Piotr Stańczyk **Piotr Stańczyk**
Treść zadania, Opracowanie Program

Osie symetrii

Jaś — powszechnie doceniany młody matematyk — ma młodszą siostrę Justynę. Jaś bardzo lubi swoją siostrę i chętnie pomaga jej w odrabianiu prac domowych, jednak — jak większość osób o ścisłym umyśle — nie lubi rozwiązywać tych samych zadań wielokrotnie. Na jego nieszczęście Justyna jest bardzo pilną uczennicą, przez co dla pewności prosi Jasia o sprawdzanie tych samych prac domowych wielokrotnie.

Pewnego słonecznego piątku, poprzedzającego długi majowy weekend, nauczycielka matematyki zadała wiele zadań polegających na wyznaczaniu osi symetrii różnych figur geometrycznych. Justyna zapewne spędzi znaczną część wolnego czasu, rozwiązując te zadania. Jaś zaplanował już sobie wyjazd nad morze, ale czuje się w obowiązku pomóc siostrze. Wymyślił więc, że najlepszym rozwiązaniem problemu będzie napisanie programu, który ułatwi sprawdzanie odpowiedzi do rozwiązanych przez Justynę zadań. Ponieważ Jaś jest matematykiem, a nie informatykiem, a Ty jesteś jego najlepszym kolegą, Tobie przypadło napisanie stosownego programu.

Zadanie

Napisz program, który:

- *wczyta ze standardowego wejścia opisy wielokątów,*
- *dla każdego wielokąta wyznaczy liczbę osi symetrii,*
- *wypisze wynik na standardowe wyjście.*

Wejście

Pierwszy wiersz wejścia zawiera jedną liczbę naturalną t ($1 \leqslant t \leqslant 10$) — jest to liczba wielokątów, dla których należy wyznaczyć liczbę osi symetrii. Następnie znajduje się t opisów wielokątów. Pierwszy wiersz opisu zawiera jedną liczbę naturalną n ($3 \leqslant n \leqslant 100\,000$) oznaczającą liczbę wierzchołków wielokąta. Każdy z następnych n wierszy zawiera dwie liczby całkowite x i y ($-100\,000\,000 \leqslant x,y \leqslant 100\,000\,000$) reprezentujące współrzędne kolejnych wierzchołków wielokąta. Wielokąty nie muszą być wypukłe, ale nie mają samoprzecięć — jedynym punktem wspólnym dwóch różnych boków jest ich wspólny koniec i każdy wierzchołek należy do dokładnie dwóch boków. Żadne dwa kolejne boki wielokąta nie są równoległe.

Wyjście

Program powinien wypisać dokładnie t wierszy; k-ty wiersz powinien zawierać dokładnie jedną liczbę naturalną — liczbę osi symetrii k-tego wielokąta.

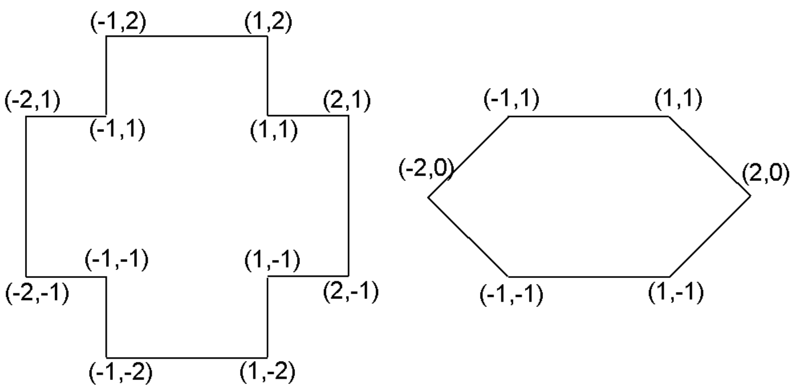
Przykład

Dla danych wejściowych:

```
2
12
1 -1
2 -1
2 1
1 1
1 2
-1 2
-1 1
-2 1
-2 -1
-1 -1
-1 -2
1 -2
6
-1 1
-2 0
-1 -1
1 -1
2 0
1 1
```

