# 1

# Semanas 6-7

## 1.1 Espaços vetoriais

Nós vimos que um espaço vetorial (sobre o conjunto $\mathbb{R}$ de escalares) é um conjunto $V$ equipado com as operações de soma de vetores e de multiplicação por escalar e que satisfazem as propriedades usuais dos espaços $\mathbb{R}^n$.

## 1.2 Bases de espaços vetoriais

Uma **base** para um espaço vetorial $V$ é um conjunto $\mathcal{B}$ que:

- gera $V$ e;
- é linearmente independente.

**Exemplo 1.** $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Vimos anteriormente que os vetores

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

formam um conjunto linearmente independentes. E também é verdade que eles geram $\mathbb{R}^n$, pois qualquer vetor pode ser escrito como combinação linear deles:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n.$$

Portanto, o conjunto de $n$ elementos $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$.

Várias propriedades interessantes aparecem naturalmente como consequência da definição de base. Suponhamos que um conjunto $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_d\} \subset V$ seja uma base de um espaço vetorial $V$. Já que $\operatorname{Span} \mathcal{B} = V$, qualquer elemento de $V$ pode ser representado como

$$\vec{v} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_d\vec{v}_d.$$

Além disso, o fato de ser $\mathcal{B}$ um conjunto linearmente independente nos diz que esta forma de representar o vetor $\vec{v}$ é única! De fato, vamos verificar que qualquer outra representação é, na verdade, a mesa que tínhamos acima: se tivermos

$$\vec{v} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \cdots + k_d\vec{v}_d,$$

deveremos também ter

$$(x_1 - k_1)\vec{v}_1 + (x_2 - k_2)\vec{v}_2 + \cdots + (x_d - k_d)\vec{v}_d = \vec{v} - \vec{v} = \vec{0}.$$

Sendo a base $\mathcal{B}$ formada por vetores LI, concluimos que os coeficientes devem ser nulos, isto é, $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \ldots, x_d = k_d$. Portanto,

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Todo vetor pode ser representado de maneira única}\\ \text{como combinação linear dos elementos de uma base.}\end{array}}$$

Uma segunda propriedade que é fundamental é a seguinte:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Toda base de um espaço vetorial fixado}\\ \text{possui o mesmo número de elementos.}\end{array}}$$

*Justificativa.* Se tivéssemos duas bases $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_d\} \subset V$ e $\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k\} \subset V$ de um espaço vetorial $V$ com $k < d$, nós poderíamos escrever os elementos da base $\mathcal{B}_1$ como combinações lineares dos elementos da base $\mathcal{B}_2$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \vec{v}_1 & = & a_{11}\vec{w}_1 + a_{21}\vec{w}_2 + \cdots + a_{k1}\vec{w}_k \\ \vec{v}_2 & = & a_{12}\vec{w}_1 + a_{22}\vec{w}_2 + \cdots + a_{k2}\vec{w}_k \\ & \vdots & \\ \vec{v}_d & = & a_{1d}\vec{w}_1 + a_{2d}\vec{w}_2 + \cdots + a_{kd}\vec{w}_k \end{array}\right.$$

O problema é que, se tivéssemos $k < d$, então a equação

$$b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + \cdots + b_d\vec{v}_d = \vec{0} \tag{1.1}$$

possuiria soluções não triviais, contradizendo o fato de ser $\mathcal{B}_1$ um conjunto linearmente independente. De fato, utilizando que $\mathcal{B}_1$ é linearmente independente, encontrar $b_1, b_2, \ldots, b_k$ na equação (1.1) fica equivalente a resolver

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

que possui soluções não triviais quando $k < d$.

Argumentando de forma parecida, concluimos também que não podemos ter $d < k$. Portanto, $d = k$. $\square$

O número de elementos de uma base de $V$ é chamado de **dimensão** do espaço vetorial $V$. A dimensão de $V$, pelo que vimos até agora, indica o número de parâmetros necessários para representar qualquer vetor de $V$.

Quando um vetor $\vec{v}$ é escrito em termos dos elementos de uma base, é comum utilizarmos a notação

$$\vec{v} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_d\vec{v}_d = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{d-1} \\ x_d \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ ou ainda } [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{d-1} \\ x_d \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 2.** O conjunto

$$\mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = \left\{p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \text{ tais que } a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\right\}$$

de todos os polinômios de grau 3 é um espaço vetorial. Uma base para este espaço pode ser encontrada “de olho”: é fácil ver que o conjunto de polinômios

$$\left\{x^3, x^2, x, 1\right\}$$

gera o espaço $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Para ver que são LI, precisamos verificar que se tivermos

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

então todos os coeficientes devem ser nulos. Isto segue do Teorema Fundamental da Álgebra[1], que diz que todo polinômio não nulo de grau $3$ possui exatamente $3$ raízes complexas; logo, no máximo $3$ raízes reais. Portanto, já que no nosso caso, todos os valores de $x$ reais são raízes, nosso polinômio deve ser o constante igual a zero, de modo que todos os coeficientes são zero.

