

# 1

## Semana 1

### 1.1 Sistemas Lineares

Começamos nosso estudo diretamente com um exemplo:

**Exemplo 1.** Considere o sistema linear que consiste de duas equações e duas variáveis

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - y = -2 \end{cases} \quad (1.1)$$

Nosso objetivo é descobrir o valor (ou todos os valores) das variáveis  $x$  e  $y$  que satisfazem a ambas equações.

*Solução 1.* Ao multiplicar toda a primeira equação por  $-2$ , não alteramos a solução do sistema, pois, caso quiséssemos voltar ao sistema original, bastaria dividir a primeira equação do sistema abaixo por  $-2$ . Ficamos assim com o sistema

$$\begin{cases} -2x - 6y = -2 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$$

Em seguida, somamos as duas equações e mantemos uma delas.

$$\begin{cases} -2x - 6y = -2 \\ -7y = -4 \end{cases}$$

Este sistema também tem as mesmas soluções do anterior, pois podemos a qualquer hora retornar ao sistema original fazendo (linha 2)  $-$  (linha 1).

Em verdade, manter a equação da primeira linha multiplicada por  $-2$  não ajuda em nada na resolução do sistema e voltaremos à equação original. Além disso, na linha dois já podemos isolar a variável  $y$  e descobrir o seu valor. Ficamos então com o sistema:

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ -7y = -4 \end{cases} \quad (1.2)$$

Observamos, finalmente, que a solução do último sistema (que é a mesma do sistema original) já está muito fácil de ser obtida. Sabemos o valor de  $y$  pela segunda equação e, para descobrir o valor de  $x$ , basta usar a primeira equação:

$$y = \frac{4}{7} \implies x + 3 \cdot \frac{4}{7} = 1 \implies x = 1 - \frac{12}{7} = -\frac{5}{7}.$$

Podemos escrever a solução do sistema como

$$\begin{cases} x = -5/7 \\ y = 4/7 \end{cases} \triangleleft$$

O símbolo  $\triangleleft$  acima nas nossas notas indica o fim de uma solução, exemplo ou observação. Em seguida, fazemos algumas observações.

**Observação 2.** O sistema linear como o acima possui duas equações e duas variáveis e por isto é conhecido como um sistema linear  $2 \times 2$  (lê-se dois por dois). Mais geralmente, um sistema linear com  $m$  equações e  $n$  variáveis é conhecido como um sistema linear  $m \times n$  (lê-se  $m$  por  $n$ ).

**Observação 3.** Sistemas  $2 \times 2$  são dos mais simples de resolver e por isso o método acima pode parecer desnecessariamente complicado. Mas, como veremos, este método pode ser aplicado para qualquer sistema. Logo, é essencial que se entenda completamente todos os seus passos para um bom acompanhamento do que está por vir.

Vamos analisar a solução apresentada acima mais de perto. Para chegar do sistema linear em (1.1) para o sistema em (1.2), fizemos uma sequência de operações que:

- não alteram a solução do sistema linear original e que;
- resumidamente, podem ser descritas como *adicionar um múltiplo da linha um na linha dois*.

Que a solução permanece a mesma pode ser justificado tal qual está na “Solução 1” acima.

Operações nas linhas de um sistema que não alteram o conjunto de soluções são chamadas de **operações elementares**. São as seguintes:

1. Multiplicar uma linha por uma constante;
2. Trocar duas linhas de lugar;
3. Somar um múltiplo de uma linha a outra linha.

