1

Semana 10

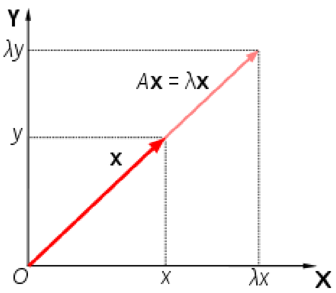
1.1 Autovalores, autovetores e autoespaços associados

Dada uma matriz *quadrada* A de ordem $n \times n$, com entradas reais, nós dizemos que um número $\lambda \in \mathbb{R}$ é um **autovalor** de A quando existe um vetor *não nulo* $\vec{v}$ tal que

$$A\vec{v} = \lambda \vec{v}.$$

Neste caso, $\vec{v}$ é dito um **autovetor** de A associado a λ.

Geometricamente, $\vec{v}$ é um vetor que não muda de direção quando aplicamos a matriz A. No entanto, quando permitimos que λ seja um número complexo, esta interpretação geométrica é perdida.



Ver também animação em wikipedia.org

Exemplo 1. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

Temos que $\lambda_1 = 2$ é um autovalor desta matriz, porque o vetor

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{satisfaz} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, podemos dizer que $\vec{v}_1$ é um autovetor de A associado ao autovalor 2. Pensando de outra maneira, temos que

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{é um autovetor de } A \text{, pois} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \\ 22 \end{bmatrix} = 11 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, concluimos também que 11 é um autovalor de A. $\triangleleft$

Observamos que, se $\vec{v}$ for um autovetor de uma matriz A associado a um autovalor λ, então qualquer múltiplo escalar $\alpha\vec{v}$ também é um autovetor de A associado a λ. Logo, o conjunto de todos os autovetores associados a um autovalor λ, união com o vetor nulo, forma um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, denominado **autoespaço** associado ao autovalor λ:

$$\text{autoespaço associado a } \lambda = \left\{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \,|\, \vec{v} \text{ é autovetor associado a } \lambda\right\} \cup \{\,\vec{0}\,\}.$$

Vamos analisar uma forma de encontrar os autovalores de uma matriz A de forma sistemática. Temos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned}
&\lambda \text{ é um autovalor de } A\\
\iff &\text{existe } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ tal que } A\vec{v} = \lambda\vec{v}\\
\iff &\text{existe } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ tal que } (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}\\
\iff &\text{o sistema homogêneo } (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \text{ admite solução não trivial}\\
\iff &A - \lambda I \text{ não é invertível}\\
\iff &\det(A - \lambda I) = 0.
\end{aligned}$$

Esta última equação pode ser utilizada para encontrar os autovalores: são as raízes do **polinômio característico**

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

A equação $\det(A - \lambda I) = 0$ é também chamada de **equação característica**. Observe, pelas propriedades dos determinantes, que p é de fato um polinômio e tem grau n, que é igual a ordem da matriz A. É assim consequência do Teorema Fundamental da Álgebra que existem no máximo n autovalores reais (já que um polinômio de grau $n \geq 1$ possui exatamente n raízes complexas).

Exemplo 2. Vamos encontrar os autovalores de

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Precisamos calcular

$$\det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(2-\lambda) - 3 \cdot 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 5,$$

que tem raízes

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = 3 \pm 2.$$

Portanto, A tem dois autovalores reais: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 5$.

Exemplo 3. Encontrar os autovalores de

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix}.$$

Precisamos calcular

$$\begin{aligned}
p(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 8 & 16 \\ 4 & 1-\lambda & 8 \\ -4 & -4 & -11-\lambda \end{bmatrix}\\
&= (5-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 \\ -4 & -11-\lambda \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -4 & -11-\lambda \end{vmatrix} + 16 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1-\lambda \\ -4 & -4 \end{vmatrix}\\
&= (5-\lambda)\big[(1-\lambda)(-11-\lambda) + 32\big] - 8\big[-44 - 4\lambda + 32\big] + 16(-16 + 4 - 4\lambda)\\
&= (5-\lambda)\big[\lambda^2 + 10\lambda + 21\big] + 32\lambda + 12 \cdot 8 - 64\lambda - 12 \cdot 16\\
&= -\lambda^3 - 5\lambda^2 + 29\lambda + 105 - 32\lambda - 96\\
&= -\lambda^3 - 5\lambda^2 - 3\lambda + 9.
\end{aligned}$$

As possíveis raízes racionais desse polinômio só podem ser os divisores do termo independente acima: $\pm 1, \pm 3, \pm 9$. Verificamos que 1 é raiz. Logo, dividindo $p(\lambda)$ por $\lambda - 1$:

$$-\lambda^3 - 5\lambda^2 - 3\lambda + 9 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 6\lambda + 9) = -(\lambda - 1)(\lambda + 3)^2.$$

Portanto, os autovalores de A são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$. Observamos que 3 é uma raiz de multiplicidade 2 do polinômio característico. $\lhd$

O problema deste método de encontrar os autovalores é que nem sempre é fácil encontrar raízes de polinômios. De fato, encontrar raízes de polinômios pode ser bem complicado mesmo quando o grau do polinômio é baixo.

