Домашнее задание к уроку 4.

Практическое задание №1

① Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right] \cdot 2 \; N2 - N3 \to N2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -1 & -10 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right] \; N3 - N1 = N3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

3 уравнения, 4 неизвестных => бесконечное количество решений

$$x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0$$
$$-x_2 + 5x_3 - x_4 = -10$$
$$-2x_3 + 3x_4 = 4$$

Частное решение:

$x_4 = 0$ $\quad x_2 = 0$

$x_3 = -2$ $\quad x_1 = -2$

Общее решение:

$x_4 = c$

$x_3 = -\dfrac{4-3c}{2}$

$x_2 = 5 \cdot \left(-\dfrac{4-3c}{2}\right) - c + 10$

$x_1 = 5\left(\dfrac{4-3c}{2}\right) + c - 10 - \dfrac{4-3c}{2} + 2c$

2) Проверить на совместность и выяснить, сколько решений будет иметь система линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -3 & -17 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \cdot 2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -1 & -17 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \cdot 3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -1 & -17 \\ 0 & -4 & -2 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \cdot 4 \\ \cdot 7 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -1 & -17 \\ 0 & 0 & -10 & -96 \end{array}\right]$$

$\left.\begin{array}{l} n = 3 \\ \operatorname{rang} A = 3 \\ \operatorname{rang} \tilde{A} = 3 \end{array}\right\}$ Система совместная имеет 1 решение

б) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 5 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \\ \cdot 2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -12 & 18 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & -12 & 18 & 10 \end{array}\right] \quad N3 = N1 - N3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -12 & 18 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right] \quad \left.\begin{array}{l} n = 3 \\ \operatorname{rang} A = 1 \\ \operatorname{rang} \tilde{A} = 3 \end{array}\right\}$$ нет решений, несовместная система

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & -8 & -2 \end{array}\right] \quad \left.\begin{array}{l} n = 3 \\ \operatorname{rang} A = 2 \\ \operatorname{rang} \tilde{A} = 2 \end{array}\right\}$$ Совместная система. Множество решений.

3) Проверьте на совместность и выясните сколько решений будет иметь система линейных уравнений, заданная расширенной матрицей.

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \quad \left.\begin{array}{l} n = 4 \\ \operatorname{rang} A = 4 \\ \operatorname{rang} \tilde{A} = 4 \end{array}\right\}$$ Совместная система. 1 решение

4) Дана система линейных уравнений, заданная расширенной матрицей:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right]$$

Найдите соотношение между параметрами a, b и c при которых система считается несовместной.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right] \quad N2-(N1\cdot 4) \Rightarrow N2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 0 & -6 & -12 & c-7a \end{array}\right] \quad N3-(N2\cdot 2)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 0 & 0 & 0 & c-7a-(2b-8a) \end{array}\right]$$

При $c+a+2b$ система будет несовместна.

Практическое задание №2.

(1) Решить систему уравнений методом Крамера:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 = 7 \end{cases}$

$\det A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = -4 - (3 \cdot -2) = -4 + 6 = 2$

$\det A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} = -4 - (-14) = 10$

$\det A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = 7 - (3) = 4$

$x_1 = \frac{10}{2} = 5$, $x_2 = \frac{4}{2} = 2$

б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

$\det A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - (-1) \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} =$

$= 2 \cdot (1 + 12) - (-1)(1 + 6) - 5(4 - 2) = 26 + 7 + 10 = 43$

$\det A_1 = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = 10 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - (-1) \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} =$

$= 10 \cdot (1 + 12) - (-1)(-2 + 3) + 5(-8 - 1) = 130 + 1 - 45 = 86$

$$\det A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 10\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= 2(-2+3) - 10(1+6) + 5(1+4) = 2 - 70 + 25 = -43$$

$$\det A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = 2\cdot\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - (-1)\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$+ 10\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 2\cdot(1+8) - (-1)(1+4) + 10(4-2) = 43$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{86}{43} = 2 \quad ; \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-43}{43} = -1$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{43}{43} = 1$$

② * Найдите L-матрицу LU-разложение для матрицы коэффициентов:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 12 \\ 3 & 26 & 30 \end{bmatrix}$ $\quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 12 \\ 3 & 26 & 30 \end{bmatrix} \cdot 2 \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$

$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 3 & 26 & 30 \end{bmatrix} \cdot 3 \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 20 & 18 \end{bmatrix} \cdot 5$

$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$