Um artifício que torna todo o processo mais “automático” é o de formar uma tabela de números com os coeficientes do sistema:

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - y = -2 \end{cases} \rightsquigarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{array} \right].$$

A tabela de números da direita é conhecida como a **matriz aumentada associada ao sistema linear**. Vamos nos referir às linhas da matriz associada como  $\ell_1$  e  $\ell_2$ . Deste modo, “adicionar um múltiplo da linha 1 na linha dois” corresponde a fazer:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{-2\ell_1 + \ell_2 \text{ em } \ell_2} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -4 \end{array} \right].$$

Para este tipo de operação, olhamos para as colunas da matriz associada, fizemos mentalmente (ou em uma folha de rascunho) os cálculos envolvidos e preenchemos os valores na respectiva linha da nova matriz que está à direita:

$$(-2) \cdot 1 + 2 = 0, \quad (-2) \cdot 3 + (-1) = -7, \quad (-2) \cdot 1 + (-2) = -4.$$

**Exemplo 4.** Consideramos agora um sistema com três equações e três variáveis;

$$\begin{cases} x + 2y + z = 12 \\ x - 3y + 5z = 1 \\ 2x - y + 3z = 10 \end{cases}.$$

Vamos diretamente escrever a matriz aumentada associada ao sistema, que é a matriz com os coeficientes da variável  $x$  na primeira coluna, os coeficientes da variável  $y$  na segunda coluna, os coeficientes de  $z$  na terceira coluna e os coeficientes independentes na última coluna:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 1 & -3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 10 \end{array} \right].$$

Em seguida, utilizamos operações elementares nas linhas como no exemplo anterior. Ao substituir  $-\ell_1 + \ell_2$  em  $\ell_2$ , obtemos

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -5 & 4 & -11 \\ 2 & -1 & 3 & 10 \end{array} \right].$$

Ou seja, eliminamos o valor 1 da primeira posição da segunda linha (em outras palavras, eliminamos a variável  $x$  da segunda equação). Prosseguindo com a eliminação dos valores abaixo da diagonal principal da matriz, obtemos:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -5 & 4 & -11 \\ 2 & -1 & 3 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow{-2\ell_1 + \ell_3 \text{ em } \ell_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -5 & 4 & -11 \\ 0 & -5 & 1 & -14 \end{array} \right] \xrightarrow{-\ell_2 + \ell_3 \text{ em } \ell_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -5 & 4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array} \right].$$

Voltando à notação original do sistema, obtemos

$$\begin{cases} x + 2y + z = 12 \\ -5y + 4z = -11 \\ -3z = -3 \end{cases}$$

Por causa do seu formato, este sistema é dito estar em **forma triangular** ou ainda que o sistema é **triangular**.

Como já tínhamos percebido no nosso primeiro exemplo, sistemas triangulares são fáceis de resolver. Pela última equação concluímos que  $z = 1$ . Substituindo este valor na segunda equação, obtemos

$$-5y + 4 = -11 \implies y = 3.$$

Finalmente, substituindo estes dois valores na primeira equação, obtemos

$$x + 2 \cdot 3 + 1 = 12 \implies x = 5.$$

Portanto, a solução para o sistema é  $(x, y, z) = (5, 3, 1)$ .  $\triangleleft$

Esta técnica de resolver sistemas lineares é importante por ser aplicável a sistemas de qualquer ordem e é conhecida como **escalonamento** ou **eliminação Gaussiana**.

## 1.2 Formas escalonadas e formas escalonadas reduzidas

Vimos dois exemplos de como resolver sistemas lineares por escalonamento. Vamos agora introduzir uma terminologia, esperando tornar o método mais sistemático.

Dizemos que uma matriz está em **forma escalonada** quando

1. As linhas que contêm apenas zeros estão abaixo das demais.
2. O primeiro elemento não nulo de uma linha, conhecido como **elemento líder**, está em uma coluna à direita do elemento líder da linha acima.

Estas duas condições *implicam* que os elementos que estão abaixo de elementos líder são todos iguais a zero.

Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 2 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

é uma matriz em forma escalonada. Notamos que os coeficientes  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  e  $a_6$  podem ser quaisquer números sem alterar o fato de a matriz estar em forma escalonada.

