

1. 判断下列哪些语句是命题，如果是命题，请给出它的真值

(1) 若直线  $a$  平行于直线  $b$ ，则直线  $a$  和直线  $b$  无公共点  
是，真

(2)  $2+5=9$   
是，假

(3) 饭前便后请洗手  
不是

(4) 垂直于同一平面的两个平面平行  
是，假

(5) 3 能被 2 整除  
是，假

(6) 老王只为本城市中，不给自己刮脸的人刮脸  
不是，悖论

2. 将下列自然语言分别符号化为命题公式

(1) 虽然交通阻塞，但老王还是准时到达了车站。

$P$ : 交通阻塞； $Q$ : 老王准时到达了车站； $P \wedge Q$

(2) 如果天下雨，我不去看电影。

$P$ : 天下雨； $Q$ : 我去看电影； $P \rightarrow \neg Q$

(3) 张三和李四至少有一个人会说外语。

$P$ : 张三会说外语； $Q$ : 李四会说外语  
 $P \vee Q$

(4) 如果明天他来，我就不来了。

$P$ : 明天他来； $Q$ : 明天我来； $P \rightarrow \neg Q$

(5) 这趟列车是下午 5 点或 6 点开。

$P$ : 这趟列车是下午 5 点开。

$Q$ : 这趟列车是下午 6 点开。

可符号化为： $\neg(P \leftrightarrow Q)$  (或  $(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$ )

(6) 尽管银行利率降低，股价却没有上涨

$P$ : 银行利率降低； $Q$ : 股价没有上涨。 $P \wedge Q$

3. 求下列公式的主析取范式和主合取范式，并用二进制编码做下标的小项和大

项分别表示以上范式

$$(I) P \rightarrow (Q \wedge R)$$

$$P \rightarrow (Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow \neg P \vee (Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow M_{100} \wedge M_{101} \wedge M_{110}$$

$$\Leftrightarrow m_{000} \vee m_{001} \vee m_{010} \vee m_{011} \vee m_{111}$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

$$(2) \neg P \rightarrow (\neg Q \wedge \neg R)$$

$$\neg P \rightarrow (\neg Q \wedge \neg R)$$

$$\Leftrightarrow P \vee (\neg Q \wedge \neg R)$$

$$\Leftrightarrow (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg R)$$

$$\Leftrightarrow (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg R \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R)$$

$$\Leftrightarrow (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R)$$

$$\Leftrightarrow M_{001} \wedge M_{010} \wedge M_{011}$$

$$\Leftrightarrow m_{000} \vee m_{100} \vee m_{101} \vee m_{110} \vee m_{111}$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

$$(3) \neg P \rightarrow (Q \wedge R)$$

$$\neg P \rightarrow (Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow P \vee (Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow P \vee (Q \wedge R \wedge (P \vee \neg P))$$

$$\Leftrightarrow P \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge (Q \vee \neg Q) \wedge (R \vee \neg R)) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \vee \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \vee \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \text{主析取范式}$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \text{主合取范式}$$

$$(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \vee \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \vee \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow M_{011} \vee M_{100} \vee M_{101} \vee M_{110} \vee M_{111}$$

$$(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow M_{000} \wedge M_{001} \wedge M_{010}$$

$$\begin{aligned}
(4) \quad & \neg((A \wedge B) \vee C) \rightarrow C \\
& \neg((A \wedge B) \vee C) \rightarrow C \\
\Leftrightarrow & ((A \wedge B) \vee C) \vee C \\
\Leftrightarrow & (A \wedge B) \vee C \\
\Leftrightarrow & (A \wedge B \wedge (C \vee \neg C)) \vee ((A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B) \wedge C) \\
\Leftrightarrow & ((A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \\
& \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \\
\Leftrightarrow & (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)
\end{aligned}$$

主析取范式

$$\Leftrightarrow (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \quad \text{主合取范式}$$

$$(2) \quad (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$$

$$\Leftrightarrow m_{001} \vee m_{011} \vee m_{101} \vee m_{110} \vee m_{111}$$

$$(A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C)$$

$$\Leftrightarrow M_{000} \wedge M_{010} \wedge M_{100}$$

$$(5) \quad P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

$$\begin{aligned}
& \text{解: } P \rightarrow (Q \rightarrow R) \\
\Rightarrow & \neg P \vee \neg Q \vee R \quad (\text{主合取范式}) \\
\Leftrightarrow & m_{110} \\
\Leftarrow & m_{000} \vee m_{001} \vee m_{011} \vee m_{100} \vee m_{101} \vee m_{110} \vee m_{111} \\
\Leftrightarrow & (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \\
& \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \\
& \vee (P \wedge Q \wedge R) \quad (\text{主析取范式})
\end{aligned}$$