poprawnym wynikiem jest:

```
4
2
```



Rozwiązanie

Wstępne obserwacje

Przystępując do rozwiązywania zadania, należy na wstępie zastanowić się, jakie interesujące nas własności posiadają osie symetrii wielokątów. Własności, których poszukujemy, nie tylko pozwolą na rozwiązanie zadania, ale również mogą pomóc w wymyśleniu efektywnego algorytmu.

Pierwszą ważną obserwacją jest fakt, iż każda oś symetrii wielokąta musi mieć co najmniej jeden punkt wspólny z tym wielokątem. Wynika to bezpośrednio z tego, że wielokąt jest spójny (potocznie mówiąc, można go narysować na kartce papieru bez odrywania ołówka). W związku z tym, dla każdej prostej l nieprzecinającej wielokąta w, znajduje się on dokładnie po jednej stronie prostej l, a co za tym idzie l nie jest osią symetrii w.

Istotnym założeniem, jakie znajdujemy w treści zadania, jest informacja, że rozpatrywane wielokąty są proste (ich obwody nie zawierają samoprzecięć). Założenie to gwarantuje, że każda oś symetrii wielokąta przecina go w dokładnie dwóch różnych punktach. W celu wykazania tego faktu rozpatrzmy wielokąt w oraz pewną jego oś symetrii l. Wiemy już (z poprzednich rozważań), że istnieje co najmniej jeden punkt wspólny obwodu wielokąta w i prostej l. Wybierzmy dowolnie punkt przecięcia wielokąta w z prostą l i nazwijmy go A. Wyobraźmy sobie, że z punktu A wyruszają dwa roboty i poruszają się symetrycznie po obwodzie wielokąta po obu stronach osi l. W końcu roboty spotykają się ponownie w pewnym punkcie — muszą kiedyś się spotkać, gdyż wielokąt jest łamaną zamkniętą; nazwijmy ten punkt B. Punkt B jest różny od punktu A (inaczej obwód wielokąta zawierałby samoprzecięcie). Co więcej, w punkcie B roboty zakończyły sumaryczne obchodzenie całego wielokąta (w przeciwnym przypadku spotkałyby się w punkcie będącym samoprzecięciem obwodu wielokąta). Oczywiste jest także, że punkt B znajduje się na osi l. Zatem każda rozpatrywana przez nas oś symetrii ma dokładnie dwa różne punkty przecięcia z obwodem wielokąta.

Zastanówmy się, jak mogą wyglądać punkty przecięcia obwodu wielokąta w z osią symetrii l. Bez wątpienia istnieją trzy możliwe sytuacje:

- oś symetrii przechodzi przez dwa wierzchołki wielokąta,
- oś symetrii przecina dwa boki wielokąta,
- oś symetrii przecina jeden bok i przechodzi przez jeden wierzchołek.

W przypadku punktu przecięcia osi symetrii z obwodem wielokąta w wierzchołku, prosta l musi być dwusieczną kąta w tym wierzchołku. Podobnie, jeśli oś symetrii przecina bok wielokąta, to musi być do niego prostopadła. Analizując treść zadania, jesteśmy w stanie powiedzieć coś więcej na temat przecięcia l z bokiem wielokąta. Jedno z założeń mówi bowiem, że żadne dwa kolejne boki nie są do siebie równoległe. Możemy z tego wywnioskować, że każda oś symetrii przecinająca bok wielokąta, musi być jego symetralną (końce rozpatrywanego boku są swoimi obrazami w symetrii osiowej, a zatem znajdują się w takiej samej odległości od osi l).

