Encuentra todas las funciones  $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$  continuas y derivables dos veces que cumplen que

$$f''(x)f(x) \geqslant 2(f'(x))^2$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ 

## Solución:

Se puede ver que la desigualdad del enunciado forma parte de una derivada. Por ejemplo, al derivar la siguiente función:

$$g = \frac{1}{f} \Longrightarrow g'' = \left(\frac{1}{f}\right)'' = \left(\frac{-f'}{f^2}\right)' = \frac{-f''f^2 + 2f(f')^2}{f^4} = \frac{2(f')^2 - f''f}{f^3}$$

Sabiendo que  $2(f'(x))^2 - f''(x)f(x) \le 0$ , se tiene que

$$\frac{2(f')^2 - f''f}{f^3} \leqslant 0 \Longrightarrow g'' \leqslant 0$$

Por lo que la función g es cóncava para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Entonces, para cualquier conjunto de valores a < b, u < a y b < v, se cumple que

$$\frac{g(a) - g(u)}{a - u} \geqslant \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \geqslant \frac{g(v) - g(b)}{v - b}$$

Tomando límites en la expresión anterior cuando  $u \to -\infty$  y  $v \to +\infty$ , se sigue que

$$0 \geqslant \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \geqslant 0$$

Como  $g = \frac{1}{f}$  es una función estrictamente positiva para todo  $x \in \mathbb{R}$ , la única posibilidad es que g(a) = g(b) para cualquier  $a, b \in \mathbb{R}$ . Entonces, g es constante y por tanto f también. Y de aquí se deduce que las únicas funciones que cumplen la desigualdad del enunciado son las funciones constantes positivas, del tipo f(x) = C, con C > 0.