Marian M. Kędzierski
Treść zadania, Opracowanie

Michał Bejda
Program

Dostępna pamięć: 64 MB. *OI, etap I, 17.10–14.11.2011*

Festyn

W Bajtogrodzie trwa festyn charytatywny, a Ty jesteś jedną z kwestujących osób. Ominęło Cię parę atrakcji, w tym bieg z przeszkodami. Bajtazar, miłośnik zagadek logicznych, obiecał przekazać spory datek, jeżeli rozwiążesz jego zagadkę.

Nie znasz dokładnych wyników wyścigu. Bajtazar zdradził Ci jednak część informacji na ich temat, a teraz pyta Cię, ile maksymalnie różnych wyników w wyścigu mogło mieć miejsce. Dwaj uczestnicy mają różne wyniki, jeśli nie przybiegli do mety w tym samym czasie. Dowiedziałeś się, że każdy uczestnik wyścigu uzyskał czas będący całkowitą liczbą sekund. Poznałeś również związki pomiędzy wynikami niektórych par biegaczy. Bajtazar podał Ci część z tych par biegaczy (A, B)*, dla których wynik* A *był dokładnie o jedną sekundę lepszy niż wynik* B*, oraz część z tych par biegaczy* (C, D)*, dla których wynik* C *był co najmniej tak samo dobry jak wynik* D*. Napisz program, który pomoże Ci znaleźć rozwiązanie zagadki Bajtazara.*

Wejście

Pierwszy wiersz standardowego wejścia zawiera trzy liczby całkowite nieujemne n, m_1, m_2 $(2 \leqslant n \leqslant 600,\ 1 \leqslant m_1 + m_2 \leqslant 100\,000)$*, pooddzielane pojedynczymi odstępami, oznaczające odpowiednio: liczbę biegaczy, liczbę poznanych par biegaczy pierwszego typu* (A, B) *oraz liczbę poznanych par biegaczy drugiego typu* (C, D)*. Biegacze są ponumerowani od 1 do* n*.*

W kolejnych m_1 *wierszach podane są pary biegaczy pierwszego typu, po jednej parze w wierszu — i-ty z tych wierszy zawiera dwie liczby* a_i *oraz* b_i, $a_i \neq b_i$*, oddzielone pojedynczym odstępem, oznaczające, że biegacz* a_i *miał wynik dokładnie o jedną sekundę lepszy niż biegacz* b_i*.*

W kolejnych m_2 *wierszach podane są pary biegaczy drugiego typu, po jednej parze w wierszu — i-ty z tych wierszy zawiera dwie liczby* c_i *oraz* d_i, $c_i \neq d_i$*, oddzielone pojedynczym odstępem, oznaczające, że biegacz* c_i *miał wynik nie gorszy niż biegacz* d_i*.*

Wyjście

W pierwszym i jedynym wierszu standardowego wyjścia Twój program powinien wypisać jedną liczbę całkowitą równą maksymalnej liczbie różnych wyników czasowych, jakie mogli osiągnąć biegacze przy założeniu podanych kryteriów.

Jeśli nie istnieje kolejność zawodników spełniająca ograniczenia Bajtazara, wyjście powinno składać się z jednego wiersza zawierającego słowo „`NIE`*” (bez cudzysłowów).*

W testach wartych przynajmniej 15% punktów zachodzi dodatkowe ograniczenie $n \leqslant 10$*.*

Przykład

Dla danych wejściowych:

```
4 2 2
1 2
3 4
1 4
3 1
```

poprawnym wynikiem jest:

```
3
```

Wyjaśnienie do przykładu: *Bieg mógł zakończyć się na dwa sposoby:*

1. *pierwszy jest biegacz nr 3, na drugim miejscu są ex aequo biegacze nr 1 i 4, a ostatni jest biegacz nr 2;*
2. *na pierwszym miejscu są ex aequo biegacze nr 1 i 3, a na drugim ex aequo biegacze nr 2 i 4.*

W pierwszej z powyższych możliwości mamy najwięcej różnych wyników czasowych, tzn. trzy.