Z zebranych obserwacji wynika, że przez każdy wierzchołek wielokąta oraz przez każdy jego bok przechodzi co najwyżej jedna oś symetrii. Dzięki temu, problem postawiony w zadaniu możemy sprowadzić do wyznaczenia liczby boków i wierzchołków wielokąta, przez które przechodzi oś symetrii. Uzyskany w ten sposób wynik wystarczy podzielić przez dwa, aby uzyskać poszukiwaną liczbę osi symetrii.

Implementację rozwiązania możemy sobie dodatkowo ułatwić, dzieląc każdy bok na dwie równe części poprzez dodanie na środku sztucznych wierzchołków. W ten sposób możemy skupić się na zliczaniu wierzchołków, przez które przechodzą osie symetrii, nie martwiąc się już więcej bokami wielokąta (symetralne boków stają się dwusiecznymi kątów w dodanych wierzchołkach).

Biorąc pod uwagę wszystkie dotychczasowe spostrzeżenia, zadanie sprowadza się do sprawdzenia, dla każdego wierzchołka wielokąta, czy przechodzi przez niego oś symetrii. W zależności od tego, jak efektywnie jesteśmy w stanie odpowiadać na takie pytania, uzyskamy rozwiązanie o odpowiedniej złożoności obliczeniowej.

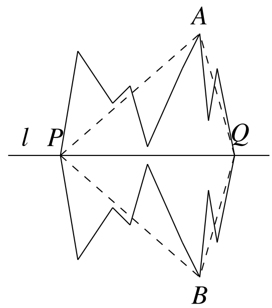
Rozwiązanie zbyt wolne

Dla ustalonego wierzchołka wielokąta można w łatwy sposób sprawdzić w czasie $O(n)$, czy przechodzi przez niego oś symetrii (gdzie n to liczba wierzchołków wielokąta). Ponumerujmy wierzchołki wielokąta (uwzględniając również sztuczne wierzchołki umieszczone na środkach boków) w kolejności występowania na obwodzie, od 0 do $2n-1$. Odwołując się do wierzchołka o numerze k dla $k < 0$ lub $k \geqslant 2n$, będziemy mieli na myśli wierzchołek o numerze $k \bmod 2n$.

Twierdzenie 1 *Przez wierzchołek o numerze k przechodzi oś symetrii l wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $m \in \{1, 2, \dots n-1\}$, wierzchołek o numerze $k-m$ jest obrazem wierzchołka o numerze $k+m$ w symetrii osiowej względem l.*

Dowód Dowód powyższego faktu jest dość prosty — wystarczy pamiętać o tym, że każda oś symetrii jest dwusieczną kąta w rozpatrywanym wierzchołku oraz że żaden z oryginalnych kątów wielokąta nie jest kątem półpełnym, a wszystkie sztucznie dodane są kątami półpełnymi. Załóżmy, że k jest wierzchołkiem oryginalnym, i rozważmy ponownie dwa roboty wyruszające z k w różne strony po obwodzie wielokąta. Zauważmy, że roboty docierają jednocześnie do wierzchołków $k-1$ i $k+1$ odpowiednio — wierzchołki te są swoimi wzajemnymi obrazami w symetrii względem osi l i są oba wierzchołkami sztucznie dodanymi. Dalej, łatwo zauważyć, że jeśli roboty wyruszają jednocześnie z dwóch wierzchołków $k-m$ oraz $k+m$ tego samego typu (oryginalnych lub sztucznych) będących swoimi wzajemnymi obrazami w symetrii, to docierają do kolejnej pary $k-m-1$ i $k+m+1$, która ma analogiczne własności — są to wierzchołki tego samego typu będące swoimi wzajemnymi obrazami w symetrii względem osi l. Na końcu roboty spotykają się w punkcie $k+n$. To kończy dowód twierdzenia. ■

Załóżmy, że mamy daną prostą l przechodzącą przez dwa różne punkty P i Q. Dla dwóch wierzchołków wielokąta A i B sprawdzenie, czy są one swoimi obrazami w symetrii osiowej względem l, można wykonać, wyznaczając odległości punktów A i B od punktów P i Q. Dokładniej, musi zachodzić $|AP| = |BP|$ oraz $|AQ| = |BQ|$. Prosta l przechodząca przez wierzchołki k i $k+n$ jest osią symetrii rozpatrywanego wielokąta, jeśli powyższa zależność zachodzi dla wszystkich $n-1$ par wierzchołków wielokąta postaci $k-m$ i $k+m$, gdzie $1 \leqslant m < n$.



