1. 设$A=\{a,b,c\}$，R_1和R_2是A上的二元关系，它们的关系矩阵为

$$M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\ M(R_2)=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}$$

(1) 写出$R_1{}^\circ R_2$的关系图；

(2) 求$R_1{}^\circ R_2$的自反闭包的关系矩阵；

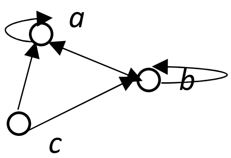
(3) 求$R_1{}^\circ R_2$的对称闭包的关系矩阵；

(4) 求$R_1{}^\circ R_2$的传递闭包的关系矩阵。

(1)

$$M(R_1\circ R_2)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&1&0\end{bmatrix},$$

$R_1\circ R_2$的关系图为



(2)

$$M(r(R_1\circ R_2))=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$

(3)

$$M(s(R_1\circ R_2))=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

(4)

$$M(t(R_1\circ R_2))=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}$$

2. 设$A=\{1,2,3,4,5\}$，A上的二元关系R和S的关系矩阵如下：

$$M_R=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},M_S=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

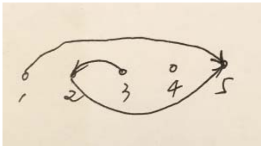
(1) 求R∘S的关系图和关系矩阵；

(2) 求t(R∘S)的关系矩阵；

(3) 求t(R∘S)的自反闭包的关系矩阵；

(4) 求t(R∘S)的对称闭包的关系矩阵。

(1) R∘S的关系图为



R∘S的关系矩阵为

$$M_{\mathrm{R\circ S}} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

(2)

$$M_{\mathrm{t(R\circ S)}} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

(3)

$$M_{\mathrm{rt(R\circ S)}} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&1 \\ 0&1&1&0&1 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

(4)

$$M_{\mathrm{st(R\circ S)}} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&1 \\ 0&1&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0 \end{pmatrix}$$

3. 设$A=\{a,b,c\}$，R是A上的二元关系，且$R=\{<a,b>,<b,c>,<c,a>\}$，完成下列各题（要求同时写出关系矩阵和关系图）：

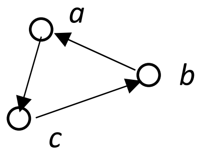
(1) 求$R^\circ R$；

(2) 求$R^\circ R$的自反闭包；

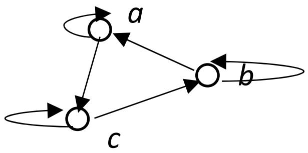
(3) 求$R°R$的对称闭包；

(4) 求$R°R$的传递闭包。

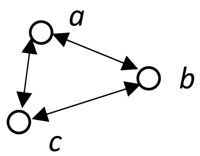
(1) $R°R=\{<a,c>,<b,a>,<c,b>\}$, 关系矩阵为$\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$, 关系图如下：



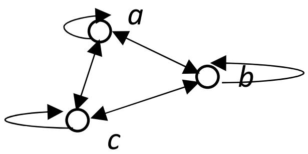
(2) $R°R$自反闭包的关系矩阵为$\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$，关系图如下：



(3) $R°R$对称闭包的关系矩阵为$\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$，关系图如下：



(4) $R°R$传递闭包的关系矩阵为$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$，关系图如下：



4. 设$A=\{a,b,c\}$，R1和R2是A上的二元关系，它们的关系矩阵为

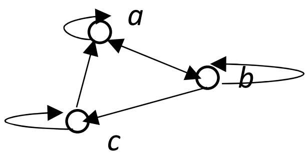
$M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$, $M(R_2)=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}$

(1) 写出R_1和R_2的关系图；

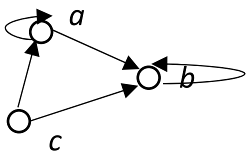
(2) 求$R_1 \circ R_2$（用关系矩阵表示）；

(3) 求$R_1 \circ R_2$的传递闭包（用关系矩阵表示）。

(1) R_1 的关系图为



R_2 的关系图为



(2) $R_1 \circ R_2$的关系矩阵为$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(3) $R_1 \circ R_2$传递闭包的关系矩阵为$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

5. 设$A = \{a, b, c, d\}$，$\pi = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$是$A$的一个划分

(1) 求π诱导的A上的等价关系R_π及商集A/R_π；

(2) 写出π的一个加细π'及其诱导的A上的等价关系。

(1) 求π诱导的 A 上的等价关系$R_\pi = \{<a, a>, <a, b>, <b, a>, <b, b>, <c, c>, <c, d>, <d, c>, <d, d>\}$

商集$A/R_\pi = \pi$

(2) $\pi' = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$是$\pi$的一个加细,$\pi'$诱导的$A$上的等价关系为$\{<a, a>, <b, b>, <c, c>, <d, d>\}$。（答案不唯一）

6. 设整数集为I，$R = \{<x, y> | x、y \in I，x \equiv y (mod\ 4)\}$，其中，$x \equiv y (mod\ 4)$表示x和y除以4的余数相等，

(1) 证明 R 是等价关系。

(2) 求商集 I/R。

(1) 自反：$x-x=0*4$，所以$<x,x>\in \mathrm{R}$；对称：如果$<x,y>\in \mathrm{R}$，则$x-y=k*4$，即，$y-x=-k*4$，$<y,x>\in \mathrm{R}$；传递：如果$<x,y>\in \mathrm{R},<y,z>\in \mathrm{R}$，则$x-y=k*4,y-z=m*4$，则，$x-z=(k+m)*4$，$<x,z>\in \mathrm{R}$

