1

Semana 4

A operação de soma de matrizes e de multiplicação por escalar são definidas da mesma forma que definimos estas operações para vetores. Na soma, basta somar componente a componente, enquanto que na multiplicação por escalar o que fazemos é multiplicar todas as componentes da matriz pelo escalar (número) dado. Desta forma, por exemplo,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & -1 & \pi & 0 \\ 11 & 11 & -2 & 0 \\ 9 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 9 \\ -5 & 10 & 2 & 11 \\ -3 & 8 & 0 & -6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1+1 & -1+4 & \pi+1 & 0+9 \\ 11-5 & 11+10 & -2+2 & 0+11 \\ 9-3 & 0+8 & 4+0 & 4-6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 3 & \pi+1 & 9 \\ 6 & 21 & 0 & 11 \\ 6 & 8 & 4 & -2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

enquanto

$$5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 9 \\ -5 & 10 & 2 & 11 \\ -3 & 8 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot 4 & 5\cdot 1 & 5\cdot 9 \\ 5\cdot(-5) & 5\cdot 10 & 5\cdot 2 & 5\cdot 11 \\ 5\cdot(-3) & 5\cdot 8 & 5\cdot 0 & 5\cdot(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 20 & 5 & 45 \\ -25 & 50 & 10 & 55 \\ -15 & 40 & 0 & -30 \end{bmatrix}.$$

1.1 Produto de matrizes

É no produto de matrizes que aparece uma operação diferente do que estamos acostumados. Já vimos como a multiplicação de uma matriz de ordem $m \times n$ por um vetor de $\mathbb{R}^n$ (ou matriz de ordem $n \times 1$) aparece naturalmente quando resolvemos uma sistema linear:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

O resultado é um vetor de $\mathbb{R}^m$ (ou matriz de ordem $m \times 1$). Observamos que necessariamente o número de colunas da matriz A deve ser igual ao número de linhas do vetor $\vec{x}$, para que seja possível realizar o produto como indicado.

Vamos generalizar este procedimento para definir o produto entre duas matrizes de qualquer ordem. Por exemplo, se A é como acima e B é uma matriz B de ordem $n \times 2$, o que vamos fazer é pensar nas colunas de B como dois vetores $\vec{b}_1$ e $\vec{b}_2$ e realizar os produtos como já estamos acostumados. O resultado será uma matriz cujas colunas são $A\vec{b}_1$ e $A\vec{b}_2$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n & a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots a_{1n}y_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n & a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots a_{2n}y_n \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n & a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots a_{mn}y_n \end{bmatrix}.$$

O resultado é portanto uma matriz de ordem $m \times 2$

De forma mais geral, podemos multiplicar uma matriz A de ordem $m \times n$ por qualquer outra matriz de ordem $n \times p$ e o resultado obtido será uma matriz de ordem $m \times p$. É fácil de lembrar: o número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda matriz e a matriz resultante terá por ordem o que "sobrar":

$$[\cdots]_{m\times \cancel{n}} [\cdots]_{\cancel{n}\times p} = [\cdots]_{m\times p}.$$

As colunas da matriz resultante são obtidas ao fazer o produto da primeira matriz com os vetores que formam as colunas da segunda:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_p \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_p \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

Acima, $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_p \in \mathbb{R}^n$ são as colunas da matriz B. Conclua que $A\vec{b}_1, A\vec{b}_2, \ldots, A\vec{b}_p \in \mathbb{R}^m$ e que AB é uma matriz de ordem $m \times p$.

1.1.1 Exemplos

Vamos mostrar algumas contas que exemplificam tanto o procedimento quanto algumas das propriedades essenciais do produto de matrizes.

Exemplo 1. Vamos calcular um produto de matrizes utilizando o procedimento explicado na subseção anterior:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \pi & 0 \\ 11 & 11 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 9 \\ -5 & 10 & 2 & 11 \\ -3 & 8 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-3\pi & -6+8\pi & -1 & -2-6\pi \\ 50 & 138 & 33 & 232 \end{bmatrix}. \text{—}$$

