

1. 将下列自然语言分别符号化为谓词公式。

(1) 每一个无理数都是实数

$P(x): x \text{ 是无理数}; Q(x): x \text{ 是实数}; (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

(2) 没有不犯错误的人

$P(x): x \text{ 是人}; Q(x): x \text{ 犯错误}; (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$ 或者 $\neg(\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x))$

(3) 大熊猫都可爱

$P(x): x \text{ 是大熊猫}; Q(x): x \text{ 可爱}; (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

(4) 说所有人都爱吃面包是不对的

$P(x): x \text{ 是人}; Q(x): x \text{ 爱吃面包}; \neg(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

(5) 有一些人不会游泳

$P(x): x \text{ 是人}; S(x): x \text{ 会游泳}; (\exists x)(P(x) \wedge \neg S(x))$

(6) 不会唱歌的厨师不是一个好司机

$S(x): x \text{ 会唱歌}; C(x): x \text{ 是厨师}; D(x): x \text{ 是好司机};$

$(\forall x)(\neg S(x) \wedge C(x) \rightarrow \neg D(x))$

(7) 所有的鱼都生活在水里

$P(x): x \text{ 是鱼}; Q(x): x \text{ 生活在水里}; (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

(8) 不是所有喜欢看书的人都近视

$P(x): x \text{ 喜欢看书}; Q(x): x \text{ 近视}; (\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x))$

(9) 人人都生活在地球上

$P(x): x \text{ 是人}, Q(x): x \text{ 生活在地球}。 (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

2. 用推理规则证明以下式子

(1) $\neg(\exists x)(F(x) \wedge H(x)), (\forall x)(G(x) \rightarrow H(x)) \Rightarrow (\forall x)(G(x) \rightarrow \neg F(x))$

(1) $\neg(\exists x)(F(x) \wedge H(x)) \quad P$

(2) $(\forall x)\neg(F(x) \wedge H(x)) \quad T(1)$

(3) $(\forall x)(\neg F(x) \vee \neg H(x)) \quad T(2)$

(4) $(\forall x)(H(x) \rightarrow \neg F(x)) \quad T(3)$

$$(5) \quad H(c) \rightarrow \neg F(c) \quad \text{US}(4)$$

$$(6) \quad (\forall x)(G(x) \rightarrow H(x)) \quad P$$

$$(7) \quad G(c) \rightarrow H(c) \quad \text{US}(6)$$

$$(8) \quad G(c) \rightarrow \neg F(c) \quad T(5)(7)$$

$$(9) \quad (\forall x)(G(x) \rightarrow \neg F(x)) \quad \text{UG}(8)$$

$$(2) \quad (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x)), (\exists x)(Q(x) \wedge I(x)) \Rightarrow (\exists x)(R(x) \wedge I(x))$$

$$(1) \quad (\exists x)(Q(x) \wedge I(x)) \quad P$$

$$(2) \quad Q(c) \wedge I(c) \quad \text{ES}(1)$$

$$(3) \quad Q(c) \quad T(2)$$

$$(4) \quad I(c) \quad T(2)$$

$$(5) \quad (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x)) \quad P$$

$$(6) \quad Q(c) \rightarrow R(c) \quad \text{UG}(5)$$

$$(7) \quad R(c) \quad T(3)(6)$$

$$(8) \quad R(c) \wedge I(c) \quad T(4)(7)$$

$$(9) \quad (\exists x)(R(x) \wedge I(x)) \quad \text{EG}(8)$$

3. 设论域为 $\{0,1,2\}$, 令 $P(x): x \leq 2$, $Q(x,y): x < y$, $f(x) = 2x$, 求下列谓词公式的真值。

$$(1) \quad (\forall x)(P(x) \wedge Q(x, f(x))) \quad \mathbf{F}$$

$$(2) \quad (\exists x)(P(x) \rightarrow Q(x, 2)) \quad \mathbf{T}$$

4. 设论域 I 为 $\{1,4,12\}$, 令 $E(x): x$ 是偶数, $D(x,y): y$ 能被 x 整除, 求下列谓词公式的真值。

$$(1) \quad (\forall x)(E(x) \rightarrow D(4, x)) \quad \mathbf{T}$$

$$(2) \quad (\forall x)(E(x) \rightarrow (\forall y)(D(x, y) \rightarrow E(y))) \quad \mathbf{T}$$