Rozwiązanie

Analiza problemu

W zadaniu rozważamy n zmiennych całkowitych $t_1, t_2, \ldots, t_n$, oznaczających czasy dotarcia na metę kolejnych uczestników biegu. Pomiędzy niektórymi z tych zmiennych znane są pewne zależności, które mogą być dwojakiego typu:

1. $t_a + 1 = t_b$,
2. $t_c \leqslant t_d$.

Przez *wartościowanie* φ zmiennych t_i będziemy rozumieli dowolne przypisanie im wartości całkowitych, które zachowuje podane ograniczenia. *Mocą* wartościowania będziemy nazywali liczbę różnych wartości przypisanych przez to wartościowanie. W zadaniu mamy znaleźć maksymalną moc wartościowania lub stwierdzić, że żadne wartościowanie nie istnieje.

Możemy nieco uprościć sformułowanie zadania przez sprowadzenie dwóch typów zależności do jednego, w którym x_i i y_i oznaczają zmienne, a k_i jest stałą:

$$x_i + k_i \leqslant y_i.$$

Nazwijmy nierówności tej postaci *normalnymi.*

Każdą zależność pierwszego typu możemy zakodować jako dwie nierówności normalne:

$$t_a + 1 \leqslant t_b,$$
$$t_b - 1 \leqslant t_a,$$

a każdą zależność drugiego typu jako:

$$t_c + 0 \leqslant t_d.$$

Graf nierówności

Rozważmy graf $G = (V, E)$, w którym wierzchołkami są zmienne t_i, zaś krawędzie reprezentują nierówności normalne. Każdej nierówności $x_i + k_i \leqslant y_i$ odpowiada krawędź e_i z wierzchołka x_i do wierzchołka y_i o wadze $w(e_i) = k_i$. Graf ten jest tylko nieco inną reprezentacją układu nierówności normalnych i dalej będziemy traktowali te reprezentacje zamiennie.

Niech $p = v_1, v_2, \ldots, v_m$ będzie dowolną ścieżką w grafie nierówności. Oznaczmy kolejne krawędzie na tej ścieżce następująco: $e_i = (v_i, v_{i+1})$ dla $i = 1, 2, \ldots, m-1$. Łącząc odpowiadające im nierówności w ciąg, możemy wywnioskować, że:

$$v_1 \leqslant v_2 - w(e_1) \leqslant v_3 - w(e_1) - w(e_2) \leqslant \ldots \leqslant v_m - w(e_1) - \ldots - w(e_{m-1}), \qquad (1)$$

co znaczy, że każde wartościowanie φ musi spełniać zależność $\varphi(v_1) + w(p) \leqslant \varphi(v_m)$, gdzie $w(p) = \sum_{i=1}^{m-1} w(e_i)$ jest wagą ścieżki p.

Widząc to, dla każdej pary wierzchołków $u, v \in V$ od razu chcielibyśmy znaleźć najdłuższą ścieżkę z u do v, gdyż to ona dałaby najsilniejszą zależność spośród wszystkich ścieżek z u do v. Niestety, mogą zdarzyć się takie wierzchołki u, v, dla których nie istnieje żadna ścieżka z u do v. Co więcej, może się zdarzyć, że z pewnego wierzchołka do pewnego innego prowadzą ścieżki dowolnie dużej długości. Prawdopodobnie w większości grafów, które widzieliśmy w życiu, długość ścieżki pomiędzy danymi dwoma wierzchołkami była nieograniczona od góry (zakładając możliwość odwiedzania wierzchołków wielokrotnie). Tutaj sytuacja może być inna, bo w przypadku rozważanego grafu wagi krawędzi często będą ujemne. Niemniej jednak zawsze mogą się w nim zdarzyć ścieżki o nieograniczonej długości.

Aby łatwiej uporządkować te wszystkie przypadki, zajmijmy się najpierw ostatnim. Co oznaczałoby istnienie dowolnie długich ścieżek z pewnego wierzchołka u do pewnego wierzchołka v? Otóż jest to możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy graf G zawiera cykl o dodatniej wadze. Jeśli tak jest, to przemierzając taki cykl dowolnie wiele razy, możemy otrzymać dowolnie długą ścieżkę. Z drugiej strony, jeśli graf nie zawierałby cyklu o dodatniej wadze, to z każdej ścieżki można by usunąć wszystkie cykle, nie zmniejszając jej długości, i wtedy otrzymalibyśmy ścieżkę przemierzającą co najwyżej $|V|$ wierzchołków. Jednak ścieżki o ograniczonej liczbie wierzchołków mają też ograniczoną długość, bo wagi pojedynczych krawędzi są ograniczone. Stąd brak dodatniego cyklu oznaczałby, że wszystkie ścieżki w tym grafie mają długości ograniczone z góry.

