Jakub Pawlewicz
Treść zadania, Opracowanie

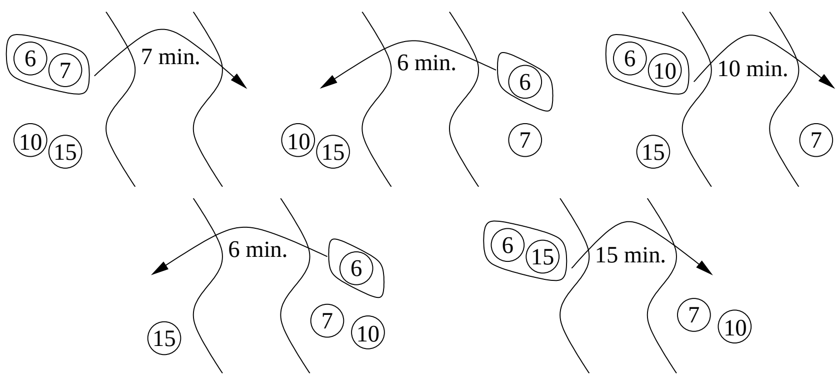
Michał Adamaszek
Program

Most

W środku nocy grupa turystów chce przejść przez stary, zniszczony, dziurawy most. Turyści mają jedną latarkę. Światło latarki umożliwia przejście przez most maksymalnie dwóm turystom na raz. Turyści nie mogą przechodzić przez most bez latarki ani w większych niż dwuosobowe grupach, gdyż grozi to wpadnięciem do rzeki. Każdemu turyście przejście przez most zajmuje określony czas. Dwóch turystów idących razem potrzebuje na przejście przez most tyle czasu, co wolniejszy z nich. Jaki jest najkrótszy czas, w którym wszyscy turyści mogą przejść przez most?

Przykład

Przypuśćmy, że grupa liczy czterech turystów. Pierwszy z nich potrzebuje na przejście przez most 6 minut, drugi 7 minut, trzeci 10 minut, a czwarty 15 minut. Poniższy rysunek przedstawia, w jaki sposób turyści mogą przejść przez most w 44 minuty. Mogą to jednak zrobić szybciej. Jak?



Przykładowy sposób przejścia mostu w 44 minuty. Liczby w kółeczkach oznaczają liczby minut, jaką turysta potrzebuje na przejście mostu.

Zadanie

Napisz program, który:

- *wczyta ze standardowego wejścia opis grupy turystów,*
- *znajdzie najkrótszy czas wystarczający do przejścia przez most,*
- *wypisze wynik na standardowe wyjście.*

Wejście

W pierwszym wierszu standardowego wejścia zapisana jest jedna dodatnia liczba całkowita n — liczba turystów, $1 \leqslant n \leqslant 100\,000$. W kolejnych n wierszach zapisany jest niemalejący ciąg n dodatnich liczb całkowitych nie większych niż $1\,000\,000\,000$, po jednej w każdym wierszu. Liczba w $i+1$-szym wierszu ($1 \leqslant i \leqslant n$) określa czas potrzebny i-temu turyście na przejście przez most. Suma tych czasów nie przekracza $1\,000\,000\,000$.

Wyjście

Twój program powinien wypisać na standardowe wyjście, w pierwszym wierszu, jedną liczbę całkowitą — najkrótszy czas wystarczający, aby wszyscy turyści przeszli na drugą stronę mostu.

Przykład

Dla danych wejściowych:

```
4
6
7
10
15
```

poprawnym wynikiem jest:

```
42
```

Rozwiązanie

Załóżmy, że $n \geqslant 2$. Przypadek z tylko jednym turystą, jest trywialny. Rozwiązanie zadania jest bardzo proste i można opisać je jednym wzorem przedstawionym w twierdzeniu 1. O wiele trudniej jest udowodnić, że wzór (1) opisuje rzeczywiście najkrótszy czas przejścia turystów przez most.

Oznaczmy turystów etykietami od 1 do n. Niech czasy przejścia turystów wynoszą $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n$.

