Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real. Demostrar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si f es continua y también $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$, entonces f es monótona.

b) Si f es monótona y también $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$, entonces f es continua.

c) Si f es continua y monótona, entonces $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Solución:

Para el caso a) es sencillo encontrar un contraejemplo. Una función polinómica de grado impar, como por ejemplo $f(x) = x^3 - x$, es continua, y también cumple que $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$; sin embargo, no es monótona, ya que $f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, lo cual quiere decir que $f(x)$ es estrictamente decreciente para $x \in \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$, y creciente para el resto de valores de x. Y por tanto, no es monótona.

El caso b) es correcto, porque si f es monótona, en el momento en que se quiera probar que f no es continua, deberá haber una discontinuidad inevitable (de salto). Pero entonces ya no se cumpliría que $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$. Por tanto, el caso b) es cierto.

Para el caso c) también se puede hallar un contraejemplo. Por ejemplo, $f(x) = e^x$ es una función continua y monótona, ya que $f'(x) = e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. No obstante, como también $f(x) > 0$, se tiene que $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^+ \neq \mathbb{R}$.