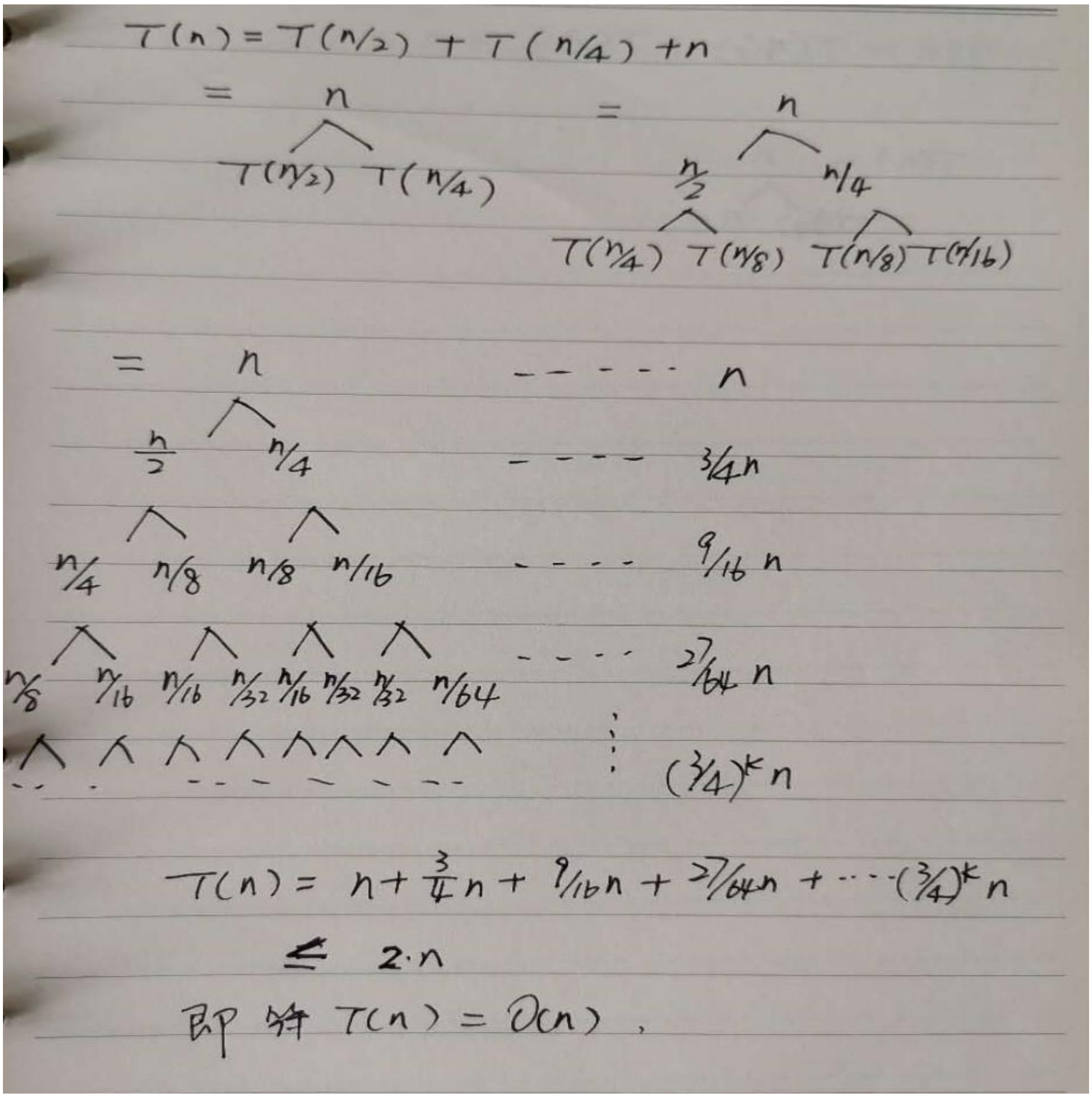
2020《算法设计与分析》期末大作业

1、 用递归树方法求解递归式 T(n)=T(n/2)+T(n/4)+n。（15 分）


$T(n) = T(n/2) + T(n/4) + n$

$= n$, $T(n/2)$, $T(n/4)$ $= n$, $n/2$, $n/4$, $T(n/4)$, $T(n/8)$, $T(n/8)$, $T(n/16)$

$= n$ ------ n

$n/2$, $n/4$ ------ $3/4\,n$

$n/4$, $n/8$, $n/8$, $n/16$ ------ $9/16\,n$

$n/8$, $n/16$, $n/16$, $n/32$, $n/16$, $n/32$, $n/32$, $n/64$ ------ $27/64\,n$

$\vdots$ $(3/4)^k n$

$T(n) = n + \frac{3}{4}n + 9/16\,n + 27/64\,n + \cdots (3/4)^k n$

$\leq 2 \cdot n$

即得 $T(n) = O(n)$.