No dobrze. Co w takim razie zrobić, jeśli graf G zawiera dodatni cykl? Odpowiedź jest bardzo prosta: wypisać `NIE`. Weźmy bowiem dowolny taki cykl p i dowolny wierzchołek v na tym cyklu. W podobny sposób, jak wyżej, możemy wywnioskować, że każde wartościowanie φ musi spełnić zależność $\varphi(v) + w(p) \leqslant \varphi(v)$, czyli $w(p) \leqslant 0$, co jest sprzeczne z założeniem o dodatniej wadze cyklu. Stąd zaś wniosek, że dla zadanych ograniczeń nie istnieje żadne wartościowanie.

Przyjmijmy teraz, że graf nie zawiera dodatniego cyklu. Okazuje się, że wtedy istnieje przynajmniej jedno poprawne wartościowanie. Mówi o tym następujący lemat, który wykorzystamy w dalszej części opisu. Dla dowolnych wierzchołków $u, v \in V$, przez $\mathrm{lp}_G(u, v)$ oznaczmy długość najdłuższej ścieżki z wierzchołka u do wierzchołka v w grafie G, pod warunkiem, że istnieje jakakolwiek ścieżka z u do v w G.

Lemat 1. Układ nierówności normalnych posiada wartościowanie wtedy i tylko wtedy, gdy jego graf nie zawiera cykli o dodatniej wadze.

Dowód: Przed chwilą udowodniliśmy, że istnienie dodatniego cyklu wymusza brak wartościowań, zajmijmy się więc implikacją przeciwną. Załóżmy, że graf G nie zawiera dodatniego cyklu. Skonstruujemy dla niego wartościowanie.

Najpierw dodajmy do grafu dodatkowy wierzchołek $s \notin V$ oraz krawędzie (s, v) o zerowych wagach dla wszystkich wierzchołków $v \in V$, otrzymując w ten sposób graf G'. Wtedy funkcja $\varphi(v) = \mathrm{lp}_{G'}(s, v)$ jest wartościowaniem dla tak wzbogaconego układu nierówności normalnych. Istotnie, weźmy dowolną nierówność $u + k \leqslant v$ i pokażmy, że jest spełniona. Niech $s \rightsquigarrow u$ będzie najdłuższą ścieżką z s do u. Zatem ścieżka $s \rightsquigarrow u \to v$ ma długość $\varphi(u) + k$, a ponieważ nie może być dłuższa niż najdłuższa ścieżka z s do v, zatem $\varphi(u) + k \leqslant \varphi(v)$. Wobec dowolności wyboru nierówności, funkcja φ jest wartościowaniem dla grafu G', a więc także dla G. ■

Silnie spójne składowe grafu nierówności

Weźmy teraz dwa dowolne wierzchołki $u, v \in V$ i zastanówmy się, jakie są możliwe różnice ich wartości $\varphi(v) - \varphi(u)$ dla różnych wartościowań φ. Jeżeli istnieje ścieżka zarówno z u do v, jak i w drugą stronę, to różnica ta jest ograniczona zarówno z dołu, jak i z góry, mamy wtedy bowiem dwie następujące zależności:

$$\varphi(u) + \mathrm{lp}_G(u, v) \leqslant \varphi(v), \quad \varphi(v) + \mathrm{lp}_G(v, u) \leqslant \varphi(u),$$

które można łącznie przedstawić jako:

$$\mathrm{lp}_G(u, v) \leqslant \varphi(v) - \varphi(u) \leqslant -\mathrm{lp}_G(v, u). \tag{2}$$

Do tego wniosku wrócimy później, ale najpierw zastanówmy się, co w przypadku, gdy nie istnieje ścieżka z u do v lub nie istnieje ścieżka z v do u. Mówimy wtedy, że wierzchołki te leżą w różnych *silnie spójnych składowych* grafu G.

