Домашнее задание к уроку 3.

1) Даны значения зарплат из выборки выпускников:
100, 80, 75, 77, 89, 33, 45, 25, 65, 17, 30, 24, 57, 55, 70, 75, 65, 84, 90, 150.
Посчитать среднее арифметическое, среднее квадратичное отклонение, смещенную и несмещенную оценки дисперсий для данной выборки.

а) $\overline{X} = (100+80+75+77+89+33+45+25+65+17+30+24+57+55+70+75+65+84+90+150)/20 = \frac{1306}{20} = 65{,}3$

б) $$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})^2}{n} = \frac{(100-65{,}3)^2}{20} + \frac{(80-65{,}3)^2}{20} + \frac{(75-65{,}3)^2}{20} + \frac{(77-65{,}3)^2}{20} + \frac{(89-65{,}3)^2}{20} + \frac{(33-65{,}3)^2}{20} + \frac{(45-65{,}3)^2}{20} + \frac{(25-65{,}3)^2}{20} + \frac{(65-65{,}3)^2}{20} + \frac{(17-65{,}3)^2}{20} + \frac{(30-65{,}3)^2}{20} + \frac{(24-65{,}3)^2}{20} + \frac{(57-65{,}3)^2}{20} + \frac{(70-65{,}3)^2}{20} + \frac{(75-65{,}3)^2}{20} + \frac{(65-65{,}3)^2}{20} + \frac{(84-65{,}3)^2}{20} + \frac{(90-65{,}3)^2}{20} + \frac{(150-65{,}3)^2}{20} =$$

$$= 60{,}2 + 10{,}8 + 4{,}7 + 6{,}8 + 28 + 52{,}16 + 20{,}6 + 81{,}2 + 0{,}005 + 17{,}44 + 116{,}64 + 62{,}3 + 73{,}34 + 3{,}44 + 1{,}1 + 4{,}7 + 0{,}004 + 17{,}48 + 20{,}5 + 358{,}7 = 950{,}11$$

в) $$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})^2}{n}} = \sqrt{950{,}11} = 30{,}82$$

г) Несмещенная дисперсия:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})^2}{n-1} = \frac{(100-65{,}3)^2}{19} + \frac{(80-65{,}3)^2}{19} + \frac{(75-65{,}3)^2}{19} + \frac{(77-65{,}3)^2}{19} + \frac{(89-65{,}3)^2}{19} + \frac{(33-65{,}3)^2}{19} + \frac{(45-65{,}3)^2}{19} + \frac{(25-65{,}3)^2}{19} + \frac{(65-65{,}3)^2}{19} + \frac{(17-65{,}3)^2}{19} + \frac{(30-65{,}3)^2}{19} + \frac{(24-65{,}3)^2}{19} + \frac{(57-65{,}3)^2}{19} + \frac{(55-65{,}3)^2}{19} + \frac{(70-65{,}3)^2}{19} + \frac{(75-65{,}3)^2}{19} + \frac{(65-65{,}3)^2}{19} + \frac{(84-65{,}3)^2}{19} + \frac{(90-65{,}3)^2}{19} + \frac{(150-65{,}3)^2}{19} = 1000{,}12$$

Ответ: Среднее арифметическое = 65,3; смещенная дисперсия = 950,11; среднее квадратичное отклонение = 30,82; несмещенная дисперсия = 1000,12

② В первом ящике находится 8 мячей, из которых 5 - белые. Во втором ящике - 12 мячей, из которых 5 белые. Из первого ящика вытаскивают случайным образом два мяча, из второго - 4. Какова вероятность того, что 3 мяча белые?

I ящик - 8 мячей

5 белые

3 не белые

↓

2 мяча

II ящик - 12 мячей

5 белые

7 не белые

↓

4 мяча

$\underbrace{\qquad\qquad}_{6 \text{ мячей}}$

3 варианта:

1) 0б и 3б
2) 1б и 2б
3) 2б и 1б

} совместные события

$$P(A) = \underbrace{\frac{C_5^0 \cdot C_3^2}{C_8^2} \cdot \frac{C_5^3 \cdot C_7^1}{C_{12}^4}}_{B_1} + \underbrace{\frac{C_5^1 \cdot C_3^1}{C_8^2} \cdot \frac{C_5^2 \cdot C_7^2}{C_{12}^4}}_{B_2} +$$

$$+ \underbrace{\frac{C_5^2 \cdot C_3^0}{C_8^2} \cdot \frac{C_5^1 \cdot C_7^3}{C_{12}^4}}_{B_3} = \frac{10 \cdot 1}{28} \cdot \frac{5 \cdot 35}{495} + \frac{5 \cdot 3}{28} \cdot \frac{10 \cdot 21}{495} +$$

$$+ \frac{1 \cdot 8}{28} \cdot \frac{10 \cdot 7}{495} = \frac{1750 + 3150 + 210}{28 \cdot 495} = \frac{5110}{13860} \cdot \frac{73}{198} \approx 0{,}3687$$

Ответ: $P = 0{,}3687$

3) В университет на факультеты A и B поступило равное количество студентов, а на факультет C студентов поступило столько же, сколько на A и B вместе. Вероятность того, что студент факультета A сдаст первую сессию, равна 0,8. Для студента факультета B эта вероятность равна 0,7, а для студента факультета C – 0,9. Студент сдал первую сессию. Какова вероятность, что он учится: а) на факультете A, б) на факультете B, в) на факультете C?

O – сдача сессии.
A – учеба на фак-те A
B – учеба на фак-те B
C – учеба на фак-те C

$P(O|A) = 0{,}8$
$P(O|B) = 0{,}7$
$P(O|C) = 0{,}9$

Пусть на A поступило x человек, на B также x человек, на факультет C – $x+x$

$x + x + 2x = 1 \qquad x = \frac{1}{4}$

$P(A) = \frac{1}{4}$; $P(B) = \frac{1}{4}$; $P(C) = \frac{1}{2}$

а) $P(A|O) = \dfrac{P(A)\cdot P(O|A)}{P(A)\cdot P(O|A) + P(B)\cdot P(O|B) + P(C)\cdot P(O|C)} =$

$= \dfrac{\frac{1}{4}\cdot 0{,}8}{\frac{1}{4}\cdot 0{,}8 + \frac{1}{4}\cdot 0{,}7 \cdot \frac{1}{2}\cdot 0{,}9} = \dfrac{8}{33} = 0{,}2424$

б) $P(B|O) = \dfrac{P(B)\cdot P(O|B)}{P(A)\cdot P(O|A) + P(B\cdot P(O|B) + P(C)\cdot P(O|C)} =$

$= \dfrac{\frac{1}{4}\cdot 0{,}7}{\frac{1}{4}\cdot 0{,}8 + \frac{1}{4}\cdot 0{,}7 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}9} = \dfrac{7}{33} = 0{,}2121$

в) $P(C|O) = \dfrac{P(C)\cdot P(O|C)}{P(A)\cdot P(O|A) + P(B)\cdot P(O|B) + P(C)\cdot P(O|C)} =$

$= \dfrac{\frac{1}{2}\cdot 0{,}9}{\frac{1}{4}\cdot 0{,}8 + \frac{1}{4}\cdot 0{,}7 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}9} = \dfrac{18}{33} = 0{,}5455$

Ответ: а) $P(A|O) = 0,2424$; б) $P(B|O) = 0,2121$; в) $P(C|O) = 0,5455$

④ Устройство состоит из трех деталей. Для первой детали вероятность выйти из строя в первый месяц равна 0,1, для второй – 0,2, для третьей – 0,25. Какова вероятность того, что в первый месяц выйдут из строя: а) все детали, б) только две детали, в) хотя бы одна деталь; г) от одной до двух деталей?

Пусть $P(A), P(B), P(C)$ – вероятности выхода из строя деталей
Тогда $P(\bar{A}), P(\bar{B}), P(\bar{C})$ – вероятности рабочих деталей.

а) $P = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,25 = 0,005$

б) $P(A) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C}) + P(A) \cdot P(C) \cdot P(\bar{B}) + P(C) \cdot P(B) \cdot P(\bar{A}) =$
$= 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,75 + 0,1 \cdot 0,25 \cdot 0,8 + 0,25 \cdot 0,2 \cdot 0,9 = 0,08$

в) $1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) = 1 - 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,75 = 0,46$

г) $1 - P(\text{все детали работают}) - P(\text{все детали не работают}) =$
$= 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 1 - 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,75 -$
$- 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,25 = 0,455$

Ответ: а) $P = 0,005$; б) $P = 0,08$; в) $P = 0,46$; г) $P = 0,455$