

# Домашнее задание к уроку 5

①

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(x+3) - \ln x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x+3}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1 + 3x^{-1}) = \frac{3}{x} = 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\arcsin 3x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \frac{2x + O(2x)}{\arcsin 3x} = \frac{2x + O(2x)}{3x + O(3x)} = \frac{2}{3}$$

$$3) \lim_{a \rightarrow 0} \frac{(x+a)^3 - x^3}{a} = \frac{x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3 - x^3}{a} =$$

$$= 3x^2 + 3ax + a^2 = 3x^2$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x \cdot \lg 2x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \frac{1 - \left(1 - \frac{(4x)^2}{2} - O(4x)\right)}{2x(2x + O(2x))} =$$

$$= \frac{1 - 1 + \frac{(4x)^2}{2} - O(4x)}{4x^2 + O(2x)} = \frac{(4x)^2}{2} \cdot \frac{1}{4x^2} = \frac{16x^2}{2} \cdot \frac{1}{4x^2} = 2$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{sh}\left(\frac{2}{x}\right) = x \cdot \left(\frac{2}{x} + O\left(\frac{2}{x}\right)\right) = 2 + O\left(\frac{2}{x}\right) = 2$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \lg x)^{\operatorname{ctg} x} = \left(1 + \frac{1}{\operatorname{ctg} x}\right)^{\operatorname{ctg} x} = e$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{x^2} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \frac{\sqrt{1+x(x+O(x))} - 1}{x^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2+O(x)} - 1}{x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2} = \text{умножим числитель и знаменатель на } (\sqrt{x^2+1} + 1)$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{1}}{-\sqrt{x^2+1}-1} = \frac{-x^2+1-1}{-x^2-\sqrt{x^2+1}-1} = \frac{-1}{-\sqrt{x^2+1}-1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad 1) \quad f(x) = \frac{x^2 - 16}{x + 4}, \quad x_0 = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow -4-0} \frac{x^2 - 16}{x + 4} = \frac{(x+4)(x-4)}{x+4} = -8$$

$$\lim_{x \rightarrow -4+0} \frac{x^2 - 16}{x + 4} = -8 \Rightarrow \text{функция непрерывна в т. } x_0 = -4$$

разрыв устранимый

$$2) \quad f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x_0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \text{разрыв устранимый}$$

$$\textcircled{3} \quad 1) \quad f(x) = \arctg \frac{2}{x-1}, \quad x_0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \arctg \frac{2}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \arctg \frac{2}{x-1} = +\infty$$

$\Rightarrow$  функция имеет разрыв 2-го рода в т.  $x = 1$

$$2) \quad f(x) = \frac{1}{2^{x-3} - 1}, \quad x_0 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{2^{x-3} - 1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{2^{x-3} - 1} = -\infty$$

$\Rightarrow$  функция имеет разрыв 2-го рода в т.  $x = 3$