O elemento $(AB)_{ij}$ da linha i e coluna j da matriz AB, pode ser obtido ao "multiplicar" a linha i de A pela coluna j de B:

$$\begin{array}{llllll} (AB)_{11} & = 1\cdot 1 & +(-1)\cdot(-5) & +\pi\cdot(-3) & +0\cdot 0 & = 6-3\pi, \\ (AB)_{12} & = 1\cdot 4 & +(-1)\cdot 10 & +\pi\cdot 8 & +0\cdot 2 & = -6+8\pi, \\ (AB)_{13} & = 1\cdot 1 & +(-1)\cdot 2 & +\pi\cdot 0 & +0\cdot(-2) & = -1, \\ (AB)_{14} & = 1\cdot 9 & +(-1)\cdot 11 & +\pi\cdot(-6) & +0\cdot 0 & = -2-6\pi, \\ (AB)_{21} & = 11\cdot 1 & +11\cdot(-5) & +(-2)\cdot(-3) & +0\cdot 0 & = 50, \\ (AB)_{22} & = 11\cdot 4 & +11\cdot 10 & +(-2)\cdot 8 & +0\cdot 2 & = 138, \\ (AB)_{23} & = 11\cdot 1 & +11\cdot 2 & +(-2)\cdot 0 & +0\cdot(-2) & = 33, \\ (AB)_{24} & = 11\cdot 9 & +11\cdot 11 & +(-2)\cdot(-6) & +0\cdot 0 & = 232. \end{array}$$

Observamos, a partir deste exemplo, que **o produto de matrizes não é comutativo**. De fato, as matrizes AB e BA sequer tem a mesma ordem. Além disto, pode ser que seja possível calcular AB, mas não BA. Pense, por exemplo, em uma matriz A de ordem 3×2 e em outra matriz B de ordem 2×5.

Exemplo 2. Uma propriedade de **matrizes quadradas**, isto é, matrizes cujo número de linhas e de colunas é igual, é que o produto delas fornece uma terceira matriz com a mesma ordem:

$$[\cdots]_{n\times \cancel{n}} [\cdots]_{\cancel{n}\times n} = [\cdots]_{n\times n}.$$

Mesmo neste caso, o produto de matrizes **não é comutativo**: é possível encontrar matrizes tais que $AB \neq BA$. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

enquanto

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \triangleleft$$

1.1.2 Uma interpretação para resolução de sistemas lineares

Nós podemos pensar em

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \\ \vdots & \vdots \\ b_n & c_n \end{bmatrix}$$

como a forma matricial de escrever que dois sistemas lineares que possuem a mesma matriz associada:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad A\vec{x} = \vec{b}, \quad A\vec{y} = \vec{c}.$$

(por quê?) É possível de resolver os dois sistemas concomitantemente ao escrever uma matriz aumentada generalizada:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n & c_n \end{array}\right]$$

A análise das soluções é feita da mesma forma que aprendemos nas notas da primeira semana. Observem que esta é uma forma de economizar as contas e não precisar escalonar duas vezes a matriz!

Exercício 1. Escrever dois sistemas lineares que possuem a mesma matriz associada. Resolver usando a matriz aumentada generalizada acima.

Evidentemente, este método funcionaria para resolver ao mesmo tempo 3 ou 4 ou 20 sistemas lineares ao mesmo tempo, desde que a matriz associada seja a mesma em todos eles.

1.2 Matriz transposta

A **matriz transposta** de uma matriz A, de ordem $m \times n$, é a matriz A^T que tem por colunas as linhas de A. Consequentemente, A^T é uma matriz de ordem $n \times m$.

Exemplo 3. As transpostas das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \\ -9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \pi & 0 \\ 11 & 11 & -2 & 0 \\ 9 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

são as matrizes

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 10 & 9 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 & 11 & 9 \\ -1 & 11 & 4 \\ \pi & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \triangleleft$$

Valem as seguintes propriedades:

- $(A^T)^T = A$
- Linearidade: $(xA + yB)^T = xA^T + yB^T$
- Produto: $(AB)^T = B^T A^T$

Exercício 2. Verifique estas propriedades com exemplos.

1.3 Matriz inversa

Agora que temos definido um produto de matrizes, é natural de nos perguntarmos quais das propriedades usuais do produto entre números reais se mantém válidas.

Por exemplo, a **matriz identidade** I_n é a matriz quadrada de ordem $n \times n$ que tem 1 na diagonal principal e 0 nas demais posições. No caso 3×3, temos

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz satisfaz $AI_n = A$ para qualquer matriz A de ordem $m \times n$. Da mesma forma, temos $I_n B = B$ para qualquer matriz B de ordem $n \times m$ (observe atentamente os índices!). O nome identidade vem desta propriedade, que é parecida com a propriedade da unidade nos números reais: $1 \cdot x = x = x \cdot 1$.

