

1. 判断下列哪些语句是命题，如果是命题，请给出它的真值

(1) 若直线  $a$  平行于直线  $b$ ，则直线  $a$  和直线  $b$  无公共点

是, 真

(2)  $2+5=9$

是, 假

(3) 饭前便后请洗手

不是

(4) 垂直于同一平面的两个平面平行

是, 假

(5) 3 能被 2 整除

是, 假

(6) 老王只为本城市中，不给自己刮脸的人刮脸

不是, 悖论

2. 将下列自然语言分别符号化为命题公式

(1) 虽然交通阻塞，但老王还是准时到达了车站。

$P$ : 交通阻塞;  $Q$ : 老王准时到达了车站;  $P \wedge Q$

(2) 如果天下雨，我不去看电影。

$P$ : 天下雨;  $Q$ : 我去看电影;  $P \rightarrow \neg Q$

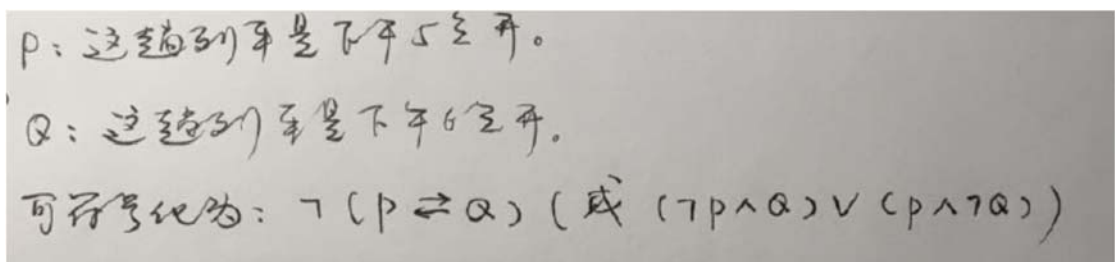
(3) 张三和李四至少有一个人会说外语。

$P$ : 张三会说外语;  $Q$ : 李四会说外语  $P \vee Q$

(4) 如果明天他来，我就不来了。

$P$ : 明天他来;  $Q$ : 明天我来;  $P \rightarrow \neg Q$

(5) 这趟列车是下午 5 点或 6 点开。



$P$ : 这趟列车是下午 5 点开。  
 $Q$ : 这趟列车是下午 6 点开。  
可符号化为:  $\neg(P \leftrightarrow Q)$  (或  $(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$ )

(6) 尽管银行利率降低，股价却没有上涨

$P$ : 银行利率降低;  $Q$ : 股价没有上涨。  $P \wedge Q$

3. 求下列公式的主析取范式和主合取范式，并用二进制编码做下标的小项和大

项分别表示以上范式

$$(1) P \rightarrow (Q \wedge R)$$

$$P \rightarrow (Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow \neg P \vee (Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow M_{100} \wedge M_{101} \wedge M_{110}$$

$$\Leftrightarrow m_{000} \vee m_{001} \vee m_{010} \vee m_{011} \vee m_{111}$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

$$(2) \neg P \rightarrow (\neg Q \wedge \neg R)$$

$$\neg P \rightarrow (\neg Q \wedge \neg R)$$

$$\Leftrightarrow P \vee (\neg Q \wedge \neg R)$$

$$\Leftrightarrow (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg R)$$

$$\Leftrightarrow (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R)$$

$$\Leftrightarrow (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R)$$

$$\Leftrightarrow M_{001} \wedge M_{010} \wedge M_{011}$$

$$\Leftrightarrow m_{000} \vee m_{100} \vee m_{101} \vee m_{110} \vee m_{111}$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

$$(3) \neg P \rightarrow (Q \wedge R)$$

$$\neg P \rightarrow (Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow P \vee (Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow P \vee (Q \wedge R \wedge (P \vee \neg P))$$

$$\Leftrightarrow P \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge (Q \vee \neg Q) \wedge (R \vee \neg R)) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \vee \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \vee \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \text{主析取范式}$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \text{主合取范式}$$

$$(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \vee \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \vee \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow m_{011} \vee m_{100} \vee m_{101} \vee m_{110} \vee m_{111}$$

$$(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow M_{000} \wedge M_{001} \wedge M_{010}$$

$$(4) \neg((A \wedge B) \vee C) \rightarrow C$$

$$\neg((A \wedge B) \vee C) \rightarrow C$$

$$\Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee C) \vee C$$

$$\Leftrightarrow (A \wedge B) \vee C$$

$$\Leftrightarrow (A \wedge B \wedge (C \vee \neg C)) \vee ((A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B) \wedge C)$$

$$\Leftrightarrow ((A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$$

$$\Leftrightarrow (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$$

主析取范式

$$\Leftrightarrow (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \quad \text{主合取范式}$$

$$(2) \quad (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$$

$$\Leftrightarrow m_{001} \vee m_{011} \vee m_{101} \vee m_{110} \vee m_{111}$$

$$(A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C)$$

$$\Leftrightarrow M_{000} \wedge M_{010} \wedge M_{100}$$

$$(5) P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

解:  $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

$\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee R$  (主合取范式)

