Домашнее задание к уроку №1.

Практическое задание 1.

(1) Исследуйте на линейную зависимость

$f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = 1$, $f_3(x) = x+1$, $f_4(x) = x - e^x$

Заметим, что $f_1(x) = f_3(x) - f_2(x) - f_4(x)$

$$e^x = (x+1) - (1) - (x - e^x)$$

$\Rightarrow f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ – линейно зависимы

(2) Исследуйте на линейную зависимость

$f_1(x) = 2$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$, $f_4(x) = (x+1)^2$

Заметим, что $f_4(x) = f_3(x) + 2 f_2(x) + \frac{1}{2} f_1(x)$

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + \frac{1}{2} \cdot 2$$

$\Rightarrow f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ – линейно зависимы

(3) Найдите координаты вектора $x = (2, 3, 5) \in R^3$ в базисе $b_1 = (0, 0, 10)$, $b_2 = (2, 0, 0)$, $b_3 = (0, 1, 0)$

$x = (2, 3, 5) = (0, 0, 5) + (2, 0, 0) + (0, 3, 0) = \frac{1}{2}(0, 0, 10) + (2, 0, 0) + 3 \cdot (0, 1, 0) =$

$= \frac{1}{2} b_1 + b_2 + 3 b_3$

Координаты вектора в базисе $(\frac{1}{2}, 1, 3)$

(4) Найти координаты вектора $3x^2 - 2x + 2 \in R^3[x]$

а) в базисе $(1, x, x^2)$

$a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (0, x, 0)$, $a_3 = (0, 0, x^2)$

$[x] = (3x^2, -2x, 2)$

$x = 3a_3 + (-2) \cdot a_2 + 2 \cdot a_1$

$[x] = (2, -2, 3)$

б) в базисе $(x^2, x-1, 1)$

$b_1 = (x^2, 0, 0)$; $b_2 = (0, x-1, 0)$; $b_3 = (0, 0, 1)$

$b_2 \parallel$ базису $(0, 1, 0)$, но смещен на -1 $\Rightarrow$ координата смещена на -1

$\Rightarrow x = 3 \cdot b_1 + (-2) \cdot b_2 + 2 \cdot b_3 = (3, -3, 2)$

(5) Установите, считается ли линейным подпространством:

а) совокупность всех векторов трёхмерного пространства, у которых по крайней мере одна из первых двух координат $= 0$

$$\left.\begin{matrix}(0, a, b)\\(a, 0, b)\\(0, 0, a)\end{matrix}\right\}$$

Проверяем условие линейности:

$(0, a, b) + (a, 0, b) + (0, 0, a) = (\underline{a} + a + 2ba)$

$\Rightarrow$ <u>Свойство линейности не сохраняется</u>

Св-во линейности сохраняется при условии сложения векторов $(0, a, b)$ и $(0, 0, a)$

б) $a = \lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, \dots, \lambda_n u_n$

$b = \mu_1 u_1, \mu_2 u_2, \dots, \mu_n u_n$

все векторы, считающиеся линейными комбинациями данных векторов $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

Проверяем условие линейности:

$\lambda_1 u_1 + \mu_1 u_1 = 0$, т.е. при $u_1 = 0$ св-во линейности сохраняется

Также св-во линейности сохраняется, когда первая координата $u_1 = 0$ или одновременно λ_1 и $\mu_1 = 0$

Практическое задание №2

1) Найти скалярное произведение векторов $x, y \in R$

а) $x=(0,-3,6)$, $y=(-4,7,9)$

$(x,y)=0\cdot(-4)+(-3)\cdot 7+6\cdot 9=0+(-21)+54=33$

б) $x=(7,-4,0,1)$, $y=(-3,1,11,2)$

$(x,y)=7\cdot(-3)+(-4)\cdot 1+0\cdot 11+1\cdot 2=-21+(-4)+0+2=-23$

2) Найдите нормы векторов $(4,2,4)$ и $(12,3,4)$ и угол между ними

$x=(4,2,4)$ $\quad \cos\varphi=\dfrac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}$

