

1. 将下列自然语言分别符号化为谓词公式。

(1) 每一个无理数都是实数

$$P(x): x \text{ 是无理数}; Q(x): x \text{ 是实数}; (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

(2) 没有不犯错误的人

$$P(x): x \text{ 是人}; Q(x): x \text{ 犯错误}; (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \quad \text{或} \quad \neg(\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x))$$

(3) 大熊猫都可爱

$$P(x): x \text{ 是大熊猫}; Q(x): x \text{ 可爱}; (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

(4) 说所有人都爱吃面包是不对的

$$P(x): x \text{ 是人}; Q(x): x \text{ 爱吃面包}; \neg(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

(5) 有一些人不会游泳

$$P(x): x \text{ 是人}; S(x): x \text{ 会游泳}; (\exists x)(P(x) \wedge \neg S(x))$$

(6) 不会唱歌的厨师不是一个好司机

$$S(x): x \text{ 会唱歌}; C(x): x \text{ 是厨师}; D(x): x \text{ 是好司机};$$

$$(\forall x)(\neg S(x) \wedge C(x) \rightarrow \neg D(x))$$

(7) 所有的鱼都生活在水里

$$P(x): x \text{ 是鱼}; Q(x): x \text{ 生活在水里}; (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

(8) 不是所有喜欢看书的人都近视

$$P(x): x \text{ 喜欢看书}; Q(x): x \text{ 近视}; (\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x))$$

(9) 人人都生活在地球上

$$P(x): x \text{ 是人}, Q(x): x \text{ 生活在地球}。 (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

2. 用推理规则证明以下式子

$$(1) \neg(\exists x)(F(x) \wedge H(x)), (\forall x)(G(x) \rightarrow H(x)) \Rightarrow (\forall x)(G(x) \rightarrow \neg F(x))$$

$$(1) \neg(\exists x)(F(x) \wedge H(x)) \quad P$$

$$(2) (\forall x)\neg(F(x) \wedge H(x)) \quad T(1)$$

$$(3) (\forall x)(\neg F(x) \vee \neg H(x)) \quad T(2)$$

$$(4) (\forall x)(H(x) \rightarrow \neg F(x)) \quad T(3)$$

$$(5) \quad H(c) \rightarrow \neg F(c) \quad \text{US(4)}$$

$$(6) \quad (\forall x)(G(x) \rightarrow H(x)) \quad \text{P}$$

$$(7) \quad G(c) \rightarrow H(c) \quad \text{US(6)}$$

$$(8) \quad G(c) \rightarrow \neg F(c) \quad T(5)(7)$$

$$(9) \quad (\forall x)(G(x) \rightarrow \neg F(x)) \quad \text{UG(8)}$$

$$(2) \quad (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x)), (\exists x)(Q(x) \wedge I(x)) \Rightarrow (\exists x)(R(x) \wedge I(x))$$

$$(1) \quad (\exists x)(Q(x) \wedge I(x)) \quad P$$

$$(2) \quad Q(c) \wedge I(c) \quad ES(1)$$

$$(3) \quad Q(c) \quad \text{T(2)}$$

$$(4) \quad I(c) \quad T(2)$$

$$(5) \quad (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x)) \quad P$$

$$(6) \quad Q(c) \rightarrow R(c) \quad \text{UG(5)}$$

$$(7) \quad R(c) \quad T(3)(6)$$

$$(8) \quad R(c) \wedge I(c) \quad T(4)(7)$$

$$(9) \quad (\exists x)(R(x) \wedge I(x)) \quad EG(8)$$

3. 设论域为{0,1,2}, 令  $P(x): x \leq 2$ ,  $Q(x,y): x < y$ ,  $f(x) = 2x$ , 求下列谓词公式的真值。

$$(1) \quad (\forall x)(P(x) \wedge Q(x, f(x))) \quad \text{F}$$

$$(2) \quad (\exists x)(P(x) \rightarrow Q(x, 2)) \quad \text{T}$$

4. 设论域 I 为{1,4,12}, 令  $E(x): x$  是偶数,  $D(x, y): y$  能被  $x$  整除, 求下列谓词公式的真值。

$$(1) \quad (\forall x)(E(x) \rightarrow D(4, x)) \quad \text{T}$$

$$(2) \quad (\forall x)(E(x) \rightarrow (\forall y)(D(x, y) \rightarrow E(y))) \quad \text{T}$$

