Домашнее задание к уроку 2

1) Вероятность того, что стрелок попадет в мишень, выстрелив один раз, равна 0,8. Стрелок выстрелил 100 раз. Найдите вероятность того, что стрелок попадет в цель ровно 85 раз.

$p = 0{,}8 \qquad q = 1 - p = 0{,}2$

$n = 100$

$k = 85$

Решение по формуле Бернулли:

$$P_{100}(85) = C_{100}^{85}\cdot 0{,}8^{85}\cdot 0{,}2^{15} = \frac{100!}{85!(100-85!)}\cdot 0{,}8^{85}\cdot 0{,}2^{15} =$$

$$= \frac{100!}{85!\,15!}\cdot 1{,}8971370\cdot 10^{-19} = \frac{86\cdot 87\cdot 88\cdot 89\cdot 90\cdot 91\cdot 92\cdot 93\cdot 94\cdot 95\cdot 96\cdot 97\cdot 98\cdot 99\cdot 100}{15!}\cdot$$

$$\cdot 1{,}8971376\cdot 10^{-19} = \frac{3{,}3128423\cdot 10^{29}}{15!}\cdot 1{,}8971376\cdot 10^{-19} =$$

$$= 2{,}5333847\cdot 10^{17}\cdot 1{,}8971376\cdot 10^{-19} = 4{,}80611\cdot 10^{-2} = 0{,}0481$$

Ответ: $P = 0{,}0481$

2) Вероятность того, что лампочка перегорит в течение первого дня эксплуатации, равна 0,0004. В жилом комплексе после ремонта в один день включили 5000 новых лампочек. Какова вероятность, что ни одна из них не перегорит в первый день? Какова вероятность, что перегорят ровно две?

а) $p = 0{,}0004$

$n = 5000$

$m = 0$

Решение по формуле Пуассона:

$$P_m = \frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda}, \quad \lambda = n\cdot p$$

$$\lambda = 5000\cdot 0{,}0004 = 2$$

$$P_0 = \frac{2^0}{0!}\cdot e^{-2} = 1\cdot e^{-2} = 0{,}1353$$

б) $p = 0{,}0004$

$n = 5000$

$m = 2$

$P_2 = \frac{\lambda^2}{2!}\cdot e^{-\lambda}$, $\lambda = 5000\cdot 0{,}0004 = 2$

$P_2 = \frac{2^2}{2!}\cdot e^{-2} = \frac{4}{2}\cdot e^{-2} = 0{,}2707$

Ответ: а) $P = 0{,}1353$; б) $P = 0{,}2707$

③ Монету подбросили 144 раза. Какова вероятность, что орел выпадет ровно 70 раз?

$p = \frac{1}{2}$ $\qquad q = 1 - p = \frac{1}{2}$

$n = 144$

$k = 70$

Решение по формуле Бернулли:

$P_{144}(70) = C_{144}^{70}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{70}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{74} = \frac{144!}{70!\,74!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{144} =$

$= \frac{5{,}550294\cdot 10^{249}}{3{,}9624\cdot 10^{207}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{144} = 1{,}4007\cdot 10^{42}\cdot 4{,}4842\cdot 10^{-44} =$

$= 6{,}2810\cdot 10^{-2} = 0{,}0628$

Ответ: $P = 0{,}0628$

④ В первом ящике находится 10 мячей, из которых 7 — белые. Во втором ящике — 11 мячей, из которых 9 белые. Из каждого ящика вытаскивают случайным образом по два мяча. Какова вероятность того, что все мячи белые? Какова вероятность того, что ровно два мяча белые? Какова вероятность того, что хотя бы один мяч белый?

а) Все мячи белые:

I ящик: $P(A) = \frac{n}{N}$ $\qquad n = C_7^2$, $N = C_{10}^2$

II ящик: $P(B) = \frac{n}{N}$ $\qquad n = C_9^2$, $N = C_{11}^2$

$$P(A) = \frac{C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{\frac{7!}{2!(7-2)!}}{\frac{10!}{2!(10-7)!}} = \frac{\frac{7!}{2!5!}}{\frac{10!}{7!2!}} = \frac{\frac{7!}{2!(7-2)!}}{\frac{10!}{2!(10-2)!}} = \frac{\frac{7!}{2!5!}}{\frac{10!}{2!8!}} =$$

$$= \frac{7!}{5!} \cdot \frac{8!}{10!} = \frac{6\cdot 7}{9\cdot 10} = \frac{42}{90} = 0{,}4666$$

$$P(B) = \frac{C_9^2}{C_{11}^2} = \frac{\frac{9!}{2!(9-2)!}}{\frac{11!}{2!(11-2)!}} = \frac{\frac{9!}{2!7!}}{\frac{11!}{2!9!}} = \frac{9!}{2!7!} \cdot \frac{2!9!}{11!} = \frac{8\cdot 9}{10\cdot 11} =$$

$$= \frac{72}{110} = 0{,}6545$$

$$P(AB) = 0{,}4666 \cdot 0{,}6545 = 0{,}3054$$

б) Ровно два мяча белые.