Concluimos desta maneira que $\mathcal{B} = \{x^3, x^2, x, 1\}$ é uma base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, que consequentemente tem dimensão $4$.

Desta maneira, qualquer elemento de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ pode ser representado por $4$ parâmetros. Por exemplo,

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + 3 \;\rightsquigarrow\; [p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$q(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1 \;\rightsquigarrow\; [q(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Nota que a ordem que escrevemos os elementos de uma base altera as representações $[p]_{\mathcal{B}}$ e $[q]_{\mathcal{B}}$.

**Exemplo 3.** Em um curso de equações diferenciais, se aprende que o conjunto de todas as soluções de uma equação linear de segunda ordem da forma

$$y''(t) + f(x)y'(x) + g(x)y(x) = 0$$

é uma espaço vetorial cuja dimensão é 2. Desta forma, sabendo que $y_1(x) = e^{2x}$ e $y_2(x) = e^{-x}$ satisfazem a equação

$$y''(t) - y'(x) - 2y(x) = 0, \tag{1.2}$$

podemos concluir que todas as soluções desta EDO podem ser escritas como combinação linear destas duas:

$$y(x) \text{ é solução de } (1.2) \iff y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}, \quad \text{para algumas constantes } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

### 1.2.1 Espaço nulo

Vimos que o espaço nulo (núcleo) de uma matriz $A$ de ordem $m \times n$ é o conjunto definido por

$$\operatorname{Nul} A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}.$$

Nas notas da semana passada, vimos também o seguinte exemplo:

**Exemplo 4.** Encontrar uma base para o espaço nulo da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ 6 & -4 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Por escalonamento:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 17 & 5 & 16 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 26/15 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & 8/15 \end{bmatrix} \sim \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{5}x_4 - \frac{2}{5}x_5 \\ x_2 = -\frac{2}{5}x_4 - \frac{26}{15}x_5 \\ x_3 = -\frac{1}{5}x_4 - \frac{8}{15}x_5 \end{cases}$$

[1]Mais geralmente, o Teorema Fundamental da Álgebra afirma que todo polinômio não nulo de grau $n$ possui exatamente $n$ raízes complexas; logo, no máximo $n$ raízes reais.

Logo,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} -2/5 \\ -2/5 \\ -1/5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -2/5 \\ -26/15 \\ -8/15 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

de modo que $\dim \operatorname{Nul} A = 2$ e uma base é

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2/5 \\ -2/5 \\ -1/5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2/5 \\ -26/15 \\ -8/15 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Já que estes vetores são LI, temos uma base para $\operatorname{Nul} A$. $\lhd$

É sempre possível obter uma base para $\operatorname{Nul} A$ desta forma. Enfatizamos esta propriedade abaixo:

> Uma base para $\operatorname{Nul} A$ pode ser encontrada por escalonamento ao resolver o sistema homogêneo associado à matriz $A$. Além disso, a dimensão do espaço nulo é igual ao número de variáveis livres do sistema.

### 1.2.2 Espaço coluna

Vimos também o espaço coluna de uma matriz $A$ de ordem $m \times n$, que é o espaço gerado pelas colunas de $A$:

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \rightsquigarrow \operatorname{Col} A = \operatorname{Span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}.$$

Desta forma, a definição de $\operatorname{Col} A$ já deixa claro um conjunto gerador: as colunas de $A$!. Para determinar uma base, nós devemos "excluir" as colunas que podem ser geradas pelas demais, de modo a obter um conjunto linearmente independente.

> Uma base para $\operatorname{Col} A$ é formada pelas colunas pivô da matriz $A$. Para descobrir quais são as colunas pivô, procedemos por escalonamento. As *colunas da matriz original* formam uma base de $\operatorname{Col} A$. A dimensão do espaço coluna é igual ao número de colunas pivô da matriz.

**Exemplo 5.** Encontrar uma base para o espaço coluna da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ 6 & -4 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Vimos acima que a forma escalonada reduzida de $A$ é

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 26/15 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & 8/15 \end{bmatrix},$$

de modo que todas as colunas pivô são as três primeiras. Porntanto, uma base de $\operatorname{Col} A$ é

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

## 1.3 Teorema do núcleo e da imagem

Nas seções anteriores, vimos que

$$\dim \operatorname{Col} A = \dim \text{ da imagem de } A = \text{ número de colunas pivô e}$$

$$\dim \operatorname{Nul} A = \text{ número de variáveis livres do sistema homogêneo associado.}$$

Ora, mas ou uma coluna é pivô ou sua variável associada é livre, de modo que temos o

