1. 设$X=\{a,b,c\}$，$Y=\{1,2\}$，判断从X到Y的入射、满射和双射分别有多少个？

入射有 0 个，满射有 6 个（可用列举法），双射有 0 个。

2. 设f和g是两个$N\to N$的函数，其定义如下：

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & x=0,1,2,3\\ 0 & x=4\\ x & x\geq 5\end{cases},\ g(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & x\text{是偶数}\\ 3 & x\text{是奇数}\end{cases}$$

(1) 令$B=\{4,5,6\}$，求$f(B)$和$g(B)$；

(2) 判断f和g是否是满射、入射和双射；

(3) 如果是双射，写出其逆函数。

(1) $f(B)=\{0,5,6\}$, $g(B)=\{2,3\}$

(2) f 是满射、入射、双射；g 是满射

(3) f 的逆函数为$f^{-1}(x)=\begin{cases}x-1 & x=1,2,3,4\\ 4 & x=0\\ x & x\geq 5\end{cases}$

3. 设$f:R\to R$，$g:R\to R$，其中R为实数集合，且

$$f(x)=\begin{cases}x+5 & x\geq 2\\ |x| & x<2\end{cases},\ g(x)=2x$$

(1) 判断f和g是否是入射、满射和双射；

(2) 令$h=f^\circ g$，写出h的表达式；

(3) 定义$f^{-1}(B)=\{x|f(x)\in B\}$，求$f^{-1}(\{5,6,7\})$

(1) f 既不是满射也不是入射，同时也不是双射

g 既是满射也是入射，同时也是双射

(2) $h=\begin{cases}2x+5 & x\geq 1\\ |2x| & x<1\end{cases}$

(3) $f^{-1}(\{5,6,7\})=\{2,-5,-6,-7\}$

4. 判断下列函数是否为入射、满射或双射，并给出理由。

(1) $f_1:N\times N\to N, f_1(<x,y>)=x^2+y^2$

(2) $f_2:N\to\{0,1\}, f_2(j)=\begin{cases}0, & j\text{是奇数}\\ 1, & j\text{是偶数}\end{cases}$

(3) I_X是非空集合X上的恒等关系，X/I_X是集合X关于I_X的商集，$f_3:X\to X/I_X, f_3(x)=[x]_{I_X}$

(1) $f_1(<1,2>) = f_1(<2,1>) = 5$，因此$f_1$不是入射；对$3 \in N$，不存在$x, y \in N$，使得$x^2 + y^2 = 3$，因此$f_1$不是满射。

(2) $f_2(1) = f_2(3) = 0$，因此f_2不是入射；$ran(f_2) = \{0,1\}$，因此f_2是满射。

(3) 由题意，$\forall x \in X, [x]_{I_X} = \{x\}$. 首先，对$\forall x, y \in X$，若$x \neq y$，必有$f_3(x) \neq f_3(y)$, 因此$f_3$是入射；其次，对$\forall [z]_{I_X} \in X/I_X$，必有$f_3(z) = [z]_{I_X}$，因此$f_3$是满射。综上，$f_3$是双射。

5. 令R为实数集，证明：R与$(-2,2)$基数相同。

从$(-2,2)$到$(0,1)$存在双射$(x+2)/4$，从$(0,1)$到R存在双射$\tan\left(-\frac{\pi}{2} + \pi x\right)$，则二者基数相同。

6. 若集合A为有限集，B为可数集，问笛卡尔积$A \times B$为可数集吗？请说明原因。

$A \times B$为可数集。设有限集$A = \{a_1, \cdots, a_m\}$,可数集$B = \{b_1, b_2, \cdots\}$。令$c_{ij} = <a_i, b_j>$，$A \times B$中元素排列为：$c_{11}, c_{21}, \cdots, c_{m1}, c_{12}, \cdots, c_{m2}, \cdots$, 因此$A \times B$为可数集。

7. 给出下列集合A的基数

(1) $A = \{x \in I \mid |x| < 10\}$，其中I为整数集合；19

(2) $A = N \times B$，其中N为自然数集合，$B = (0,1)$；阿列夫

(3) A是由圆心在x轴上两两外离的圆周组成的集合。阿列夫零

8. 设A是一个无限集，a是A中的一个元素，证明$A \sim A - \{a\}$。

因为 A 是一个无限集合，$A - \{a\}$也是无限集合，则存在一个可数子集，设为$\{b_1, b_2, b_3, \cdots\}$。构造从 A 到$A - \{a\}$的函数 f 如下：

$$f(x) = \begin{cases} b_1 & x = a \\ b_{i+1} & x = b_i \\ x & 其它 \end{cases}$$

显然 f 是一个双射函数，所以$A \sim A - \{a\}$