Outros exemplos, retirados livro do David C. Lay:

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & \blacksquare & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{19} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & a_{24} \end{bmatrix}.$$

Quando uma matriz está em forma escalonada, as posições marcadas com  $\blacksquare$  são chamadas de **posições de pivô**. Observe que, caso a matriz não esteja em forma escalonada, o elemento líder de uma linha pode não estar na posição de pivô. Dizemos também que uma coluna é

uma **coluna pivô** quando a coluna possui uma posição de pivô. Por exemplo, na primeira matriz acima, as duas primeiras colunas são colunas pivô enquanto a terceira e a quarta não são.

Uma matriz estará em **forma escalonada reduzida** quando:

1. Está na forma escalonada;
2. Todos os elementos líder são iguais a 1 e são os únicos elementos não nulos das suas colunas.

Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & b_1 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & b_3 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_4 \end{bmatrix}$$

é uma forma escalonada reduzida da matriz da fórmula (1.3) acima.

Quanto aos outros exemplos, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 1 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & b_5 & b_6 & 0 & b_8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & 0 & b_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b_{16} & b_{17} & 0 & b_{19} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_{20} & b_{21} & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_{24} \end{bmatrix}.$$

**Observação 5.** A forma escalonada reduzida ainda não apareceu na seção anterior quando estávamos resolvendo sistemas, mas notamos que poderia ter sido utilizada para automatizar ainda mais o processo de resolução do sistema. Vamos retomar o Exemplo 4. Fazendo mais algumas operações elementares, é possível transformar a matriz aumentada do sistema em uma matriz em forma escalonada reduzida:

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -5 & 4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_2 \div (-5) \text{ e } \ell_3 \div (-3)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -4/5 & 11/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\frac{4}{5}\ell_3 + \ell_2 \text{ em } \ell_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-\ell_3 + \ell_1 \text{ em } \ell_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-2\ell_2 + \ell_1 \text{ em } \ell_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

A última matriz acima está em forma escalonada reduzida e está associada ao sistema

$$\begin{cases} x & = 5 \\ y & = 3 \\ z & = 1 \end{cases}$$

que, na verdade, já é a solução explícita do sistema original.◁

## 1.3 Algoritmo de escalonamento

Sistematicamente, encontramos a forma escalonada de uma matriz aplicando os seguintes passos:

1. Analisar a primeira coluna pivô – da esquerda para a direita, esta é a primeira coluna que possui algum elemento diferente de zero – e, se necessário, aplicar operações elementares para que o elemento da primeira linha (esta é a posição de pivô!) passe a ser diferente de zero;
2. A partir de operações elementares, eliminar todos elementos que estão abaixo do elemento na posição de pivô que obtivemos no Passo 1;
3. Desconsiderando por um momento a primeira linha, procuramos pela próxima coluna pivô – aquela que tem algum elemento não nulo *abaixo da primeira linha*. Se necessário, aplicar operações elementares para que, na segunda linha, o elemento passe a ser diferente de zero;

4. A partir de operações elementares, eliminar todos elementos que estão abaixo do elemento na posição de pivô que obtivemos no Passo 3;
5. Desconsiderando por um momento a primeira e a segunda linhas, procuramos pela próxima coluna pivô – aquela que tem algum elemento não nulo *abaixo da primeira linha e da segunda linha*. Se necessário, aplicar operações elementares para que, na segunda linha, o elemento passe a ser diferente de zero;
6. A partir de operações elementares, eliminar todos elementos que estão abaixo do elemento na posição de pivô que obtivemos no Passo 5 e assim por diante.

Essencialmente, são apenas dois passos que se repetem até que se esgotem as colunas que possuem posição de pivô. Vejamos um exemplo.

