Jakub Wojtaszczyk **Alan Kutniewski**
Treść zadania, Opracowanie Program

Dostępna pamięć: 64 MB. *OI, etap III, dzień próbny, 27.03.2012*

Squarki

Znany bajtocki fizyk Bajtazar bada nową postać materii — **squarki***. Są to bardzo egzotyczne cząstki, które nigdy nie występują pojedynczo, zawsze w parach. Co więcej, squarki danego rodzaju łączą się w pary tylko ze squarkami innych rodzajów.*

Po latach badań Bajtazar ustalił, że istnieje n różnych rodzajów squarków. Squarki każdego rodzaju mają inną masę, wyrażającą się dodatnią liczbą całkowitą. Bajtazar zmierzył też łączną masę każdej z $\frac{n(n-1)}{2}$ możliwych par squarków. Zgodnie z bajtockimi prawami fizyki, masa pary squarków jest równa po prostu sumie mas squarków wchodzących w skład pary.

Teraz Bajtazar chciałby ustalić masy pojedynczych squarków poszczególnych rodzajów. Bajtazar poprosił Cię o pomoc w napisaniu programu, który wyznaczy wszystkie rozwiązania tego problemu, tj. odtworzy wszystkie możliwe zestawy mas squarków poszczególnych rodzajów.

Wejście

W pierwszym wierszu standardowego wejścia znajduje się jedna liczba całkowita n ($3 \leqslant n \leqslant 300$) oznaczająca liczbę różnych rodzajów squarków. W drugim wierszu znajduje się $\frac{n(n-1)}{2}$ dodatnich liczb całkowitych pooddzielanych pojedynczymi odstępami, oznaczających masy wszystkich możliwych par squarków. Masa żadnej pary squarków nie przekracza 10^8. Dla każdych dwóch różnych rodzajów squarków, masa pary squarków tych rodzajów jest podana na wejściu dokładnie raz. Masy na wejściu są wymienione w przypadkowej kolejności.

W testach wartych łącznie 32% punktów zachodzą dodatkowe warunki: $n \leqslant 20$ oraz masa żadnej pary squarków nie przekracza $2\,000$.

Wyjście

W pierwszym wierszu standardowego wyjścia Twój program powinien wypisać liczbę k możliwych rozwiązań tego problemu. W następnych k wierszach powinny znaleźć się kolejne rozwiązania, po jednym w wierszu. Każde z rozwiązań powinno składać się z n różnych liczb całkowitych dodatnich podanych w kolejności rosnącej, pooddzielanych pojedynczymi odstępami, oznaczających masy squarków poszczególnych rodzajów.

Rozwiązania można wypisać w dowolnej kolejności. Rozwiązania nie mogą się powtarzać. Możesz założyć, że dla każdych danych testowych istnieje przynajmniej jedno rozwiązanie, tzn. $k > 0$.

Przykład

Dla danych wejściowych:
```
4
3 5 4 7 6 5
```

poprawnym wynikiem jest:
```
1
1 2 3 4
```

a dla danych:	*poprawnym wynikiem jest:*
`4`	`2`
`11 17 12 20 21 15`	`4 7 8 13`
	`3 8 9 12`

Rozwiązanie

Wprowadzenie

Przez m_A oznaczmy masę squarka A, zaś przez $m_{A,B}$ — masę pary squarków A i B, czyli (zgodnie z warunkami zadania) $m_A + m_B$.

Wpierw wyobraźmy sobie, że wiemy, która liczba z wejścia opisuje którą parę squarków. Wtedy zadanie sprowadza się po prostu do rozwiązania układu $n(n-1)/2$ równań liniowych z n niewiadomymi. Istnieją ogólne sposoby rozwiązywania takich układów (np. tzw. eliminacja Gaussa), ale w naszym przypadku można poradzić sobie jeszcze prościej. Przykładowo, aby wyznaczyć masę pewnego squarka A, można dobrać dowolne dwa inne squarki B i C i zauważyć, że

$$m_A = \frac{2m_A}{2} = \frac{m_A + m_B + m_A + m_C - m_B - m_C}{2} = \frac{m_{A,B} + m_{A,C} - m_{B,C}}{2}. \qquad (1)$$

Jako że wszystkie liczby po prawej stronie są nam znane, to z tego wzoru możemy wyznaczyć niewiadomą m_A.

