# メモ (形式的冪級数)

hos

2019 年 10 月 3 日

大事なこと：収束のことは考えない．その代わり，知らない演算をしない．

$\mathbb{N}$ は非負整数全体の集合とする[*1]．環と言ったら乗法の単位元の存在を仮定する．

## 1　形式的冪級数環

以降，$R$ を可換環とする．

$X$ を不定元として，$R$ の加算個の直積 $\prod_{i\in\mathbb{N}} R$ の元 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を形式的に $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i$ (あるいは $a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots$) と書いたものの集合を $R[[X]]$ とする．この元を $a(X)$ のように書くこともある[*2]．$a_i$ を $a(X)$ の $i$ 次の**係数** (あるいは $X^i$ の係数) と呼び，$[X^i]a(X)$ のように書く．0 次の係数を**定数項**と呼ぶ．

$\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i, \sum_{i\in\mathbb{N}} b_i X^i \in R[[X]]$ に対し，加法と乗法を

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i + \sum_{i\in\mathbb{N}} b_i X^i := \sum_{i\in\mathbb{N}} (a_i + b_i) X^i,$$

$$\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i\right)\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} b_i X^i\right) := \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i,j\in\mathbb{N},\, i+j=k} a_i b_j\right) X^k$$

で定めると，可換環になることを示す．加法の単位元は $0 = 0 + 0X + 0X^2 + \cdots$，乗法の単位元は $1 = 1 + 0X + 0X^2 + \cdots$．乗法の結合法則のみやや非自明で，$\left(\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i\right)\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} b_i X^i\right)\right)\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} c_i X^i\right)$ の $m$ 次の係数が

$$\sum_{l,k\in\mathbb{N},\, l+k=m} \left(\sum_{i,j\in\mathbb{N},\, i+j=k} a_i b_j\right) c_k = \sum_{i,j,k\in\mathbb{N},\, i+j+k=m} a_i b_j c_k$$

となることから従う．この可換環 $R[[X]]$ を，$R$ 係数**形式的冪級数環**と呼ぶ．

さらに，$r \in R$ はそのまま $r + 0X + 0X^2 + \cdots \in R[[X]]$ とみれるので，包含 $R \longrightarrow R[[X]]$ により $R[[X]]$ は $R$ 代数でもある．

**例．** $(1+X)(1+X+X^2+X^3+\cdots) = 1 + 2X + 2X^2 + 2X^3 + \cdots$．

---

[*1] 普段は $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ とかを使って $\mathbb{N}$ という記号を避けようと思っているが，$\sum$ の下にたくさん書くので仕方なく．

[*2] 不定元を書かず単に $a$ のように書くのも綺麗だが，今回は積と合成が混同しないことを重視．

$a(X) \in R[[X]]$ に対し，集合 $a(X)R[[X]] := \{a(X)b(X) \mid b(X) \in R[[x]]\} \subseteq R[[X]]$ は $R[[X]]$ のイデアルである．$b(X), c(X) \in R[[X]]$ が $b(X) - c(X) \in a(X)R[[X]]$ を満たすことを $b(X) \equiv c(X) \pmod{a(X)}$ と書く．$n \in \mathbb{N}$ に対し，$\bmod X^n$ での合同は，$n$ 次未満の係数が等しいことを表す．

**例.** $0 + 1X + 2X^2 + 3X^3 + 4X^4 + \cdots \equiv X + 2X^2 \pmod{X^3}$.

次の命題は，突き詰めると環の位相の話になるが，本稿では技術的な補題として用いる．

**命題 1.** $a(X), b(X) \in R[[X]]$ について，$a(X) = b(X)$ である必要十分条件は，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a(X) \equiv b(X) \pmod{X^n}$ であること．

*証明*. (必要性) 明らか．

(十分性) 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対し，$n = i + 1$ ととって $a(X) \equiv b(X) \pmod{X^{i+1}}$ なので，$a_i = b_i$ となる． □