Twierdzenie 1 *Minimalny czas przejścia przez most wynosi*

$$\min_{0 \leqslant k \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} S_k, \tag{1}$$

gdzie

$$S_k = (n-k-2)t_1 + (2k+1)t_2 + \sum_{i=3}^{n-2k} t_i + \sum_{i=0}^{k-1} t_{n-2i}. \tag{2}$$

Przykład 1 Dla $n = 6$ wzór (1) ma postać:

$$\min\{4t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6, 3t_1 + 3t_2 + t_3 + t_4 + t_6, 2t_1 + 5t_2 + t_4 + t_6\}.$$

Liczenie (1) można wykonać w czasie $O(n)$, gdyż $S_k - S_{k-1} = -t_1 + 2t_2 - t_{n-2k+1}$, skąd mamy równoważność:

$$S_{k-1} > S_k \iff 2t_2 - t_1 < t_{n-2k+1}. \tag{3}$$

Z (3) wynika, że wyznaczenie optymalnej wartości k polega na znalezieniu miejsca dla wartości $2t_2 - t_1$ w posortowanej liście wartości t_i:

$$k = \max(\{i : 1 \leqslant 2i \leqslant n, 2t_2 - t_1 < t_{n-2i+1}\} \cup \{0\}). \tag{4}$$

Dzięki temu, że czasy przejścia turystów są posortowane od najmniejszej wartości do największej, rozwiązanie można przy odrobinie wysiłku zapisać w pamięci o rozmiarze $O(1)$, bez zapamiętywania wszystkich czasów w tablicy.

Dowód twierdzenia 1

Poniższy dowód zaczerpnięty jest z [27]. Przejście zbioru turystów A z lewego brzegu na prawy oznaczamy $\overrightarrow{A}$, natomiast z prawego na lewy oznaczamy $\overleftarrow{A}$. Będziemy rozważać ciągi takich przejść, a dokładniej przemienne ciągi takich przejść. Są to ciągi postaci $\overrightarrow{A_1}$, $\overleftarrow{A_2}$, $\overrightarrow{A_3}$, …, $\overleftarrow{A_{m-1}}$, $\overrightarrow{A_m}$. Taki ciąg tworzy możliwe przejście turystów przez most tylko wtedy, jeśli zachodzą warunki:

- Każdy zbiór A_i jest jedno lub dwuelementowym podzbiorem $\{1,\ldots,n\}$.
- Dla każdego turysty $a \in \{1,\ldots,n\}$ podciąg, utworzony z przejść ciągu $\overrightarrow{A_1}, \overleftarrow{A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_m}$, w których uczestniczył a, składa się z przejść na przemian w prawo i w lewo, zaczyna się i kończy na przejściu w prawo.

Innymi słowy pierwszy warunek oznacza, że przez most mogą przechodzić tylko 1 lub 2 osoby, a drugi warunek oznacza, że turysta a na początku musi się znajdować na lewym brzegu, przy przejściu zmieniać brzeg na przeciwny, a na końcu ma się znaleźć na prawym brzegu.

Lemat 2 *W rozwiązaniu optymalnym w prawo przechodzą zawsze dwie osoby, zaś w lewo przechodzi zawsze jedna osoba.*

Dowód Chcemy udowodnić, że w rozwiązaniu występują tylko przejścia postaci $\overrightarrow{\{x,y\}}$ oraz $\overleftarrow{\{x\}}$. Rozważmy pierwsze wystąpienie w ciągu przemiennym, które nie jest danej postaci. Rozważmy dwa przypadki.

1. Rozważane przejście jest postaci $\overrightarrow{\{a\}}$. Jeśli jest to pierwsze przejście w ciągu, to następnym musi być $\overleftarrow{\{a\}}$, wtedy dwa kolejne przejścia $\overrightarrow{\{a\}}, \overleftarrow{\{a\}}$ mogą być usunięte.

   Zatem, niech przejście $\overrightarrow{\{a\}}$ nie będzie pierwszym przejściem. Weźmy przejście bezpośrednio przed $\overrightarrow{\{a\}}$. Będzie to $\overleftarrow{\{b\}}$. W sytuacji, gdy $a = b$, oba przejścia można usunąć. Niech więc $a \neq b$. Weźmy ostatnie przejście przed $\overleftarrow{\{b\}}$, w którym brał udział turysta a lub b. Będzie to przejście $\overleftarrow{\{a\}}$ lub $\overrightarrow{\{b,c\}}$. W obu przypadkach możemy zmodyfikować ciąg tak, aby otrzymać rozwiązanie o krótszym sumarycznym czasie przejścia:

$$\begin{array}{rcl} P_1, \overleftarrow{\{a\}}, P_2, \overleftarrow{\{b\}}, \overrightarrow{\{a\}}, P_3 & \Longrightarrow & P_1, \overleftarrow{\{b\}}, P_2, P_3 \\ P_1, \overrightarrow{\{b,c\}}, P_2, \overleftarrow{\{b\}}, \overrightarrow{\{a\}}, P_3 & \Longrightarrow & P_1, \overrightarrow{\{a,c\}}, P_2, P_3, \end{array}$$

gdzie P_1, P_2, P_3 oznaczają pewne ciągi przejść, przy czym P_2 jest ciągiem przejść nie zawierających a i b.