Silnie spójna składowa grafu skierowanego to taki podzbiór jego wierzchołków, że pomiędzy każdymi dwoma wierzchołkami z tej składowej istnieją ścieżki w obie strony, zaś dla dowolnego wierzchołka u z tej składowej i wierzchołka v spoza niej nie istnieje ścieżka przynajmniej w jedną stronę pomiędzy nimi. O silnie spójnych składowych można przeczytać np. w książce [23]. Mają one tę ciekawą własność, że graf silnie spójnych składowych, w którym krawędź ze składowej A prowadzi do składowej B wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego (lub równoważnie: dowolnego) wierzchołka $a \in A$ istnieje ścieżka do każdego (lub równoważnie: dowolnego) wierzchołka $b \in B$, jest DAG-iem (ang. *directed acyclic graph*, czyli skierowany graf acykliczny). Przypomnijmy, że każdy DAG można posortować topologicznie, tzn. ustawić jego wierzchołki w ciąg tak, aby każda krawędź prowadziła z lewej strony w prawą.

Korzystając z tych własności, podzielmy graf G na silnie spójne składowe i posortujmy je topologicznie, otrzymując ciąg składowych $V_1, V_2, \ldots, V_s$. Następnie znajdźmy wartościowanie o największej mocy osobno w każdej z nich i oznaczmy te wartościowania odpowiednio przez $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$. Oznaczmy przez K maksymalną wagę krawędzi w grafie: $K = \max(0, \max_{e \in E} w(e))$, a przez d_i (dla $i = 1, 2, \ldots, s$) — najdłuższą ścieżkę w każdej ze składowych:

$$d_i = \max_{u, v \in V_i} \mathrm{lp}_{V_i}(u, v).$$

Zauważmy, że dodanie tej samej liczby do wszystkich zmiennych w wartościowaniu φ_i nie wpływa ani na poprawność tego wartościowania, ani na jego moc. Możemy więc tak „przesunąć” każde z wartościowań φ_i, aby dla każdego $i = 1, 2, \ldots, s$ zachodził warunek:

$$\min_{v \in V_i} \varphi_i(v) = (K + 1) \cdot (i - 1) + (d_1 + \ldots + d_{i-1}).$$

Połączmy wartościowania φ_i w funkcję φ na całym zbiorze zmiennych V następująco:

$$\varphi(v) = \varphi_{c(v)}(v),$$

przy czym $c(v)$ oznacza numer składowej, do której należy wierzchołek v. Okazuje się, że tak utworzona funkcja φ jest wartościowaniem dla całego zbioru, którego moc jest równa sumie mocy wartościowań φ_i.

Po pierwsze: dlaczego funkcja φ jest wartościowaniem? Oczywiście spełnia ona wszystkie zależności pomiędzy parami wierzchołków leżących w tej samej silnie spójnej składowej. Weźmy więc $u \in V_i$ oraz $v \in V_j$, gdzie $i \neq j$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $i < j$. Ponieważ składowe są posortowane topologicznie, to nie może istnieć w grafie składowych krawędź z V_j do V_i, a tym samym nie może istnieć w G krawędź z v do u. Może zaś istnieć krawędź z u do v o pewnej wadze k. Jakie wartości może przyjąć $\varphi(v) - \varphi(u)$? Wiemy, że:

- $\varphi(u) = \varphi_i(u) \in [p_i, p_i + d_i]$, gdzie $p_i = (K + 1) \cdot (i - 1) + (d_1 + \ldots + d_{i-1})$,
- $\varphi(v) = \varphi_j(v) \in [p_j, p_j + d_j]$, gdzie $p_j = (K + 1) \cdot (j - 1) + (d_1 + \ldots + d_{j-1})$.