$S = \{X^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は $R[[X]]$ の積閉集合であるから，局所化 $R((X)) = S^{-1}R[[X]]$ が考えられる．$R((X))$ の元は，形式的に $a(X) = \displaystyle\sum_{i \in \mathbb{Z},\, i \geq N} a_i X^i$ $(N \in \mathbb{Z})$ と表せる．$R((X))$ を $R$ **係数形式的 Laurent 級数環**という．$S$ は零因子を含まないので自然な $R[[X]] \longrightarrow R((X))$ は単射であり，$R[[X]] \subseteq R((X))$ とみなせる．

$a(X) = \displaystyle\sum_{i \in \mathbb{Z},\, i \geq N} a_i X^i \in R((X))$ $(N \in \mathbb{Z})$ に対し，$a_i \neq 0$ なる最小の $i \in \mathbb{Z}$ を $\mathrm{ord}(a(X))$ で表す．ただし $\mathrm{ord}(0) = \infty$ とする．$\mathrm{ord}(a(X))$ 次を**最低次**と呼ぶ．

$R$ が整域ならば，$R[[X]]$ や $R((X))$ も整域であり (最低次の係数に注目する)，$\mathrm{ord}\colon R((X)) \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ は付値を与える．

## 2　乗法の逆元

環の単元とは，乗法の逆元をもつ元のこと．可逆元．1 の約数．

**命題 2.** $\displaystyle\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i X^i \in R[[X]]$ が単元であるための必要十分条件は，$a_0$ が $R$ の単元であること．

*証明*. (必要性) $\displaystyle\sum_{i \in \mathbb{N}} b_i X^i \in R[[X]]$ が $\left(\displaystyle\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i X^i\right)\left(\displaystyle\sum_{i \in \mathbb{N}} b_i X^i\right) = 1$ を満たすとすると，定数項を比較して，$a_0 b_0 = 1$ である．

(十分性) $a_0$ が単元のとき，$\displaystyle\sum_{i \in \mathbb{N}} b_i X^i \in R[[X]]$ を

$$
\begin{aligned}
b_0 &= a_0^{-1}, \\
b_i &= -a_0^{-1} \sum_{j \in \mathbb{N},\, 1 \leq j \leq i} a_j b_{i-j} \quad (i \geq 1)
\end{aligned}
$$

として定めると，$\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i\right)\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} b_i X^i\right) = 1$ を満たす． □

$a(X) \in R[[X]]$ の乗法の逆元が存在するとき，それは一意なので，$a(X)^{-1}$ や $\dfrac{1}{a(X)}$ と書く．

**例．** $r \in R$ に対し，$(1 - rX)^{-1} = \sum_{i\in\mathbb{N}} r^i X^i$.

ここまでで定めた加減乗除については，一般の $R$ 代数で成り立つことを用いて普通の計算ができるし，普通の表記をする．

**例．** $a(X) \in R[[X]]$ に対して，$a(X)^2$ とは $a(X)a(X)$ のことであり，$a(X)^2$ の逆元は $(a(X)^{-1})^2$ であり $a(X)^{-2}$ と書く．

**例．** 正の整数 $n$ に対し，$(1 - X)^{-n} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \binom{i+n-1}{n-1} X^i$.

$R$ が体のとき，$R((X))$ は体である．実際，$a(X) = \sum_{i\in\mathbb{Z},\, i\geq N} a_i X^i \in R((X)) \setminus \{0\}$ $(a_N \neq 0)$ の逆元は $X^{-N}\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_{i+N} X^i\right)^{-1}$ で与えられる．

**例．** $\mathbb{Q}((X))$ において，$\dfrac{X}{X^2 + X^3} = X^{-1} - 1 + X - X^2 + X^3 - \cdots$.

## 3 合成

形式的冪級数の合成は，$X$ の部分に「代入」していいものは定数項が 0 でなければならないことに注意を要する．

**定義.** $a(X) = \sum_{i\in\mathbb{N},\, i\geq 1} a_i X^i \in XR[[X]]$ と $b(X) = \sum_{i\in\mathbb{N}} b_i X^i \in R[[X]]$ に対し，$b(X)$ と $a(X)$ の**合成** $(b\circ a)(X)$ を

$$(b\circ a)(X) := \sum_{i\in\mathbb{N}} \left( \sum_{k\in\mathbb{N},\, j_1,\dots,j_k\in\mathbb{N},\, j_1,\dots,j_k\geq 1,\, j_1+\cdots+j_k=i} b_k a_{j_1}\cdots a_{j_k} \right) X^i$$