Tu dwie uwagi. Po pierwsze, powyższe spostrzeżenie gwarantuje, że liczba rozwiązań jest ograniczona — dla każdego przypisania liczbom na wejściu par squarków jest co najwyżej jedno rozwiązanie (czyli będzie co najwyżej $(n(n-1)/2)!$ rozwiązań). Po drugie, wybierając trzy różne squarki, wykorzystujemy fakt, że $n \geqslant 3$. Gdyby n mogło być równe dwa, to na wejściu mielibyśmy tylko jedną masę pary squarków i musielibyśmy radzić sobie z bardzo dużą liczbą rozwiązań (choć, oczywiście, dość prostych do wyznaczenia).

W ten sposób otrzymujemy pierwszy pomysł na rozwiązanie. Sprawdzamy wszystkie możliwe dopasowania liczb na wejściu do par squarków i każde z nich rozpatrujemy jak wyżej. Niestety, jak już zauważyliśmy, tych możliwych dopasowań jest trochę dużo, więc nawet dla niewielkich wartości n to rozwiązanie nie jest szczególnie realne.

Pierwsze pomysły

Po chwili zastanowienia jesteśmy w stanie istotnie ograniczyć liczbę sensownych dopasowań, jakie musimy sprawdzić. Przykładowo, najmniejsza liczba na wejściu musi być masą pary złożonej z dwóch najlżejszych squarków. Uporządkujmy zatem podane na wejściu liczby niemalejąco: $b_1, \ldots, b_{n(n-1)/2}$, zaś niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oznaczają (nieznane) masy pojedynczych squarków, uporządkowane rosnąco (squarki różnych rodzajów mają różne masy). Niech dalej $m_{i,j}$ oznacza $a_i + a_j$. Wiemy teraz, że $b_1 = m_{1,2}$.

Odrobina więcej namysłu prowadzi do wniosku, że $b_2 = m_{1,3}$. Faktycznie — każda z pozostałych liczb $m_{i,j}$ spełnia $i \geqslant 1$ oraz $j \geqslant 3$, przy czym co najmniej jedna z tych nierówności jest ostra, więc $m_{i,j} > m_{1,3}$. Dalej, niestety, nie ma tak łatwo; trzecią z kolei liczbą może być $m_{1,4}$ lub $m_{2,3}$ (oczywiście poza przypadkiem $n = 3$, w którym $b_3 = m_{2,3}$ i jesteśmy w stanie wyznaczyć wszystkie masy squarków od razu). Pojawia się w nas (no, przynajmniej w niektórych z nas) pokusa rozważenia obu możliwości, i tak dalej — z każdą nową liczbą b_i rozważać, które z nieprzypisanych jeszcze par squarków mogą jej odpowiadać. Tego typu rozwiązania, choć szybsze od poprzedniego, wciąż mają złożoność wykładniczą, i to wykładniczą względem liczby par squarków. Czyli nie najlepszą.

Rozwiązanie wzorcowe — pomysł

Lepsze efekty niż próba natychmiastowej implementacji rozwiązania da próba zmuszenia się do jeszcze odrobiny analizy zadania (to bardzo często zdarzająca się sytuacja). Zauważmy, że lżejsze od pary $m_{2,3}$ mogą być tylko pary postaci $m_{1,k}$. Mamy zatem tylko $n - 2$ możliwości przypisania masy parze squarków $m_{2,3}$: są to liczby od b_3 do b_n. A warto to zrobić dlatego, że znając wartości $m_{1,2}$, $m_{1,3}$ i $m_{2,3}$, możemy — tak jak we wzorze (1) — jednoznacznie określić a_1, a_2 i a_3.

