

# Tour de Bajtocja

*W Bajtocji jest  $n$  miast. Niektóre pary miast są połączone dwukierunkowymi drogami. Drogi nie przecinają się poza końcami, w razie konieczności prowadzą tunelami lub estakadami.*

*Już wkrótce rozpocznie się znany wyścig kolarski **Tour de Bajtocja**. Wiadomo, że trasa wyścigu będzie przebiegała drogami Bajtocji, będzie miała początek i koniec w tym samym mieście oraz nie będzie prowadziła żadną drogą więcej niż raz.*

*Bajtazar jest słynnym bajtockim kibicem, szefem fanklubu drużyny piłkarskiej **Bajtusie**. Bajtazar i jego klubowi przyjaciele szczerze nienawidzą wyścigów kolarskich. Chcą oni uniemożliwić sytuację, w której trasa wyścigu przebiegałaby przez miasta, w których mieszkają. Aby temu zapobiec, są gotowi zablokować część dróg. Bajtazar wie, w których miastach mieszkają poszczególni członkowie jego klubu. Chce on wyznaczyć minimalną liczbę dróg, jakie trzeba zablokować, tak aby wyścig kolarski nie mógł przebiegać przez **żadne** z miast, w których mieszka jakiś członek jego klubu (oczywiście, wliczając w to samego Bajtazara). Twoim zadaniem jest pomóc Bajtazarowi w wyznaczeniu takiego zbioru dróg.*

## Wejście

*W pierwszym wierszu standardowego wejścia znajdują się trzy liczby całkowite  $n$ ,  $m$  oraz  $k$  ( $1 \leq n \leq 1\,000\,000$ ,  $0 \leq m \leq 2\,000\,000$ ,  $1 \leq k \leq n$ ), pooddzielane pojedynczymi odstępami, oznaczające odpowiednio: liczbę miast, liczbę dróg oraz liczbę miast, w których mieszkają członkowie klubu. Miasta są ponumerowane od 1 do  $n$ , przy czym miasta, w których mieszkają członkowie klubu, mają numery od 1 do  $k$ . W każdym z kolejnych  $m$  wierszy znajdują się dwie liczby całkowite oddzielone pojedynczym odstępem,  $a_i$  i  $b_i$  ( $1 \leq a_i < b_i \leq n$ ), oznaczające, że miasta  $a_i$  i  $b_i$  są połączone dwukierunkową drogą. Każda para miast Bajtocji jest połączona co najwyżej jedną drogą.*

*W testach wartych łącznie 40% punktów zachodzą dodatkowe warunki  $n \leq 1\,000$  i  $m \leq 5\,000$ .*

## Wyjście

*Twój program powinien wypisać na standardowe wyjście zbiór dróg o minimalnej liczności, których blokada uniemożliwi zorganizowanie wyścigu kolarskiego przechodzącego przez jakiekolwiek miasto, w którym mieszkają członkowie klubu.*

*W pierwszym wierszu wyjścia należy wypisać minimalną liczbę dróg, jakie należy zablokować. W kolejnych wierszach powinien znaleźć się opis dróg, które należy zablokować, po jednej w wierszu. Każdą drogę reprezentujemy jako parę numerów miast połączonych przez tę drogę. Jako pierwsze należy wypisać miasto o mniejszym numerze. Numery miast należy oddzielić pojedynczym odstępem.*

*Jeśli istnieje więcej niż jedno rozwiązanie, Twój program powinien wypisać jedno, dowolne z nich.*

**Przykład**

Dla danych wejściowych:

11 13 5

1 2

1 3

1 5

3 5

2 8

4 11

7 11

6 10

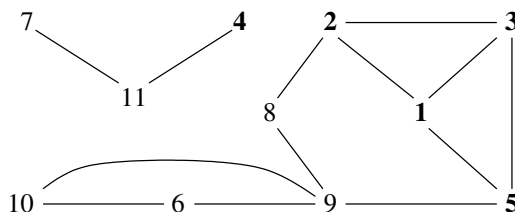
6 9

2 3

8 9

5 9

9 10



jednym z poprawnych wyników jest:

3

2 3

8 9

3 5

**Rozwiązanie**

W zadaniu mamy dany graf nieskierowany  $G$ , reprezentujący mapę Bajtocji, w którym pewne wierzchołki są wyróżnione (te o numerach nie większych niż  $k$ ). Cykl, który zawiera co najmniej jeden wyróżniony wierzchołek, będziemy nazywać *wyróżnionym cyklem*; podobnie krawędź, która zawiera co najmniej jeden wyróżniony koniec, będziemy nazywać *wyróżnioną krawędzią*. Celem zadania jest usunięcie jak najmniejszej liczby krawędzi z grafu, aby wyeliminować wszystkie wyróżnione cykle. Dowolny taki najmniej liczny zbiór usuwanych krawędzi będziemy nazywać *rozwiązaniem*.