で定める．内側の $\sum$ について，$k \leq i$ が従うためこれは有限和である．特に，$(b\circ a)(X)$ の定数項は $a_0$ である．

$(b\circ a)(X)$ の $i$ 次の係数は，$b_k a(X)^k$ の $i$ 次の係数を $k\in\mathbb{N}$ について足したものである．つまり，形式的に $(b\circ a)(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k a(X)^k$ と書きたいが，右辺は $R[[X]]$ の元の無限和であり定義されておらず，各係数ごとに有限和として定義できるための条件が $a(X)$ の定数項が $0$ であることに他ならない．このとき，$k > i$ の項は $i$ 次の係数に影響を与えない．言い換えると，

**命題 3.** $a(X) = \sum_{i\in\mathbb{N},\, i\geq 1} a_i X^i \in XR[[X]]$ と $b(X) = \sum_{i\in\mathbb{N}} b_i X^i \in R[[X]]$ に対し，

$$(b\circ a)(X) \equiv \sum_{k\in\mathbb{N},\, k<n} b_k a(X)^k \pmod{X^n}$$

が成り立つ．

*証明*. $i\in\mathbb{N},\, i<n$ に対し，$k\leq i$ ならば $k<n$ であるから，

$$\begin{aligned}
(b\circ a)(X) &\equiv \sum_{i\in\mathbb{N},\, i<n} \left( \sum_{k\in\mathbb{N},\, j_1,\dots,j_k\in\mathbb{N},\, j_1,\dots,j_k\geq 1,\, j_1+\cdots+j_k=i} b_k a_{j_1}\cdots a_{j_k} \right) X^i \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N},\, i<n} \left( \sum_{k\in\mathbb{N},\, k<n,\, j_1,\dots,j_k\in\mathbb{N},\, j_1,\dots,j_k\geq 1,\, j_1+\cdots+j_k=i} b_k a_{j_1}\cdots a_{j_k} \right) X^i \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N},\, i<n} \left( \sum_{k\in\mathbb{N},\, k<n} [X^i] b_k a(X)^k \right) X^i \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N},\, k<n} \left( \sum_{i\in\mathbb{N},\, i<n} [X^i] b_k a(X)^k \right) X^i \\
&\equiv \sum_{k\in\mathbb{N},\, k<n} b_k a(X)^k \pmod{X^n}
\end{aligned}$$

である． $\square$

合成を「代入」と考えたとき成り立ってほしい性質たちを確認していく．

**命題 4.** $a(X) \in XR[[X]]$ は $R$ 代数の準同型 $a^*\colon R[[X]] \longrightarrow R[[X]];\ b(X) \longmapsto (b \circ a)(X)$ を定め，これは $a^*(X) = a(X)$ を満たす．すなわち，$b(X), c(X), d(X) \in R[[X]]$ に対し，

(1) $b(X) + c(X) = d(X)$ ならば $(b \circ a)(X) + (c \circ a)(X) = (d \circ a)(X)$.
(2) $b(X)c(X) = d(X)$ ならば $(b \circ a)(X)(c \circ a)(X) = (d \circ a)(X)$.
(3) $b(X) = 1$ ならば $(b \circ a)(X) = 1$.
(4) $b(X) = X$ ならば $(b \circ a)(X) = a(X)$.

