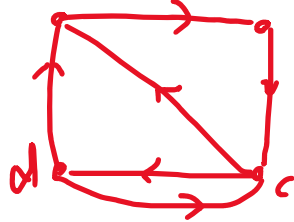


1. 有向图 $D=\{V, E\}$, 其中 $V=\{a, b, c, d\}$, $E=\{<a,b>, <b,c>, <c,a>, <c,d>, d,c>, <d,a>\}$ 。

- (1) 画出该有向图。
- (2) 计算 D 中长度为 4 的路和回路的条数。
- (3) 写出 D 的可达性矩阵。

(1)



(2) 邻接矩阵及其幂次如下

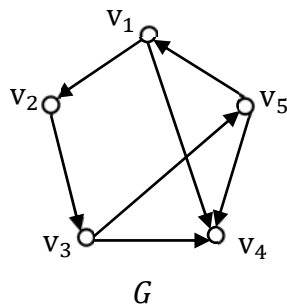
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

由矩阵 A^4 可知, 故 D 中长度为 4 的路有 19 条, 回路有 6 条。

(3) 可达性矩阵如下

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 有向图 G 如下图所示:



- (1) 写出 G 的邻接矩阵。
- (2) G 中长度为 3 的路有几条?
- (3) 写出 G 的可达性矩阵。
- (4) 写出 G 中的强分图。

(1) 邻接矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(2) $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 因此长度为 3 的路有 7 条。

(3) 可达性矩阵 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(4) 强分图有 2 个, 分别是 $\{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ 导出的子图和 $\{v_4\}$ 导出的子图。

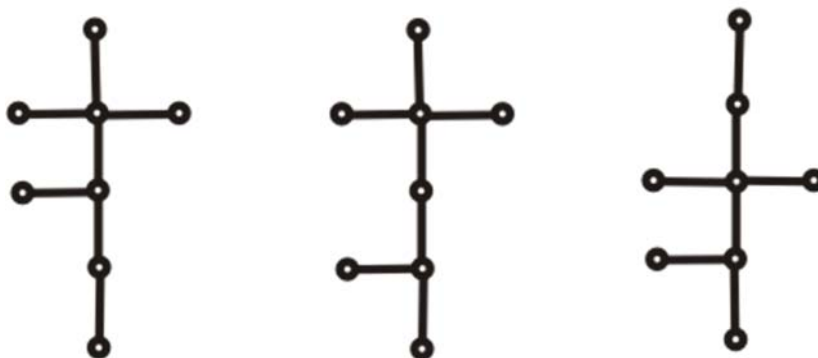
3. 已知无向树 T 有 5 片树叶, 2 度与 3 度结点各 1 个, 其余结点的度数均为 4。求 T 的结点数 n , 并画出一棵满足要求的无向树。

解: 设 T 的结点数为 n , 则边数为 $n-1$, 4 度结点的个数为 $n-7$, 由图的基本定理和无向树的性质得

$$2m = 2(n-1) = 5 \times 1 + 2 \times 1 + 3 \times 1 + 4(n-7)$$

解得 $n=8$ 。

无向树如下:



4. 已知无向图 G 有 10 条边, 4 个 3 度结点, 其余结点的度数均小于等于 2, 问 G 至少有多少个结点?

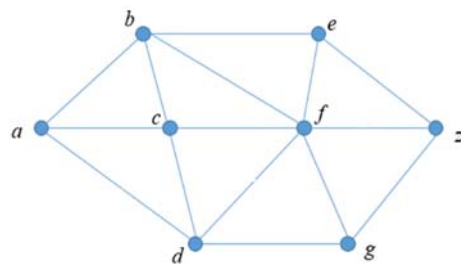
答: 设 G 中至少有 n 个结点, 根据图的基本定理有

$$2 \times 10 \geq 4 \times 3 + (n - 4)$$

故 $n \geq 8$, 至少 8 个结点。

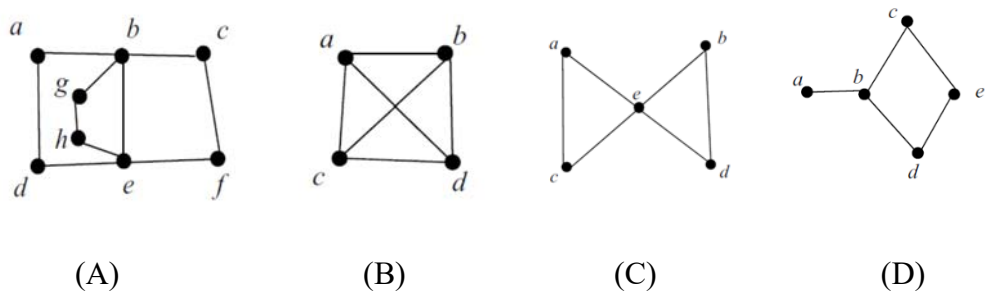
5. 针对以下无向图, 回答

- (1) 请问是否是欧拉图? 若是, 找出欧拉回路; 若否, 至少添加哪几条边将其变为欧拉图?
- (2) 判断是否是汉密尔顿图? 若是, 请找出汉密尔顿回路。



