Sean A y B dos matrices cuadradas complejas del mismo tamaño tales que $\operatorname{rank}(AB - BA) = 1$. Demuestra que $(AB - BA)^2 = 0$.

Solución:

Sea $M = AB - BA$, y sea J la forma canónica de Jordan de la matriz M. Entonces, se cumple que $\operatorname{rank}(M) = \operatorname{rank}(J) = 1$. Esto implica que o bien todos los autovalores de M son nulos, excepto uno; o bien que todos los autovalores son nulos, pero con $\dim(\ker(M)) = n-1$, siendo n el orden de las matrices A y B. Estas dos alternativas son:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Se ve fácilmente que la primera opción no es válida porque $\operatorname{tr}(M) = \operatorname{tr}(J) = \lambda \neq 0$. Como $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, entonces $\operatorname{tr}(M) = \operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0$.

Por tanto, la única opción es la segunda. Se verifica que $J^2 = 0$, ya que J tiene una submatriz 2×2 que es nilpotente. Y con esto queda demostrado que para cualesquiera matrices complejas A y B que cumplan que $\operatorname{rank}(AB - BA) = 1$, se cumplirá también que $(AB - BA)^2 = 0$.