Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que g es diferenciable. Estas funciones satisfacen que $(f(0) - g'(0)) \cdot (g'(1) - f(1)) > 0$. Demuestra que existe un punto $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = g'(c)$.

Solución:

Sea $h(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - g(x)$.

Se tiene que h es una función continua. Y $h'(x) = f(x) - g'(x)$. Por el teorema de los valores intermedios para derivadas (propiedad de Darboux), $h'(x)$ toma todos los valores comprendidos entre $h'(0)$ y $h'(1)$.

La condición $(f(0) - g'(0)) \cdot (g'(1) - f(1)) > 0$ es equivalente a que $-h'(0) \cdot h'(1) > 0$. De esta condición se ve que $h'(0)$ y $h'(1)$ tienen signos opuestos, y por tanto, tiene que existir un punto $c \in (0, 1)$ tal que $h'(c) = 0$, es decir que $f(c) = g'(c)$.