**Exemplo 6.** Considere a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -4 & 22 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

*Passo 1.* A primeira coluna pivô é a terceira. Escolhemos um elemento não nulo da terceira coluna para ocupar a posição de pivô. Por exemplo, a segunda linha. Trocando a primeira e a segunda linhas de lugar (esta é uma operação elementar), obtemos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -4 & 22 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

*Passo 2.* Eliminar os elementos abaixo do 2 que está na posição de pivô da terceira coluna:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -4 & 22 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{3}{2}\ell_1 + \ell_3 \text{ em } \ell_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -4 & 22 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{-3\ell_1 + \ell_4 \text{ em } \ell_4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_1 + \ell_5 \text{ em } \ell_5} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

*Passo 3.* A partir de agora, vamos essencialmente repetir o processo já realizado até agora. Notamos que a próxima coluna que contém elementos não nulos (sem olhar para a primeira linha!) é a quarta coluna. Portanto, esta é uma coluna pivô e vamos posicionar um elemento não nulo na segunda linha. Por exemplo, podemos trocar a segunda e a terceira linhas.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Antes de prosseguir, podemos ainda simplificar alguns cálculos multiplicando linhas por escalares (fazer isso é realizar uma operação elementar!):

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{2 \cdot \ell_3 \text{ e } (-1) \cdot \ell_4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

**Passo 4.** Prosseguimos como no Passo 2 para eliminar todos os elementos que estão abaixo da posição de pivô da quarta coluna:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\ell_2 + \ell_4 \text{ em } \ell_4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2\ell_2 + \ell_5 \text{ em } \ell_5} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Passo 5.** Finalmente, identificamos a coluna 5 como coluna pivô e obtemos uma matriz em forma escalonada ao deixar um elemento não nulo na posição de pivô:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \triangleleft$$

Agora, para obter a forma escalonada reduzida *a partir da forma escalonada*, primeiramente aplicamos os passos acima para obter uma matriz em forma escalonada. Em seguida, aplicamos outros passos iterativos:

1. Começar pela posição de pivô mais à *direita* e eliminar os elementos não nulos *acima* da posição de pivô;
2. Se necessário, dividir a linha pelo valor do elemento líder (que está na posição de pivô) para que o elemento líder fique igual a 1;
3. Repetir os primeiros passos para o elemento líder na próxima (da direita para a esquerda) coluna pivô.

Observamos que poderíamos ter primeiro realizado o Passo 2 e depois o Passo 1 se julgássemos que seria mais simples para efetuar os cálculos.

**Exemplo 7.** Voltamos ao Exemplo 6. Identificando novamente as posições de pivô:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{2} & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

O mais da direita é o  $-1$  da quinta coluna. Eliminando os termos não nulos acima, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_3 + \ell_2 \text{ em } \ell_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\ell_3 + \ell_1 \text{ em } \ell_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

A próxima posição de pivô mais à direita é o 1 na linha 2, coluna 4. Eliminando o termo não nulo acima, obtemos:

$$\xrightarrow{-\ell_2 + \ell_1 \text{ em } \ell_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Finalmente, dividimos a primeira linha por 2 e a terceira linha por  $-1$  para chegar na forma escalonada reduzida da matriz inicial:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

## 1.4 Existência e unicidade de solução

### 1.4.1 Sistemas que possuem apenas uma solução

Os sistemas que vimos até agora possuíam apenas uma solução. Esta propriedade, como veremos, nem sempre é válida. No entanto, é fácil de identificar quando um sistema possui solução única analisando a forma escalonada da matriz associada: **quando todas as colunas referentes às variáveis da equação possuírem posição de pivô**. Por exemplo,

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -4 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -5 & 4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

De fato, todas as matrizes com esta propriedade tem em sua forma escalonada reduzida a matriz identidade do lado esquerdo da barra que separa as variáveis e os valores do lado direito da igualdade do sistema:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5/7 \\ 0 & 1 & 4/7 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

Escrevendo o sistema associado as estas últimas matrizes, é fácil de ver que a solução será única.