Por outro lado, uma vez que os autovalores são conhecidos, encontrar os autovetores é um cálculo direto: basta resolver o sistema linear homogêneo

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}.$$

Isto é outra forma de dizer que o autoespaço associado a λ é o espaço nulo $\operatorname{Nul}(A - \lambda I)$. Vejamos como faríamos isto nos exemplos anteriores.

Exemplo 4 (de volta ao Exemplo 2)**.** Para encontrar os autovetores de

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

associados com o autovalor $\lambda_1 = 1$, vamos resolver o sistema homogêneo:

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Já que o sistema é homogêneo, não é necessário escrever a última coluna de zeros na matriz aumentada associada (no entanto, é necessário lembrar que há uma coluna de zeros). Escalonando

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} v_1 + v_2 = 0 \\ 1 \text{ variável livre.} \end{cases}$$

Em forma vetorial paramétrica:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = v_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \operatorname{Nul}(A - I) = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Para encontrar os autovetores associados a $\lambda_2 = 5$, resolvemos

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} v_1 - 3v_2 = 0 \\ 1 \text{ variável livre.} \end{cases}$$

Em forma vetorial paramétrica:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3v_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = v_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \operatorname{Nul}(A - 5I) = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Exemplo 5 (de volta ao Exemplo 3)**.** Vamos encontrar os autovetores de

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix}.$$

- associados com o autovalor $\lambda_1 = 1$, vamos resolver o sistema homogêneo:

$$\begin{bmatrix} 5-\lambda_1 & 8 & 16 \\ 4 & 1-\lambda_1 & 8 \\ -4 & -4 & -11-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por escalonamento,

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 16 \\ 4 & 0 & 8 \\ -4 & -4 & -12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -8 & -8 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} v_1 + 2v_3 = 0 \\ v_2 + v_3 = 0 \\ v_3 \text{ livre} \end{cases}$$

Em forma paramétrica, os autovetores são

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2v_3 \\ -v_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \text{Nul}(A - I) = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

- associados com o autovalor $\lambda_2 = -3$, vamos resolver o sistema homogêneo:

$$\begin{bmatrix} 5-\lambda_2 & 8 & 16 \\ 4 & 1-\lambda_2 & 8 \\ -4 & -4 & -11-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por escalonamento,

$$\begin{bmatrix} 8 & 8 & 16 \\ 4 & 4 & 8 \\ -4 & -4 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} v_1 + v_2 + 2v_3 = 0 \\ \text{2 variáveis livres} \end{cases}$$

Em forma paramétrica, os autovetores são

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_2 - 2v_3 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \text{Nul}(A - I) = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \triangleleft$$

Observamos que, nos exemplos anteriores, a dimensão do autoespaço associado ficou igual à multiplicidade do autovalor. **Isto nem sempre é verdade**. Como exercício, verifique que a dimensão do autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 1$ da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é igual a 1, embora a multiplicidade do autovalor seja 2.

De forma geral, chamamos a multiplicidade do autovalor de **multiplicidade algébrica**, enquanto que a dimensão do autoespaço associado é chamada de **multiplicidade geométrica**.

1.2 Diagonalização

Matrizes diagonais são matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Já que são triangulares, seus autovalores são os elementos da diagonal principal. Observamos também que os autovetores associados são os elementos da base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Na realidade, sempre que é possível formar uma base do espaço $\mathbb{R}^n$ apenas com autovetores, é possível fazer uma mudança de bases de modo que a representação da matriz é diagonal, com os autovalores na diagonal principal. De fato, montando uma matriz P com os autovetores

$$P = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \implies P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Exemplo 6 (de volta ao Exemplo 3)**.** Vimos que, para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix},$$

temos autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -3$ e autoespaços associados:

$$\mathrm{Nul}(A - I) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}; \qquad \mathrm{Nul}(A - I) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Montamos a matriz

$$P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por escalonamento, podemos calcular a matriz inversa

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

e temos

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 6 \\ -3 & -3 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}. \lhd \end{aligned}$$

Nem todas as matrizes são diagonalizáveis, como acima. Já vimos que isto é possível quando uma base de autovetores existe. No exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

não há dois autovetores linearmente independentes e, portanto, não é possível diagonalizar a matriz A.

Em geral, valem as seguintes propriedades: seja A uma matriz de orden $n \times n$. Então:

- Se A possui n autovalores reais distintos, então A possui uma base de autovetores e é diagonalizável, pois possui um autovetor associado a cada um dos seus autovalores distintos.
- No caso de A possuir autovalores reais com multiplicidade maior do que 1, A apenas será diagonalizável se cada autovalor de multiplicidade k tiver k autovetores linearmente independentes. Em outras palavras, só será possível formar uma base de autovetores de A quando
$$\dim \mathrm{Nul}(A - \lambda I) = \text{ multiplicidade do autovalor } \lambda.$$
- Caso $\dim \mathrm{Nul}(A - \lambda I)$ seja menor do que a multiplicidade do autovalor λ ou A possua autovalores complexos, então A não é diagonalizável.

Exemplo 7. A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

tem polinômio característico

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

cujas raízes são $\lambda = \dfrac{4 \pm 3i}{2}$. Logo, A não é diagonalizável.