Álgebra Linear – Semana 02

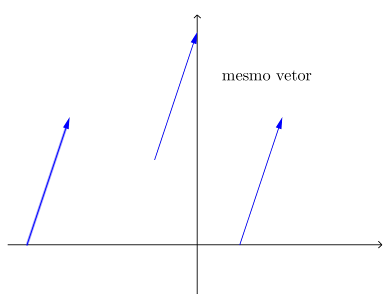
03 de Abril de 2017

Conteúdo

Existem maneiras diferentes de representar e de interpretar elementos de Álgebra Linear. Nesta parte, vemos algumas das principais.

1 Vetores

Um **vetor** no espaço tridimensional é um objeto com magnitude, direção e sentido bem definidos (não importa o ponto inicial).



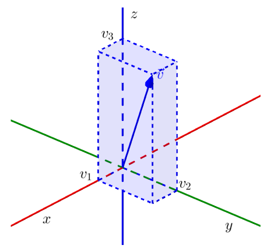
Fixando o sistema de coordenadas Cartesiano usual e usando a origem como referência, podemos introduzir coordenadas:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_1\vec{e_1} + v_2\vec{e_2} + v_3\vec{e_3},$$

onde

$$\vec{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{e_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

No livro "Álgebra Linear e suas Aplicações", de David Lay, vetores são representados por letras em negrito. Nestas notas, utilizamos uma setinha em cima da letra para indicar um vetor.



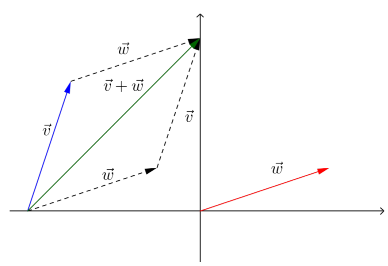
O conjunto de todos os vetores com três componentes como acima é chamado de $\mathbb{R}^3$ (leia-se "erre três"). Em coordenadas, se tivermos

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix},$$

podemos definir a **soma de vetores** componente a componente:

$$\vec{v} + \vec{w} := \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{bmatrix}.$$

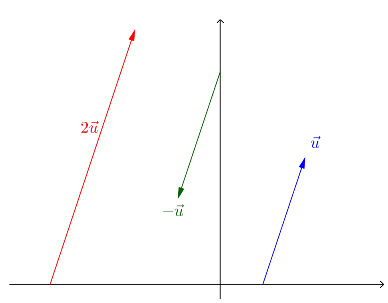
Geometricamente, isto pode ser interpretado como segue:



A **multiplicação** do vetor $\vec{v}$ **por escalar** $k \in \mathbb{R}$ é definida como:

$$k\vec{v} := \begin{bmatrix} kv_1 \\ kv_2 \\ kv_3 \end{bmatrix}.$$

Geometricamente,



Estas considerações que fizemos também são válidas para outro número de componentes, com a possível perda de visualização geométrica, no caso de quatro ou mais componentes.

Mais geralmente, um vetor $\vec{v}$ do conjunto $\mathbb{R}^n$ pode ser pensado como um objeto com n componentes:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + \cdots + v_{n-1}\vec{e}_{n-1} + v_n\vec{e}_n,$$

onde

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \vec{e}_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A soma de vetores é dada em coordenadas por:

$$\vec{v} + \vec{w} := \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} + w_{n-1} \\ v_n + w_n \end{bmatrix}.$$

A multiplicação por escalar por:

$$k\vec{v} := \begin{bmatrix} kv_1 \\ kv_2 \\ \vdots \\ kv_{n-1} \\ kv_n \end{bmatrix}.$$

1.1 Representação matricial para sistemas Lineares

Na linguagem da seção anterior, nós dizemos que dois vetores são iguais quando todas as suas componentes são iguais. Desta forma, podemos interpretar as equações de um sistema linear

$$\begin{cases} x + 3y &= 1 \\ 2x - y &= -2 \end{cases}$$

como uma igualdade entre vetores de $\mathbb{R}^2$, isto é, de vetores com duas componentes:

$$\begin{bmatrix} x + 3y \\ 2x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Além disso, desta forma surge o **produto de uma matriz por um vetor**:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

definido de modo que as duas últimas equações acima signifiquem a mesma coisa. Esta última notação é conhecida como a **forma matricial** do sistema linear.

Exemplo 1. O sistema, que já apareceu nas notas da semana anterior

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$$

pode ser representado matricialmente por

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

De forma mais sucinta,

$$\boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \text{ e } \vec{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Mais geralmente, uma matriz do tipo $m \times n$ (leia-se "m por n") é uma matriz com m linhas e n colunas:

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

e pode estar associada a um sistema com m equações e n variáveis, já que o produto

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

quando visto componente a componente, representa:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

2 Combinações lineares de vetores

Uma **combinação linear** dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ é um vetor da forma:

$$\vec{v} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_k\vec{v}_k = \sum_{i=1}^{k} x_i\vec{v}_i,$$

onde $x_1, x_2, \ldots, x_k$ são números reais. Em outras palavras, uma combinação linear é uma soma de múltiplos dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$.

