

Дополните задание к уроку 2.

Практическое задание №1

① Определите, какие произведения матриц AB и BA определены и найдите размерность полученных матриц:

а) $A - 4 \times 2, B - 4 \times 2$

$A \cdot B$ - не определено

$B \cdot A$ - не определено

б) $A - 2 \times 5, B - 5 \times 3$

$A \cdot B$ - определено, размерность 2×3

$B \cdot A$ - не определено

в) $A - 8 \times 3, B - 3 \times 8$

$A \cdot B$ - определено, размерность 8×8

$B \cdot A$ - определено, размерность 3×3

г) $A - 4 \times 4, B - 4 \times 4$

AB - определено, размерность 4×4

BA - определено, размерность 4×4

② Найдите сумму и произведение матриц

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+0 & -1-10 \\ 12+0 & -3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -11 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$$

③ Выпишите линейную комбинацию $3A - 2B + 4C$ где

$$\text{матрицы } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3A = \begin{bmatrix} 3 & 21 \\ 9 & -18 \end{bmatrix}$$

$$2B = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$4C = \begin{bmatrix} 8 & -16 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$3A - 2B = \begin{bmatrix} 3 & 21 \\ 9 & -18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 5 & -16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 5 & -16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & -16 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -5 \\ 9 & -12 \end{bmatrix}$$

④ Дана матрица $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Вычислите AA^T и $A^T A$.

1) $AA^T = ?$

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

2×3

3×2

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 16+1 & 20-2 & 8+3 \\ 20+(-2) & 25+4 & 10-6 \\ 8+3 & 10-6 & 4+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 18 & 11 \\ 18 & 29 & 4 \\ 11 & 4 & 13 \end{bmatrix}$$

2) $A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16+25+4 & 4-10+6 \\ 4-10+6 & 1+4+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}$

2×3 3×2

⑤ Трансцендентное задание №2

④ Вычислить определитель:

а) $A = \begin{bmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{bmatrix}$ $\det A = \sin x \cdot \sin x - (\cos x \cdot -\cos x) =$
 $= \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

б) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = 4 \cdot (5 \cdot 9 - 1 \cdot 0) - 2 \cdot (0 \cdot 9 - 0 \cdot 1) + 3 \cdot (0 \cdot 0 - 0 \cdot 5) =$
 $= 180 - 0 + 0 = 180$

$$6) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = 1 \cdot (5 \cdot 9 - 8 \cdot 6) - 2(4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3(4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) =$$

$$= -3 + 12 - 9 = 0$$

2) Определите матрицу $A = 4$. Ответ:

a) $\det(A^2) = \det(A) \cdot \det(A) = 4 \cdot 4 = 16$

b) $\det(A^T) = \det(A) = 4$

в) $\det(2A) = \det(A) + \det(A) = 4 + 4 = 8$

3) Докажите, что матрица вырожденная:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 4 & 13 \end{bmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} -14 & 6 \\ 4 & 13 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 13 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -14 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(-182 - 42) - 4(52 + 18) - 3(28 - 42) = -2(-224) - 490 + 42 =$$

$$= 448 - 490 + 42 = 0 \Rightarrow \text{матрица вырожденная}$$

4) Ответьте при матрице:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ 3-я строка - результат сложения 1-й и 2-й.
 \Rightarrow они линейно зависимы \Rightarrow
 убираем 3-ю строку

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ rank} = 2$$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ 3-я строка - результат сложения 1-й и 2-й.
 \Rightarrow они линейно зависимы \Rightarrow
 убираем 3-ю строку

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ rank} = 3$$