Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números positivos tal que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2n-1} = 1$. Prueba que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{x_n}{k^2} \leqslant 2$$

Solución:

Operando la expresión anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{x_n}{k^2} &= x_1 + \frac{x_1 + x_2}{2^2} + \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3^2} + \dots \\
&= x_1 \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right) + x_2 \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right) + x_3 \left(\frac{1}{3^3} + \dots\right) + \dots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)
\end{aligned}$$

Se puede encontrar una expresión similar con el primer sumatorio:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2n-1} = 1 \iff \sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n \cdot \frac{2}{2n-1}\right) = 2$$

Con esto, se puede llegar a que

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{x_n}{k^2} \leqslant 2 \\
\iff &\sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n \cdot \frac{2}{2n-1}\right) \\
\iff &\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{2}{2n-1}, \forall n
\end{aligned}$$

Se puede demostrar que esta desigualdad entre sucesiones es cierta mediante la regla del sandwich. Para ello, se usa la sucesión $\dfrac{1}{2n-1}$ como minorante, de manera que:

$$\frac{1}{2n-1} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{2}{2n-1}$$

$n = 1$:

$$1 \leqslant \frac{\pi^2}{6} \leqslant 2 \iff 6 \leqslant \pi^2 \leqslant 12$$

$n \to \infty$:

$$0 \leqslant 0 \leqslant 0$$

Tambien se puede ver que

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}} = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{k - \frac{1}{2}} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{n - \frac{1}{2}} - \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k + \frac{1}{2}} = \frac{2}{2n-1}$$

Sabiendo que estas tres sucesiones utilizadas para la regla del sándwich son de números positivos, decrecientes y acotadas, se puede asegurar que se cumple la desigualdad anterior, con lo que se demuestra que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{x_n}{k^2} \leqslant 2$$