Existindo a matriz identidade, outra pergunta natural é se existe um inverso multiplicativo. Para números reais, qualquer número não nulo possui:

$$x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \implies x^{-1} = \frac{1}{x} \text{ é este inverso.}$$

Vamos procurar por **matrizes inversas**: dada uma matriz A, queremos encontrar uma matriz A^{-1} de modo que

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A.$$

Escrevemos de duas formas diferentes acima, pois o produto de matrizes não é comutativo. A matriz A^{-1} é chamada a **matriz inversa** de A. Observe que A **deve ser quadrada** (por quê?).

1.3.1 Caso 2×2

Vamos procurar pela inversa de

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Escrevemos

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$$

e queremos descobrir os valores x_1, x_2, y_1, y_2 que satisfazem

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pela interpretação que demos anteriormente ao produto de matrizes, encontrar

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

é equivalente a resolver ao mesmo tempo os dois sistemas

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{e}_1 \quad \text{e} \quad A\vec{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{e}_2.$$

A ideia é então resolver por escalonamento os sistemas cuja matriz aumentada associada é:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Tem-se

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{c\cdot\ell_1 \text{ e } a\cdot\ell_2} \left[\begin{array}{cc|cc} ac & bc & c & 0 \\ ac & ad & 0 & a \end{array}\right] \xrightarrow{-\ell_1+\ell_2 \text{ em } \ell_2} \left[\begin{array}{cc|cc} ac & bc & c & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\ell_2 \div (ad-bc)} \left[\begin{array}{cc|cc} ac & bc & c & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{array}\right] \xrightarrow{-bc\ell_2+\ell_1 \text{ em } \ell_1} \left[\begin{array}{cc|cc} ac & 0 & \dfrac{acd}{ad-bc} & \dfrac{-abc}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\ell_1 \div ac} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{array}\right].$$

Daí concluimos (depois colocar em evidência o fator $ad - bc$ que está dividindo) que:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.}$$

Nesta última expressão, definimos o **determinante** de uma matriz de ordem 2×2:

$$\det A = ad - bc$$

e, como foi necessário dicidir por este valor:

$$\boxed{\text{só existe a matriz inversa de } A \text{ caso } \det A \neq 0.}$$

Observação 4. Veremos na seção seguinte que o processo que utilizamos para inverter a matriz A funciona para matrizes de qualquer ordem, mas é trabalhoso. No caso de uma matriz 2×2, talvez seja interessante memorizar a fórmula, já que não é tão complicada. Podemos pensar da seguinte maneira:

- Calculamos $\det A$. Se for diferente de zero, existe a inversa. Nós partimos de A e dividimos pelo determinante.
- Em seguida, trocamos de lugar os elementos da diagonal principal (a e d).
- Finalmente, trocamos o sinal dos elementos da outra diagonal.

Atenção! Este método apenas funciona para matrizes quadradas de ordem 2!

Exemplo 5. Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calculamos

$$\det A = 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 1 = 4 \neq 0.$$

Logo, A possui inversa e temos

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

(trocamos de lugar os elementos da diagonal principal e de sinal dos elementos da outra diagonal).

Façamos o mesmo para a matriz B:

$$\det B = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 1 \neq 0.$$

Logo,

$$B^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

(trocamos de lugar os elementos da diagonal principal – neste caso eram iguais – e de sinal dos elementos da outra diagonal).

Já para a matriz C, temos

$$\det C = (-1) \cdot 2 - 2 \cdot (-1) = 0$$

e portanto C não é invertível (isto é, não existe a inversa C^{-1}).

1.3.2 Algoritmo para ordem maior

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Para obter a matriz inversa, devemos ter:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Da mesma forma que na seção anterior, devemos resolver simultaneamente os sistemas

$$A\vec{x}_1 = \vec{e}_1, \quad A\vec{x}_2 = \vec{e}_2, \cdots, A\vec{x}_n = \vec{e}_n,$$

onde $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ são as colunas da matriz inversa A^{-1}. Assim, devemos escrever a matriz aumentada associada a estes sistemas lineares:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

ou, de forma mais sucinta,

$$[\, A \mid I \,].$$

E este é o algoritmo de resolução: Deixar a matriz A em forma escalonada reduzida (até chagar na matriz identidade) de modo que as soluções obtidas já serão a matriz inversa de A:

$$[\, I \mid A^{-1} \,].$$

Observação 6. Para que seja possível encontrar as soluções, como indicado acima, a forma escalonada da matriz A deve possuir n posições de pivô (caso contrário, algum dos sistemas acima seria impossível), de modo que todas as colunas de A são colunas pivô.

