Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Suponga que f tiene infinitos ceros, pero no existe ningún $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = f'(x) = 0$.

a) Probar que $f(a) \cdot f(b) = 0$.

b) Encontrar un ejemplo de una función con estas características en $[0, 1]$.

Solución:

Como la función f tiene infinitos ceros, se puede escoger una sucesión z_n, de tal manera que $f(z_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, z_n contiene una subsecuencia que es convergente, ya que z_n está acotada entre a y b.

Sea $c = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$. Tiene que ocurrir que $c = a$ o que $c = b$, de manera que $f(c) = f(a) = 0$, o bien $f(c) = f(b) = 0$, y así se cumpliría que $f(a)\cdot f(b) = 0$. Primeramente, se supone que $c \neq a, b$. Entonces:

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n) - f(c)}{z_n - c} = \lim_{n\to\infty} \frac{0 - 0}{z_n - c} = 0$$

Esto lleva a una contradicción con el enunciado, porque no existe ningún $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = f'(x) = 0$. Entonces queda demostrado que $c = a$, o bien $c = b$, y por consiguiente que $f(a) \cdot f(b) = 0$.

En el intervalo $[0, 1]$, una función con estas características puede ser:

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Esta función cumple que $f(0) \cdot f(1) = 0$, porque $f(0) = 0$. También tiene infinitos ceros en $(0, 1)$, ya que:

$$f(x) = 0 \iff x \text{ sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \iff \frac{1}{x} = k\pi \iff x = \frac{1}{k\pi} \leqslant \frac{1}{\pi} < 1,\ k \in \mathbb{N}$$

Y, por último, se tiene que $f'(x) = \text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x} \cdot \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Como las funciones seno y coseno no se anulan a la vez en ningún punto, se verificará que no existe $x \in (0, 1)$ tal que $f(x) = f'(x) = 0$.