3 ситуации:

P_1 – 2 белых мяча из I ящика, 0 из 2-го

P_2 – 1 белый мяч из I ящика, 1 из 2-го

P_3 – 0 белых мячей из I ящика, 2 белых из 2-го

Общая вероятность = $P_1 + P_2 + P_3$ (несовместные)

$$P = \underbrace{\frac{C_7^2}{C_{10}^2} \cdot \frac{C_2^2}{C_{11}^2}}_{P_1} + \underbrace{\frac{C_7^1 \cdot C_3^1}{C_{10}^2} \cdot \frac{C_9^1 \cdot C_2^1}{C_{11}^2}}_{P_2} + \underbrace{\frac{C_3^2}{C_{10}^2} \cdot \frac{C_9^2}{C_{11}^2}}_{P_3} =$$

$$= \frac{\frac{7!}{2!(7-2)!}}{\frac{10!}{2!(10-2)!}} \cdot \frac{1}{\frac{11!}{2!(11-2)!}} + \frac{\frac{7!}{1!(7-1)!} \cdot \frac{3!}{1!(3-1)!}}{\frac{10!}{2!(10-2)!}} \cdot \frac{\frac{9!}{1!(9-1)!} \cdot \frac{2!}{1!(2-1)!}}{\frac{11!}{2!(11-2)!}} +$$

$$+ \frac{\frac{3!}{2!(3-2)!}}{\frac{10!}{2!(10-2)!}} \cdot \frac{\frac{9!}{2!(9-2)!}}{\frac{11!}{2!(11-2)!}} \Rightarrow$$

$$P_1 = \frac{\frac{5040}{2\cdot 120}}{\frac{3628800}{2\cdot 40320}} \cdot \frac{1}{\frac{39916800}{2\cdot 362880}} = \frac{\frac{5040}{21}}{45} \cdot \frac{1}{55} = \frac{240}{45} \cdot \frac{1}{55} = 0{,}0969$$

$$P_2 = \frac{\frac{5040\cdot 6}{720\cdot 2}}{\frac{3628800}{2\cdot 40320}} \cdot \frac{\frac{362880\cdot 2}{40320}}{\frac{39916800}{2\cdot 362880}} = \frac{\frac{30240}{1440}}{\frac{3628800}{80640}} \cdot \frac{\frac{725760}{40320}}{\frac{39916800}{725760}} =$$

$$= \frac{21}{45} \cdot \frac{18}{55} = \frac{378}{2475} = 0{,}1527$$

$$P_3 = \frac{\frac{6}{2\cdot 1}}{\frac{3628800}{2\cdot 40320}} \cdot \frac{\frac{362880}{2\cdot 5040}}{\frac{39916800}{2\cdot 362880}} = \frac{3}{45} \cdot \frac{36}{55} = \frac{108}{2475} = 0{,}0436$$

$$P_{общ} = 0{,}0969 + 0{,}1527 + 0{,}0436 = 0{,}2932$$

в) Хотя бы 1 белый мяч => решение от обратного. Пусть A - событие достать хотя бы 1 белый мяч, тогда $\bar{A}$ - событие не достать ни один белый мяч.

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$P(\bar{A}) = \frac{C_3^2}{C_{10}^2} \cdot \frac{C_2^2}{C_{11}^2} = \frac{\frac{3!}{2!(3-2)!}}{\frac{10!}{2!(10-2)!}} \cdot \frac{1}{\frac{11!}{2!(11-2)!}} = \frac{\frac{3!}{2!}}{\frac{10!}{2!8!}} \cdot \frac{2!9!}{11!} =$$

$$= \frac{3!2!8!}{2!10!} \cdot \frac{2!9!}{11!} = \frac{3!8!2!}{10\cdot 11!} = \frac{6\cdot 2\cdot 8!}{10\cdot 11!} = \frac{6}{5\cdot 9\cdot 10\cdot 11} =$$

$$= \frac{6}{45\cdot 110} = \frac{6}{4950} = 0{,}0012$$

$$P(A) = 1 - 0{,}0012 = 0{,}9988$$

Ответ: а) $P = 0{,}0481$; б) $P = 0{,}2932$; в) $P = 0{,}9988$