

Домашнее задание к уроку 3.

- ① Найти собственные векторы и собственные значения для линейного оператора, заданного матрицей:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (-1-\lambda)(6-\lambda) + 12 = 0$$

$$(-1-\lambda)(6-\lambda) = -12$$

$$-1 \cdot (6-\lambda) + (-\lambda)(6-\lambda) = -12$$

$$-6 + \lambda - 6\lambda + \lambda^2 + 12 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2 \Rightarrow \text{собственные значения}$$

Собственные векторы:

$$\lambda_1 = 3$$

$$Ax = x\lambda$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} -x_1 - 6x_2 \\ 2x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 - 6x_2 = 3x_1 \\ 2x_1 + 6x_2 = 3x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x_1 = 6x_2 \\ 2x_1 = -3x_2 \end{cases}$$

$$x_1 = -\frac{3x_2}{2}$$

любые векторы:

$$x_2 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} 1,5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1,5 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{собственные векторы при } \lambda = 3$$

$$\lambda = 2 \quad \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -x_1 - 6x_2 \\ 2x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 - 6x_2 = 2x_1 \\ 2x_1 + 6x_2 = 2x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x_1 = 6x_2 \\ 2x_1 = -4x_2 \end{cases}$$

$$x_1 = -2x_2$$

$x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$  множество собственных векторов.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

② Дан оператор поворота на  $180^\circ$ , заданный матрицей:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{Понятно, что любой вектор является} \\ \text{его же собственным.}$$

$$\varphi = 180^\circ \quad \det = 1 \Rightarrow A - \text{ортогональная матрица}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (-1-\lambda)^2 = 0 \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1 \\ \text{собственные значения}$$

$$Ax = x\lambda$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 + 0 = -x_1 \\ 0 - x_2 = -x_2 \end{cases}$$

$\forall x_2; \forall x_1 \Rightarrow$  любой вектор является его же собственным.

③ Пусть линейный оператор задан матрицей:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{Укажите, является ли вектор } x = (1, 1) \text{ собственным вектором этого линейного оператора.}$$

$$Ax = \lambda x$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 + 1 = \lambda \\ -1 + 3 = \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = \lambda \\ \lambda = \lambda \end{cases} \Rightarrow \text{вектор } x \text{ — собственный вектор матрицы } A$$

④ Пусть линейный оператор задан матрицей:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{Укажите, является ли вектор } x = (3, -3, -4) \text{ собственным вектором этого линейного оператора.}$$

$$x = (3, -3, -4)$$

$$Ax = \lambda x$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + (-3) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-4) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda \\ -3\lambda \\ -4\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -9 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda \\ -3\lambda \\ -4\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -9 = 3\lambda \\ 9 = -3\lambda \\ -12 = -4\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = -3 \\ \lambda = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{не является собственным вектором матрицы } A.$$