解: (1) 因为存在奇度顶点 a, e, g 和 z , 故不是欧拉图。可以增加边 (a,z) 和 (e,g) , 使得其所有顶点度数都是偶数, 故成欧拉图。(2 分)
 (2) 这是汉密尔顿图, 存在汉密尔顿回路如下: $abezgd fca$ 。(2 分)

6. 试判断如下四个图是否存在欧拉回路、欧拉路、汉密尔顿回路、汉密尔顿路? 如果存在, 请列举出来

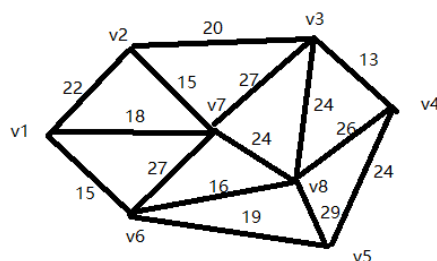


答:

	欧拉回路	欧拉路	汉密尔顿回路	汉密尔顿路
A	存在, 如 $abcfe bgheda$	存在, 如 $abcfe bgheda$	不存在	存在, 如 $adehg bcf$
B	不存在	不存在	存在, 如 $abdca$	存在, 如 $abdc$
C	存在, 如 $acebdea$	存在, 如 $acebdea$	不存在	存在, 如 $acebd$
D	不存在	存在, 如 $abcedb$	不存在	存在, 如 $abced$

7. 设 8 个城市 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8$, 任何两个城市的直接通信线路及预算

造价（亿元）如下图所示。



- (1) 为使这 8 个城市间都能够实现通信，至少要建立几条直接通信线路；
- (2) 试给出一个设计方案使得城市间能够通讯且总造价最小，并计算出最低总造价。

解 (1) 根据最小生成树性质，需要 7 条线路。(1 分)

(2) 根据 **Kruskal** 算法，最小生成树包含的边如下：(v3,v4), (v2,v7), (v1,v6), (v6,v8), (v1,v7), (v5,v6), (v2,v3), (2 分)。权值 $W=13+15+15+16+18+19+20=116$ ，故根据最小生成树铺设通信线路，总造价最低，是 116 亿元。(2 分)

8. 证明：设 G 为 n 个结点的无向连通简单图，若 G 中有割点或桥，则 G 不是汉密尔顿图。

证：(1) 设 v 为割点，则 $p(G-v) \geq 2 > |\{v\}|=1$ 。根据汉密尔顿必要性定理， G 不是汉密尔顿图。

(2) 若 G 含有桥：(a) G 是 K_2 (K_2 有桥)，它显然不是汉密尔顿图。(1 分) (b) 除 K_2 外，其他的有桥连通图 G 均有割点，由(1)得证 G 不是汉密尔顿图。

综(1)(2)知，得证。

9. 证明：任一棵树中不可能只有一片树叶。

假设树中有 n 个结点，分别为 v_1, v_2, \dots, v_n ，若树中只有一片树叶，则所有结点的度数之和为： $\sum_{i=1}^n \deg(v_i) \geq 1 + 2(n-1)$ 。

因为树中边数为 $n-1$ ，根据握手定理， $\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = 2(n-1) \geq 1 + 2(n-1)$ ，矛盾。

因此，树中不可能只有一片树叶。

10. 某次国际会议 8 人参加，已知每人至少与其余 7 人中的 4 人有共同语言，请证明服务员能将他们安排在同一张圆桌就座，使得每个人都能与两边的人交谈。

证明：作无向图 $G=\langle V, E \rangle$ ，其中 $V=\{v|v \text{ 为与会者}\}$ ， $E=\{(u,v) | u,v \in V, u \text{ 与 } v$

有共同语言, 且 $u \neq v$ }, G 为简单图。

根据已知条件, $\forall v \in V, d(v) \geq 4$, 且 $\forall u, v \in V$, 有 $d(u) + d(v) \geq 8$ 。

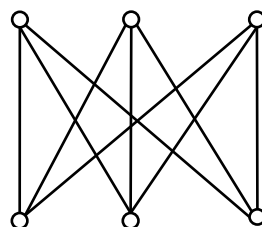
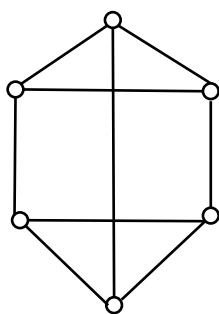
由汉密尔顿图充分条件知: G 为哈密顿图, 即存在一条哈密顿回路 C , 服务员在 G 中按 C 的顺序安排座位即可。

11. 无向完全图 $K_n (n > 2)$ 的边数为多少, 每个结点的度数为多少?

边数 $\frac{n(n-1)}{2}$;

结点度数为 $n - 1$ 。

12. 判断下图是否同构, 若同构则在图上标出同构关系 (一一对应的结点用相同的符号表示), 若不同构则给出理由。



不同构。因为左图中有 2 个三角形, 右图中不存在三角形。