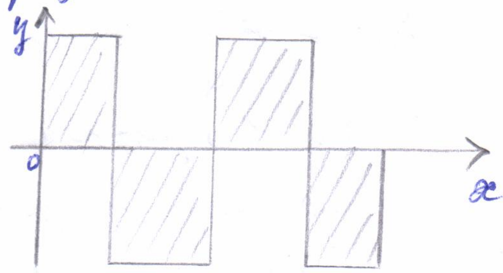
Домашнее задание к уроку 8

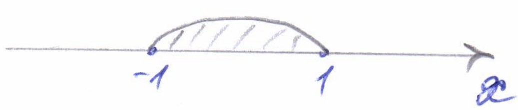
① Найти и изобразить области определения ф-ций:

1) $z=\sqrt{y\cdot\sin x}$



D: $y\cdot\sin x\geq 0$ $\quad y\geq 0\,,\ \sin x\geq 0$

2) $z=x+\arccos y$ $\quad$ D: $-1\leq y\leq 1$



② Вычислить пределы:

1) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \underbrace{(x+y)}_{б.м.}\underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{огр.в}\cdot\underbrace{\cos\frac{1}{y}}_{огр.в}=0 \qquad x\neq 0\,,\ y\neq 0$$

2) $$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=\left|\begin{array}{l} x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ \left.\begin{array}{l}x\to\infty\\ y\to\infty\end{array}\right|\to r\to\infty\end{array}\right|=\lim_{r\to\infty}\left(\frac{\cancel{r^2}\cos\varphi\sin\varphi}{\cancel{r^2}\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{1}}\right)^{(r\cdot\cos\varphi)^2}=$$

$$=(\cos\varphi\cdot\sin\varphi)^{(r\cdot\cos\varphi)^2}=\infty$$

3) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\underbrace{(x^2+y^2)}_{б.м}\underbrace{\sin^3\frac{1}{xy}}_{огр.в}=0 \qquad x\neq 0;\ y\neq 0$$

4) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^3}{x^2+y^2}=\left|\begin{array}{l} x=r\cdot\cos\varphi\\ y=r\cdot\sin\varphi\\ \left.\begin{array}{l}x\to 0\\ y\to 0\end{array}\right|\Rightarrow r\to 0\end{array}\right|=\lim_{r\to 0}\frac{\cancel{r^2}\cdot\cos^2\varphi\cdot r^3\cdot\sin^3\varphi}{\cancel{r^2}\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{1}}=$$

$$=\lim_{r\to 0}\ r^3\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin^3\varphi=0$$

③ Найти частные и полное приращение данной функции в данной точке и при данных приращениях аргументов:

1) $z = x^2 y$; т$M_0(1;2)$; $\Delta x = 0,1$; $\Delta y = -0,2$

$x_0 = 1$, $y_0 = 2$

• находим приращение:

$x_0 + \Delta x = 1 + 0,1 = 1,1$

$y_0 + \Delta y = 2 - 0,2 = 1,8$

т$M_1(1,1; 1,8)$

• значение ф-и в т M_0

$z(M_0) = z(1;2) = 1^2 \cdot 2 = 2$

• приращение к x

$z(x_0 + \Delta x; y_0) = z(1,1; 2) = (1,1)^2 \cdot 2 = 1,21 \cdot 2 = 2,42$

• приращение к y

$z(x_0; y_0 + \Delta y) = z(1; 1,8) = 1^2 \cdot 1,8 = 1,8$

• значение ф-ции в т. M_1

$z(M_1) = z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) = z(1,1; 1,8) = (1,1)^2 \cdot 1,8 = 2,178$

Частные приращение:

$\Delta_x z = z(x_0 + \Delta x; y_0) - z(x_0; y_0) = 2,42 - 2 = 0,42$

$\Delta_y z = z(x_0; y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0) = 1,8 - 2 = -0,2$

• Полное приращение:

$\Delta z = z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0) = 2,178 - 2 = 0,178$

$\Delta z = 0,178 \neq 0,42 - 0,2 = 0,4$

④ Найти частные производные данных ф-ций:

1) $z = e^{x^2+y^2}$

$z'_x = e^{x^2+y^2} \cdot (x^2+y^2)' = e^{x^2+y^2} \cdot 2x$

$z'_y = e^{x^2+y^2} \cdot (x^2+y^2)' = e^{x^2+y^2} \cdot 2y$

2) $u = x^y + (xy)^2 + z^{xy}$

$u'_x = y x^{y-1} + \frac{z(xy)^z}{x} + y \cdot z^{xy} \cdot \ln z$

$u'_y = x^y \cdot \ln x + \frac{z(xy)^z}{y} + x z^{xy} \cdot \ln z$

$u'_z = xy^z \cdot \ln(xy) + xy \cdot z^{xy-1}$

5) Вычислить приближенно:

1) $1{,}04^{2{,}03} \approx ?$

$f(x,y) = x^y$, $x = 1{,}04$, $y = 2{,}03$

$f(x_0, y_0) = f(1,2) = 1^2 = 1$

$x_0 = 1$, $y_0 = 2$

$\Delta x = x - x_0 = 1{,}04 - 1 = 0{,}04$

$\Delta y = y - y_0 = 2{,}03 - 2 = 0{,}03$

$f(x + \Delta x; y + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)$

частные производные:

$f'_x = y x^{y-1}$, $f'_y = x^y \ln x$

$f'_x(1,2) = 2 \cdot 1^{2-1} = 2$

$f'_y(1,2) = 1^1 \cdot \ln 1 = 1 \cdot 0 = 0$

Дифф-ал: $df(1,2) = f'_x \cdot \Delta x + f'_y \cdot \Delta y = 2 \cdot 0{,}04 + 0 \cdot 0{,}03 = 0{,}08$

$1{,}04^{2{,}03} \approx 1 + 0{,}08 = 1{,}08$

2) $\sqrt{(\sin^2(1{,}55) + 8e^{0{,}015})^5} \approx ?$

$f(x,y) = \sqrt{(\sin^2 x + 8e^y)^5}$, $x = 1{,}55$, $y = 0{,}015$

$f(x_0, y_0) = f(2,0) = \sqrt{((0{,}04)^2 + 8)^5} = \sqrt{(0{,}0016 + 8)^5} = \sqrt{32800{,}7811} =$
$= 181{,}1$

$x_0 = 2$; $y_0 = 0$

$\Delta x = x - x_0 = -0{,}45$

$\Delta y = y - y_0 = 0{,}015$

Частные производные:

$$f'_x = \sqrt{(\sin^2 x + e)^5} = \left((\sin^2 x + e)^{\frac{5}{2}}\right)' = \frac{5}{2}(\sin^2 x + e)^{\frac{3}{2}}\cdot(\sin^2 x + e$$

$$= \frac{5(\sin^2(x) + e)^{\frac{3}{2}}}{2}\cdot\left((\sin^2 x)' + (e)'\right) = \frac{5\cdot(\sin^2 x + e)^{\frac{3}{2}}}{2}\cdot\left((\sin^2 x)' + 0\right) =$$

$$= \frac{5\cdot(\sin^2 x + e)^{\frac{3}{2}}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot\sin(x)\cdot(\sin x)' = 5\cdot\sin x(\sin^2 x + e)^{\frac{3}{2}}\cdot\cos$$

$$= 5\cdot\sin x\cdot\cos x(\sin^2 x + 8e^{0,015})^{\frac{3}{2}}$$

$$f'_y = \left(\sqrt{(e + 8e^y)^5}\right)' = \frac{5}{2}\cdot(8e^y + e)^{\frac{3}{2}}\cdot(8e^y + e)' =$$

$$= \frac{5(8e^y + e)^{\frac{3}{2}}}{2}\cdot\left(8\cdot(e^y)' + 0\right) = \frac{5(8e^y + e)^{\frac{3}{2}}}{\cancel{2}}\cdot\overset{4}{\cancel{8}}\cdot e^y =$$

$$= 20e^y(8e^y + e)^{\frac{3}{2}} = 20e^y(8e^y + \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}$$

Диф-л: $df(2,0) = f'_x\cdot\Delta x + f'_y\cdot\Delta y =$

$$= 5\cdot\sin x\cdot\cos x(\sin^2 x + 8e^{0,015})^{\frac{3}{2}}\cdot(-0,45) +$$

$$+ 20e^y(8e^y + \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}\cdot 0,015 =$$

$$= -2,25\cdot\sin x\cdot\cos x(\sin^2 x + 8e^{0,015})^{\frac{3}{2}} +$$

$$+ 0,3e^y(8e^y + \sin^2 x) = 0 + 0,3\cdot(8) = 2,4$$

$$\sqrt{(\sin^2 1,55 + 8e^{0,015})^5} \approx 181,1 + 2,4 = 183,5$$