Rozważmy, przykładowo, sytuację, gdy $m_{2,3} = b_5$. Wtedy $b_3 = m_{1,4}$ i $b_4 = m_{1,5}$. Na podstawie b_1, b_2 i b_5 wyznaczamy a_1, a_2 i a_3. Ale to nie koniec! Skoro znamy już a_1, to b_3 pozwala nam obliczyć a_4, zaś b_4 pozwala obliczyć a_5. I nagle możemy zidentyfikować znacznie więcej par — przykładowo, możemy wśród liczb na wejściu poszukać $m_{3,4}$ (którego jeszcze nie widzieliśmy, ale już wiemy, ile jest równe).

Najmniejszą nieznaną masą squarka jest teraz a_6. A jaka jest najmniejsza niewyznaczona masa pary squarków? Okazuje się, że mamy tylko jeden wybór: $m_{1,6}$. Istotnie — nie znamy jeszcze tylko mas par $m_{i,j}$ dla $j > 5$, a najmniejszą taką parą jest właśnie $m_{1,6}$. Możemy zatem znaleźć najmniejszą niewyznaczoną jeszcze masę z wejścia i na jej podstawie, znając a_1, wyznaczyć a_6. Widać, że kolejne masy squarków powinny posypać się jak kostki domina.

Rozwiązanie wzorcowe — implementacja

Spróbujmy teraz ten dość luźny pomysł przekuć na rozwiązanie. Będzie ono złożone z trzech faz. Wpierw iterujemy po możliwych wartościach k, zakładając, że $b_k = m_{2,3}$. Jak wiemy, wystarczy rozpatrzyć tylko $k = 3, 4, \ldots, n$.

Dla ustalonego k wyznaczamy wartości liczb $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — obliczając a_1, a_2 i a_3 na podstawie trzech sum, a pozostałe masy na podstawie sum $m_{1,j}$. Umieśćmy teraz wszystkie liczby b_i w multizbiorze B (dla łatwego wyszukiwania). Następnie dla każdej pary i, j, gdzie $i < j \leqslant k$, znajdźmy w multizbiorze B liczbę $m_{i,j}$ i ją stamtąd usuńmy. Jeśli którejś z tych liczb nie ma w B, znaczy to, że nasz pierwotny wybór k był niepoprawny i możemy spokojnie przejść do sprawdzenia kolejnej wartości k.

Niech teraz l oznacza największy indeks squarka o znanej masie; początkowo $l = k$. Póki $l < n$, działamy następująco.

- Wybieramy najmniejszą liczbę b z multizbioru B.
- Wiemy, że ta liczba jest równa $m_{1,l+1}$, a stąd wyznaczamy a_{l+1}.

- Usuwamy z B wszystkie liczby $m_{i,l+1}$ dla $i \leqslant l$ (ponownie — jeśli którejś z tych liczb nie znajdziemy, oznacza to, że pierwotny wybór k był nietrafiony).
- Powiększamy l o jeden.

Gdy $l = n$, mamy rozwiązanie (być może jedno z kilku możliwych). Warto zwrócić uwagę, że z naszego algorytmu wynika, że rozwiązań będzie nie więcej niż $n-2$.

Złożoność rozwiązania

Dla każdego z $n-2$ możliwych wyborów parametru k musimy, w pesymistycznym przypadku, usunąć jedna po drugiej wszystkie liczby z multizbioru B. Jeśli multizbiór B zaimplementujemy w oparciu o jakieś drzewo zrównoważone (np. użyjemy jednej ze struktur danych dostępnych w bibliotece standardowej języka C++: `multiset` lub `map`), to każdą z podstawowych operacji na multizbiorze (sprawdzenie przynależności elementu, wstawienie i usunięcie elementu) będziemy mogli wykonać w czasie $O(\log n)$. To oznacza, że nasz algorytm będzie miał złożoność czasową $O(n^3 \log n)$. Tę samą złożoność czasową można także uzyskać, implementując multizbiór B jako posortowaną tablicę par postaci (element, krotność). Wtedy przy usuwaniu elementów z multizbioru wyszukujemy binarnie ich położenia, po czym zmniejszamy ich krotności. Jeszcze inaczej, multizbiór B można reprezentować za pomocą tablicy haszującej (tj. tablicy list), w której każda z wymienionych operacji w oczekiwanym przypadku działa w czasie stałym. To obniża oczekiwaną złożoność czasową algorytmu do $O(n^3)$.

