上 海 海 事 大 学 试 卷

2022 — 2023学年第二学期期末考试（A）卷

《 高等数学A(二) 》 考试形式（闭）卷

装

订

线

班级 学号 姓名 总分

一、选择题（本题共5题，每题3分，共15分）请将正确答案写在题目后面的括号内。

1、B； 2、D ； 3、A； 4、C； 5、D.

二、填空题（本题共5题，每题3分，共15分）

1、24； 2、$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy$ 3、 1； 4、 $4\pi R^4$； 5、$[4,6)$.

三、计算题（本大题有8个小题，共70分，要求有解答过程）

1.（本小题8分）设$z = y^x \ln(xy)$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$。

解：$z_x = y^x \ln y \cdot \ln xy + \frac{1}{x} y^x$ （4分）

$z_y = xy^{x-1} \ln(xy) + \frac{1}{y} y^x$ （8分）

2.（本小题8分）设 $f(x,y) = \sin x + (y-1)\arccos\left(\frac{x}{y}\right)^{1/3}$，求$df\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}$.

解：$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,1)} = \frac{\mathrm{d} f(x,1)}{\mathrm{d} x}\Big|_{x=0} = 1$， 3分

$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,1)} = \frac{\mathrm{d} f(0,y)}{\mathrm{d} y}\Big|_{y=1} = \frac{\pi}{2}$。 6分

$df(0,1) = dx + \frac{\pi}{2} dy$ 8分

3.（本小题8分）求过点$(1,1,1)$且与$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ x+2y+2z+4=0 \end{cases}$垂直，又与$3x-4y+z-10=0$平行的直线方程。

解：$\vec{S}_1=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=\{6,-3,0\}$， 3 分

设直线的方向向量为 $\vec{S}$

由 $\vec{S}=\vec{S}_1\times n=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & -3 & 0\\ 3 & -4 & 1\end{vmatrix}=\{-3,-6,-15\}=-3(1,2,5)$ 6 分

所求直线为：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{5}$ 8 分

4.（本小题 8 分）在位于第一卦限的球面 $x^2+y^2+z^2=5R^2\quad(R>0)$ 上找一点，使得函数 $u=\ln(xyz^3)$（$x,\ y,\ z>0$）取最大值。

解： 作拉格朗日函数 $F=\ln(xyz^3)+\lambda(x^2+y^2+z^2-5R^2)$， 2 分

解方程组

$$\begin{cases} F_x=\dfrac{1}{x}+2\lambda x=0\ , \\ F_y=\dfrac{1}{y}+2\lambda y=0\ , \\ F_z=\dfrac{3}{z}+2\lambda z=0\ , \\ x^2+y^2+z^2=5R^2\ . \end{cases}$$ 5 分

推出 $x=y$， $x=-y$（舍去）， $z=\sqrt{3}x$.

解得 $x=R$，于是 $y=R$， $z=\sqrt{3}R$， 8 分

由此得唯一的极值点 $(R,R,\sqrt{3}R)$， $(R,R,\sqrt{3}R)$ 就是所求的最大值点.

5.（本小题 8 分）计算二重积分 $\iint\limits_D(y^2+3x-6y+9)d\sigma$,其中 $D:x^2+y^2\le 4$。

解：原式= $\iint\limits_D(y^2+3x-6y+9)d\sigma=\iint\limits_D y^2d\sigma+9\iint\limits_D d\sigma$ 3 分

$\iint\limits_D 3xd\sigma=\iint\limits_D -6yd\sigma=0$（二重积分的对称性）

$=\dfrac{1}{2}\iint\limits_D(x^2+y^2)d\sigma+36\pi=\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3dr+36\pi$ 6 分

$=40\pi$. 8 分

6.（本小题 10 分）将 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$ 展开为 x 的幂级数

解 1（直接展开）： 由 $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \quad x\in(-1,\ 1]$

$$f(x)=(1+x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad 4\text{ 分}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n} \qquad 6\text{ 分}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^n}{n} \qquad 8\text{ 分}$$

$$=x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n(n-1)}x^n,\quad (-1<x\le 1] \qquad 10\text{ 分}$$

解 2（求导法）：$((1+x)\ln(1+x))'=1+\ln(1+x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\quad -1<x\le 1$ 6 分

原式=$x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$，(-1，1] 10 分

7.（本小题 10 分）

计算 $\oiint_{\Sigma}(x^3+y^3)dydz+(y^3+z^3)dxdz+(2xyz-3x^2z-3y^2z)dxdy$，$\Sigma$ 由平面 x=1,y=2,x+y+z=3 及坐标平面围成立体的整个边界曲面的外侧。

解：由高斯公式，

原式=$\iiint_{\Omega}2xydV$ 4 分

$=2\int_0^1 xdx\int_0^2 ydy\int_0^{3-x-y}dz$ 8 分

$=2$ 10 分

8.（本小题10分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有一阶连续的偏导数，L 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线，其起点为 $A(2,3)$，终点为 $B(3,2)$，记

$$I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2 f(xy)]\,dx+\frac{x}{y^2}[y^2 f(xy)-1]\,dy$$

(1) 证明曲线积分与路径无关；

(2) 计算积分 $I=\int_{A(2,3)}^{B(3,2)}\frac{1}{y}\left[1+y^2 f(xy)\right]dx+\frac{x}{y^2}\left[y^2 f(xy)-1\right]dy$ 的值.

解：（1）已知

$$P=\frac{1}{y}\left[1+y^2 f(xy)\right]=\frac{1}{y}+yf(xy) \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=f(xy)+xyf'(xy)-\frac{1}{y^2};$$

$$Q=\frac{x}{y^2}\left[y^2 f(xy)-1\right]=xf(xy)-\frac{x}{y^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}+f(xy)+xyf'(xy)$$

4 分

$$\therefore \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\text{成立,故曲线积分与路径无关}$$。

（2）因为曲线积分与路径无关，所以计算 I 的积分沿折线 A(2,3)→C(3,3)→B(3,2)，则

$$I=\int_{A(2,3)}^{B(3,2)}\frac{1}{y}\left[1+y^2 f(xy)\right]dx+\frac{x}{y^2}\left[y^2 f(xy)-1\right]dy=\int_{AC}+\int_{CB}$$

$$=\int_2^3\frac{1}{3}\left[1+9f(3x)\right]dx+\int_3^2\frac{3}{y^2}\left[y^2 f(3y)-1\right]dx$$ 7 分

$$=\frac{1}{3}\int_2^3 dx+3\int_2^3 f(3x)dx+3\int_3^2 f(3y)dy-\int_3^2\frac{3}{y^2}dy$$

$$=\frac{1}{3}\int_2^3 dx+3\int_2^3\frac{1}{y^2}dy=\frac{5}{6}$$ 10 分