$\Leftrightarrow m_{110}$

$\Leftrightarrow m_{000} \vee m_{001} \vee m_{011} \vee m_{100} \vee m_{101} \vee m_{010} \vee m_{111}$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$  (主析取范式)

$$(6) P \vee (Q \wedge R) \rightarrow (P \wedge Q \wedge R)$$

$$P \vee (Q \wedge R) \rightarrow (P \wedge Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow \neg(P \vee (Q \wedge R)) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge (\neg Q \vee \neg R)) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

---主析取范式

$$\Leftrightarrow m_{000} \vee m_{001} \vee m_{010} \vee m_{111}$$

$$\Leftrightarrow M_{011} \wedge M_{100} \wedge M_{101} \wedge M_{110}$$

$$\Leftrightarrow (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

---主合取范式

#### 4. 用等价演算法证明

$$(I) (A \rightleftharpoons B) \wedge (B \rightleftharpoons C) \Rightarrow A \rightleftharpoons C$$

Handwritten proof showing the steps to prove  $(A \rightleftharpoons B) \wedge (B \rightleftharpoons C) \Rightarrow A \rightleftharpoons C$ :

$$\begin{aligned} & \forall B: (A \rightleftharpoons B) \wedge (B \rightleftharpoons C) \\ & \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow B) \\ & \Leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \wedge ((C \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) \\ & \Leftrightarrow (A \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow A) \\ & \Leftrightarrow A \rightleftharpoons C \end{aligned}$$

$$(2) (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \Leftrightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow R))$$

$$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R) \Leftrightarrow \neg Q \vee (\neg P \vee R) \Leftrightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow R))$$

#### 5. 用推理规则证明

$$(I) P \rightarrow Q, \neg(Q \vee R) \Rightarrow \neg P$$

$$(1) P \quad P(\text{附加前提})$$

$$(2) P \rightarrow Q \quad P$$

$$(3) Q \quad T(1)(2)$$

$$(4) \neg(Q \vee R) \quad P$$

$$(5) \neg Q \wedge \neg R \quad T(4)$$

$$(6) \neg Q \quad T(5)$$

$$(7) Q \wedge \neg Q(\text{矛盾}) \quad T(3)(6)$$

$$(2) (P \wedge Q) \rightarrow R, \neg R \vee S, \neg S, P \Rightarrow \neg Q$$

- (1)  $\neg R \vee S$   $P$
- (2)  $\neg S$   $P$
- (3)  $\neg R$   $T(1)(2)$
- (4)  $(P \wedge Q) \rightarrow R$   $P$
- (5)  $\neg(P \wedge Q)$   $T(3)(4)$
- (6)  $\neg P \vee \neg Q$   $T(5)$
- (7)  $P$   $P$
- (8)  $\neg Q$   $T(6)(7)$

(3)  $A \vee B, \neg A \vee C, B \rightarrow D \Rightarrow \neg D \rightarrow C$

- (1)  $\neg D$   $P(附加前提)$
- (2)  $B \rightarrow D$   $P$
- (3)  $\neg D \rightarrow \neg B$   $T(2)$
- (4)  $\neg B$   $T(1), (3)$
- (5)  $A \vee B$   $P$
- (6)  $A$   $T(4)(5)$
- (7)  $\neg A \vee C$   $P$
- (8)  $A \rightarrow C$   $T(7)$
- (9)  $C$   $T(6)(8)$
- (10)  $\neg D \rightarrow C$   $CP$

(4)  $A \rightarrow B, C \rightarrow D, \neg B \vee \neg D \Rightarrow \neg(A \wedge C)$

- (1)  $(A \wedge C)$   $P(附近前提)$
- (2)  $A$   $T(1)$
- (3)  $C$   $T(1)$
- (4)  $A \rightarrow B$   $P$
- (5)  $B$   $T(2)(4)$
- (6)  $C \rightarrow D$   $P$
- (7)  $D$   $T(3)(6)$

$$(8) \neg B \vee \neg D \quad P$$

$$(9) \neg D \quad T(5)(8)$$

$$(10) D \wedge \neg D (\text{矛盾}) \quad T(7)(9)$$

$$(5) A \vee B \rightarrow C \wedge D, D \vee E \rightarrow F \Rightarrow \neg F \rightarrow \neg A$$

$$\begin{aligned} & \because \neg F \rightarrow \neg A \Leftrightarrow A \rightarrow F \\ & \therefore \text{等价证明 } A \vee B \rightarrow C \wedge D, D \vee E \rightarrow F \Rightarrow A \rightarrow F \\ & (1) A \quad P(\text{附加前提}) \\ & (2) A \vee B \quad T(1) \\ & (3) A \vee B \rightarrow C \wedge D \quad P \\ & (4) C \wedge D \quad T(1)(3) \\ & (5) D \quad T(4) \\ & (6) D \vee E \quad T(5) \\ & (7) D \vee E \rightarrow F \quad P \\ & (8) F \quad T(6)(7) \end{aligned}$$

$$(6) P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow S \Rightarrow \neg S \rightarrow R$$

$$(1) \neg S \quad P(\text{附加前提})$$

$$(2) Q \rightarrow S \quad P$$

$$(3) \neg Q \quad T(1)(2) I$$

$$(4) P \vee Q \quad P$$

$$(5) P \quad T(3)(4) I$$

$$(6) P \rightarrow R \quad P$$

$$(7) R \quad T(5)(6) I$$

$$(8) \neg S \rightarrow R \quad CP \text{ 规则}$$