Na początek zastanówmy się, jakie warunki musi spełniać graf, aby nie istniał w nim żaden wyróżniony cykl. Użyjemy tu pojęcia *mostu*, czyli krawędzi, przez którą nie przechodzi żaden cykl. Równoważna definicja określa most jako krawędź, której usunięcie powoduje zwiększenie się liczby spójnych składowych w grafie. Jako że każdy cykl przechodzący przez wyróżnioną krawędź jest wyróżniony i odwrotnie, każdy wyróżniony cykl przechodzi przez co najmniej jedną wyróżnioną krawędź, otrzymujemy poniższy lemat.

**Lemat 1.** Graf nie zawiera wyróżnionego cyklu wtedy i tylko wtedy, gdy każda wyróżniona krawędź jest mostem.

Zauważmy, że gdyby wszystkie krawędzie grafu były wyróżnione, to wyeliminowanie wyróżnionych cykli byłoby równoważne usunięciu wszystkich cykli. Wówczas

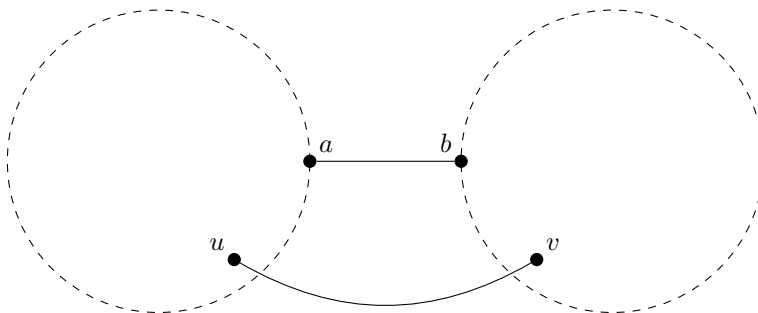
wystarczyłoby znaleźć dowolny maksymalny zbiór krawędzi, który jest lasem, i jako rozwiązanie wypisać jego dopełnienie. Przypadek, w którym wszystkie krawędzie są wyróżnione, wydaje się być przypadkiem wyjątkowo szczególnym. W dalszej części opisu pokażemy jednak, że przypadek ogólny można zredukować do omawianego przypadku szczególnego. Zaczniemy od udowodnienia poniższego, kluczowego lematu.

**Lemat 2.** Istnieje rozwiązanie, które zawiera jedynie wyróżnione krawędzie.

**Dowód:** Przez  $X$  oznaczmy rozwiązanie, które zawiera najmniejszą liczbę niewyróżnionych krawędzi. Załóżmy, że  $X$  zawiera jakąś krawędź  $uv$ , która nie jest wyróżniona (w przeciwnym przypadku lemat w oczywisty sposób zachodzi). Z metody wyboru zbioru  $X$  wynika, że w grafie  $G$  istnieje wyróżniony cykl  $C_0$ , który zawiera dokładnie jedną krawędź ze zbioru  $X$  i jest to krawędź  $uv$ ; w przeciwnym przypadku zbiór  $X \setminus \{uv\}$  również byłby rozwiązaniem. Niech  $ab$  będzie dowolną wyróżnioną krawędzią należącą do cyklu  $C_0$ . Wykażemy, że zbiór  $X' = (X \setminus \{uv\}) \cup \{ab\}$  również jest rozwiązaniem, co będzie stanowiło sprzeczność wobec faktu, że  $|X'| = |X|$  i  $X'$  zawiera mniej niewyróżnionych krawędzi niż  $X$ .

Rozważmy dowolny wyróżniony cykl  $C'$  w grafie  $G$ . Jeśli cykl  $C'$  zawiera jakąś krawędź ze zbioru  $X \setminus \{uv\}$ , to zawiera on co najmniej jedną krawędź ze zbioru  $X'$ . Wystarczy zatem rozważyć cykle w grafie  $G$ , których jedyną krawędzią ze zbioru  $X$  jest krawędź  $uv$ . Dlatego też aby wykazać, że graf  $G \setminus X'^1$  nie zawiera wyróżnionych cykli, wystarczy wykazać, że w grafie  $G \setminus X'$  krawędź  $uv$  jest mostem, gdyż wtedy w grafie  $G \setminus X'$  nie istnieje żaden cykl (nawet niewyróżniony), który przechodziłby przez krawędź  $uv$ .

