Sea $f(x) = x^2 + bx + c$, donde b y c son números reales, y sea

$$M = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| < 1\}$$

Claramente, el conjunto M consiste en un conjunto vacío o en dos intervalos disjuntos. Se denota la suma de sus longitudes como $|M|$. Prueba que $|M| \leqslant 2\sqrt{2}$.

Solución:

Se puede expresar f como $f(x) = \left(x + \dfrac{b}{2}\right)^2 + d$, con $d = c - \dfrac{b^2}{4}$. Y así, se ve que $f(x) \geqslant d$.

Si $d \geqslant 1$, se tiene que $M = \varnothing$ y entonces $|M| = 0$, ya que $f(x) \geqslant 1$.

Si $-1 < d < 1$, entonces

$$|f(x)| < 1 \iff -1 < f(x) < 1 \iff -1 < \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + d < 1 \iff$$
$$\iff \left|x + \frac{b}{2}\right| < \sqrt{1-d}$$

Se tiene $M = \left(-\frac{b}{2} - \sqrt{1-d}, -\frac{b}{2} + \sqrt{1-d}\right)$, luego $|M| = 2\sqrt{1-d} < 2\sqrt{1-(-1)} = 2\sqrt{2}$.

Por último, si $d \leqslant 1$, se ve que

$$-1 < \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + d < 1 \iff \sqrt{|d|-1}\left|x + \frac{b}{2}\right| < \sqrt{|d|+1}$$

Y entonces $M = (-\sqrt{|d|+1}, -\sqrt{|d|-1}) \cup (\sqrt{|d|-1}, \sqrt{|d|+1})$, y se cumple que

$$|M| = (\sqrt{|d|+1} - \sqrt{|d|-1}) + (\sqrt{|d|+1} - \sqrt{|d|-1}) = 2(\sqrt{|d|+1} - \sqrt{|d|-1}) =$$
$$= 2\frac{(|d|+1) - (|d|-1)}{\sqrt{|d|+1} + \sqrt{|d|-1}} = \frac{4}{\sqrt{|d|+1} + \sqrt{|d|-1}} < \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$