2、渐近表达式 f(n)+Ω(f(n))=Θ(f(n)) 是否正确，为什么？

（10 分）

答： 不正确

f(n)+Ω(f(n))≥f(n)+cf(n)≥0, 无渐近上限，所以不符合 θ 渐近紧却界。

3、设矩阵 A_1、A_2、A_3、A_4 分别是 10×20，20×10，10×30，30×100 矩阵，用动态规划方法求 $A_1A_2A_3A_4$ 的最优括号化方案。(20 分)

解：m(1,1)=m(2,2)=m(3,3)=m(4,4)=0

$m(1,2)=2000$, $s(1,2)=1$ $m(2,3)=6000$, $s(2,3)=2$

$m(3,4)=30000$, $s(3,4)=3$

$m(1,3)=\min\{m(1,1)+m(2,3)+6000, m(1,2)+m(3,3)+3000\}=5000$,

$s(1,3)=2$

$m(2,4)=\min\{m(2,2)+m(3,4)+20000, m(2,3)+m(4,4)+60000\}$

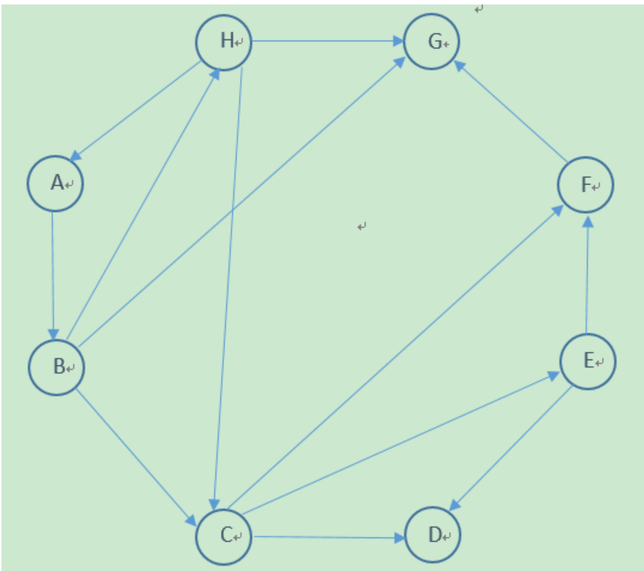
$=50000$, $s(2,4)=2$

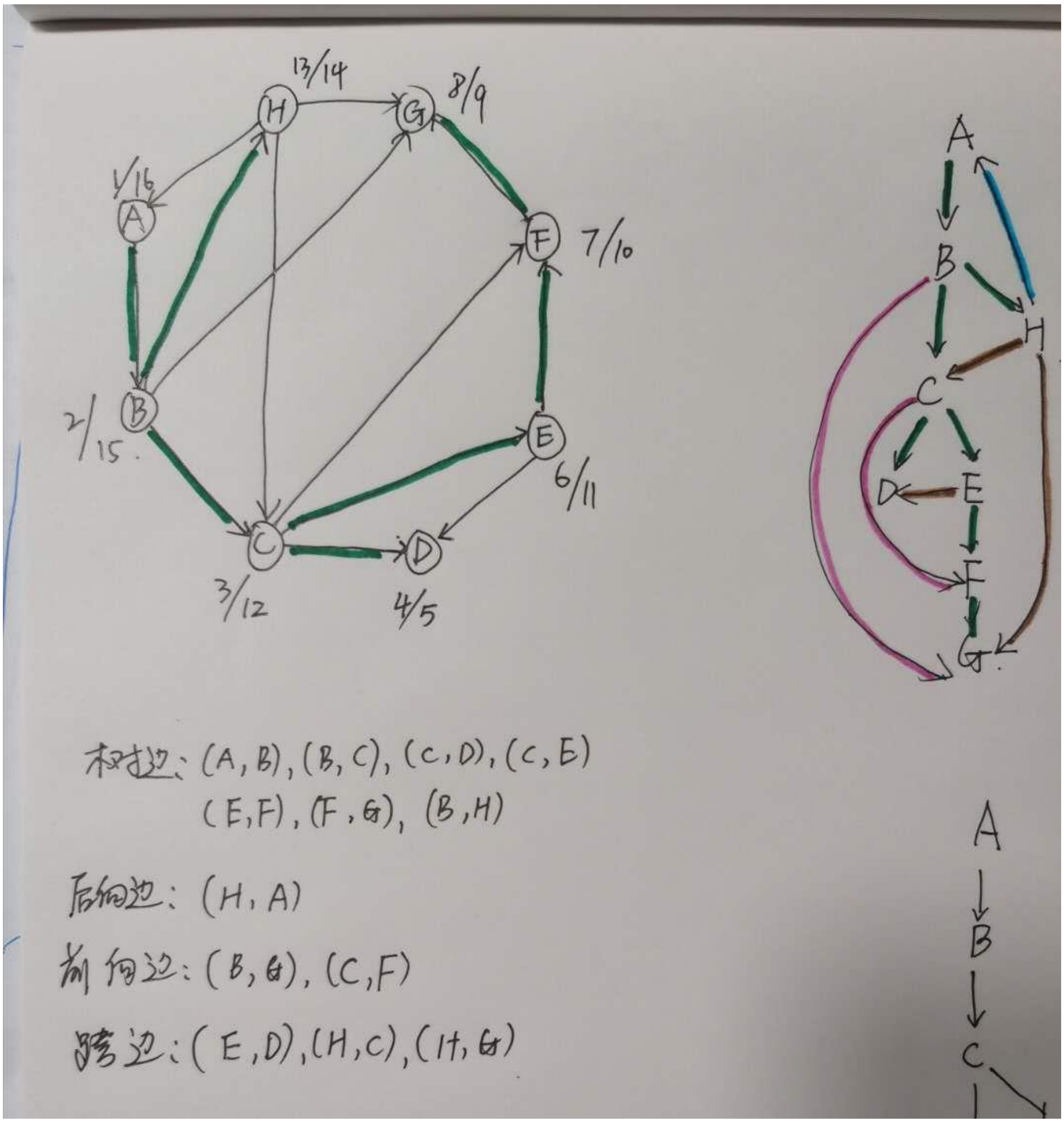
$m(1,4)=\min\{m(1,1)+m(2,4)+20000, m(1,2)+m(3,4)+10000,$