5. 设论域为 $\{1,2,3\}$, 令 $P(x): x \geq 2$, $Q(x,y): x < y$, $a: 5$, 求下列谓词公式的真值。

$$(1) \quad (\forall x)(P(a) \rightarrow (\exists y)Q(x, y)) \quad \mathbf{F}$$

$$(2) (\exists x)(P(x) \rightarrow (\forall y)Q(x, y)) \quad T$$

6. 将下面命题符号化，然后证明其有效性。

(1) 所有的有理数是实数；并非所有的有理数都是整数；故有些实数不是整数。
($Q(x)$: x 是有理数, $R(x)$: x 是实数, $Z(x)$: x 是整数)

该命题可符号化为 $(\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x)), \neg(\forall x)(Q(x) \rightarrow Z(x)) \Rightarrow (\exists x)(R(x) \wedge \neg Z(x))$

$$(1) \neg(\forall x)(Q(x) \rightarrow Z(x)) \quad P$$

$$(2) (\exists x)\neg(\neg Q(x) \vee Z(x)) \quad T(1)$$

$$(3) \neg(\neg Q(c) \vee Z(c)) \quad ES(2)$$

$$(4) Q(c) \wedge \neg Z(c) \quad T(3)$$

$$(5) Q(c) \quad T(4)$$

$$(6) (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x)) \quad P$$

$$(7) Q(c) \rightarrow R(c) \quad US(6)$$

$$(8) R(c) \quad T(5)(7)$$

$$(9) \neg Z(c) \quad T(4)$$

$$(10) R(c) \wedge \neg Z(c) \quad T(8)(9)$$

$$(11) (\exists x)(R(x) \wedge \neg Z(x)) \quad EG(10)$$

(2) 人都喜欢吃蔬菜；不是所有人都喜欢吃鱼；所以，存在喜欢吃蔬菜而不喜欢吃鱼的人。(令 $A(x)$: x 是人, $B(x)$: x 喜欢吃蔬菜, $C(x)$: x 喜欢吃鱼)

该命题可符号化为

$$(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)), \neg(\forall x)(A(x) \rightarrow C(x)) \Rightarrow (\exists x)(A(x) \wedge B(x) \wedge \neg C(x))$$

$$(1) \neg(\forall x)(A(x) \rightarrow C(x)) \quad P$$

$$(2) (\exists x)\neg(\neg A(x) \vee C(x)) \quad T(1)$$

$$(3) \neg(\neg A(a) \vee C(a)) \quad ES(2)$$

$$(4) A(a) \wedge \neg C(a) \quad T(3)$$

$$(5) A(a) \quad T(4)$$

$$(6) (\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \quad P$$

$$(7) A(a) \rightarrow B(a) \quad US(6)$$

- (8) $B(a)$ $T(5)(7)$
 (9) $\neg C(a)$ $T(4)$
 (10) $A(a) \wedge B(a) \wedge \neg C(a)$ $T(5)(8)(9)$
 (11) $(\exists x)(A(x) \wedge B(x) \wedge \neg C(x))$ $EG(10)$