$y=(12,3,4)$

$(x,y)=4\cdot 12+2\cdot 3+4\cdot 4=28+6+16=50$

$\|x\|\cdot\|y\|=\sqrt{4^2+2^2+4^2}\cdot\sqrt{12^2+3^2+4^2}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{169}=6\cdot 13=78$

$\cos\varphi=\dfrac{50}{78}=0{,}64$

$\|x\|=6$; $\|y\|=13$; $\varphi=50^\circ$

3) Определите, будет ли линейное пространство евклидовым, если за скалярное произведение принять:

а) произведение длин векторов

Проверим 4 аксиомы:

1) $(x,y)=(y,x) \Rightarrow \|x\|\cdot\|y\|=\|y\|\cdot\|x\|$

2) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y) \Rightarrow \lambda\|x\|\cdot\|y\|=\lambda(\|x\|\cdot\|y\|)$

3) $(x_1+x_2,y)=(x_1,y)+(x_2,y) \Rightarrow (\|x_1\|+\|x_2\|)\cdot\|y\|=\|x_1\|\cdot\|y\|+\|x_2\|\cdot\|y\|$

4) $(x,x)\geq 0$; $(x,x)=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow \|x\|\cdot\|x\|\geq 0$; $x=0$, то $\|x\|=0$

$\Rightarrow$ линейное пространство будет евклидовым.

б) утроенное обычное скалярное произведение векторов:

1) $(x,y)=(y,x) \Rightarrow 3(x,y)=3(y,x)$

2) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y) \Rightarrow 3\cdot(\lambda x,y)=3\cdot\lambda(x,y)$

3) $(x_1+x_2,y)=(x_1,y)+(x_2,y) \Rightarrow 3(x_1+x_2,y)=3(x_1,y)+3(x_2,y)$

4) $(x,x)\geq 0$, при $(x,x)=0 \to x=0 \Rightarrow 3(x,x)\geq 0$, $x=0 \to 3(x,x)=0$

$\Rightarrow$ линейное пространство будет евклидовым

(4) Выясните, какие из нижеперечисленных векторов образуют ортонормированный базис в линейном пространстве R^3.

а) $(1,0,0);(0,0,1)$ $\cos\varphi=\dfrac{x,y}{\|x\|\cdot\|y\|}=\dfrac{0+0+0}{\|x\|\cdot\|y\|}=0$ $\varphi=90^\circ$

$\|x\|=\sqrt{1^2+0^2+0^2}=1$

$\|y\|=\sqrt{0^2+0^2+1^2}=1$ $\Rightarrow$ векторы образуют ортонормир-й базис

б) $\left(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2},0\right);\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},0\right);(0,0,1)$ $\cos\varphi=\dfrac{x,y,z}{\|x\|\cdot\|y\|\cdot\|z\|}=\dfrac{0+0+0}{\|x\|\cdot\|y\|\cdot\|z\|}=$

$=0$ $\varphi=90^\circ$

$\|x\|=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt2}\right)^2+0^2}=1$

$\|y\|=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)^2+0^2}=1$

$\|z\|=\sqrt{0^2+0^2+1^2}=1$ $\Rightarrow$ векторы образуют ортонорм. базис

в) $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right);\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right);(0,0,1)$ $\cos\varphi=\dfrac{(x,y,z)}{\|x\|\cdot\|y\|\cdot\|z\|}=$

$=\dfrac{0+0+0}{\|x\|\cdot\|y\|\cdot\|z\|}=0$ $\varphi=90^\circ$

$\|x\|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+0^2}=\frac{1}{2}$

$\|y\|=\sqrt{0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$

$\|z\|=\sqrt{0^2+0^2+1^2}=1$ $\Rightarrow$ вектора не образуют ортонорм. базис г) $(1,0,0)$; $(0,1,0)$; $(0,0,1)$

$$\cos\varphi = \frac{(x,y,z)}{\|x\|\cdot\|y\|\cdot\|z\|} = \frac{0+0+0}{\|x\|\cdot\|y\|\cdot\|z\|} = 0 \quad \varphi = 90^\circ$$

$\|x\| = \sqrt{1^2+0^2+0^2} = 1$

$\|y\| = 1$

$\|z\| = 1$ $\Rightarrow$ векторы образуют ортонормир. базис