Implementacje rozwiązania wzorcowego można znaleźć w plikach `squ.cpp`, `squ1.c`, `squ2.pas` i `squ3.cpp`.

Dla miłośników matematyki: ile może być rozwiązań?

Przykład w treści zadania pokazuje, że dla $n = 4$ mogą istnieć dwa różne rozwiązania. Nasze dotychczasowe rozumowanie pozwala stwierdzić, że dla $n = 3$ jest tylko jedno rozwiązanie. W miarę prosto jest też sprawdzić, że dla $n = 5$ i $n = 6$ również istnieje co najwyżej jedno rozwiązanie; a jako że im większe n, tym więcej ograniczeń nakładamy na poszukiwany układ mas squarków (dokładniej — dla n squarków będziemy mieli $n(n-1)/2$ warunków), to można podejrzewać, że dla $n > 4$ będzie zawsze co najwyżej jedno rozwiązanie. Okazuje się jednak, że nie jest to prawdą — wykażemy, że istnieją układy o więcej niż jednym rozwiązaniu, ale tylko dla n będących potęgami dwójki. Poniższe rozumowanie jest oparte na pomysłach autorstwa Wojciecha Nadary.

Pokażemy wpierw, jak skonstruować układy o przynajmniej dwóch rozwiązaniach dla n będących potęgą dwójki. Dla $n = 4$ taki układ mamy podany w treści zadania; można zresztą skonstruować układ złożony z jeszcze mniejszych liczb, np. $\{1, 4, 5, 6\}$ oraz $\{2, 3, 4, 7\}$. Dla $n = 8$ przykładowym układem o równych sumach par jest teraz $\{1, 4, 5, 6, 12, 13, 14, 17\}$ oraz $\{2, 3, 4, 7, 11, 14, 15, 16\}$. Dlaczego? Rozważmy dowolną parę liczb z pierwszego zbioru. Jeśli są to dwie liczby mniejsze od 10 (np. 4 i 5), to wiemy, że w drugim zbiorze możemy wybrać dwie liczby mniejsze od 10 dające tę samą sumę (w tym wypadku 2 i 7), bo sumy par dla $\{1, 4, 5, 6\}$ oraz dla $\{2, 3, 4, 7\}$ były takie same. Analogicznie, jeśli są to dwie liczby większe od 10 (np.

13 i 17), to w drugim zbiorze możemy wybrać dwie liczby większe od 10 o tej samej sumie (tu 14 i 16) — bo sumy par dla {11, 14, 15, 16} są takie same, jak dla {12, 13, 14, 17}; dodanie stałej do obu zbiorów nic nie zmienia. Jeśli natomiast mamy do czynienia z parą „mieszaną” (np. 4 i 12), to w drugim zbiorze możemy wybrać parę liczb, w których dziesiątka jest dodana „na odwrót” (w tym wypadku 2 i 14).

Analogicznie postępujemy dla $n = 16$ — zaczynamy od dwóch ósemek o tych samych sumach par i do każdej z nich dogrupowujemy drugą ósemkę, tym razem powiększoną o 100. Identyczne jak powyżej rozumowanie prowadzi do wniosku, że dla otrzymanych szesnastek:

$$\{1, 4, 5, 6, 12, 13, 14, 17, 102, 103, 104, 107, 111, 114, 115, 116\}$$

oraz

$$\{2, 3, 4, 7, 11, 14, 15, 16, 101, 104, 105, 106, 112, 113, 114, 117\}$$

multizbiory sum par są dokładnie takie same. W ten sam sposób możemy otrzymać układy o takich samych sumach par dla dowolnej potęgi dwójki.

Pozostało nam teraz wykazać, że potęgi dwójki to jedyne wartości n, dla których istnieją układy o więcej niż jednym rozwiązaniu. Załóżmy, że n nie jest potęgą dwójki, i rozważmy jakieś konkretne dane wejściowe (czyli układ $n(n-1)/2$ mas par squarków). Zauważmy, że na podstawie tych danych możemy wyznaczyć sumę mas wszystkich squarków: wystarczy zsumować masy wszystkich par i podzielić wynik przez $n-1$ (bo każdy squark występuje w $n-1$ różnych parach). Oznaczmy tę sumę przez S_1.