2. Rozważane przejście jest postaci $\overleftarrow{\{a,b\}}$. Weźmy ostatnie przejście przed $\overleftarrow{\{a,b\}}$, w którym brał udział turysta a. Niech to będzie przejście $\overrightarrow{\{a,x\}}$ (możliwe jest $x = b$). Możemy z obu ruchów usunąć a, nie zwiększając sumarycznego czasu przejścia:

$$P_1, \overrightarrow{\{a,x\}}, P_2, \overleftarrow{\{a,b\}}, P_3 \quad \Longrightarrow \quad P_1, \overrightarrow{\{x\}}, P_2, \overleftarrow{\{b\}}, P_3.$$

Otrzymany ciąg nie może być optymalny, co wynika z analizy przypadku 1. ■

W dalszej części rozważań najpierw uogólnimy nasz problem. Dzięki temu łatwo będzie wskazać rozwiązanie optymalne dla uogólnionego problemu. Na końcu pokażemy, że dla uzyskanego rozwiązania optymalnego daje się skonstruować ciąg przejść turystów spełniający warunki zadania.

Opiszemy teraz nasz problem na grafie składającym się z wierzchołków $\{1,\ldots,n\}$. Dla każdej pary $\overrightarrow{\{x,y\}}$ w ciągu przejść tworzymy krawędź $\{x,y\}$ z wagą $\max\{t_x,t_y\}$, równą czasowi przejścia turystów x,y na prawą stronę. Tak opisane rozwiązanie jest multigrafem (graf z dozwolonymi krawędziami równoległymi) $G = (V,E)$ spełniającym warunki:

$$\deg(i) \geqslant 1 \quad \text{dla każdego } i = 1,\ldots,n, \tag{5}$$
$$|E| = n-1. \tag{6}$$

Wynikają one z lematu 2. Warunek (5) zachodzi dlatego, że każdy turysta musi co najmniej raz przejść most w prawo. Ponadto ciąg przejść będzie się składać z $n-1$ przejść dwóch osób w prawo i $n-2$ przejść jednej osoby w lewo, skąd mamy (6).

Wartość $\deg(i)$, stopień wierzchołka i, oznacza, ile razy turysta i idzie w prawo. A zatem musi on iść $\deg(i)-1$ razy w lewo, co daje dodatkowy czas przejścia $(\deg(i)-1)t_i$. Zatem całkowity czas przejścia turystów przez most w sposób opisany przez graf G wynosi

$$\sum_{i=1}^{n}(\deg(i)-1)t_i + \sum_{\{x,y\}\in E}\max\{t_x,t_y\}. \tag{7}$$

Zwróćmy uwagę, że w sumie $\sum_{\{x,y\}\in E}$ krawędź wielokrotna występuje tyle razy, ile wynosi jej krotność. Zamiast minimalizować (7) możemy dodać stałą $\sum_{i=1}^{n} t_i$ i minimalizować wyrażenie

$$\sum_{i=1}^{n}\deg(i)t_i + \sum_{\{x,y\}\in E}\max\{t_x,t_y\}, \tag{8}$$

co przepisujemy jako

$$\sum_{\{x,y\}\in E}\left(t_x+t_y+\max\{t_x,t_y\}\right). \tag{9}$$

Możemy tak zrobić, gdyż wierzchołek i jest końcem $\deg(i)$ krawędzi, a więc składnik t_i wystąpi w sumie (9) $\deg(i)$ razy, skąd mamy (8)$\Leftrightarrow$(9). Teraz przyjmując $c_{xy} = t_x+t_y+\max\{t_x,t_y\}$, dostajemy zadanie:

$$\text{Znaleźć taki graf } G\text{, który minimalizuje } \sum_{\{x,y\}\in E} c_{xy} \text{ przy warunkach (5) i (6).} \tag{10}$$

Tak postawiony problem wydaje się być ogólniejszy niż szukanie optymalnego ciągu przejść turystów. Oczywiste jest, że dla każdego ciągu przejść możemy skonstruować graf G spełniający (5) i (6). Nieoczywistym, ale prawdziwym faktem jest, że z grafu G możemy skonstruować odpowiedni ciąg przejść turystów. Nie będziemy jednak dowodzić tego w ogólnym przypadku. Wystarczy pokazać, że dla optymalnego grafu G ciąg przejść jest konstruowalny. Wpierw jednak zobaczmy, jakie są właściwości rozwiązania optymalnego.

