Sea $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable tal que

$$2f'(x) + xf''(x) \geqslant 1$$

Demostrar que

$$\int_{-1}^{1} xf(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{3}$$

Solución:

Sea $g(x) = xf(x) - \dfrac{x^2}{2}$. Se cumple que

$$g''(x) = \left(xf(x) - \frac{x^2}{2}\right)'' = (f(x) + xf'(x) - x)' = 2f'(x) + xf''(x) - 1 \geqslant 0$$

Entonces, la función g es convexa. Ahora, se ve que

$$\int_{-1}^{1} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left(g(x) + \frac{x^2}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x$$

Si se aproxima la función g por la recta tangente en $x = 0$, se tiene que $g(x) \approx g(0) + g'(0) \cdot x = ax$, siendo $a = g'(0)$, de hecho, se cumplirá que $g(x) \geqslant ax$, porque g es convexa. Entonces

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{-1}^{1} ax\,\mathrm{d}x = 0$$

Y, por tanto, se demuestra que

$$\int_{-1}^{1} xf(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{3}$$