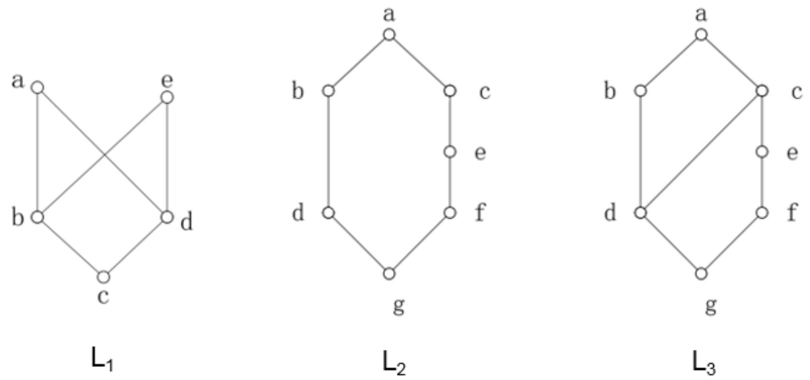
1. 对于下图给出的偏序集



(1) 判断 L_1 是否为格，请说明理由。

(2) 判断 L_2 是否为有补格，请说明理由。

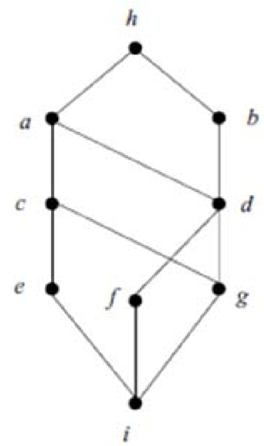
(3) 判断 L_3 是否为分配格，请说明理由。

解：a）L1 不是格，因为 a, e 没有最小上界。

b）L2 是有补格，每个元素至少一个补元。

c) L3 不是分配格，因为子格{c,d,e,f,g}是五角格。

2. 观察右图给出的格$< L,\preccurlyeq>$，



(1) 判断 L 是否为有界格，若是，则指出它的全上界和全下界。

(2) 判断 L 是否为有补格，并求 e, f 的补元。

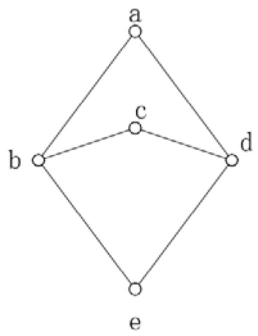
(3) 取$A=\{a,d,e,f,i\}$, 它是 L 的子格吗，并判断 L 是否为分配格。

(1)L 是有界格，全上界为 h，全下界为 i.

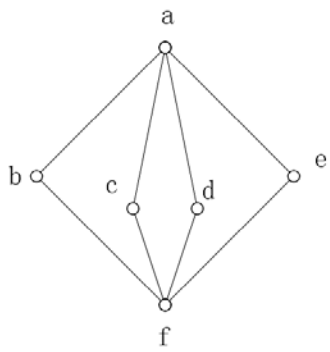
(2) L 不是有补格，e 的补元为 b，f 没有补元。

(3)A 是 L 的子格，注意到 A 是五角格，因此 L 有子格与五角格同构，不是分配格。

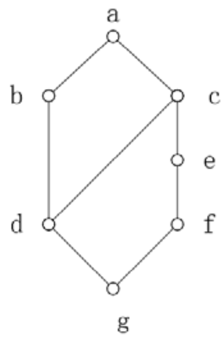
3. 下图给出了一些偏序集的哈斯图



L_1



L_2



L_3

a) (2 分) 分别判断它们是否是格，并说明理由；

b) (2 分) 分别判断它们是否为有补格，请说明理由。

c) (2 分) 分别判断它们是否为分配格，请说明理由。

a) L_1 不是格, a 和 c 没有最小上界；L_2 和 L_3 是格，任意两个元素都有最大下界和最小上界。

b) L_1 不是格，也不是有补格；L_2 是有补格，每一个元素至少一个补元；L_3 不是有补格，d 没有补元。

c) L_1 不是格，也不是分配格；L_2 和 L_3 都不是分配格，L_2 包含与钻石格同构的子格，L_3 包含与五角格同构的子格。

4. 设$\langle L,\preccurlyeq\rangle$是一个格，它诱导的代数系统为$\langle L,\vee,\wedge\rangle$。证明,若$a\preccurlyeq b\preccurlyeq c$，则：$b\wedge(a\vee c)=a\vee(b\wedge c)$

证明：若$a\preccurlyeq b\preccurlyeq c$，则$a\vee b=b, b\wedge c=b,\ b\vee c=c;$

又有$a\preccurlyeq c$，则$a\vee c=c$；因此$b\wedge(a\vee c)=b\wedge c=b;$

而$a\vee(b\wedge c)=a\vee b$ =b，所以有$b\wedge(a\vee c)=a\vee(b\wedge c)$

5. 已知格中$a\preccurlyeq b\preccurlyeq c$，求$(a\vee c)\wedge(b\vee c)\wedge(a\vee b)$

解：由 $a \preccurlyeq b \preccurlyeq c$

得：$(a \vee c) \wedge (b \vee c) \wedge (a \vee b)$

$= c \wedge c \wedge b$

$= c \wedge b$

$= b$

6. $\mathcal{P}(\mathrm{A})$是有限集合A的幂集，证明格$<\mathcal{P}(\mathrm{A}), \subseteq>$是有补格。

① $<P(A), \subseteq>$是有界格.

全上界为A，全下界为Φ

② $\forall A_1 \in P(A)$，A_1有一个补元素 $A - A_1$

则此格为有补格.

7. 设$\langle L, \preccurlyeq \rangle$是一个格，它诱导的代数系统为$\langle L, \vee, \wedge \rangle$。对任意的$a, b, c \in L$，证明若$a \preccurlyeq b$，则：$(b \wedge (a \vee c)) \wedge c = (a \vee (b \wedge c)) \wedge c$。

由结合律和吸收律，$(b \wedge (a \vee c)) \wedge c = b \wedge \left((a \vee c) \wedge c\right) = b \wedge c$，

由$a \preccurlyeq b$及保序性，有$a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq b \vee (b \wedge c) = b$，可得$(a \vee (b \wedge c)) \wedge c \preccurlyeq b \wedge c$；另一方面，由 $b \wedge c \preccurlyeq a \vee (b \wedge c)$ 及 $b \wedge c \preccurlyeq c$，可得 $b \wedge c \preccurlyeq (a \vee (b \wedge c)) \wedge c$，因此，$\left(a \vee (b \wedge c)\right) \wedge c = b \wedge c.$

综上，$(b \wedge (a \vee c)) \wedge c$=$\left(a \vee (b \wedge c)\right) \wedge c.$