

一、选择题（共 2 题，每题 4 分，共 8 分）请将正确答案填在括号里。

1. 向量 $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ 与向量 $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$ 的夹角是 ()

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

2. 对平面 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$, 下列说法中正确的是 ()

- A. 原点到该平面的距离为 $|D|$
B. π 与平面 $-Ax - By - Cz + D = 0 (D \neq 0)$ 平行

C. 直线 $\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C}$ 平行于该平面平行

D. $\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}z + \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$

二、填空题（共 4 题，每题 4 分，共 16 分）请将正确答案写在题目的横线上。

3. 将曲线 $\begin{cases} \frac{y^2}{9-\lambda} + \frac{z^2}{4-\lambda} = 1, & \lambda \neq 4, 9 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转所得的旋转曲面方程为

_____，当 λ 的值取_____时，曲面是旋转椭球面。

4. 已知轨迹的参数方程为 $\vec{r} = \vec{i} \cos \theta \cos \varphi + \vec{j} \cos \theta \sin \varphi + \vec{k} \sin \theta$ ，当 θ, φ 为参数时，轨迹的普通方程是_____ 它表示的图形是_____。

5. 单叶双曲面 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$ 上过点 $(6, 2, 8)$ 的直母线方程是_____
与_____。

6. 二次曲线 $3x^2 + 4xy + 5y^2 - 7x - 8y - 3 = 0$ 在点 $(2, 1)$ 的切线方程为 _____。

三、计算题（12 分）请将计算过程写在题目下面的空白处。

以 $(1, 1, 1)$ 为顶点， $\Gamma: \begin{cases} y^2 = 2x \\ z = 0 \end{cases}$ 为准线的锥面方程。

四、计算题（15分）请将计算过程写在题目下面的空白处。

判别两直线 $\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-3} = \frac{z-3}{4}$ 与直线 $\frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4}$ 的位置关系，并求两直线间的距离。

五、计算题（12分）请将计算过程写在题目下面的空白处。

求通过点 $(4, 0, -1)$ 且与两直线 $l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{5}$, $l_2: \frac{x}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ 都相交的直线方程。

六、证明题（15分）请将证明过程写在题目下面的空白处。

证明

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2$$

七、计算题（10分）请将计算过程写在题目下面的空白处。

求通过直线 $\begin{cases} 2x + y - 2z + 1 = 0 \\ x + 2y - z - 2 = 0 \end{cases}$ 且与平面 $x + y + z - 1 = 0$ 垂直的平面方程。

八、计算题（12分）请将计算过程写在题目下面的空白处。

求二次曲线 $3x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$ 的渐进方向，并指出曲线属于何种类型。