$m(1,3)+m(4,4)+30000\}=35000$, $s(1,4)=3$

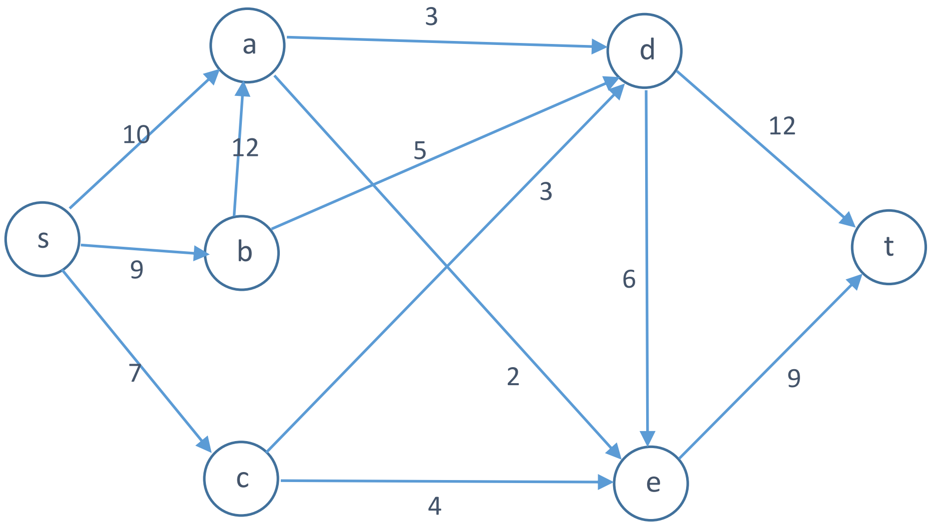
最优括号化方案为：$(((A_1A_2)A_3)A_4)$。

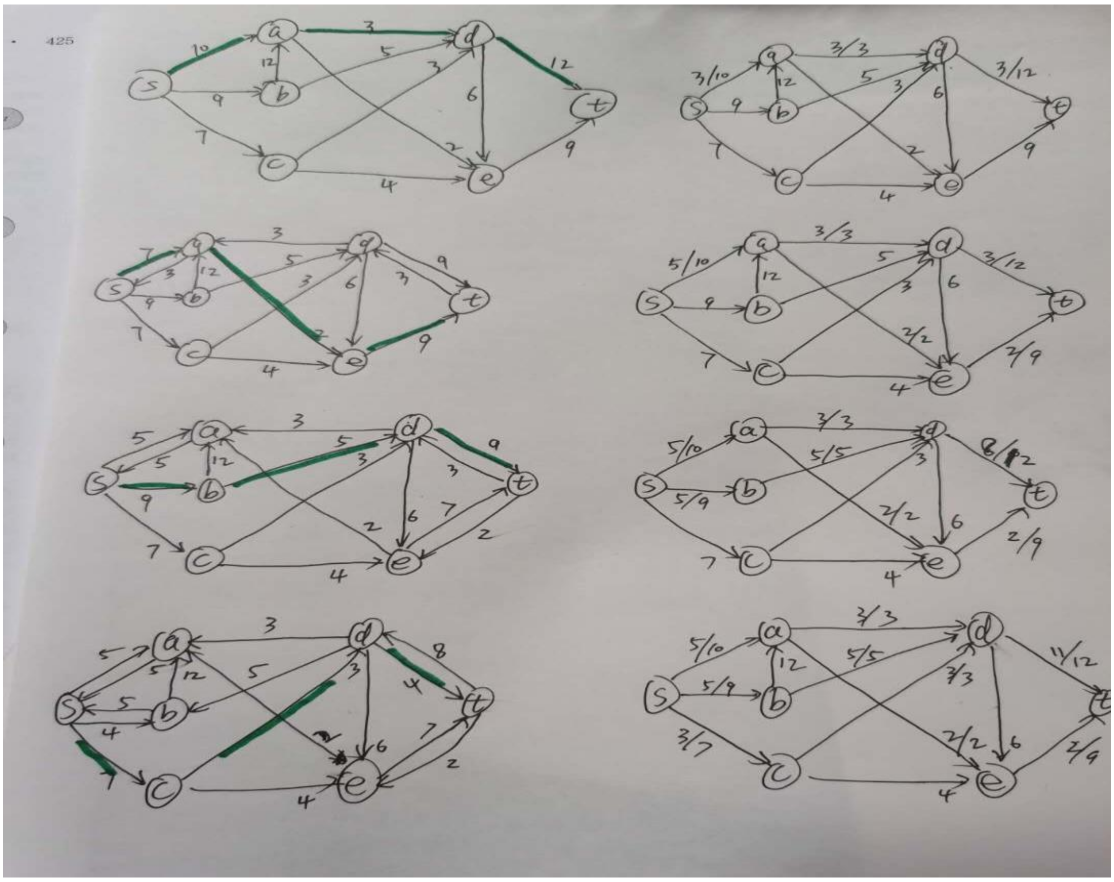
4、给出深度优先搜索算法在下图的运行过程。假定图的邻接表按照字母排序，并且每个结点的邻接链表都以字母表顺序对里面的结点进行了排序。请给出每个结点的发现时间和完成时间，并给出每条边是树边、前向边、回边还是横向边。(15 分)