5. 设论域为{1,2,3}, 令  $P(x): x \geq 2$ ,  $Q(x, y): x < y$ ,  $a: 5$ , 求下列谓词公式的真值。

$$(1) \quad (\forall x)(P(a) \rightarrow (\exists y)Q(x, y)) \quad \text{F}$$

(2)  $(\exists x)(P(x) \rightarrow (\forall y)Q(x, y))$  T  
6. 将下面命题符号化，然后证明其有效性。

(1) 所有的有理数是实数；并非所有的有理数都是整数；故有些实数不是整数。 $(Q(x): x \text{是有理数}, R(x): x \text{是实数}, Z(x): x \text{是整数})$

该命题可符号化为  $(\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x)), \neg(\forall x)(Q(x) \rightarrow Z(x)) \Rightarrow (\exists x)(R(x) \wedge \neg Z(x))$

$$(1) \quad \neg(\forall x)(Q(x) \rightarrow Z(x)) \quad P$$

$$(2) \quad (\exists x)\neg(\neg Q(x) \vee Z(x)) \quad T(1)$$

$$(3) \quad \neg(\neg Q(c) \vee Z(c)) \quad ES(2)$$

$$(4) \quad Q(c) \wedge \neg Z(c) \quad T(3)$$

$$(5) \quad Q(c) \quad T(4)$$

$$(6) \quad (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x)) \quad P$$

$$(7) \quad Q(c) \rightarrow R(c) \quad US(6)$$

$$(8) \quad R(c) \quad T(5)(7)$$

$$(9) \quad \neg Z(c) \quad T(4)$$

$$(10) \quad R(c) \wedge \neg Z(c) \quad T(8)(9)$$

$$(11) \quad (\exists x)(R(x) \wedge \neg Z(x)) \quad EG(10)$$

(2) 人都喜欢吃蔬菜；不是所有人都喜欢吃鱼；所以，存在喜欢吃蔬菜而不喜欢吃鱼的人。(令  $A(x): x \text{是人}, B(x): x \text{喜欢吃蔬菜}, C(x): x \text{喜欢吃鱼}$ )  
该命题可符号化为

$$(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)), \neg(\forall x)(A(x) \rightarrow C(x)) \Rightarrow (\exists x)(A(x) \wedge B(x) \wedge \neg C(x))$$

$$(1) \quad \neg(\forall x)(A(x) \rightarrow C(x)) \quad P$$

$$(2) \quad (\exists x)\neg(\neg A(x) \vee C(x)) \quad T(1)$$

$$(3) \quad \neg(\neg A(a) \vee C(a)) \quad ES(2)$$

$$(4) \quad A(a) \wedge \neg C(a) \quad T(3)$$

$$(5) \quad A(a) \quad T(4)$$

$$(6) \quad (\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \quad P$$

$$(7) \quad A(a) \rightarrow B(a) \quad US(6)$$

- (8)  $B(a)$   $T(5)(7)$   
 (9)  $\neg C(a)$   $T(4)$   
 (10)  $A(a) \wedge B(a) \wedge \neg C(a)$   $T(5)(8)(9)$   
 (11)  $(\exists x)(A(x) \wedge B(x) \wedge \neg C(x))$   $EG(10)$

(3) 每个大学生不是文科生就是理工科生，有的大学生是优等生，小张不是理工科生，但他是优等生，因而如果小张是大学生，他就是文科生。

### 可兼或证明

设  $P(x)$ :  $x$  是大学生。  $Q(x)$ :  $x$  是文科生。  
 $R(x)$ :  $x$  是理工科生。  $H(x)$ :  $x$  是优等生。  
 $a$ : 小张  
 则该命题可用符号化为：  
 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x) \vee R(x))$ ,  $(\exists x)(P(x) \wedge H(x))$ ,  
 $\neg R(a), H(a) \Rightarrow P(a) \rightarrow Q(a)$