Powyższy algorytm wymaga przeanalizowania $O(n)$ prostych (jako pary punktów wyznaczających proste wybieramy pary wierzchołków wielokąta k oraz $k+n$). Sprawdzenie każdej z nich zajmuje czas $O(n)$, a zatem cały program działa w czasie $O(n^2)$. Rozwiązanie można nieco poprawić, zauważając, że dla wielu potencjalnych osi symetrii dość szybko znajdowana jest para niesymetrycznych punktów dyskwalifikująca tę prostą — w takiej sytuacji można przerwać sprawdzanie i przejść do kolejnej prostej. Tak zmodyfikowany program działa bardzo szybko w przypadku wielokątów o nieregularnych kształtach.

Rozwiązanie wzorcowe

W poprzednim rozwiązaniu zadania nie uwzględnialiśmy żadnych zależności pomiędzy kolejno analizowanymi prostymi. Okazuje się, że zmieniając nieco podejście, jesteśmy w stanie istotnie poprawić złożoność obliczeniową programu. W tym celu spróbujmy popatrzeć na wielokąt jako na ciąg naprzemiennie występujących wierzchołków i odcinków. Z każdym bokiem wielokąta wiążemy jego długość, natomiast z każdym wierzchołkiem — kąt wewnętrzny wielokąta, występujący pomiędzy przylegającymi do tego wierzchołka bokami. Po ustaleniu wierzchołka początkowego i kierunku możemy zbudować naprzemienny ciąg c, składający się z długości boków oraz miar kątów, występujących kolejno na obwodzie wielokąta. Uzyskujemy w ten sposób jednoznaczną reprezentację wielokąta w postaci ciągu liczb. Musimy jedynie zadbać, by nie pomylić liczb reprezentujących kąty z liczbami reprezentującymi boki — w tym celu miary kątów możemy reprezentować na przykład za pomocą liczb ujemnych.

Twierdzenie 1 sformułowane dla wielokąta reprezentowanego tradycyjnie możemy teraz zapisać dla wielokąta reprezentowanego przez ciąg skonstruowany jak wyżej:

Twierdzenie 2 *Przez dowolny wierzchołek wielokąta reprezentowany przez element c_i ciągu $c = (c_0, c_1, \ldots, c_{2n-1})$ przechodzi oś symetrii wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $m \in \{1, 2, \ldots n-1\}$, $c_{i-m} = c_{i+m}$. Element c_i dla $i < 0$ lub $i \geqslant 2n$ utożsamiamy przy tym z elementem $c_{i \bmod 2k}$*

Przypatrując się powyższej własności, łatwo spostrzec podobieństwo postawionego problemu do zagadnienia wyszukiwania palindromów w tekście.

Definicja 1 *Palindromem* nazywamy sekwencję liter (liczb), która czytana od przodu oraz od tyłu jest taka sama. Dla przykładu, słowo *anna* jest palindromem o długości 4, natomiast słowo *anannnab* nie jest palindromem. Słowo to jednak zawiera palindrom o długości 5 — *annna*. *Promieniem* palindromu długości l nazywamy liczbę $\lfloor \frac{l}{2} \rfloor$.

Efektywność rozwiązania naszego zadania zależy teraz od tego, jak szybko jesteśmy w stanie wyszukiwać palindromy w zadanym ciągu. Z pomocą przychodzi nam w tym momencie algorytm Manachera, o którym można przeczytać w [16] (Algorytmy i struktury danych). Algorytm ten pozwala, dla każdej pozycji w zadanym ciągu o długości n, wyznaczyć maksymalny promień palindromu o długości nieparzystej o środku na tej pozycji w czasie $O(n)$. Dla przykładowego ciągu *anannnab*, wyznaczone przez algorytm Manachera promienie są następujące: $0, 1, 1, 0, 2, 0, 0, 0$.

