

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $(f(x))^n$ es un polinomio para todo $n \geq 2$. Entonces, ¿se cumple que f es un polinomio?

Solución:

La respuesta es: sí.

Sea $\frac{f^3}{f^2} = \frac{p}{q}$ una función racional irreducible con p y q dos polinomios. Entonces $\frac{p^2}{q^2}$ también es irreducible, y se cumple que $\frac{p^2}{q^2} = \left(\frac{f^3}{f^2}\right)^2 = f^2$. Como f^2 es un polinomio, se tiene que q es constante (ya que q^2 lo es).

Por tanto, $f = \frac{f^3}{f^2} = \frac{p}{q}$ es un polinomio p entre una constante q , de donde está claro que f es un polinomio.