メモ (形式的冪級数)

hos

2019 年 9 月 11 日

収束のことは考えない．その代わり，知らない演算をしない．

$\mathbb{N}$ は非負整数全体の集合とする．

1　形式的冪級数環

R を可換環とする．

X を不定元として，R の加算個の直積 $R^{\mathbb{N}}$ の元 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を形式的に $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i$ (あるいは $a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots$) と書いたものの集合を $R[[X]]$ とする．この元を $a(X)$ のように書くこともある．a_i を $a(X)$ の i **次の係数**と呼び，$[X^i]a(X)$ のように書く．0 次の係数を**定数項**と呼ぶ．

$\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i, \sum_{i\in\mathbb{N}} b_i X^i \in R[[X]]$ に対し，加法と乗法を

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i + \sum_{i\in\mathbb{N}} b_i X^i := \sum_{i\in\mathbb{N}} (a_i + b_i) X^i,$$

$$\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i\right)\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} b_i X^i\right) := \sum_{i\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i,j\in\mathbb{N},\, i+j=k} a_i b_j\right) X^k$$

で定め，$r \in R$ と $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i \in R[[X]]$ に対し，定数倍を

$$r\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i\right) := \sum_{i\in\mathbb{N}} (r a_i) X^i$$

で定めると，R 代数 (可換環構造が適切に入る R 加群) になることを示す．加法の単位元は $0 = 0 + 0X + 0X^2 + \cdots$，乗法の単位元は $1 = 1 + 0X + 0X^2 + \cdots$．乗法の結合法則のみやや非自明で，$\displaystyle\left(\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i\right)\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} b_i X^i\right)\right)\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} c_i X^i\right)$ の m 次の係数が

$$\sum_{l,k\in\mathbb{N},\, l+k=m}\left(\sum_{i,j\in\mathbb{N},\, i+j=k} a_i b_j\right) c_k = \sum_{i,j,k\in\mathbb{N},\, i+j+k=m} a_i b_j c_k$$

となることから従う．

この R 代数 $R[[X]]$ を，R **係数形式的冪級数環**と呼ぶ．

2 乗法の逆元

環の単元とは，乗法の逆元をもつ元のこと．可逆元．1 の約数．

定理 1. $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i \in R[[X]]$ が単元であるための必要十分条件は，a_0 が R の単元であること．

Proof. (必要性) $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} b_i X^i \in R[[X]]$ が $\displaystyle\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i\right)\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} b_i X^i\right) = 1$ を満たすとすると，定数項を比較して，$a_0 b_0 = 1$ である．

(十分性) a_0 が単元のとき，$\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} b_i X^i \in R[[X]]$ を

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0^{-1}, \\ b_i &= -a_0^{-1} \sum_{j\in\mathbb{N},\, 1\le j\le i} a_j b_{i-j} \end{aligned}$$

として定めると，$\displaystyle\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i\right)\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} b_i X^i\right) = 1$ を満たす． □

$a(X) \in R[[X]]$ の乗法の逆元が存在するとき，それは一意なので，$a(X)^{-1}$ や $\dfrac{1}{a(X)}$ と書く．

例. $r \in R$ に対し，$(1 - rX)^{-1} = \displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} r^i X^i$.