

Sean  $A$  y  $B$  matrices reales  $n \times n$  tales que

$$\text{rank}(AB - BA + I) = 1$$

donde  $I$  es la matriz identidad  $n \times n$ . Prueba que

$$\text{tr}(ABAB) - \text{tr}(A^2B^2) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

**Solución:**

Utilizando algunas propiedades de la traza de dos matrices, como que  $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$  y que  $\text{tr}(X) + \text{tr}(Y) = \text{tr}(X + Y)$ , se tiene que la expresión a demostrar queda como:

$$\begin{aligned} \text{tr}(ABAB) - \text{tr}(A^2B^2) &= \\ &= \frac{1}{2} (2 \text{tr}(ABAB) - 2 \text{tr}(A^2B^2)) = \\ &= \frac{1}{2} (\text{tr}(ABAB) + \text{tr}(ABAB) - \text{tr}(AABB) - \text{tr}(AABB)) = \\ &= \frac{1}{2} (\text{tr}(ABAB) + \text{tr}(A(BAB)) - \text{tr}(A(ABB)) - \text{tr}((AAB)B)) = \\ &= \frac{1}{2} (\text{tr}(ABAB) + \text{tr}((BAB)A) - \text{tr}((ABB)A) - \text{tr}(B(AAB))) = \\ &= \frac{1}{2} (\text{tr}(ABAB) + \text{tr}(BABA) - \text{tr}(ABBA) - \text{tr}(BAAB)) = \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}(ABAB + BABA - ABBA - BAAB) = \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}((AB - BA)^2) \end{aligned}$$

Sean  $M = AB - BA + I$  y  $N = M - I = AB - BA$ .

De la condición  $\text{rank}(M) = \text{rank}(AB - BA + I) = 1$  se obtiene que o bien todos los autovalores de  $M$  son nulos con multiplicidad  $n - 1$ , o bien existe un único autovalor no nulo (con multiplicidad 1 y el resto de autovalores nulos con multiplicidad  $n - 1$ ).

Como ocurre que

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(M) &= \operatorname{tr}(AB - BA + I) = \\ &= \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) + \operatorname{tr}(I) = \\ &= \operatorname{tr}(I) = n\end{aligned}$$

se tiene que  $M$  tiene un único autovalor no nulo con valor  $n$  y el resto de autovalores son nulos. Por tanto, el espectro de  $M$  es  $\sigma(M) = \{0, n\}$ .

Como  $N = M - I$ , el espectro de  $N$  es  $\sigma(N) = \{-1, n - 1\}$ , y el espectro de  $N^2$  es  $\sigma(N^2) = \{1, (n - 1)^2\}$ .

Nótese que  $\operatorname{tr}(ABAB) - \operatorname{tr}(A^2B^2) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}((AB - BA)^2) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(N^2)$ . Y se sabe que la traza de  $N^2$  es la suma de sus autovalores, por tanto:

$$\operatorname{tr}(N^2) = 1 \cdot (n - 1) + (n - 1)^2 = n(n - 1)$$

Y por tanto, queda demostrado que

$$\operatorname{tr}(ABAB) - \operatorname{tr}(A^2B^2) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}((AB - BA)^2) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(N^2) = \frac{1}{2} n(n - 1)$$