証明. (1) 合成の定義から明らか.
(2) $a(X) = \displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N},\, i\geq 1} a_i X^i$ および $b(X) = \displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} b_i X^i$, $c(X) = \displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} c_i X^i$ とする．$n \in \mathbb{N}$ を任意にとる．命題 3 より，

$$\begin{aligned}
(b \circ a)(X)(c \circ a)(X) &\equiv \left(\sum_{i\in\mathbb{N},\, i<n} b_i a(X)^i\right)\left(\sum_{j\in\mathbb{N},\, j<n} c_j a(X)^j\right) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}, k<2n}\left(\sum_{i,j\in\mathbb{N},\, i,j<n,\, i+j=k} b_i c_j\right) a(X)^k \\
&\equiv \sum_{k\in\mathbb{N}, k<n}\left(\sum_{i,j\in\mathbb{N},\, i+j=k} b_i c_j\right) a(X)^k \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}, k<n} d_k a(X)^k \\
&\equiv (d \circ a)(X) \pmod{X^n}
\end{aligned}$$

である．よって，命題 1 より $(a \circ d)(X)(b \circ d)(X) = (c \circ d)(X)$ が従う．
(3) $b_0$ のみ 1 なので，$(b \circ a)(X) = \displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}}\left(\sum_{0=i} 1\right) X^i = 1$.
(4) $b_1$ のみ 1 なので，$(b \circ a)(X) = \displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k_1\in\mathbb{N},\, k_1\geq 1,\, k_1=i} a_{k_1}\right) X^i = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i = a(X)$.

□

**命題 5.** $a(X), b(X) \in XR[[X]]$ と $c(X) \in R[[X]]$ に対し，$(c \circ (b \circ a))(X) = ((c \circ b) \circ a)(X)$.

証明. $c(X) = X$ のとき，命題 4 (4) より，

$$(c \circ (b \circ a))(X) = (b \circ a)(X) = ((c \circ b) \circ a)(X)$$

である．すなわち $(b \circ a)^*(X) = (a^* \circ b^*)(X)$ である（$(b \circ a)(X)$ は形式的冪級数の合成，$a^* \circ b^*$ は $R$ 代数の準同型の合成であることに注意する）.

$R[[X]]$ は $X$ で生成されるので，準同型は $X$ の行き先で定まる．よって $(b \circ a)^* = a^* \circ b^*$ であり，任

意の $c(X)$ に対し

$$(c \circ (b \circ a))(X) = (b \circ a)^*(c(X)) = (a^* \circ b^*)(c(X)) = ((c \circ b) \circ a)(X)$$

となる． □

これらの理解のもと，$(b \circ a)(X)$ を $b(a(X))$ とも書く．とくに，$b(0)$ は $b(X)$ の定数項に等しい．

**例.** $a(X) = \displaystyle\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i X^i \in R[[X]]$ と正の整数 $n$ に対し，$a(X^n) = \displaystyle\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i X^{ni}$.

**例.** $a(X) = \dfrac{X}{1-X} = \displaystyle\sum_{i \in \mathbb{N}} X^{i+1} \in R[[X]]$ と $n \in \mathbb{N}$ に対し，$(\underbrace{a \circ \cdots \circ a}_{n})(X) = \dfrac{X}{1-nX} = \displaystyle\sum_{i \in \mathbb{N}} n^i X^{i+1}$ ($n$ 回合成を $a^n$ と書くと $a^n(X)$ か $a(X)^n$ かかなり紛らわしいため避けている).

## 4 形式微分

多項式の微分を拡張して形式微分が定義できる．記法についてはいくつかの流儀・用途がある．

**定義.** $R$ 加群の準同型 $D\colon R[[X]] \longrightarrow R[[X]]$ を，$a(X) = \displaystyle\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i X^i \in R[[X]]$ に対し，

$$D(a(X)) = \sum_{i \in \mathbb{N},\, i \geq 1} i a_i X^{i-1}$$

として定める．$D(a(X))$ を $a'(X)$ とも書く．$D$ を ($X$ による) **形式微分**と呼ぶ．

$D$ は $R$ 加群としては準同型である (線型性を満たす) が $R$ 代数の準同型ではない (積は保たない) ことに注意する．積に関しては，以下のいわゆる Leibniz rule を満たす．

