Домашнее задание к уроку 5

(1) Известно, что генеральная совокупность распределена нормально со средним квадратичным отклонением, равным 16. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a с надежностью 0,95, если выборочная средняя $M = 80$, а объем выборки $n = 256$.

Распределение нормальное

$\sigma = 16$

$M(x) = a$

$P = 0{,}95$

$M = 80$

$n = 256$

[$\bar{X}_в$ − K · станд. ошибку среднего ; $\bar{X}_в$ + K · станд. ошибку среднего]

$\bar{X}_в$ − среднее значение из выборки

1) Известна σ => K является критерием Фишера Z из таблицы Лапласа

2) Надёжность 0,95 => $P = 0{,}95$, $\alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$

3) ГС распределена нормально => $K \to \alpha/2 = 0{,}05/2 = 0{,}025$

4) Станд. ошибка среднего $= \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$\left[\bar{X}_в - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X}_в + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Из таблицы: $Z(P_z = 0{,}025) = -1{,}96$

$$\left[80 - 1{,}96 \cdot \frac{16}{\sqrt{256}} ; 80 + 1{,}96 \cdot \frac{16}{\sqrt{256}}\right]$$

$[78{,}04 ; 81{,}96]$

Вывод: $[78{,}04 ; 81{,}96]$ − этот интервал с вероятностью 95% покрывает истинное $M(x) = a$ ГС.

(2) В результате 10 независимых измерений некоторой величины X, выполненных с одинаковой точностью, получены опытные данные: 6,9, 6,1, 6,2, 6,8, 7,5, 6,3, 6,4, 6,9, 6,7, 6,1. Предполагая, что результаты измерений подчинены нормальному закону распределения вероятностей, оценить истинное значение величины X при помощи доверительного

интервала, покрывающего это значение с доверительной вероятностью 0,95.

$p = 0{,}95 \Rightarrow \ell = 1 - p = 0{,}05$

$n = 10$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
6,9	6,1	6,2	6,8	7,5	6,3	6,4	6,9	6,7	6,1

[$\bar{X}_в$ − K · ст. ошибка среднего ; $\bar{X}_в$ + K · ст. ошибка среднего]

1) σ неизвестна => не был выполнен анализ ГС

2) Критерий оценки K − критерий Стьюдента

$k = n - 1 \Rightarrow k = 10 - 1 = 9$

3) Из п. 1 => станд. ошибка среднего $= \frac{S}{\sqrt{n}}$, где $S = \sqrt{D_в(x)}$, где $\sqrt{D_в(x)}$ − несмещённая оценка дисперсии, по выборке.

4) ГС распределена нормально.

5) => $\ell = \ell/2 = 0{,}025$

$$\bar{X}_в = \frac{6{,}9+6{,}1+6{,}2+6{,}8+7{,}5+6{,}3+6{,}4+6{,}9+6{,}7+6{,}1}{10} = \frac{65{,}9}{10} = 6{,}59$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_в)^2 = (6{,}9-6{,}59)^2 + (6{,}1-6{,}59)^2 + (6{,}2-6{,}59)^2 +$$

$$+ (6{,}8-6{,}59)^2 + (7{,}5-6{,}59)^2 + (6{,}3-6{,}59)^2 + (6{,}4-6{,}59)^2 + (6{,}9-6{,}59)^2 +$$

$$+ (6{,}7-6{,}59)^2 + (6{,}1-6{,}59)^2 \Big/ 10-1 = 0{,}0961 + 0{,}2401 + 0{,}1521 + 0{,}0441 +$$

$$+ 0{,}8281 + 0{,}0841 + 0{,}0361 + 0{,}0961 + 0{,}0121 + 0{,}2401 \Big/ 9 = \frac{1{,}829}{9} =$$

$$= 0{,}2032$$

$S = 0{,}4508$

$K_{\ell/2} = t_{\ell/2}$ $\quad k = n - 1 = 9$

$p = 1 - \ell/2 = 0{,}975$

$t = 2{,}262$ (по т. Стьюдента)

$$\left[6{,}59 - 2{,}262 \cdot \frac{0{,}4508}{\sqrt{10}} ; 6{,}59 + 2{,}262 \cdot \frac{0{,}4508}{\sqrt{10}}\right]$$