Jedyne, co nam pozostaje do zrobienia, to zbudować ciąg d, który stanowi złączenie dwóch kopii ciągu c (w ten sposób każdy wierzchołek wielokąta posiada swojego reprezentanta w ciągu d, który zarówno z lewej, jak i prawej strony ma co najmniej n elementów), a następnie wyznaczyć — z wykorzystaniem algorytmu Manachera — dla każdego elementu ciągu d promień palindromu o środku w tym elemencie, by wreszcie policzyć liczbę r elementów reprezentujących wierzchołki, dla których promienie są nie mniejsze od $n-1$. Odpowiedzią na pytanie postawione w treści zadania jest oczywiście $\frac{r}{2}$.

Testy

Testy wykorzystane w zadaniu zostały wygenerowane przy użyciu specjalnych generatorów:

- $G1$ — generator wielokątów zawierających określony podzbiór osi symetrii: {pionowa, pozioma, ukośna pod kątem 45 stopni, ukośna pod kątem -45 stopni},
- $G2$ — generator wielokątów zawierających oś symetrii nachyloną pod zadanym kątem,
- $G3$ — generator wielokątów o postaci schodkowej. Wielokąty tego typu mają bardzo regularne obwody, co powoduje, że przedstawione w opracowaniu udoskonalone rozwiązanie nieefektywne działa dla nich bardzo długo.

Każdy wygenerowany powyższymi metodami wielokąt został następnie poddany serii modyfikacji — odbić i obrotów, przesunięć o losowy wektor oraz zaburzeń. Ich celem było wyeliminowanie niektórych osi symetrii.

Zestawy testów zostały przygotowane w taki sposób, aby rozwiązania niepoprawne uzyskiwały jak najmniejszą liczbę punktów. Dodatkowo, programy nieoptymalne o pesymistycznej złożoności $O(n^2)$ uzyskują w granicach 40-50 punktów.

Poniższa lista zawiera podstawowe informacje dotyczące testów. Przez t została oznaczona liczba wielokątów, przez m — największa bezwzględna wartość współrzędnych punktów, a przez k — sumaryczna liczba wierzchołków we wszystkich wielokątach.

Nazwa	t	m	k	Opis
osi1.in	4	10	135	Mały test poprawnościowy
osi2.in	10	96	72	6 wielokątów typu $G1$, 1 typu $G2$ i 3 typu $G3$
osi3.in	7	1 423	106	4 wielokąty typu $G1$, 1 typu $G2$ i 2 typu $G3$
osi4.in	6	896 911	82 222	3 wielokąty typu $G1$, 1 typu $G2$ i 2 typu $G3$
osi5.in	5	15 152	29 988	2 wielokąty typu $G1$, 1 typu $G2$ i 2 typu $G3$
osi6.in	4	9 977	37 016	2 wielokąty typu $G1$ i 2 typu $G2$
osi7.in	7	99 381	36 170	3 wielokąty typu $G1$, 2 typu $G2$ i 2 typu $G3$
osi8.in	6	998 863	47 587	3 wielokąty typu $G1$ i 3 typu $G3$
osi9.in	9	954 385	595 692	4 wielokąty typu $G1$, 2 typu $G2$ i 3 typu $G3$
osi10.in	5	9 301 420	442 806	2 wielokąty typu $G1$, 2 typu $G2$ i 1 typu $G3$
osi11.in	8	79 918 099	534 098	2 wielokąty typu $G1$, 3 typu $G2$ i 3 typu $G3$
osi12.in	10	69 659 116	955 740	6 wielokątów typu $G1$, 3 typu $G2$ i 1 typu $G3$