Tak więc maksymalna wartość $\varphi(u)$ to $p_i + d_i$, a minimalna wartość $\varphi(v)$ to p_j. Stąd:

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geqslant p_j - p_i - d_i = (K + 1) \cdot (j - i) + (d_i + \ldots + d_{j-1}) - d_i \geqslant K + 1.$$

Wiemy jednak, że $k < K + 1$, więc nierówność $\varphi(u) + k \leqslant \varphi(v)$ jest spełniona. To pokazuje też, że zbiory wartości poszczególnych wartościowań składowych φ_i są rozłączne, co prowadzi bezpośrednio do wniosku, że moc φ jest równa sumie mocy wszystkich φ_i.

Jaki z tego płynie dla nas wniosek? Bardzo prosty — możemy na początku algorytmu wykonać wstępne obliczenia, polegające na podziale grafu nierówności na silnie spójne składowe, następnie każdą składową zanalizować oddzielnie i zwrócić sumę otrzymanych wyników. Dzielenie grafu na silnie spójne składowe można wykonać przy użyciu dwóch przeszukiwań grafu w głąb (algorytm DFS). Dokładny opis tego algorytmu można znaleźć we wspomnianej już książce [23].

Analiza pojedynczej silnie spójnej składowej

Odtąd możemy już założyć, że rozważany graf nierówności G jest silnie spójny (a więc istnieją w nim ścieżki między każdą parą wierzchołków) oraz nie zawiera dodatnich cykli. Możemy zatem używać oznaczenia $\mathrm{lp}_G(u, v)$ dla dowolnych wierzchołków $u, v \in V$.

Wróćmy teraz do spostrzeżenia (2). Okazuje się, że podane tam ograniczenie na różnicę wartości $\varphi(v) - \varphi(u)$ jest nie tylko prawdziwe, ale też pokazuje wszystkie możliwe wartości, jakie ta różnica może przyjąć.

Twierdzenie 1. *Niech $G = (V, E)$ będzie silnie spójnym grafem nierówności bez dodatnich cykli i niech $u, v \in V$. Niech Φ będzie zbiorem wszystkich wartościowań zbioru V. Wtedy:*

$$\{\varphi(v) - \varphi(u) : \varphi \in \Phi\} = \mathrm{dint}_G(u, v)$$

gdzie zbiór $\mathrm{dint}_G(u, v)$ jest przedziałem liczb całkowitych x, które spełniają $\mathrm{lp}_G(u, v) \leqslant x \leqslant -\mathrm{lp}_G(v, u)$.

Dowód: Wyżej dowiedliśmy już, że $\{\varphi(v) - \varphi(u) : \varphi \in \Phi\} \subseteq \mathrm{dint}_G(u, v)$. Pozostaje wykazać zawieranie odwrotne. Niech k będzie dowolnym elementem przedziału liczb całkowitych $\mathrm{dint}_G(u, v)$. Wykażemy, że istnieje wartościowanie φ, dla którego $\varphi(v) - \varphi(u) = k$.

Dodajmy do grafu G dwie krawędzie odpowiadające dwóm nierównościom normalnym: $u + k \leqslant v$ oraz $v - k \leqslant u$ (razem wyrażającym $v - u = k$); oznaczmy otrzymany graf przez G'. Układ nierówności grafu G posiada wartościowanie φ spełniające $\varphi(v) - \varphi(u) = k$ wtedy i tylko wtedy, gdy G' posiada jakiekolwiek wartościowanie. Z lematu 1 wynika z kolei, że układ nierówności grafu G' posiada wartościowanie wtedy i tylko wtedy, gdy G' nie zawiera dodatniego cyklu. Pozostaje więc jedynie to udowodnić.

Załóżmy przeciwnie, że G' zawiera cykl o dodatniej wadze. Weźmy najmniejszy taki cykl C (ze względu na liczbę wierzchołków). Wtedy musi to być cykl prosty (tzn. wierzchołki na nim nie powtarzają się) i musi zawierać przynajmniej jedną z dwóch dodanych krawędzi, ponieważ graf G nie zawierał żadnego dodatniego cyklu. Jeśli C zawiera obie dodane krawędzie, to musi mieć długość 2, ponieważ jest cyklem prostym. Ale suma wag tych dwóch krawędzi wynosi 0, więc C nie jest wtedy cyklem dodatnim.

