwa wierzchołki x i y znajdują się w jednej silnie spójnej składowej wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zarówno ścieżka z wierzchołka x do wierzchołka y, jak i ścieżka z wierzchołka y do wierzchołka x.

Zauważmy, że w przypadku pojedynczej silnie spójnej składowej albo wszystkie jej wierzchołki spełniają wymagania postawione przez Bajtazara, albo też żaden wierzchołek ich nie spełnia. Możemy zatem ściągnąć każdą silnie spójną składową podanego grafu do wierzchołka, tym samym otrzymując *graf silnie spójnych składowych*. Ten krok możemy wykonać w czasie liniowym od rozmiaru grafu za pomocą standardowych metod (więcej o silnie spójnych składowych można znaleźć np. w książkach [4, 6]).

Graf silnie spójnych składowych z natury jest acykliczny, dlatego dla uproszczenia w dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że rozważany graf nie ma cykli. Przyjmijmy dodatkowo, że wierzchołki grafu są podane w porządku topologicznym $(v_1, \ldots, v_n)$, tj. każda krawędź prowadzi od wierzchołka o mniejszym indeksie do wierzchołka o większym indeksie. Wygodnie będzie nam wyobrazić sobie, że wierzchołki są uszeregowane na prostej, a krawędzie skierowane są wyłącznie w prawą stronę (rys. 1). Na tej podstawie możemy wywnioskować, że aby wierzchołek v_i spełniał wymagania Bajtazara, muszą być spełnione dwa następujące warunki:

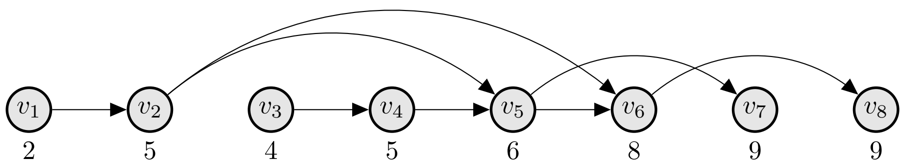
1. dla każdego $j < i$ z wierzchołka v_j istnieje ścieżka do wierzchołka v_i,
2. dla każdego $j > i$ z wierzchołka v_i istnieje ścieżka do wierzchołka v_j.

Ze względu na symetrię, jeśli będziemy umieli wyznaczyć wszystkie wierzchołki spełniające pierwszy warunek, to będziemy także umieli wyznaczyć wszystkie wierzchołki spełniające drugi warunek, gdyż drugi warunek jest równoważny pierwszemu w odwrotnie zorientowanym grafie. Aby rozwiązać zadanie wystarczy zatem wyznaczyć wszystkie wierzchołki v_i, do których da się dojść z każdego wierzchołka na lewo od v_i (tj. z każdego wierzchołka o mniejszym indeksie). Wierzchołki takie będziemy nazywać wierzchołkami *dobrymi*, natomiast pozostałe – wierzchołkami *złymi*.

Rozważmy wierzchołek v_i. Jeśli z wierzchołka v_i nie wychodzi krawędź prowadząca do wierzchołka v_{i+1}, to z całą pewnością wierzchołek v_{i+1} jest zły. Aby uogólnić tę prostą obserwację zdefiniujmy funkcję $r(i)$, której wartość to najmniejszy indeks wierzchołka, do którego prowadzi bezpośrednia krawędź z v_i. Formalnie,

$$r(i) = \min_{(v_i, v_j) \in A} j \,,$$

gdzie A to zbiór krawędzi naszego skierowanego grafu acyklicznego. W przypadku, gdy z wierzchołka v_i nie wychodzi żadna krawędź, ustalamy $r(i) = n + 1$.



Rys. 1: Ilustracja wartości $r(i)$.

Ustalmy pewien wierzchołek v_j. Jeśli istnieje wierzchołek v_i, dla którego $i < j < r(i)$, to wierzchołek v_j jest zły – nie jest on osiągalny z wierzchołka v_i, gdyż wszystkie krawędzie wychodzące z v_i „przeskakują” v_j. Okazuje się, że ten warunek pozwala wykryć *wszystkie* złe wierzchołki.

Lemat 1. Jeśli wierzchołek v_j jest zły, to istnieje wierzchołek v_i, taki że $i < j < r(i)$.

Dowód: Skoro wierzchołek v_j jest zły, istnieje pewien wierzchołek v_a, taki że $a < j$ i z v_a nie da się dojść do v_j. Naszym celem jest znalezienie wierzchołka v_i spełniającego $i < j$ oraz $r(i) > j$. Wykonajmy następujący spacer w grafie, rozpoczynając w wierzchołku v_a. Dopóki znajdujemy się w wierzchołku na lewo od v_j, wykonujemy przejście z aktualnego wierzchołka v_a do $v_{r(a)}$, czyli do najbliższego wierzchołka, do którego możemy wykonać ruch. Spacer może zakończyć się z jednego z dwóch powodów: (i) z pewnego wierzchołka v_i na lewo od v_j przeszliśmy na prawo od v_j, czyli $i < j < r(i)$, lub też (ii) z pewnego wierzchołka v_i, gdzie $i < j$, nie wychodzi żadna krawędź, co oznacza, że $r(i) = n + 1$. W obydwóch przypadkach otrzymujemy $i < j < r(i)$. ■

Powyższy lemat oraz poprzedzająca go obserwacja prowadzą nas do rozwiązania.

Na początku obliczamy graf silnie spójnych składowych i sortujemy jego wierzchołki w porządku topologicznym. Obydwa te kroki możemy wykonać w czasie $O(n+m)$. Następnie w czasie $O(n+m)$ obliczamy wartości $r(i)$, po czym znajdujemy wierzchołki, których indeksy należą do sumy przedziałów $(i, r(i))$. Ten ostatni krok zrealizować możemy w czasie $O(n)$, przeglądając przedziały dla rosnących wartości i i pamiętając największą dotychczas napotkaną wartość $r(i)$. Tym samym znajdziemy wszystkie złe wierzchołki w grafie silnie spójnych składowych, co pozwoli nam zidentyfikować złe wierzchołki w oryginalnym grafie. Jeśli powtórzymy wszystkie kroki dla grafu z odwróconą orientacją krawędzi, otrzymamy rozwiązanie problemu Bajtazara.