Sean A y B matrices reales $n \times n$ tales que

$$\operatorname{rank}(AB - BA + I) = 1$$

donde I es la matriz identidad $n \times n$. Prueba que

$$\operatorname{tr}(ABAB) - \operatorname{tr}(A^2B^2) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

Solución:

Utilizando algunas propiedades de la traza de dos matrices, como que $\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX)$ y que $\operatorname{tr}(X) + \operatorname{tr}(Y) = \operatorname{tr}(X+Y)$, se tiene que la expresión a demostrar queda como:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(ABAB) - \operatorname{tr}(A^2B^2) &= \frac{1}{2}\big(2\ \operatorname{tr}(ABAB) - 2\ \operatorname{tr}(A^2B^2)\big) = \\
&= \frac{1}{2}(\operatorname{tr}(ABAB) + \operatorname{tr}(ABAB) - \operatorname{tr}(AABB) - \operatorname{tr}(AABB)) = \\
&= \frac{1}{2}(\operatorname{tr}(ABAB) + \operatorname{tr}(A(BAB)) - \operatorname{tr}(A(ABB)) - \operatorname{tr}((AAB)B)) = \\
&= \frac{1}{2}(\operatorname{tr}(ABAB) + \operatorname{tr}((BAB)A) - \operatorname{tr}((ABB)A) - \operatorname{tr}(B(AAB))) = \\
&= \frac{1}{2}(\operatorname{tr}(ABAB) + \operatorname{tr}(BABA) - \operatorname{tr}(ABBA) - \operatorname{tr}(BAAB)) = \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{tr}(ABAB + BABA - ABBA - BAAB) = \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{tr}((AB - BA)^2)
\end{aligned}$$

Sean $M = AB - BA + I$ y $N = M - I = AB - BA$.

De la condición $\operatorname{rank}(M) = \operatorname{rank}(AB - BA + I) = 1$ se obtiene que o bien todos los autovalores de M son nulos con multiplicidad $n-1$, o bien existe un único autovalor no nulo (con multiplicidad 1 y el resto de autovalores nulos con multiplicidad $n-1$).

Como ocurre que

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}(M) &= \operatorname{tr}(AB - BA + I) = \\
&= \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) + \operatorname{tr}(I) = \\
&= \operatorname{tr}(I) = n
\end{aligned}
$$

se tiene que M tiene un único autovalor no nulo con valor n y el resto de autovalores son nulos. Por tanto, el espectro de M es $\sigma(M) = \{0, n\}$.

Como $N = M - I$, el espectro de N es $\sigma(N) = \{-1, n-1\}$, y el espectro de N^2 es $\sigma(N^2) = \{1, (n-1)^2\}$.

Nótese que $\operatorname{tr}(ABAB) - \operatorname{tr}(A^2B^2) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}((AB-BA)^2) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(N^2)$. Y se sabe que la traza de N^2 es la suma de sus autovalores, por tanto:

$$\operatorname{tr}(N^2) = 1 \cdot (n-1) + (n-1)^2 = n(n-1)$$

Y por tanto, queda demostrado que

$$\operatorname{tr}(ABAB) - \operatorname{tr}(A^2B^2) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}((AB-BA)^2) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(N^2) = \frac{1}{2}n(n-1)$$