$[6,59 - 2,262 \cdot 0,1478 ; 6,59 + 2,262 \cdot 0,1426]$

$[6,59 - 0,3296 ; 6,59 + 0,3296]$

$[6,2674 ; 6,9126]$

Вывод: $[6,2674 ; 6,9126]$ этот интервал покрывает истинное значение X с вероятностью 95%.

(3) Утверждается, что шарики для подшипников, изготовленные автоматическим станком, имеют средний диаметр 17 мм. Используя односторонний критерий с $\alpha = 0,05$, проверить эту гипотезу, если в выборке из $n = 100$ шариков средний диаметр оказался равным 17,5 мм, а дисперсия известна и равна 4 мм.

Если $K_{расч.} > K_{табл.} \Rightarrow$ принимаем гипотезу H_0

Если $K_{расч.} < K_{табл.} \Rightarrow$ отвергаем H_0, принимаем H_1

$M_0 = 17$ мм

$M = 17,5$ мм

$n = 100$

$D = 4$ мм

$\alpha = 5\%$

1) $H_0 : M = M_0$

$H_1 : M > M_0$

2) $D(x)$ известна $\Rightarrow \hat{\sigma} = \sqrt{D(x)} = 2$. Был анализ ГС до нас.

3) Критерий оценки K = критерию Фишера Z и находится по таблице Лапласа для $x > 0$

4) α не меняется на $\alpha/2$

$$K_{расч.} = Z_{расч.} = \frac{M - M_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{17,5 - 17}{\frac{2}{\sqrt{100}}} = \frac{0,5}{0,2} = 2,5$$

$K_{табл.} = Z_{табл.} = Z(p = 1 - \alpha) = Z(1 - 0,95) = 1,65$

$K_{расч.} > K_{табл.}$

Вывод: отвергаем H_0, принимаем H_1. $M = 17,5$

(4) Продавец утверждает, что средний вес пачки печенья составляет 200 г. Из партии извлечена выборка из 10 пачек. Вес каждой пачки составляет: 202, 203, 199, 197, 195, 201, 200, 204, 194, 190. Известно, что их веса распределены нормально. Верно ли утверждение продавца, если учитывать, что доверительная вероятность равна 99%?

$M = 200$ г $\quad M_0 = 198,5$

$n = 10$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
202	203	199	197	195	201	200	204	194	190

$\alpha = 1\%$

$H_0: M = M_0$

$H_1: M \neq M_0$

1) σ неизвестна => не было опыта ГС

2) Из п.1 следует, что за критерий оценки К возьмём критерий Стьюдента.

3) Из п.1 => станд. ошибка среднего $= \frac{S}{\sqrt{n}}$, где S – среднекв. отклонение от несмещённой оценки дисперсии

4) $K_{расч.} = t_{расч.} = \dfrac{|M - M_0|}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = (202-200)^2 + (203-200)^2 + (199-200)^2 +$$
$$+ (197-200)^2 + (195-200)^2 + (201-200)^2 + (200-200)^2 + (204-200)^2 +$$
$$+ (194-200)^2 + (190-200)^2 / 9 = \frac{4+9+1+9+25+1+0+16+36+100}{9} =$$
$$= \frac{201}{9} = 22,333$$

$S = 4,726$

$$t_{расч.} = \frac{|200 - 198,5|}{\frac{4,726}{\sqrt{10}}} = \frac{1,5}{1,49} = 1,006$$

$t_{табл.} = 2,821$ $(k = 9,\ p = 0,99)$ => $t_{расч.} < t_{табл.}$

Вывод: принимаем гипотезу H_0, $M = 200$ гр.