Lemat 3 *Istnieje optymalne rozwiązanie G spełniające warunki:*

(a) Jeśli dwie krawędzie mają końce w czterech różnych wierzchołkach $x < y < z < u$, to tymi krawędziami są $\{x,y\}$ i $\{z,u\}$.

(b) Jeśli dwie krawędzie mają tylko jeden wspólny koniec, to tym końcem jest wierzchołek 1.

(c) Jeśli dwie krawędzie mają oba końce wspólne, to są to 1 i 2.

(d) Jeśli w grafie jest krawędź $\{1,i\}$, to w G są też krawędzie $\{1,j\}$ dla $j = 2,\ldots,i-1$.

(e) Jeśli krawędź $\{x,y\}$ nie ma końca w 1, czyli jest $1 < x < y$, to $y = x+1$.

Dowód

(a) Mamy trzy możliwości łączenia x, y, z, u dwoma rozłącznymi krawędziami. Najmniejszy koszt otrzymujemy dla krawędzi $\{x,y\}$ i $\{z,u\}$. Wynosi on $c_{xy}+c_{zu} = t_x+2t_y+t_z+2t_u$. Dla pozostałych dwóch par koszt ten wynosi $c_{xz}+c_{yu} = c_{xu}+c_{yz} = t_x+t_y+2t_z+2t_u$.

(b) Mamy dwie krawędzie $\{x,y\}$, $\{x,z\}$ i y lub z jest różne od 1. Niech $y \neq 1$. Wtedy, jeśli $x \neq 1$, to w grafie G moglibyśmy zamiast krawędzi $\{x,y\}$ wziąć krawędź $\{1,y\}$. Otrzymany graf miałby nie większą sumę (10) i spełniałby warunki (5) i (6).

(c) Mamy dwie krawędzie $\{x,y\}$. Jeśli byłoby $\{x,y\} \neq \{1,2\}$, to w grafie G moglibyśmy zamiast jednej krawędzi $\{x,y\}$ wziąć krawędź $\{1,2\}$. Ponownie otrzymany graf miałby nie większą sumę (10) i spełniałby warunki (5) i (6).

(d) Niech $1 < j < i$. Zastanówmy się, czy krawędź $\{x,j\}$, dla $x \neq 1$, może być w G. Z (b) mamy $x \neq i$, więc liczby 1, i, j, x są parami różne. Z (a) wynika, że j nie może być w parze z x, a ponieważ j musi być końcem jakiejś krawędzi, więc w G jest $\{1,j\}$.

(e) Załóżmy, że istnieje z takie, że $x < z < y$. Ponieważ $\deg(z) \geqslant 1$, więc w grafie jest krawędź $\{z,u\}$. Z (b) wynika, że $u \neq x$ i $u \neq y$. Zatem z (a) wynika, że w takim układzie x i y nie będą połączone krawędzią. Sprzeczność dowodzi, że $x+1 = y$. ■

Na podstawie lematu 3 możemy ustalić możliwą strukturę optymalnego rozwiązania G. Z (c) dostajemy, że jedyną krawędzią wielokrotną jest $\{1,2\}$. Wszystkie krawędzie o końcu w 1 to $\{1,j\}$, gdzie $j = 2,\ldots,i$, dla pewnego i — patrz (d). Każdy z pozostałych wierzchołków $x \in \{i+1,\ldots,n\}$ jest końcem dokładnie jednej krawędzi (b) i jego sąsiadem jest $x-1$ lub $x+1$ (e). Podsumowując otrzymujemy:

Twierdzenie 4 *Istnieje optymalny graf będący rozwiązaniem (10), który dla pewnego k, $0 \leqslant k \leqslant n/2-1$, składa się z następujących krawędzi:*

- *k „parujących krawędzi”* $\{n,n-1\}$, $\{n-2,n-3\}, \ldots, \{n-2k+2,n-2k+1\}$,
- $k+1$ *kopii krawędzi* $\{1,2\}$,
- *oraz* $n-2k-2$ *krawędzi* $\{1,3\}, \{1,4\}, \ldots, \{1,n-2k\}$.

