Un número de cuatro cifras $YEAR$ es denominado *muy bueno* si el siguiente sistema de ecuaciones en las variables x, y, z y w tiene al menos dos soluciones:

$$\begin{cases} Yx + Ey + Az + Rw &= Y \\ Rx + Yy + Ez + Aw &= E \\ Ax + Ry + Yz + Ew &= A \\ Ex + Ay + Rz + Yw &= R \end{cases}$$

Encuentra todos los números $YEAR$ *muy buenos* del siglo XXI (es decir, desde 2001 hasta 2100, ambos inclusive).

Solución:

Sean las siguientes matrices:

$$M = \begin{pmatrix} Y & E & A & R \\ R & Y & E & A \\ A & R & Y & E \\ E & A & R & Y \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} Y \\ E \\ A \\ R \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones lineales $MX = N$ tiene una única solución si y solo si $\det(M) \neq 0$. El sistema puede tener más de una solución (de hecho, infinitas) si $\det(M) = 0$ y además $\operatorname{rank}(M) = \operatorname{rank}(M|N)$. También podría ocurrir que el sistema no tuviera solución, cuando $\operatorname{rank}(M) < \operatorname{rank}(M|N)$. Esto se debe al teorema de Rouché-Frobenius.

Los casos que interesan son los que hacen que $\det(M) = 0$ y $\operatorname{rank}(M) = \operatorname{rank}(M|N)$. Se puede apreciar que los años del siglo XXI cumplen que $Y = 2$ en todos los casos, y que $E = 0$, salvo en el año 2100. Este caso se puede comprobar de manera particular:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$$

Visto esto, se descarta el año 2100, entonces se puede asegurar que $Y = 2$ y $E = 0$. Ahora se calcula el determinante de la matriz de coeficientes en función de A y R:

$$
\begin{aligned}
\det(M) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & A & R \\ R & 2 & 0 & A \\ A & R & 2 & 0 \\ 0 & A & R & 2 \end{vmatrix} &= (2+A+R) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ R & 2 & 0 & A \\ A & R & 2 & 0 \\ 0 & A & R & 2 \end{vmatrix} \\
&= (2+A+R) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ R & 2-R & -R & A-R \\ A & R-A & 2-A & -A \\ 0 & A & R & 2 \end{vmatrix} \\
&= (2+A+R) \begin{vmatrix} 2-R & -R & A-R \\ R-A & 2-A & -A \\ A & R & 2 \end{vmatrix} \\
&= (2+A+R) \begin{vmatrix} 2+A-R & 0 & 2+A-R \\ R-A & 2-A & -A \\ A & R & 2 \end{vmatrix} \\
&= (2+A+R)(2+A-R) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ R-A & 2-A & -A \\ A & R & 2 \end{vmatrix} \\
&= (2+A+R)(2+A-R) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ R-A & 2-A & -R \\ A & R & 2-A \end{vmatrix} \\
&= (2+A+R)(2+A-R) \begin{vmatrix} 2-A & -R \\ R & 2-A \end{vmatrix} \\
&= (2+A+R)(2+A-R)\left((2-A)^2+R^2\right)
\end{aligned}
$$

Se puede ver que $\det(M) = 0$ si alguno de los tres factores de la expresión es nula. El primer factor $(2+A+R) \geqslant 2$, ya que $0 \leqslant A, R \leqslant 9$. El segundo factor se anula cuando $A = R-2$, por lo que $R \geqslant 2$. Estos casos son los años $2002, 2013, \ldots, 2079$. Y el tercer factor se anula cuando $A = 2$ y $R = 0$, es decir, solo el año 2020.

Vistos estos valores que anulan el determinante de la matriz de coeficientes, ahora hay que verificar que $\operatorname{rank}(M) = \operatorname{rank}(M|N)$. El tercer caso, al ser un único caso puede ser comprobado de manera particular:

$$
(M|N) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

Como $\operatorname{rank}(M) = \operatorname{rank}(M|N) = 2$, el año 2020 es un año *muy bueno*.

Y para el segundo caso, se han de calcular los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada en función de R:

$$(M|N) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & R-2 & R & 2 \\ R & 2 & 0 & R-2 & 0 \\ R-2 & R & 2 & 0 & R-2 \\ 0 & R-2 & R & 2 & R \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} R & R & R & R & R \\ R & 2 & 0 & R-2 & 0 \\ R-2 & R & 2 & 0 & R-2 \\ 0 & R-2 & R & 2 & R \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-R & -R & -2 & -R \\ 0 & 2 & 4-R & 2-R & 0 \\ 0 & R-2 & R & 2 & R \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-R & -R & -2 & -R \\ 0 & R & 4 & 4-R & R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2-\frac{R}{2} & 1-\frac{R}{2} & 0 \\ 0 & R & 4 & 4-R & R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2-\frac{R}{2} & 1-\frac{R}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4-2R+\frac{R^2}{2} & 4-2R+\frac{R^2}{2} & R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como $4-2R+\dfrac{R^2}{2} \neq 0$ para valores de R enteros entre 2 y 9, se tiene que $\operatorname{rank}(M) = \operatorname{rank}(M|N) = 3$.

En conclusión, los años *muy buenos* del siglo XXI son: 2002, 2013, 2020, 2024, 2035, 2046, 2057, 2068 y 2079.