(3) 每个大学生不是文科生就是理工科生，有的大学生是优等生，小张不是理工科生，但他是优等生，因而如果小张是大学生，他就是文科生。

可兼或证明

设 $p(x)$: x 是大学生, $Q(x)$: x 是文科生,
 $F(x)$: x 是理工科生, $H(x)$: x 是优等生.
 a : 小张
 则该命题可符号化为:
 $(\forall x)(p(x) \rightarrow Q(x) \vee F(x)), (\exists x)(p(x) \wedge H(x)),$
 $\neg F(a), H(a) \Rightarrow p(a) \rightarrow Q(a)$
 证: (1) $p(a)$ P (附加前提)
 (2) $(\forall x)(p(x) \rightarrow Q(x) \vee F(x))$ P
 (3) $p(a) \rightarrow Q(a) \vee F(a)$ $US(2)$
 (4) $Q(a) \vee F(a)$ $T(1)(3)$
 (5) $\neg F(a)$ P
 (6) $Q(a)$ $T(4)(5)$

不可兼或证明

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow \neg(Q(x) \leftrightarrow \neg F(x))), (\exists x)(P(x) \wedge H(x)) \neg F(a), H(a)$$

$$\Rightarrow P(a) \rightarrow Q(a)$$

$$\text{证 } ① \quad P(a) \quad P$$

$$② (\forall x)(P(x) \rightarrow \neg(Q(x) \leftrightarrow \neg F(x))) \quad P$$

$$③ P(a) \rightarrow \neg(Q(a) \leftrightarrow \neg F(a)) \quad ES②$$

$$④ \neg(Q(a) \leftrightarrow \neg F(a)) \quad T③$$

$$⑤ (\neg Q(a) \vee \neg \neg F(a)) \wedge (\neg F(a) \vee Q(a)) \quad T④$$

$$⑥ F(a) \vee Q(a) \quad T⑤$$

$$⑦ \neg F(a) \quad P$$

$$⑧ Q(a) \quad T⑥⑦$$

$$⑨ P(a) \rightarrow Q(a) \quad CP\text{规则}$$

(4) 学术委员会的每个成员都是博士并且是教授，有些成员是青年人，因而有的成员是青年博士。原子谓词规定如下： $A(x)$: x 是学术委员会成员， $B(x)$: x 是博士， $P(x)$: x 是教授， $H(x)$: x 是青年人

前提: $(\forall x)(A(x) \rightarrow (B(x) \wedge P(x))), (\exists x)(A(x) \wedge H(x))$

结论: $(\exists x)(A(x) \wedge H(x) \wedge B(x))$

- | | |
|--|-------------|
| (1) $(\exists x)(A(x) \wedge H(x))$ | P |
| (2) $A(a) \wedge H(a)$ | ES (1) |
| (3) $(\forall x)(A(x) \rightarrow (B(x) \wedge P(x)))$ | P |
| (4) $A(a) \rightarrow (B(a) \wedge P(a))$ | ES (3) |
| (5) $A(a)$ | T (2) I |
| (6) $B(a) \wedge P(a)$ | T (4) (5) I |
| (7) $B(a)$ | T (6) I |
| (8) $A(a) \wedge H(a) \wedge B(a)$ | T (2) (7) E |
| (9) $(\exists x)(A(x) \wedge H(x) \wedge B(x))$ | EG (8) |

7. 设 $m(x, y)$ = “ x 是 y 的父亲”。写出谓词公式 $(\exists x)(\forall y)m(x, y)$ 和 $(\forall y)(\exists x)m(x, y)$ 表示的语句, 并确定它们的真值 (论域为人类集合)。

$(\exists x)(\forall y)m(x, y)$ 表示有一个人是所有人的父亲, 真值为假

$(\forall y)(\exists x)m(x, y)$ 任何一个人都有一个父亲, 真值为真

8. 已知谓词公式: $\forall x \forall y \{(x \neq y) \rightarrow \forall z [(z = x) \vee (z = y)]\}$, 为变元 x, y, z 找两个共同的论域 S_1 和 S_2 , 使谓词公式逻辑值在 S_1 上为真, 在 S_2 上为假。

$S_1 = \{1, 2\}$ 或 $\{1\}$

$S_2 = \{1, 2, 3\}$