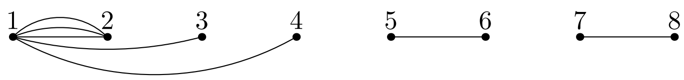
Lemat 5 *Dla grafu przedstawionego w twierdzeniu 4 istnieje odpowiedni ciąg przejść turystów.*

Dowód Konstruujemy odpowiedni ciąg przejść indukcyjnie po n. Dla $n=2$ ciąg przejść to $\overrightarrow{\{1,2\}}$. Dla $n=3$, to $\overrightarrow{\{1,3\}}$, $\overleftarrow{\{1\}}$, $\overrightarrow{\{1,2\}}$. Dla $n \geqslant 4$ mamy dwa przypadki:

1. $k \geqslant 1$. W grafie jest krawędź $\{n,n-1\}$. Ciąg przejść zaczynamy od $\overrightarrow{\{1,2\}}$, $\overleftarrow{\{1\}}$, $\overrightarrow{\{n,n-1\}}$, $\overleftarrow{\{2\}}$. Po usunięciu z grafu krawędzi $\{1,2\}$ i $\{n,n-1\}$ otrzymujemy graf optymalny dla $n-2$ osób i z $k-1$ parującymi krawędziami.

2. $k=0$. W grafie jest krawędź $\{1,n\}$. Ciąg przejść zaczynamy od $\overrightarrow{\{1,n\}}$, $\overleftarrow{\{1\}}$. Po usunięciu z grafu krawędzi $\{1,n\}$ dostajemy optymalny graf dla $n-1$ osób i $k=0$. ■

W celu dokończenia dowodu twierdzenia 1 wystarczy sprawdzić, że całkowity czas przejścia turystów dany wzorem (7) dla grafu optymalnego z twierdzenia 4 wynosi S_k (2).



Rysunek 1: Graf optymalny dla $n=8$ i $k=2$

Przykład 2 Przykładowy graf będący optymalnym rozwiązaniem dla $n=8$ i $k=2$ przedstawiony jest na rysunku 1. Ciąg przejść skonstruowany zgodnie z dowodem lematu 5 jest następujący: $\overrightarrow{\{1,2\}}$, $\overleftarrow{\{1\}}$, $\overrightarrow{\{8,7\}}$, $\overleftarrow{\{2\}}$, $\overrightarrow{\{1,2\}}$, $\overleftarrow{\{1\}}$, $\overrightarrow{\{6,5\}}$, $\overleftarrow{\{2\}}$, $\overrightarrow{\{1,4\}}$, $\overleftarrow{\{1\}}$, $\overrightarrow{\{1,3\}}$, $\overleftarrow{\{1\}}$, $\overrightarrow{\{1,2\}}$.

Inne rozwiązania

Jeśli zauważymy tylko, że dowolny turysta może przechodzić tylko z 1 lub z sąsiadem otrzymamy wzór rekurencyjny. Niech c_i oznacza najkrótszy czas przejścia turystów 1, 2, …, i, wtedy zachodzi:

$$\begin{aligned} c_2 &= t_2, \\ c_3 &= t_1+t_2+t_3, \\ c_i &= \min\{c_{i-2}+t_1+2t_2+t_i, c_{i-1}+t_1+t_i\}, \quad \text{dla } i \geqslant 4. \end{aligned}$$

Wartości c_i wyliczamy dynamicznie. Taki algorytm działa w czasie $O(n)$ i pamięci $O(1)$.

Błędne rozwiązania

Jedno z błędnych rozwiązań polegało na tym, że każdego turystę parowało się z turystą 1. Odpowiada to $k = 0$ we wzorze (1).

W innych błędnych rozwiązaniach każdego turystę, oprócz 1, 2 i może 3, próbowano wysłać na drugi brzeg wraz z sąsiadem. Odpowiada to rozwiązaniu optymalnemu dla $k = \lfloor n/2 \rfloor - 1$.

Testy

Każdy z 10 testów, poza pierwszym, zawiera czasy zarówno mniejsze jak i większe od wartości granicznej $2t_2 - t_1$. Powodowało to, że takie rozwiązania jak opisane wyżej, dawały zbyt duży wynik.

nr testu	n	opis
1	4	prosty test poprawnościowy
2	10	czterej ostatni przechodzą podwójnie
3	19	któryś przechodzi pojedynczo, chociaż jego czas jest większy od wartości granicznej
4	32	po kilka osób z tym samym czasem, w szczególności z czasem granicznym
5	2001	dwaj z granicznym czasem, potem nieparzyście wielu
6	31415	losowy, mało osób poniżej granicznego czasu, dużo z równym i większym
7	50002	duże t_2
8	69999	małe t_2, tylko kilka osób z czasem mniejszym od granicznego
9	83001	nie ma w ogóle osób z czasem granicznym, wszystkie czasy mniejsze są takie same
10	100000	maksymalny test, siłą rzeczy ma dużo powtórzeń