¿Existe algún cuerpo tal que su grupo multiplicativo es isomorfo a su grupo sumativo?

Solución:

Suponiendo que existe tal cuerpo $\mathbb{F}$, se puede definir un isomorfismo entre sus grupos multiplicativo y sumativo. Sea $f : \mathbb{F}^* \to \mathbb{F}^+$.

Al ser el isomorfismo un homomorfismo biyectivo (inyectivo y sobreyectivo) entre grupos, el elemento neutro de $\mathbb{F}^*$ se mapea con el elemento neutro de $\mathbb{F}^+$, cumpliéndose que $f(1) = 0$ y que $1 = f^{-1}(0)$.

Además, se sabe que el homomorfismo conserva la estructura de ambos grupos, luego $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$.

Sabiendo que $(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$, se tiene que

$$f(1) = f((-1)^2) = f((-1) \cdot (-1)) = f(-1) + f(-1) = 2f(-1) = 0$$

Entonces, o bien $f(-1) = 0$, o bien la característica del cuerpo es 2 ($\operatorname{char}(\mathbb{F}) = 2$).

Se sabe que $f(-1) \neq 0$ porque si lo fuera, la aplicación f no sería inyectiva (ya que $f(\pm 1) = 0$). Entonces se tiene que $\operatorname{char}(\mathbb{F}) = 2$ y el cuerpo $\mathbb{F}$ es finito.

No obstante, existe un único cuerpo finito de característica 2 (cuerpo de 2 elementos), que es $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$, cuyos grupos sumativos y multiplicativos son $\mathbb{F}_2^+ = \{0, 1\}$ y $\mathbb{F}_2^* = \{1\}$, que no son isomorfos.

Entonces, no existe ningún cuerpo cuyos grupos sumativo y multiplicativo sean isomorfos.