Z lematu 1 wiemy, że w grafie  $G \setminus X$  krawędź  $ab$  jest mostem. Jednocześnie cykl  $C_0$  implikuje, że krawędź  $ab$  nie jest mostem w grafie  $G \setminus (X \setminus \{uv\})$ . Z tego wynika, że wierzchołki  $u$  oraz  $v$  znajdują się po przeciwnych stronach mostu  $ab$  w grafie  $G \setminus X$ , co zostało przedstawione na rysunku 1. Zatem w grafie  $G \setminus (X \cup \{ab\})$  wierzchołki  $u$  oraz  $v$  znajdują w różnych spójnych składowych, stąd krawędź  $uv$  jest mostem w grafie  $G \setminus X'$ . To kończy dowód lematu. ■



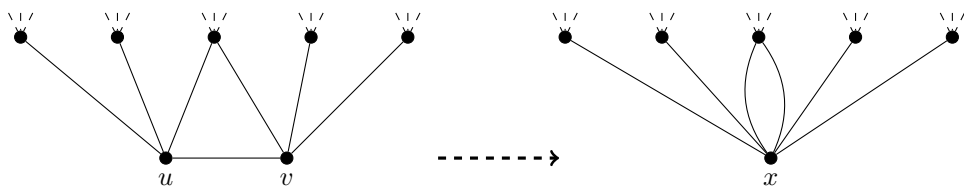
Rys. 1: Przerywane okręgi oznaczają dwie spójne składowe będące po różnych stronach mostu  $ab$  w grafie  $G \setminus X$ .

<sup>1</sup>Przez  $G \setminus X'$  oznaczamy graf  $G$  po usunięciu krawędzi ze zbioru  $X'$ .

W dalszym opisie przydatna nam będzie operacja *ściągnięcia* krawędzi polegająca na zredukowaniu jej do jednego wierzchołka. Formalnie, jako operację ściągnięcia krawędzi  $e$  łączącej wierzchołki  $u$  i  $v$  określamy następujący ciąg operacji:

- do grafu dodajemy nowy wierzchołek  $x$ ;
- usuwamy krawędź  $e$ ;
- każdą krawędź  $ab$  mającą co najmniej jeden koniec w zbiorze  $\{u, v\}$  zastępujemy krawędzią  $a'b'$ , gdzie  $a' = x$  jeśli  $a \in \{u, v\}$  oraz  $a' = a$  w przeciwnym przypadku, podobnie  $b' = x$  jeśli  $b \in \{u, v\}$  oraz  $b' = b$  w przeciwnym przypadku;
- usuwamy wierzchołki  $u$  oraz  $v$ .

Zauważmy, że operacja ściągnięcia krawędzi może spowodować, że w grafie pojawią się krawędzie wielokrotne lub pętle, nawet pomimo założenia, że wejściowy graf nie zawiera takich krawędzi, co zostało zilustrowane na rysunku 2.



Rys. 2: Sklejenie krawędzi  $uv$ .

Zauważmy, że każde rozwiązanie w grafie  $G'$  powstałym przez ściągnięcie krawędzi  $uv$  w grafie  $G$  jest też rozwiązaniem w grafie  $G$  (o ile wystąpienia wierzchołka  $x$  w tym rozwiązaniu podmienimy na odpowiednie wystąpienia wierzchołka  $u$  lub  $v$ ). I odwrotnie, jeśli w grafie  $G$  istnieje rozwiązanie niezawierające krawędzi  $uv$ , to rozwiązanie to możemy zinterpretować jako rozwiązanie w grafie  $G'$ . Stąd oraz na podstawie dwóch przedstawionych powyżej lematów wynika, że poprzez ściągnięcie kolejno wszystkich niewyróżnionych krawędzi problem postawiony w zadaniu możemy zredukować do szczególnego przypadku, w którym wszystkie krawędzie są wyróżnione, a ten szczególny przypadek omówiliśmy na początku opracowania. Formalny dowód ostatniej obserwacji pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie.

Rozwiązanie wzorcowe jest implementacją powyższego rozumowania przy pomocy przeszukiwania wszerz (algorytm BFS). Początkowo ściągamy wszystkie niewyróżnione krawędzie, a następnie z użyciem algorytmu BFS w każdej spójnej składowej wyznaczamy drzewo rozpinające. Do usunięcia przeznaczamy wszystkie wyróżnione krawędzie nienależące do znalezionej lasu rozpinającego. Złożoność czasowa i pamięciowa tego rozwiązania wynosi  $O(n + m)$ . Zostało ono zaimplementowane w plikach `tou.cpp` i `tou1.pas`.