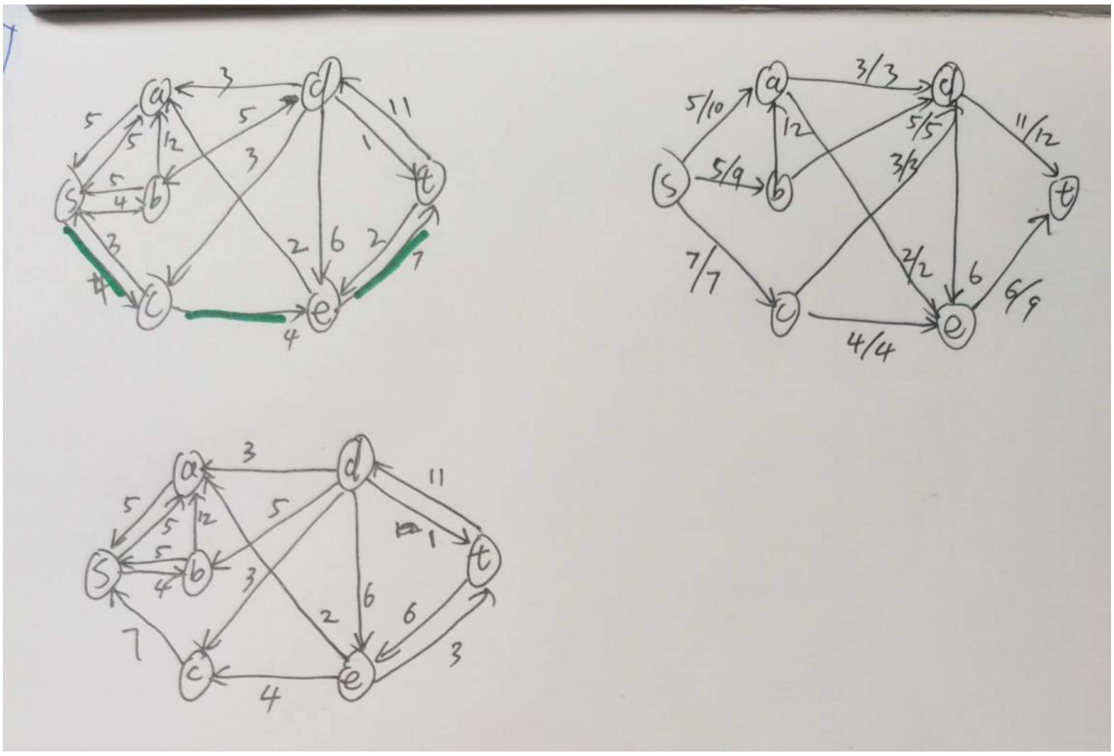

H
G
A
F
B
E
C
D


13/14
8/9
1/16
7/10
2/15
6/11
3/12
4/5
树边：(A,B),(B,C),(C,D),(C,E)
(E,F),(F,G),(B,H)
后向边：(H,A)
前向边：(B,G),(C,F)
跨边：(E,D),(H,C),(H,G)

5、请画出在下图所示的流网络上执行 Edmonds-Karp 算法的过程（在寻找增广路径时采用广度优先搜索寻找源点到汇点的最短路径，其中每条边的权重为单位距离）。(15 分)







6、修改 Bellman-Ford 算法，使其能够在 O(nm)时间内解决由 n 个未知变量和 m 个约束条件所构成的差分约束系统问题。并应用所得的算法给出下面差分约束系统的可行解或证明该系统没有可行解。(25 分)

$$x_1-x_2\leqslant 1$$

$$x_1-x_4\leq -5$$

$$x_2-x_3\leq 3$$

$$x_2-x_4\leq 6$$

$$x_3-x_2\leq 9$$

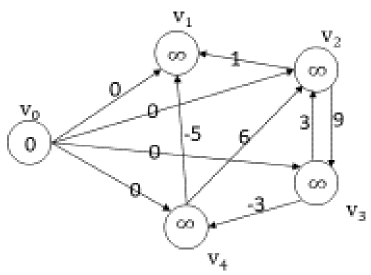
$$x_4-x_3\leq -3$$

解：

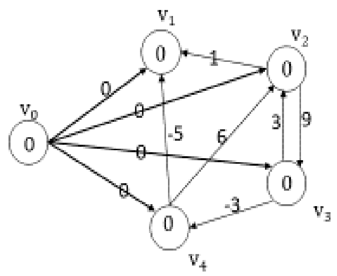
由 n 个未知变量和 m 个约束条件所构成的差分约束系统的约束图 G=(V,E)。|V|=n+1, |E|=n+m

```
BELLMAN-FORD-MODIFY(G,w,s)