Załóżmy więc, że na cyklu C leży dokładnie jedna z dodanych krawędzi. Załóżmy, że jest to (u, v) (przeciwny przypadek rozpatruje się symetrycznie). Niech p będzie ścieżką na cyklu C prowadzącą z v do u. Ponieważ cykl C jest prosty, więc ścieżka p musiała istnieć również w oryginalnym grafie G, skąd $w(p) \leqslant \mathrm{lp}_G(v, u)$. Z założenia zaś $k \leqslant -\mathrm{lp}_G(v, u)$. Stąd $w(C) = k + w(p) \leqslant -\mathrm{lp}_G(v, u) + \mathrm{lp}_G(v, u) = 0$, co jest ponownie sprzeczne z założeniem o dodatniości cyklu C.

Tak więc graf G' nie zawiera cyklu o dodatniej wadze, więc istnieje wartościowanie φ układu nierówności odpowiadającego grafowi G spełniające warunek $\varphi(v) - \varphi(u) = k$. ■

Dzięki twierdzeniu 1 jesteśmy już bardzo blisko rozwiązania. Pozostaje nam tylko sformułowanie następującego wniosku:

Wniosek 1. Niech G będzie grafem jak w twierdzeniu 1. Oznaczmy przez D *maksymalną rozciągłość* wartościowania:

$$D = \max_{u,v \in V} \max\{\varphi(v) - \varphi(u) : \varphi \in \Phi\}.$$

Wtedy $D = \max_{u,v \in V}(-\mathrm{lp}_G(u, v))$. Jeżeli ponadto graf G zawiera jedynie krawędzie o wagach -1, 0 oraz 1, to maksymalną mocą wartościowania tego grafu jest $D + 1$.

Dowód: Bezpośrednio z twierdzenia 1 wynika, że

$$\max\{\varphi(v) - \varphi(u) : \varphi \in \Phi\} = -\mathrm{lp}_G(v, u).$$

Natomiast drugi sformułowany we wniosku fakt wymaga pewnego komentarza.

Niech φ będzie takim wartościowaniem, a u i v takimi wierzchołkami, że $\varphi(v) - \varphi(u) = D$. Niech $u = u_1, u_2, \ldots, u_m = v$ będzie najdłuższą ścieżką z u do v w grafie G. Ponieważ dla każdego $i = 1, \ldots, m-1$ zachodzi $w(u_i, u_{i+1}) \in \{-1, 0, 1\}$, więc $\varphi(u_{i+1}) - \varphi(u_i) \leqslant 1$, czyli w każdym kroku na tej ścieżce wartościowanie zwiększa się co najwyżej o jeden. Jednak po przejściu całej ścieżki zwiększa się o D. To znaczy, że każda z wartości od $\varphi(u)$ do $\varphi(v)$ musiała być przyjęta przez φ dla pewnej zmiennej u_i. Dostajemy więc $D+1$ różnych wartości zmiennych. Z drugiej strony nie istnieje wartościowanie o większej mocy, bo wtedy jego rozciągłość $\max_{u,v\in V}(\varphi(v) - \varphi(u))$ musiałaby przekroczyć D. ■

Algorytm

Wiemy zatem, że dla silnie spójnego grafu nierówności G, nie zawierającego cykli dodatnich, maksymalna moc wartościowania wynosi $1 + \max_{u,v\in V}(-\mathrm{lp}_G(u, v))$. Aby znaleźć tę wartość, wystarczy obliczyć długości najdłuższych ścieżek pomiędzy każdą parą wierzchołków w G. Jak znajdować najdłuższe ścieżki? Wystarczy zmienić znak przy wadze każdej krawędzi, otrzymując graf H, a następnie obliczyć w nim (najkrótsze) odległości $\mathrm{dist}_H(u, v)$ między każdą parą wierzchołków u i v. Ponieważ dla każdej pary wierzchołków u i v zachodzi $\mathrm{dist}_H(u, v) = -\mathrm{lp}_G(u, v)$, więc rozwiązaniem jest liczba $1 + \max_{u,v\in V} \mathrm{dist}_H(u, v)$, czyli średnica grafu H powiększona o jeden.