### 1.4.2 Sistemas impossíveis ou inconsistentes

Nem todo sistema linear possui solução. Um exemplo simples deste fato é

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad (1.4)$$

É claro que  $x + y$  não pode ser ao mesmo tempo igual a 1 e igual a 2; portanto, o sistema não possui solução. O fato de o sistema não possuir solução – ser **inconsistente** – nem sempre é tão fácil de ser identificado apenas olhando para o sistema. Mas esta propriedade salta aos olhos quando analisamos a forma escalonada da matriz associada ao sistema. De fato, na matriz escalonada de um sistema inconsistente aparece uma linha da forma

$$[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ | \ a],$$

com uma constante  $a \neq 0$ . Esta linha representa no sistema uma equação do tipo  $0 = a \neq 0$ , que é impossível de ser satisfeita.

No sistema da fórmula (1.4) acima, temos a matriz aumentada

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{-\ell_1 + \ell_2 \text{ em } \ell_2} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Logo, nosso sistema é equivalente ao sistema impossível

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}.$$

### 1.4.3 Sistemas com mais de uma solução

Com exceção da subseção anterior, todos os sistemas que resolvemos anteriormente possuíam apenas uma solução. Vejamos um exemplo onde este não é o caso.

**Exemplo 8.** Resolver

$$\begin{cases} 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = -5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 9 \\ 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 = 15 \end{cases}.$$

A matriz aumentada associada a este sistema é

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{array} \right].$$

Transformando esta matriz em sua forma escalonada reduzida (faça todos os cálculos!), obtemos

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right],$$

que é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -24 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -7 \\ x_5 = 4 \end{cases}$$

Neste sistema  $x_5$  possui um valor fixo igual a 4, mas as outras variáveis tem dois graus de liberdade. De fato, atribuindo valores quaisquer para  $x_3$  e  $x_4$ , obtemos os valores de  $x_1$  e  $x_2$  pelas duas primeiras equações acima e temos uma solução do sistema. Diferentes escolhas dos parâmetros  $x_3$  e  $x_4$  geram soluções diferentes.

Uma forma sistemática de analisar a situação é a seguinte: As variáveis correspondentes a colunas que possuem posição de pivô são chamadas de **variáveis dependentes** e as demais são chamadas de **variáveis livres**. Assim, podemos escrever

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 - 3x_4 - 24 \\ x_2 = 2x_3 - 2x_4 - 7 \\ x_3, x_4 \text{ livres} \\ x_5 = 4 \end{cases}$$

e o sistema possui infinitas soluções.◁

### 1.4.4 Conclusões

Ao analisar a matriz aumentada associada a um sistema linear, concluiremos *inevitavelmente* que uma das seguintes situações é válida:

- Todas as colunas referentes às variáveis do sistema possuem posição de pivô, *e.g.*,

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 6 \\ 0 & -8 & 11 & \pi \\ 0 & 0 & 12 & -9 \end{array} \right].$$

Neste caso, vimos que o sistema possui **apenas uma solução**. Nota que *esta possibilidade apenas é possível se tivermos um sistema com o número de equações igual ao número de variáveis*.

- Caso a coluna referentes à alguma variável do sistema não possua posição de pivô, teremos duas possibilidades



- (i) Alguma coluna não é coluna pivô mas não existem linhas inconsistentes, *e.g.*,

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -6 & 2 & 6 \\ 0 & -8 & 4 & 11 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 1 & -9 \end{array} \right].$$

Neste caso, as variáveis referentes a colunas que não são pivô (na matriz acima, colunas 3 e 5) podem ser consideradas variáveis livres e o sistema **possui infinitas soluções**.

- (ii) Alguma coluna não é coluna pivô mas existem linhas que são inconsistentes, *e.g.*,

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -6 & 2 & 6 \\ 0 & -8 & 4 & 11 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \end{array} \right].$$

Neste caso, **não existem soluções** para o sistema, pois uma das equações é impossível de ser satisfeita.

Concluimos assim que *um sistema linear ou não possui solução, ou tem apenas uma solução ou então possui infinitas soluções*. São estes três todos os casos possíveis e podemos decidir em qual estamos apenas olhando para a forma escalonada da matriz aumentada associada ao sistema.