(2) $I/R=\{[0]_R,[1]_R,[2]_R,[3]_R\}$，其中，$[0]_R=\{x|x(mod\ 4)=0,x\in I\}$，$[1]_R=\{x|x(mod\ 4)=1,x\in I\}$，$[2]_R=\{x|x(mod\ 4)=2,x\in I\}$，$[3]_R=\{x|x(mod\ 4)=3,x\in I\}$

7. 设R和S都是集合A上的二元关系，已知R是自反的和传递的，S满足条件：$\forall a,b\in A,<a,b>\in S$当且仅当$<a,b>\in R\wedge<b,a>\in R$，证明$S$是$A$上的等价关系。

任意的$a\in A$，因为 R 是自反的，所以$<a,a>\in R$，则根据 S 的定义可得$<a,a>\in S$，因此 S 是自反的。

任意的$<a,b>\in S$，根据 S 的定义可得$<a,b>\in R\wedge<b,a>\in R$，显然有$<b,a>\in R\wedge<a,b>\in R$，那么$<b,a>\in S$。因此 S 是对称的。

任意的$<a,b>\in S$且$<b,c>\in S$，根据 S 的定义可得$<a,b>\in R\wedge<b,a>\in R$和$<b,c>\in R\wedge<c,b>\in R$，因为 R 是传递的，所以$<a,c>\in R\wedge<c,a>\in R$。根据 S 的定义可得$<a,c>\in S$。因此 S 是传递的。

综上，S 是 A 上的等价关系。

8. 设$A=\{1,2,3,4\}$，$\pi=\{\{1,2,3\},\{4\}\}$是A的一个划分

(1) 求π诱导的A上的等价关系R_π及商集A/R_π；

(2) 写出π的一个加细π'及其诱导的A上的等价关系。

(1) $R_\pi=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>,<2,1>,<1,3>,<3,1>,<2,3>,<3,2>,<4,4>\}$，$A/R_\pi=\{\{1,2,3\},\{4\}\}$

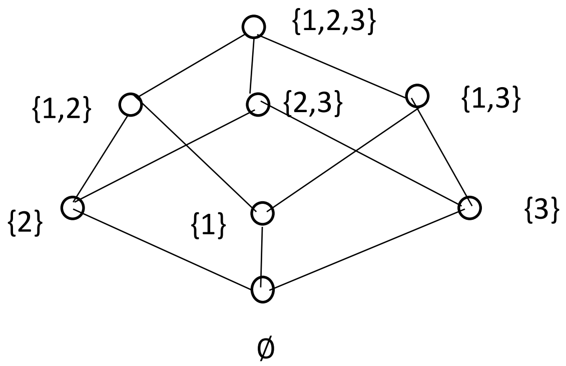
(2) $\pi'=\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$(答案不唯一)，其诱导的 A 上的等价关系为$\{<1,1>,<2,2>,<1,2>,<2,1>,<3,3>,<4,4>\}$

9. 设集合$\mathrm{A}=\{1,2,3\}$，

(1) 画出$\mathcal{P}(\mathrm{A})$上包含关系的哈斯图；

(2) 求子集$\{\{2\},\{1,2\},\{2,3\}\}$的极大元、极小元、最大元、最小元、最小上界、最大下界。

(1) 哈斯图如下：



(2) {{2},{1,2},{2,3}}的极大元为{1,2},{2,3}、极小元为{2}、无最大元、最小元为{2}、最小上界为{1,2,3}、最大下界为{2}。

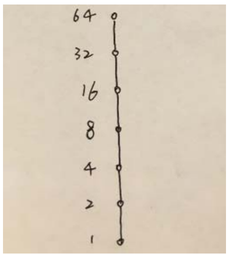
10. 设$< A, \leq >$为一个偏序集，其中A是64的因子组成的集合，$\leq$表示整除关系

(1) 给出该偏序集的盖住关系，并画出哈斯图；

(2) 写出A的一条链和反链；

(3) 写出集合{4,8,16}的上确界和下确界。

(1) 哈斯图如下：



(2) A 的任意子集均为链，A 的任意单元素集合为反链；

(3) 上确界为 16，下确界为 4。

11. 设$< I_+, \leq >$为一个偏序集，其中I_+为正整数集合，$\leq$表示整除关系，求$B = \{4,6,8\}$的上界、上确界、下界、下确界。

4,6,8的最小公倍数为 24，因此 B 的上界为 24 的倍数，上确界为 24。4,6,8的最大公约数为 2，因此 B 的下界为 1 和 2，下确界为 2。

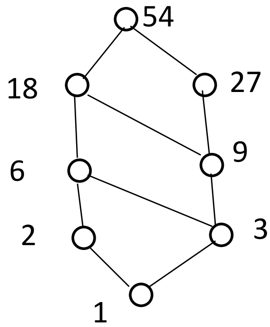
12. 设$< A, \leq >$为一个偏序集，其中A是54的因子组成的集合，$\leq$表示整除关系

(1) 给出该偏序集的哈斯图；

(2) 写出A的一条链和反链；

(3) 写出集合{3,6,9}的上确界和下确界。

(1) 哈斯图如下：



(2) A 的一条链为{1,2,6,18,54}，一条反链为{2,9}

(3) 集合{3,6,9}的上确界为 18，集合{3,6,9}的下确界为 3