证： (1)  $P(a)$   $P$  (附加前提)  
 (2)  $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x) \vee R(x))$   $P$   
 (3)  $P(a) \rightarrow Q(a) \vee R(a)$   $\vee S(2)$   
 (4)  $Q(a) \vee R(a)$   $T(1)(3)$   
 (5)  $\neg R(a)$   $P$   
 (6)  $Q(a)$   $T(4)(5)$

### 不可兼或证明

$(\forall x)(P(x) \rightarrow \neg(Q(x) \leftrightarrow \neg F(x))), (\exists x)(P(x) \wedge H(x)) \quad \neg F(a), H(a)$

$\Leftrightarrow P(a) \rightarrow Q(a)$

记 ①  $P(a)$  P

②  $(\forall x)(P(x) \rightarrow \neg(Q(x) \leftrightarrow \neg F(x)))$  P

③  $P(a) \rightarrow \neg(Q(a) \leftrightarrow \neg F(a))$  ES ②

④  $\neg(Q(a) \leftrightarrow \neg F(a))$  T ① ③

⑤  $(\neg Q(a) \vee \neg \neg F(a)) \wedge (F(a) \vee Q(a))$  T ④

⑥  $F(a) \vee Q(a)$  T ⑤

⑦  $\neg \neg F(a)$  P

⑧  $Q(a)$  T ⑥ ⑦

⑨  $P(a) \rightarrow Q(a)$  CP 规则

- (4) 学术委员会的每个成员都是博士并且是教授，有些成员是青年人，因而有的成员是青年博士。原子谓词规定如下：A(x): x 是学术委员会成员，B(x): x 是博士，P(x): x 是教授，H(x): x 是青年人

前提： $(\forall x)(A(x) \rightarrow (B(x) \wedge P(x))), (\exists x)(A(x) \wedge H(x))$

结论:  $(\exists x)(A(x) \wedge H(x) \wedge B(x))$

- |     |  |            |
|-----|--|------------|
| (1) | $(\exists x)(A(x) \wedge H(x))$                    | P          |
| (2) | $A(a) \wedge H(a)$                                 | ES(1)      |
| (3) | $(\forall x)(A(x) \rightarrow (B(x) \wedge P(x)))$ | P          |
| (4) | $A(a) \rightarrow (B(a) \wedge P(a))$              | ES(3)      |
| (5) | $A(a)$   | T(2) I     |
| (6) | $B(a) \wedge P(a)$                                 | T(4) (5) I |
| (7) | $B(a)$   | T(6) I     |
| (8) | $A(a) \wedge H(a) \wedge B(a)$                     | T(2) (7) E |
| (9) | $(\exists x)(A(x) \wedge H(x) \wedge B(x))$        | EG(8)      |

7. 设  $m(x, y)$  = “ $x$  是  $y$  的父亲”。写出谓词公式  $(\exists x)(\forall y)m(x, y)$  和  $(\forall y)(\exists x)m(x, y)$  表示的语句，并确定它们的真值（论域为人类集合）。

$(\exists x)(\forall y)m(x, y)$  表示有一个人是所有人的父亲，真值为假

$(\forall y)(\exists x)m(x, y)$  任何一个人都有一个父亲，真值为真

8. 已知谓词公式:  $\forall x \forall y \{(x \neq y) \rightarrow \forall z[(z = x) \vee (z = y)]\}$ ，为变元  $x, y, z$  找两个共同的论域  $S_1$  和  $S_2$ ，使谓词公式逻辑值在  $S_1$  上为真，在  $S_2$  上为假。

$$S_1 = \{1, 2\} \text{ 或 } \{1\}$$

$$S_2 = \{1, 2, 3\}$$