Sea la siguiente sucesión:

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, ...\}$$

Encuentra todos los pares de valores reales positivos (α, β) tales que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n^\alpha} = \beta$.

Solución:

Sea m el número de términos iguales a 1 presentes en la sucesión. Con esto, se puede escribir el sumatorio como:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = m \cdot 1 + (m-1)\cdot 2 + (m-2)\cdot 3 + \cdots = \sum_{k=1}^{m} (m-k+1)\cdot k$$

$$\sum_{k=1}^{m} (m-k+1)\cdot k = (m+1)\cdot \sum_{k=1}^{m} k - \sum_{k=1}^{m} k^2 = (m+1)\cdot \frac{m\cdot(m+1)}{2} - \frac{2m^3+3m^2+m}{6}$$

Por otro lado, la relación entre m y n es

$$n = \sum_{k=1}^{m} k = \frac{m\cdot(m+1)}{2}$$

Y el límite, utilizando la variable m, quedaría como:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n^\alpha} &= \lim_{m\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} a_k}{\left(\frac{m\cdot(m+1)}{2}\right)^\alpha} = \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{(m+1)\cdot \frac{m\cdot(m+1)}{2} - \frac{2m^3+3m^2+m}{6}}{\left(\frac{m\cdot(m+1)}{2}\right)^\alpha} = \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{\frac{m^3}{2} - \frac{m^3}{3}}{\frac{m^{2\alpha}}{2^\alpha}} = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{2^{\alpha-1}}{3} m^{3-2\alpha}\right) = \beta
\end{aligned}$$

Como $\beta \in \mathbb{R}^+$, tiene que ocurrir que $3 - 2\alpha = 0$ para que el límite sea un valor positivo. Si no fuera así, el límite valdría 0 ó ∞. Entonces, la única posibilidad es $\alpha = \dfrac{3}{2}$ y $\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.