Jest kilka algorytmów, które pozwalają tę średnicę grafu H obliczyć (pamiętajmy tutaj, że graf H może zawierać krawędzie ujemnej długości):

- n powtórzeń algorytmu Bellmana-Forda, co daje złożoność czasową $O(|V|^2 \cdot |E|)$ (takie rozwiązanie pozwalało uzyskać ok. 50% punktów),
- algorytm Floyda-Warshalla o złożoności czasowej $O(|V|^3)$,
- algorytm Johnsona o złożoności czasowej $O(|V| \cdot |E| + |V|^2 \log |E|)$.

Co więcej, każdy z wymienionych algorytmów umożliwia sprawdzenie, czy graf H nie zawiera ujemnych cykli, a zatem czy graf G nie zawiera dodatnich cykli. W rozwiązaniach wzorcowych wykorzystano algorytmy Floyda-Warshalla i Johnsona. O wszystkich trzech algorytmach można przeczytać w książce [23].

Implementację rozwiązań wzorcowych można znaleźć w plikach `fes.cpp`, `fes0.cpp`, `fes1.pas`, `fes2.cpp` i `fes3.cpp`).

Możliwe przyspieszenia

Możliwe jest jeszcze dodatkowe zredukowanie grafu, które wprawdzie może przyspieszyć algorytm, ale nie zmniejsza jego asymptotycznej złożoności.

Otóż na samym początku można zidentyfikować wszystkie grupy zmiennych t_i związanych (bezpośrednio lub pośrednio) zależnościami pierwszego typu, tzn. $t_a + 1 = t_b$. Wtedy wartości zmiennych w jednej takiej grupie są jednoznacznie wyznaczone przez wartość dowolnego jej reprezentanta. Następnie każdą taką grupę można zamienić na pojedynczego reprezentanta lub na dwóch reprezentantów (o największej i najmniejszej wartości w grupie), odpowiednio modyfikując pozostałe nierówności.

To usprawnienie nie było jednak wymagane do uzyskania maksymalnej punktacji.

Testy

Poniższa tabela przedstawia testy wykorzystane do oceny rozwiązań; w szczególności: testy grupy *a* od siódmego włącznie składają się z dużego cyklu i kilku małych składowych sprawdzających poprawność; testy grupy *b* od trzeciego włącznie zostały wygenerowane przez losowe ustawianie zawodników na mecie i ujawnianie losowo zależności pomiędzy nimi; testy grupy *c* to małe testy losowe połączone w DAG; testy grupy *d* to duże testy wydajnościowe wymuszające w niektórych algorytmach dużą liczbę odwiedzin tego samego wierzchołka. Testy z odpowiedzią `NIE` to: *1b*, *4a*, *5a* oraz *6a*.

Liczba s podana w opisie testów oznacza liczbę silnie spójnych składowych odpowiedniego grafu nierówności.

Nazwa	n	m_1	m_2	s
fes1a.in	8	3	9	4
fes1b.in	6	3	7	1
fes2a.in	7	2	4	5
fes2b.in	6	2	4	2
fes3a.in	27	12	15	12
fes3b.in	53	71	386	8
fes3c.in	56	40	12	12
fes4a.in	101	20	106	80
fes4b.in	62	41	900	22
fes4c.in	78	60	18	12
fes5a.in	101	20	119	82
fes5b.in	98	17	6 000	49
fes5c.in	250	140	3 129	153
fes6a.in	101	20	144	81
fes6b.in	353	53	6 901	279
fes6c.in	250	155	3 070	159
fes6d.in	600	420	6 365	1
fes7a.in	600	176	397	50
fes7b.in	311	112	3 012	206
fes7c.in	600	718	30 251	290
fes7d.in	600	420	6 365	1
fes8a.in	600	174	390	52
fes8b.in	600	804	5 072	106
fes8c.in	600	763	30 303	283
fes8d.in	600	420	6 365	1
fes9a.in	600	165	404	50
fes9b.in	600	68	50 090	181
fes9c.in	600	795	30 198	279
fes9d.in	600	420	6 365	1
fes10a.in	600	161	416	49
fes10b.in	600	509	50 090	134
fes10c.in	600	816	30 158	281
fes10d.in	600	420	6 365	1
fes11a.in	600	174	390	52
fes11b.in	600	40 139	50 090	30
fes11c.in	600	779	30 198	286
fes11d.in	600	420	6 365	1