**命題 6.** $a(X), b(X) \in R[[X]]$ に対し，$D(a(X)b(X)) = D(a(X))b(X) + a(X)D(b(X))$.

*証明*. $D$ が $R$ 加群の準同型なので，$R$ 加群としての基底についてのみ示せばよい．$a(X) = 1$ または $b(X) = 1$ のときは $D(1) = 0$ よりよい．$a(X) = X^m$, $b(X) = X^n$ ($m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > 0$) のとき，

$$D(X^m)X^n + X^m D(X^n) = mX^{m-1} \cdot X^m + X^m \cdot nX^{n-1} = (m+n)X^{m+n-1} = D(X^{m+n})$$

より成り立つ． □

合成に関しては，以下のいわゆる chain rule を満たす[*3].

**命題 7.** $a(X) \in XR[[X]]$ と $b(X) \in R[[X]]$ に対し，$D((b \circ a)(X)) = b'(a(X))a'(X)$.

*証明*. $D$ が $R$ 加群の準同型であることと命題 4 より，$b(X) = X^n$ $(n \in \mathbb{N})$ のときについて示せばよい．このとき命題 4 より $(b \circ a)(X) = a(X)^n$ である．$n = 0$ のときはよい．$n \geq 1$ のとき，命題 6 を $n-1$ 回用いて，

$$D((b \circ a)(X)) = D(a(X)^n) = na(X)^{n-1}a'(X) = b'(a(X))a'(X)$$

となりよい． □

**例.** $a(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i X^i$ に対し，$a'(0) = a_1$ である．より一般に，$n$ 階微分を考えると，$a^{(n)}(X) = \underbrace{D(\cdots D}_{n}(a(X))\cdots)$ として $a^{(n)}(0) = n!a_n$ である．

**例.** $(1-X)^{-1} = \sum_{i \in \mathbb{N}} X^i$ について，$D((1-X)^{-1}) = \sum_{i \in \mathbb{N},\, i \geq 1} iX^{i-1} = (1-X)^{-2}$.

# 5 形式留数

TODO

# 6 exp

この節では $R$ を標数 0 の環とする．

**定義.** $\exp(X) \in R[[X]]$ を，

$$\exp(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{i!} X^i$$

で定める．

定義から，$D(\exp(X)) = \exp(X)$ がわかる．
exp を左から合成する写像 $\exp\colon XR[[X]] \longrightarrow 1 + XR[[X]]; a(X) \longmapsto \exp(a(X))$ は指数法則を満たす．

**命題 8.** $a(X), b(X) \in XR[[X]]$ に対し，$\exp(a(X) + b(X)) = \exp(a(X))\exp(b(X))$.

[*3] $b'(a(X))$ が $D(b(X))$ と $a(X)$ の合成であることに注意 (記法があまり綺麗でない).

証明．$a(X) = \sum_{i\in\mathbb{N},\, i\geq 1} a_i X^i$, $b(X) = \sum_{i\in\mathbb{N},\, i\geq 1} b_i X^i$ とする．$n \in \mathbb{N}$ を任意にとる．命題 3 より，

$$\begin{aligned}
\exp(a(X)+b(X)) &\equiv \sum_{k\in\mathbb{N}, k<n} \frac{1}{k!}(a(X)+b(X))^k \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}, k<n} \sum_{i,j\in\mathbb{N},\, i+j=k} \frac{1}{i!j!} a(X)^i b(X)^j \\
&\equiv \left(\sum_{i\in\mathbb{N}, i<n} \frac{1}{i!} a(X)^i\right)\left(\sum_{j\in\mathbb{N}, j<n} \frac{1}{j!} b(X)^j\right) \\
&\equiv \exp(a(X))\exp(b(X)) \pmod{X^n}
\end{aligned}$$

となる (2 つ目の $\equiv$ は $a(X)^i \equiv 0 \pmod{X^i}$, $b(X)^j \equiv 0 \pmod{X^j}$ を用いた)．よって命題 1 より $\exp(a(X)+b(X)) = \exp(a(X))\exp(b(X))$ が従う． □

## 7 形式積分

## 8 log

## 9 合成逆

## 10 多変数

## 11 アルゴリズム

## 12 数え上げ