W rozwiązaniu alternatywnym wykorzystujemy strukturę *Find-Union* działającą na zbiorze wierzchołków grafu. Pomimo iż asymptotycznie rozwiązanie to nie jest liniowe, jest ono bardzo efektywne w praktyce oraz proste w implementacji, gdyż zarówno ściąganie krawędzi grafu, jak i budowanie lasu rozpinającego może zostać zrealizowane za pomocą tej samej operacji *union*, patrz następujący pseudokod.

```

1: foreach  $ab \in E(G)$  do begin
2:   if  $a > k$  then { krawędź niewyróżniona: ściągamy }
3:      $union(a, b)$ 
4:   else { krawędź wyróżniona: do rozważenia dalej }
5:      $Wyr.insert(ab)$ ;
6: end
7: foreach  $ab \in Wyr$  do begin
8:   if  $find(a) \neq find(b)$  then
9:      $union(a, b)$  { krawędź należy do drzewa rozpinającego }
10:  else
11:    wypisz( $ab$ ); { krawędź należy do rozwiązania }
12: end

```

Złożoność rozwiązania alternatywnego wynosi  $O((n+m) \log^* n)$ . Jego implementacje można znaleźć w plikach `tou2.cpp` oraz `tou3.pas`.

## Testy

Rozwiązania zawodników były sprawdzane za pomocą 10 zestawów danych testowych, z których każdy składał się z od 2 do 4 pojedynczych testów. W poniższej tabeli przyjęto oznaczenia  $n$ ,  $m$ ,  $k$  zgodnie z treścią zadania, natomiast przez  $r$  oznaczono rozmiar rozwiązania, czyli liczbę krawędzi, które należy usunąć z grafu.

Nazwa	n	m	k	r	Opis
<i>tou1a.in</i>	10	15	5	5	graf Petersena z wyróżnionymi wierzchołkami wewnętrznymi
<i>tou1b.in</i>	8	12	4	5	mały test poprawnościowy
<i>tou1c.in</i>	1	0	1	0	test minimalny z jednym wyróżnionym wierzchołkiem
<i>tou1d.in</i>	6	9	2	1	mały test poprawnościowy
<i>tou2a.in</i>	12	26	5	14	mały test poprawnościowy
<i>tou2b.in</i>	40	100	10	28	mały test losowy
<i>tou2c.in</i>	70	300	23	133	mały test losowy
<i>tou3a.in</i>	300	389	30	27	losowy graf z długimi cyklami
<i>tou3b.in</i>	400	600	40	43	test losowy
<i>tou3c.in</i>	500	800	30	56	test losowy

Nazwa	n	m	k	r	Opis
<i>tou4a.in</i>	999	1 332	333	333	trójkąty połączone w cykl
<i>tou4b.in</i>	1 000	5 000	30	213	test losowy, wierzchołki o dużym stopniu
<i>tou5a.in</i>	15 000	19 517	6 000	4 294	trójkąty podłączone do dwóch cykli
<i>tou5b.in</i>	10 000	100 000	846	14 749	duża liczba spójnych składowych
<i>tou5c.in</i>	1 000	499 500	333	277 056	klika o 1000 wierzchołkach
<i>tou6a.in</i>	100 000	800 990	10 000	142 256	losowe grafy połączone mostami
<i>tou6b.in</i>	100 000	400 000	5 000	33 831	test losowy
<i>tou7a.in</i>	300 000	343 091	10 000	6 705	suma krótkich cykli
<i>tou7b.in</i>	300 000	900 000	37 504	138 466	losowy graf z dużą liczbą wierzchołków wyróżnionych
<i>tou8a.in</i>	500 000	1 799 335	1 000	799 837	graf wyróżniony podłączony do grafów niewyróżnionych
<i>tou8b.in</i>	500 000	666 666	1 158	166 667	wierzchołki wyróżnione mają duży stopień
<i>tou9a.in</i>	1 000 000	1 999 998	500 000	750 000	test wydajnościowy, cykl niewyróżniony z podłączonymi wyróżnionymi wierzchołkami
<i>tou9b.in</i>	1 000 000	2 000 000	507 087	685 209	test z dużą liczbą losowych spójnych składowych
<i>tou9c.in</i>	1 000 000	1 999 998	1	999 998	jeden centralny wierzchołek jest wyróżniony, a pozostałe tworzą cykl
<i>tou10a.in</i>	999 999	999 999	333 333	444 444	nieregularna siatka
<i>tou10b.in</i>	1 000 000	1 350 223	2 377	350 224	losowy graf maksymalny z długimi cyklami
<i>tou10c.in</i>	1 000 000	2 000 000	25 000	71 510	test losowy o maksymalnych rozmiarach grafu