Następnie spróbujemy wyznaczyć S_2: sumę kwadratów mas squarków. Rozważmy dwa następujące wyrażenia:

$$V = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = S_2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots + 2a_{n-1}a_n$$

oraz

$$W = \sum_{i \neq j} (a_i + a_j)^2 = 2(n-1)S_2 + 4a_1a_2 + 4a_1a_3 + \ldots + 4a_{n-1}a_n.$$

Powyższe rozwinięcie wyrażenia W wynika stąd, że masa każdego squarka występuje w $n-1$ parach jako a_i i w $n-1$ parach jako a_j. Jako że znamy masy wszystkich par squarków oraz sumę mas squarków (S_1), to możemy wyznaczyć V i W, a zatem i $2(n-2)S_2 = W - 2V$. Stąd, skoro $n \neq 2$, możemy wyznaczyć S_2.

Ogólnie naszym celem jest wyznaczenie S_k (czyli sumy k-tych potęg mas squarków) dla każdego kolejnego k. Będziemy postępować podobnie jak dotychczas; zaczniemy od sumy k-tych potęg par:

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i \neq j} (a_i + a_j)^k \\ &= 2(n-1)S_k + \sum_{i \neq j} \left(\binom{k}{1} a_i^{k-1} a_j + \binom{k}{2} a_i^{k-2} a_j^2 + \ldots + \binom{k}{k-1} a_i a_j^{k-1} \right). \end{aligned}$$

Teraz chcemy pozbyć się dodatkowych składników sumy. W tym celu rozważmy wyrażenia:

$$V_1 = S_{k-1}S_1 = S_k + \sum_{i \neq j} a_i^{k-1} a_j,$$

$$V_2 = S_{k-2}S_2 = S_k + \sum_{i \neq j} a_i^{k-2} a_j^2,$$

i tak aż do

$$V_{k-1} = S_1 S_{k-1} = S_k + \sum_{i \neq j} a_i a_j^{k-1}.$$

Jako że liczby S_k obliczamy po kolei, to możemy założyć, że wszystkie S_l dla $l < k$ są już nam znane. To pozwala nam wyznaczyć W oraz wszystkie V_i, więc także i wartość wyrażenia:

$$2(n-2^{k-1})S_k = (2(n-1)-(2^k-2))S_k = W - \binom{k}{1}V_1 - \binom{k}{2}V_2 - \ldots - \binom{k}{k-1}V_{k-1}.$$

Skoro n nie jest potęgą dwójki, to z tego wzoru jesteśmy w stanie wyznaczyć S_k.

Rozumowanie powyżej pokazuje, że jeśli tylko n nie jest potęgą dwójki, to możemy wyznaczyć sumy k-tych potęg mas squarków dla dowolnego naturalnego k. To jednak oznacza, że jesteśmy w stanie wyznaczyć masy pojedynczych squarków. Faktycznie, wyrażenie:

$$\sqrt[k]{S_k} = a_n \sqrt[k]{\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^k + \ldots + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^k + 1}$$

zbiega, przy k dążącym do nieskończoności, do a_n (czyli masy najcięższego squarka); podobnie,

$$\sqrt[k]{S_k - a_n^k}$$

zbiega do a_{n-1}, i tak dalej.

Okazuje się, że aby wyznaczyć wartości a_i, wystarczy znać liczby S_k dla $k \leqslant n$. Opracowanie stosownej metody odtworzenia ciągu mas squarków pozostawiamy jako zadanie dla Czytelnika.

Testy

Rozwiązania zawodników były sprawdzane przy użyciu dwunastu testów, scharakteryzowanych w poniższej tabeli.

Nazwa	n
squ1.in	4
squ2.in	7
squ3.in	9
squ4.in	14

Nazwa	n
squ5.in	24
squ6.in	28
squ7.in	45
squ8.in	60

Nazwa	n
squ9.in	100
squ10.in	140
squ11.in	210
squ12.in	300