Sea f un polinomio de segundo grado con coeficientes enteros tal que $f(k)$ es divisible por 5 para todo número entero k. Prueba que todos los coeficientes de f son divisibles por 5.

Solución:

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{Z}$. En primer lugar se ve que

$$f(0) = c \equiv 0 \pmod{5} \iff c = 5n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Entonces $f(x) \equiv ax^2 + bx \pmod{5}$. Por otro lado, se ve que

$$f(1) = a + b + c \equiv a + b \pmod{5}$$

$$f(-1) = a - b + c \equiv a - b \pmod{5}$$

Como se sabe que $5|f(1)$ y $5|f(-1)$, se cumple que $5|(f(1) + f(-1))$ y también se cumple que $5|(f(1) - f(-1))$. Por tanto

$$f(1) + f(-1) = 2a + 2c \equiv 2a \equiv 0 \pmod{5} \iff a = 5l, \quad l \in \mathbb{Z}$$

$$f(1) - f(-1) = 2b \equiv 0 \pmod{5} \iff b = 5m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

Y entonces, el polinomio queda como

$$f(x) = (5l)x^2 + (5m)x + (5n), \quad l, m, n \in \mathbb{Z}$$

Y queda demostrado que si $5|f(k)$ para cualquier k entero, entonces los coeficientes de f son divisibles entre 5.

Otra forma de demostrarlo es considerar el polinomio sobre el cuerpo $\mathbb{F}_5$. Entonces, para $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ se tiene que $f(k) \equiv 0 \pmod{5}$. Esto quiere decir que f tiene 5 raíces, pero es de grado 2. Por tanto, se sigue que $f \equiv 0 \pmod{5}$, que es equivalente a decir que los coeficientes del polinomio son divisibles entre 5.