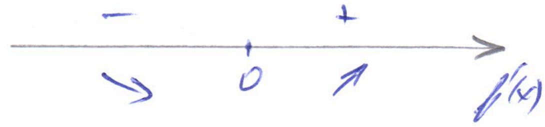
Домашнее задание к уроку 7

① Найти интервалы возрастания и убывания функции:

1) $f(x)=x+e^{-x}$

$f'(x)=x'+(e^{-x})'=1+e^{-x}\cdot(-1)=1-e^{-x}$



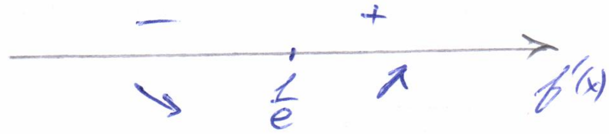
$(-\infty;0)$ – ф-я убывает

$(0;+\infty)$ ф-я возрастает

2) $f(x)=x\ln x$ $\quad x>0$

$f'(x)=(x)'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$

$f'(x)=0 \quad \ln x+1=0 \quad x=\frac{1}{e}$



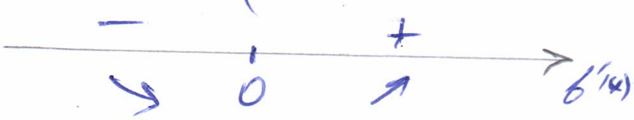
$(0;\frac{1}{e})$ функция убывает

$(\frac{1}{e};+\infty)$ ф-я возрастает

3) $y=\frac{1}{1-x^2}$ $\quad x\neq\pm1$

$$y'=\frac{1'\cdot(1-x^2)-1\cdot(1-x^2)'}{(1-x^2)^2}=\frac{0\cdot(1-x^2)-1\cdot(0-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

$2x=0 \quad x=0$



$(-\infty;-1)\cup(-1;0)$ – ф-я убывает

$(0;1)\cup(1;+\infty)$ ф-я возрастает

② Найти экстремумы:

1) $f(x)=x^3-3x+1$

$f'(x)=3x^2-3$

$f'(x)=0 \quad 3x^2-3=0 \quad x_{1,2}=\pm1$ – стацион. точки

$f''(x)=6x$

$f''(x_1)=6\cdot1=6$

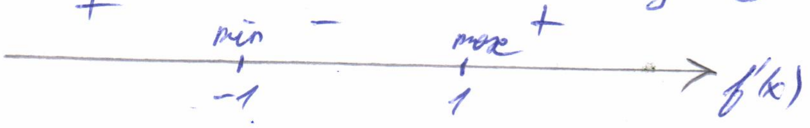
$f''(x_2)=6\cdot-1=-6$

т.к. $f'(1)=0$, $f''(1)>0$ => $x=1$ – минимум

$y=-1$

т.к. $f'(-1)=0$, $f''(-1)<0$ => $x=-1$ – максимум

$y=3$



2) $y = e^{x^2-4x+5}$

$y' = e^{x^2-4x+5}\cdot(x^2-4x+5)' = e^{x^2-4x+5}\cdot(2x-4)$

$y'(x)=0 \qquad 2x-4=0 \qquad x=2$ – стацион. точки $\qquad y=e$

$-$ $\quad$ 2 $\quad$ $+$ $\quad$ $f'(x)$

min

3) $y = x - \operatorname{arctg}(x)$

$y'(x) = (x') - (\operatorname{arctg} x)' = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$

$y'(x) = \frac{x^2}{1+x^2} = 0 \qquad x^2=0 \qquad x=0$ – стационарная точка

$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$ $\quad$ $f'(x)$

Знак не меняется => экстремума нет

③ Найти интервалы выпуклости и точки перегиба

1) $f(x)=e^{-x}$

$f'(x) = e^{-x^2}\cdot(-x^2)' = e^{-x^2}\cdot(-2x)$

$f''(x) = (e^{-x^2}\cdot(-2x))' = (e^{-x^2})'\cdot(-2x) + e^{-x^2}\cdot(-2x)' =$

$= e^{-x^2}(-2x)\cdot(-2x) + e^{-x^2}\cdot(-2) = e^{-x^2}\cdot(4x^2-2)$

$f''(x)=0 \Rightarrow 4x^2-2=0 \qquad x^2=\frac{1}{2} \qquad x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ – точки перегиба

$+$ $\quad$ $-$ $\quad$ $+$

$\cup$ $\quad -\sqrt{\frac{1}{2}}$ $\quad \cap$ $\quad \sqrt{\frac{1}{2}}$ $\quad \cup$ $\quad f''(x)$

$(-\infty; -\sqrt{\frac{1}{2}}) \cup (\sqrt{\frac{1}{2}}; +\infty)$ – ф-ция выпукла вниз