- 1 -

$$(6) \quad P \vee (Q \wedge R) \rightarrow (P \wedge Q \wedge R)$$

$$P \vee (Q \wedge R) \rightarrow (P \wedge Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow \neg(P \vee (Q \wedge R)) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge (\neg Q \vee \neg R)) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \\
&\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \\
&\quad \text{---主析取范式} \\
&\Leftrightarrow m_{000} \vee m_{001} \vee m_{010} \vee m_{111} \\
&\Leftrightarrow M_{011} \wedge M_{100} \wedge M_{101} \wedge M_{110} \\
&\Leftrightarrow (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \\
&\quad \text{---主合取范式}
\end{aligned}$$

#### 4. 用等价演算法证明

$$(I) (A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \Rightarrow A \Leftrightarrow C$$

$$\begin{aligned}
&\forall : (A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \\
\Rightarrow & \\
\Leftrightarrow & (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow B) \\
\Leftrightarrow & ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \wedge ((C \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) \\
\Leftrightarrow & (A \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow A) \\
\Leftrightarrow & A \Leftrightarrow C
\end{aligned}$$

$$(2) (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \Leftrightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow R))$$

$$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R) \Leftrightarrow \neg Q \vee (\neg P \vee R) \Leftrightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow R))$$

#### 5. 用推理规则证明

$$(I) P \rightarrow Q, \neg(Q \vee R) \Rightarrow \neg P$$

- (1)  $P$   $P$  (附加前提)
- (2)  $P \rightarrow Q$   $P$
- (3)  $Q$   $T(1)(2)$
- (4)  $\neg(Q \vee R)$   $P$
- (5)  $\neg Q \wedge \neg R$   $T(4)$
- (6)  $\neg Q$   $T(5)$
- (7)  $Q \wedge \neg Q$  (矛盾)  $T(3)(6)$

$$(2) (P \wedge Q) \rightarrow R, \neg R \vee S, \neg S, P \Rightarrow \neg Q$$

- (1)  $\neg R \vee S$  *P*
- (2)  $\neg S$  *P*
- (3)  $\neg R$  *T(1)(2)*
- (4)  $(P \wedge Q) \rightarrow R$  *P*
- (5)  $\neg(P \wedge Q)$  *T(3)(4)*
- (6)  $\neg P \vee \neg Q$  *T(5)*
- (7)  $P$  *P*
- (8)  $\neg Q$  *T(6)(7)*

(3)  $A \vee B, \neg A \vee C, B \rightarrow D \Rightarrow \neg D \rightarrow C$

- (1)  $\neg D$  *P* (附加前提)
- (2)  $B \rightarrow D$  *P*
- (3)  $\neg D \rightarrow \neg B$  *T(2)*
- (4)  $\neg B$  *T(1), (3)*
- (5)  $A \vee B$  *P*
- (6)  $A$  *T(4)(5)*
- (7)  $\neg A \vee C$  *P*
- (8)  $A \rightarrow C$  *T(7)*
- (9)  $C$  *T(6)(8)*
- (10)  $\neg D \rightarrow C$  *CP*

(4)  $A \rightarrow B, C \rightarrow D, \neg B \vee \neg D \Rightarrow \neg(A \wedge C)$

- (1)  $(A \wedge C)$  *P* (附近前提)
- (2)  $A$  *T(1)*
- (3)  $C$  *T(1)*
- (4)  $A \rightarrow B$  *P*
- (5)  $B$  *T(2)(4)*
- (6)  $C \rightarrow D$  *P*
- (7)  $D$  *T(3)(6)*

(8)  $\neg B \vee \neg D \quad P$

(9)  $\neg D \quad T(5)(8)$

(10)  $D \wedge \neg D$  (矛盾)  $T(7)(9)$

(5)  $A \vee B \rightarrow C \wedge D, D \vee E \rightarrow F \Rightarrow \neg F \rightarrow \neg A$

$\because \neg F \rightarrow \neg A \Leftrightarrow A \rightarrow F$

$\therefore$  通过证明  $A \vee B \rightarrow C \wedge D, D \vee E \rightarrow F \Rightarrow A \rightarrow F$

$\therefore A \quad P$  (附加前提)

(2)  $A \vee B \quad T(1)$

(3)  $A \vee B \rightarrow C \wedge D \quad P$

(4)  $C \wedge D \quad T(1)(3)$

(5)  $D \quad T(4)$

(6)  $D \vee E \quad T(5)$

(7)  $D \vee E \rightarrow F \quad P$

(8)  $F \quad T(6)(7)$

(6)  $P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow S \Rightarrow \neg S \rightarrow R$

(1)  $\neg S \quad P$  (附加前提)

(2)  $Q \rightarrow S \quad P$

(3)  $\neg Q \quad T(1)(2) I$

(4)  $P \vee Q \quad P$

(5)  $P \quad T(3)(4) I$

(6)  $P \rightarrow R \quad P$

(7)  $R \quad T(5)(6) I$

(8)  $\neg S \rightarrow R \quad CP$  规则