Exemplo 2. Para os vetores

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

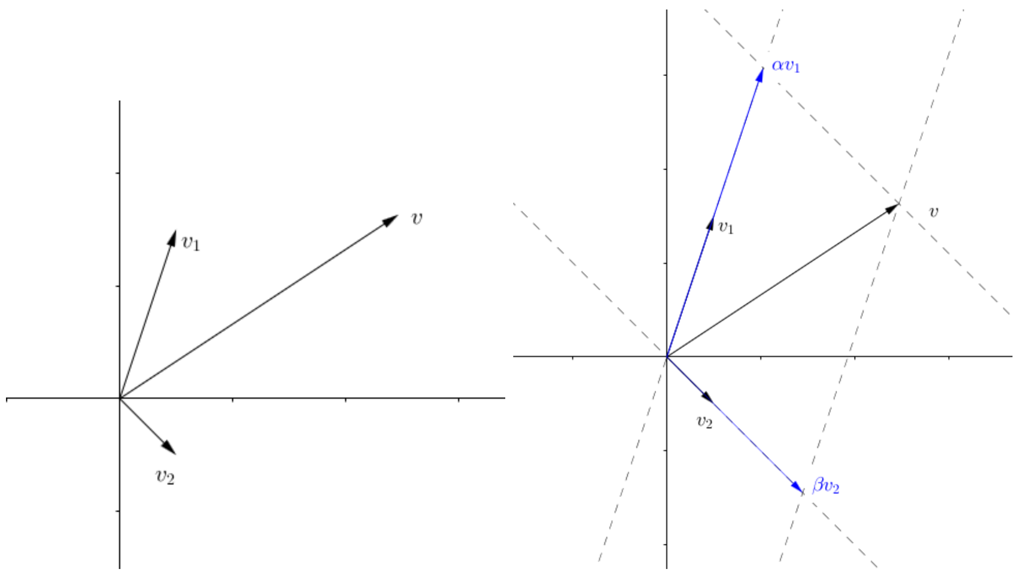
algumas combinações lineares são:

- $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$;
- $4\vec{v}_1 = 4\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 = 4\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$;

- $\vec{v}_2 = 0\vec{v}_1 + 1\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$;
- $0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$.

Geometricamente, qualquer vetor do plano pode ser representado como combinação linear de vetores que não são colineares.

Vamos ilustrar este fato na figura abaixo. Por exemplo, para representar o vetor $\vec{v}$ como combinação linear de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, podemos traçar retas paralelas aos vetores, passando pela origem e pela extremidade do vetor $\vec{v}$, como na figura da direita. Assim, pela interpretação geométrica da soma de vetores (ver início das notas), sabemos que $\vec{v}$ é a soma dos vetores em azul. Mas estes, por construção, são colineares aos vetores iniciais e logo múltiplos destes. Concluimos que



$$\vec{v} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2,$$

isto é, $\vec{v}$ é uma combinação linear de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. $\triangleleft$

De forma mais geral, nós dizemos que um vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$ é combinação linear dos k vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^m$ quando conseguirmos encontrar números reais $x_1, x_2, \ldots, x_k$ tais que

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_k\vec{v}_k = \vec{v}.$$

Nós vamos nos referir a este tipo de equação por **equação vetorial**. Para decidir se um vetor é combinação linear de outros, devemos decidir se existem estes números reais $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Escrevendo em coordenadas:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \\ \vdots \\ v_{m1} \end{bmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \\ \vdots \\ v_{m2} \end{bmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \\ \vdots \\ v_{m3} \end{bmatrix}, \ \cdots, \ \vec{v}_k = \begin{bmatrix} v_{1k} \\ v_{2k} \\ v_{3k} \\ \vdots \\ v_{mk} \end{bmatrix}, \ \vec{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

vemos que encontrar os coeficientes da combinação linear, caso estes existam, equivale a resolver a equação vetorial

$$x_1 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \\ \vdots \\ v_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \\ \vdots \\ v_{m2} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \\ \vdots \\ v_{m3} \end{bmatrix} + \cdots + x_k \begin{bmatrix} v_{1k} \\ v_{2k} \\ v_{3k} \\ \vdots \\ v_{mk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$\begin{bmatrix} v_{11}x_1 + v_{12}x_2 + v_{13}x_3 + \cdots + v_{1k}x_k \\ v_{21}x_1 + v_{22}x_2 + v_{23}x_3 + \cdots + v_{2k}x_k \\ v_{31}x_1 + v_{32}x_2 + v_{33}x_3 + \cdots + v_{3k}x_k \\ \vdots \\ v_{m1}x_1 + v_{m2}x_2 + v_{m3}x_3 + \cdots + v_{mk}x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Mas isto é resolver um sistema linear! Portanto novo conceito está intimamente relacionado com tudo o que já tínhamos visto antes.

O **espaço gerado** por todas as combinações lineares dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ é denotado por $\mathrm{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$.

- Vimos que o conjunto gerado pelos dois vetores do exemplo anterior é o plano inteiro, isto é, $\mathrm{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \mathbb{R}^2$.
- Nota que o vetor nulo sempre pertence ao espaço gerado, assim como todos os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$.
- O conjunto gerado por apenas um vetor não nulo representa uma reta.

3 Sistemas lineares e combinações lineares das colunas

A associação feita acima pode ser resumida como:

Resolver o sistema linear $A\vec{x} = \vec{b}$ equivale a decidir se o vetor $\vec{b}$ é uma combinação linear das colunas de A.

ou ainda

Resolver o sistema linear $A\vec{x} = \vec{b}$ equivale a decidir se o vetor $\vec{b}$ pertence ao espaço gerado pelas colunas de A.

Desta forma, tudo o que já vimos sobre existência de soluções para sistemas lineares pode ser "traduzido" para o contexto de combinações lineares e espaços gerados (faça as traduções!).