$(-\sqrt{\frac{1}{2}}; \sqrt{\frac{1}{2}})$ – ф-ция выпукла вверх

2) $y=\cos x$

$y'(x) = -\sin x$

$y''(x) = -\cos x$

$y''(x)=0 \qquad -\cos x = 0 \qquad x=\pm\frac{\pi}{2}$ – точки перегиба

Функция периодическая

$-$ $\quad$ $+$ $\quad$ $-$ $\quad$ $+$

$\cap$ $\quad -\frac{3\pi}{2}$ $\quad \cup$ $\quad -\frac{\pi}{2}$ $\quad \cap$ $\quad \frac{\pi}{2}$ $\quad \cup$ $\quad \frac{3\pi}{2}$ $\quad f''(x)$

3) $y = x^5 - 10x^2 + 7x$

$y'(x) = 5x^4 - 10\cdot 2x + 7 = 5x^4 - 20x + 7$

$y''(x) = 20x^3 - 20$

$y''(x) = 0 \qquad 20x^3 - 20 = 0$

$x = 1$ – точка перегиба

$\underset{\cap}{-} \quad 1 \quad \underset{\cup}{+} \quad f''(x)$

$(-\infty ; 1)$ – фун-я выпукла вверх

$(1 ; +\infty)$ – фун-я выпукла вниз

4) Найти асимптоты графиков функции:

1) $y = \dfrac{3x}{x+2}$ ф-ция терпит разрыв в $x = -2$

$\lim\limits_{x \to -2+0} \dfrac{3x}{x+2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -2-0} \dfrac{3x}{x+2} = -\infty$

$x = -2$ – вертикальная асимптота

$k = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{x+2} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{x+2} = 0$

$b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{x+2} = 1$

$y = 1$ – горизонтальная асимптота

2) $y = e^{-\frac{1}{x}}$

разрыв : $x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0+0} e^{-\frac{1}{x}} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0-0} e^{-\frac{1}{x}} = 1$

$x = 0$ – вертикальная асимптота

$y = kx + b$

$k = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 0 \Rightarrow$ есть горизонт. асимптота

$b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$

$y = 1$ – горизонтальная асимптота

(5) Провести полное исследование и построить график функции:

$y = x^2 \cdot e^{-x}$

1) Область определения ф-ции:

$D(f): (-\infty; +\infty)$

2) Ф-ция непериодическая

3) $f(-x) = -f(x)$ – нечетная

$f(-x) = f(x)$ – четная

$f(-x) = (-x)^2 \cdot e^{-(-x)} = x^2 \cdot e^{x}$ => ф-ция ни четная и ни нечетная

4) точки пересечения с осями:

OY: $x = 0$

$y = f(0) = 0$ т. $M(0;0)$ – точка пересечения с OY

OX: $f(x) = 0$ $x^2 \cdot e^{-x} = 0$ $x = 0$

=> т. $M(0;0)$ – единственная точка пересечения с осями

5) Асимптот у данной функции нет.

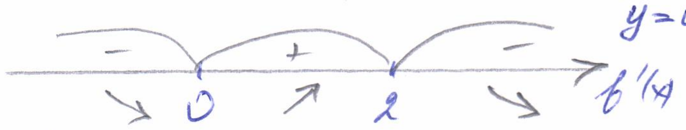
6) Интервалы монотонности. Экстремумы.

$y'(x) = -x^2 \cdot e^{-x} + 2x \cdot e^{-x} = x^2 \cdot e^{-x} \cdot (-1) + 2x \cdot e^{-x} =$

$= -x^2 \cdot e^{-x} + 2x \cdot e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2) = e^{-x} \cdot x \cdot (2 - x)$

$y'(x) = 0$ $e^{-x} \cdot x \cdot (2 - x) = 0$ $x_1 = 2$ $x_2 = 0$

$y = 0,5$ $y = 0$



$(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ – ф-ция убывает

$(0; 2)$ – ф-ция возрастает

7) Интервалы выпуклости и вогнутости:

$y''(x) = (e^{-x} \cdot (2x - x^2))' = e^{-x} \cdot (-1) \cdot (2x - x^2) + (2 - 2x) \cdot e^{-x} =$

$= e^{-x} \cdot (x^2 - 2x + 2 - 2x) = e^{-x} \cdot (x^2 - 4x + 2)$

$y''(x) = 0$ => $e^{-x} \cdot (x^2 - 4x + 2) = 0$ $x^2 - 4x + 2 = 0$

$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 8$ $x_1 = \frac{4 + \sqrt{8}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2}$

$x_2 = \frac{4 - \sqrt{8}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}$

$(-\infty; 2-\sqrt{2}) \cup (2+\sqrt{2}; +\infty)$ – ф-ция выпукла вниз

$(2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2})$ – функция выпукла вверх