Se A possuir alguma coluna que não tenha posição de pivô, podemos parar imediatamente o algoritmo, pois isto significa que a matriz não é invertível,

Exemplo 7. Vamos decidir se a matriz abaixo é invertível e, em caso afirmativo, determinar a inversa:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}.$$

De acordo com o algoritmo, devemos escalonar

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 9 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Caso a matriz seja invertível, conseguiremos deixar a matriz identidade do lado esquerdo desta matriz aumentada. Começamos eliminando os termos da primeira coluna (abaixo do 2 que está na posição de pivô):

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 8 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{segunda coluna}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 5 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{terceira}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{reduzida - }4^a} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -7/2 & 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 3/2 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 5/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 9/4 & -3/4 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 5/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right].$$

Concluimos que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 9/4 & -3/4 & -1/4 & 1/4 \\ -3 & 5/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1 & 1 & -1/2 \\ 3/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Verifique como exercício que esta matriz é de fato a matriz inversa de A, isto é, calcule o produto $A \cdot A^{-1}$ e verifique que resulta em I_4. $\lhd$

Exemplo 8. Vamos decidir se a matriz abaixo é invertível e, em caso afirmativo, determinar a inversa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ -3 & -9 & 9 \end{bmatrix}.$$

De acordo com o algoritmo, devemos escalonar

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -9 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Temos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 12 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right].$$

Portanto, a terceira coluna não possui posição de pivô e a matriz A não possui inversa.

1.3.3 Aplicação na resolução de sistemas lineares

Sistemas lineares de ordem $n \times n$

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

cuja matriz associada A é invertível, são sistemas que possuem exatamente uma solução, para qualquer vetor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ (ver Subseção 1.3.4).

A existência da matriz inversa A^{-1} permite-nos multiplicar ambos os lados do sistema por A^{-1} para obter $\vec{x} = A^{-1} \cdot A = A^{-1}\vec{b}$. Logo,

$$\boxed{\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.}$$

Exemplo 9. Resolver o sistema

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Já calculamos a matriz inversa no Exemplo 5:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Segue que a solução é

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}. \lhd$$

Embora nossa solução do sistema possa parecer “elegante” ao utilizar a matriz inversa, este método é muito ineficiente. Na verdade, escalonar a matriz aumentada associada ao sistema exige um custo computacional muito menor do que calcular a inversa da matriz e, portanto, em geral se usa o escalonamento.

Matrizes inversas têm uma importância mais teórica no nosso curso, como veremos na subseção abaixo.

1.3.4 Uma primeira caracterização de matrizes invertíveis

Vamos, nesta subseção, verificar que

> A matriz A é invertível se, e somente se, o sistema linear $A\vec{x} = \vec{b}$ possui exatamente uma solução, para qualquer vetor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

$\Longrightarrow$) Se A é invertível, então conseguimos resolver todos os sistemas

$$A\vec{x}_1 = \vec{e}_1, \quad A\vec{x}_2 = \vec{e}_2, \cdots, A\vec{x}_n = \vec{e}_n$$

concomitantemente. De fato, qualquer vetor $\vec{b}$ pode ser escrito como

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + \cdots + b_n\vec{e}_n,$$

e daí verificamos que se pode construir uma solução $\vec{x}$ pela fórmula

$$\vec{x} = b_1\vec{x}_1 + b_2\vec{x}_2 + \cdots + b_n\vec{x}_n,$$

já que pela linearidade do produto da matriz A por vetores, temos

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= b_1A\vec{x}_1 + b_2A\vec{x}_2 + \cdots + b_nA\vec{x}_n, \\ &= b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + \cdots + b_n\vec{e}_n \\ &= \vec{b}. \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$) Reciprocamente, suponhamos que o sistema possua exatamente uma solução, para qualquer vetor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Em particular, podemos resolver os sitemas

$$A\vec{x}_1 = \vec{e}_1, \quad A\vec{x}_2 = \vec{e}_2, \cdots, A\vec{x}_n = \vec{e}_n$$

e escrever a matriz inversa de acordo com o nosso algoritmo.