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G,v0)
for i=1 to n
    RELAX(v0,vi)
for i=1 to n
    for j=1 to n
        for each v∈Adj(vj)
            RELAX(vj,v,w)
for each edge (u,v)∈E
    if v.d>u.d+w(u,v)
            return FALSE
return TRUE
```

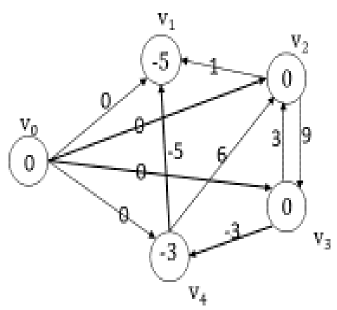
对差分约束系统的约束图初始化得：



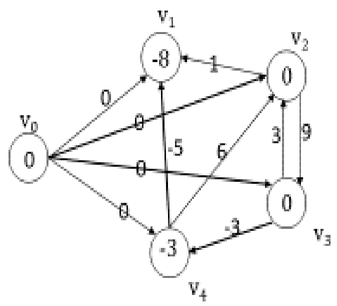
1、依次松驰(v_0, v_i), i=1, 2, 3, 4



2、依次松驰(v_2, v_1), (v_4, v_1), (v_3, v_2), (v_4, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4)



3、依次松弛(v_2, v_1), (v_4, v_1), (v_3, v_2), (v_4, v_2), (v_2, v_3)，(v_3, v_4)



4、依次松弛(v_2, v_1), (v_4, v_1), (v_3, v_2), (v_4, v_2), (v_2, v_3)，(v_3, v_4)所得结果与上次一致。于是得差分约束系统的一个解：

$x_1=-8, x_2=0, x_3=0, x_4=-3$。