**Teorema 6** (Teorema do núcleo e da imagem)**.** *Para qualquer matriz $A$ de ordem $m \times n$, temos*

$$\boxed{\dim \operatorname{Col} A + \dim \operatorname{Nul} A = n = \text{ número de colunas de } A.}$$

**Observação 7.** A dimensão do espaço coluna de $A$ ou, o que é a mesma coisa, dimensão da imagem da transformação linear $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$, é também conhecida na literatura como o **posto de** $A$. Assim, o Teorema do núcleo e da imagem pode ser reenunciado como: Se $A$ é uma matriz $m \times n$, então

$$\operatorname{posto} A + \dim \operatorname{Nul} A = n.$$

**Observação 8.** O teorema afirma que há uma relação entre as dimensões dos espaços coluna e nulo. No entanto, não esqueça que estes são subespaços de universos diferentes! Temos

$$\operatorname{Nul} A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ enquanto que } \operatorname{Col} A \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Apesar da conclusão do teorema parecer simples, é muito útil na análise de sistemas lineares.

**Exemplo 9.** Todo sistema linear de ordem $5 \times 9$ deve possuir um espaço nulo de dimensão $4$ ou mais. De fato, como a matriz associada tem apenas cinco linhas, pode ter no máximo $5$ posições de pivô, de modo que

$$\dim \operatorname{Col} A \leq 5.$$

Portanto

$$\dim \operatorname{Nul} A = 9 - \dim \operatorname{Col} A \geq 9 - 5 = 4.$$

Desta forma, se resolvermos um sistema homogêneo desta ordem e encontrarmos um conjunto solução de dimensão 3, certamente há algum um erro nas contas!

## 1.4 Matriz de mudança de coordenadas

Se conhecemos as coordenadas do vetor $\vec{x}$ em uma base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$:

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + \cdots + b_n\vec{v}_n,$$

podemos obter as coordenadas usuais (na base canônica) de $\vec{x}$ de forma sistemática. Queremos descobrir $x_1, x_2, \dots, x_n$ tais que

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n.$$

Uma maneira é considerar a matriz cujas colunas são os vetores $\vec{v}_i$:

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \cdots & v_{mn} \end{bmatrix}.$$

Funciona porque

$$\begin{aligned} b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + \cdots + b_n\vec{v}_n &= \sum_{j=1}^{n} b_j\vec{v}_j = \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=1}^{n} v_{ij}\vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_j v_{ij}\right)\vec{e}_i \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} b_j v_{1j}\right)\vec{e}_1 + \left(\sum_{j=1}^{n} b_j v_{2j}\right)\vec{e}_2 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{n} b_j v_{nj}\right)\vec{e}_n. \end{aligned}$$

Assim, devemos ter

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 &=& v_{11}b_1 + v_{12}b_2 + \cdots + v_{1n}b_n \\ x_2 &=& v_{21}b_1 + v_{22}b_2 + \cdots + v_{2n}b_n \\ &\vdots& \\ x_n &=& v_{n1}b_1 + v_{n2}b_2 + \cdots + v_{nn}b_n \end{array}\right. \quad \text{i.e} \quad \vec{x} = A[\vec{x}]_{\mathcal{B}}.$$

A matriz $A$ construida como acima é chamada de **matriz de mudança de coordenadas** da base $\mathcal{B}$ para a base usual (canônica) $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$.

A matriz de mudança de coordenadas da base canônica para a base $\mathcal{B}$ pode ser obtida a partir da inversa de $A$:

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = A^{-1} \cdot \vec{x}.$$

**Exemplo 10.** Consideramos a seguinte base para $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Este conjunto é de fato uma base, pois são linearmente independentes e são dois (que é a dimensão de $\mathbb{R}^2$). Sabendo que as coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ nesta base $\mathcal{B}$ são

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad [v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}},$$

encontrar as componentes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ na base canônica $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Pelo que analisamos acima, a matriz de mudança de coordenadas que procuramos é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ e } \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

**Observação 11.** A matriz de mudança de coordenadas é uma forma de trocar de uma base para outra de forma sistemática. Com o intuito de tornar mais intuitiva a construção, vamos repetir a argumentação que fizemos no início desta seção para o caso $2 \times 2$. Na base $\mathcal{B}$ do exemplo anterior, a representação

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ significa que } \vec{v} = b_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Os vetores da base $\mathcal{B}$ são representados na base canônica por

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

Logo,

$$\vec{v} = b_1\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2\right) + b_2\left(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2\right) = (b_1 - b_2)\vec{e}_1 + (b_1 + b_2)\vec{e}_2,$$

de modo que as componentes de $\vec{v}$ na base canônica são

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = b_1 - b_2 \\ x_2 = b_1 + b_2 \end{array}\right. .$$

Em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$