Домашнее задание № 11

① Решить уравнение:

1) $y' - y = 2x - 3$

$y' = 2x + y - 3$

$y' = z = 2x + y - 3$ $\qquad$ $y = z - 2x + 3$

$y' = (z - 2x + 3)' = z' - 2$

$z' - 2 = z$

$z' = z + 2$

$\frac{dz}{dx} = (z+2) \quad \Big| \cdot dx$

$dz = (z+2)dx \quad \Big| : (z+2)$

$\frac{dz}{z+2} = dx$

$\int \frac{dz}{z+2} = \int dx$

$\int \frac{dz}{z+2} = \begin{vmatrix} z+2=t \\ dz=dt \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|z+2|$

$\ln|z+2| = x + C$

$\ln|2x + y - 3 + 2| - x = C$

$\ln|2x + y - 1| - x = C$

2) $x^2 y' + xy + 1 = 0$

$\frac{x^2 dy}{dx} + xy + 1 = 0$ $\qquad$ $y = z^n$

$n - ?$ $\qquad$ $x = z$, $y = z^n$

$n \cdot z^{n+1} + z^{n+1} + 1 = 0$

$n + 1 = n + 1 = 0 \Rightarrow n = -1$

$y = \frac{1}{z} \quad dy = -\frac{dz}{z^2}$

$\frac{-x^2 dz}{z^2 dx} + \frac{x}{z} + 1 = 0$

$\frac{x}{z} - \frac{x^2}{z^2} + 1 = 0$

$u = \frac{z}{x} \quad \Big| \quad z = ux$

$\qquad \quad \ \ dz = udx + xdu$

$\left(\frac{1}{u} + 1\right)dx - \frac{udx + xdu}{u^2} = 0$

$\frac{-xdu}{u^2} = -dx \quad \Big| : -x$

$\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}$

$\int \frac{1}{u^2} du = \int \frac{1}{x} dx$

$\frac{1}{u} = c - \ln(x) \quad u = \frac{z}{x}$

$\frac{x}{z} = c - \ln(x) \quad z = \frac{1}{y}$

$xy = c - \ln(x)$

$y = \frac{-\ln(x) - c}{x}$

(2) Исследовать ряд на сходимость:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+n+1}$

$\lim_{n \to \infty} n+2 = n \qquad \lim_{n \to \infty} n^2+n+1 = n^2$

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}$

По признаку Коши:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{n} dn = (\ln(n))\Big|_1^{\infty} = \lim_{n\to\infty} \ln(n) - 0 = \infty - 0 = \infty$$

т.к. несоб-й интеграл расходится, то расходится и исследуемый ряд

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

По признаку Даламбера:

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ при $q<1$ — ряд сходится

при $q>1$ — ряд расходится

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot(n+1)^n \cdot n!}{n^n \cdot (n+1)\cdot n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = e$$

$e > 1 \Rightarrow$ ряд расходится

3) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

По признаку Коши: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n)} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^n} =$

$$= 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = 1 \cdot e^{-1} = e^{-1}$$

$e^{-1} < 1 \Rightarrow$ ряд сходится

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n - \ln n}$

члены ряда: $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4-\ln(2)}, \frac{1}{6-\ln(3)}$

$\Rightarrow$ знакочередующий ряд исследуется по признаку Лейбница:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{2n - \ln(n)}$$

- $\frac{1}{2} > \frac{1}{4-\ln(2)} > \frac{1}{6-\ln(3)}$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{2n-\ln(n)} = 0$

Оба условие Лейбница выполняются => ряд сходится

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{n+1}}{3^n(n+2)}$

$a_n = \frac{1}{3^n \cdot (n+2)}$ – числовой коэф-т

Область сходимости: $(-R; R)$, где $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$

$R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3^n \cdot (n+2)}}{\frac{1}{3^{n+1} \cdot (n+3)}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3 \cdot 3^n \cdot (n+3)}{3^n \cdot (n+2)} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3 \cdot (n+9)}{n+2} = 3$

$x_1 = 2-3 = -1$

$x_2 = 2+3 = 5$

Ряд сходится при всех $x \in (-1; 5)$

- пусть $x = -1$

$\Rightarrow \sum \frac{1}{3^n \cdot (n+2)} \cdot ((-1)-2)^{n+1} = \sum \frac{(-3)^{n+1}}{3^n \cdot (n+2)} = \sum \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^{n+1}}{3^n \cdot (n+2)}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^{n+1}}{3^n \cdot (n+2)}$

первые 3 члена ряда: $1, -\frac{3}{4}, \frac{3}{5}$ => знакочередующ ряд

По признаку Лейбница:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-3 \cdot 3^n}{3^n \cdot n + 3^n}$

- $1 > \frac{3}{4} > \frac{3}{5}$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-3 \cdot 3^n}{3^n \cdot n + 3^n} = 0$ => Оба условие выполняются

=> Ряд сходится

Абсолютная или условная сходимость:

$$\lim_{n\to\infty} 3^n \cdot n + 3^n = 3^n \cdot n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-3\cdot 3^n}{3^n \cdot n} = \frac{-3}{n}$$

Признак Коши:

$$\int_1^\infty \frac{-3}{n}\,dn = (-3\ln(n))\Big|_1^\infty = \lim_{n\to\infty} -3\ln(n) - 0 = -\infty - 0 = -\infty$$

=> ряд расходится => исследуемый ряд сходится условно

Ряд расходится, значит $x=-1$ – точка расходимости

$x=5$

$$\sum \frac{1}{3^n(n+2)}\cdot(5-2)^{n+1} = \sum \frac{3^{n+1}}{3^n(n+2)} = \sum \frac{3^{n+1}}{3^n\cdot(n+2)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{3^n(n+2)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} 3\cdot n + 6 = 3\cdot n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} 3\cdot n$$

По признаку Коши:

$$\int_1^\infty 3\cdot n\,dn = \left(3\cdot\frac{n^2}{2}\right)\Big|_1^\infty = \lim_{n\to\infty} 3\cdot\frac{n^2}{2} - \frac{3}{2} = \infty - \frac{3}{2} = \infty$$

т.к. несобственный интеграл расходится, то расходится и исследуемый ряд.

=> $x=5$ точка расходимости

=> Исследуемый ряд является сходящимся при $x \in (-1;5)$