Determina todos los números complejos λ para los que existe un número natural n y una matriz real $A_{n\times n}$ tal que $A^2 = A^T$ y λ es autovalor de A.

Solución:

Como $A^2 = A^T$, se tiene que $|A^2| = |A^T|$ y que $\operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}(A^T)$.

Además, se sabe que el determinante de una matriz es igual al producto de sus autovalores; y que su traza, es la suma de los autovalores.

Por otro lado, si λ es autovalor de A, λ será también autovalor de A^T; y λ^2 será autovalor de A^2.

Utilizando las siguientes propiedades del determinante:

$$|A^2| = |A|^2$$
$$|A^T| = |A|$$

Se puede deducir que:

$$|A^2| = |A^T| \iff |A|^2 = |A| \iff |A| \cdot \big(|A| - 1\big) = 0$$

$$|A| = \{0, 1\} \Longrightarrow \prod_{k=1}^{n} \lambda_k = \{0, 1\}$$

Del mismo modo, de la traza de las matrices se obtiene lo siguiente:

$$\operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}(A^T) \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$$

Uniendo estas condiciones, se sabe que si $|A| = 0$, entonces $\exists \lambda_k = 0$ para que se cumpla la condición del determinante. Los únicos números que verifican la condición de la traza son:

$$\lambda_k = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = n \cdot 0^2 \quad = 0 \\[2ex] \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = n \cdot 0 \quad\;\; = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_k = 1 \Longrightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = n \cdot 1^2 \quad = n \\ \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = n \cdot 1 \quad\;\; = n \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda_{2k-1} = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \\ \lambda_{2k} = e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = \frac{n}{2}\left(\left(e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right)^2 + \left(e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right)^2\right) = \frac{n}{2}\left(e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} + e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right) \quad = \frac{-n}{2} \\ \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \frac{n}{2}\left(e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} + e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right) \quad = \frac{-n}{2} \end{cases}$$

Estos números, a excepción de $\lambda = 0$, cumplen también la condición del determinante cuando $|A| = 1$.

Con todo esto, se puede decir que los autovalores de una matriz A tal que $A^2 = A^T$ pueden ser $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ ó $\lambda = e^{\pm\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$. Estos autovalores pueden tener distintas multiplicidades. El autovalor $\lambda = 0$ solo aparece cuando $|A| = 0$. Y los autovalores $\lambda = e^{\pm\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ siempre aparecen en pareja (complejos conjugados).

Otra opción habría sido darse cuenta de que:

$$A^2 = A^T \iff A^4 = \left(A^T\right)^2 = \left(A^2\right)^T = (A^T)^T \Longrightarrow A^4 = A$$

$$|A^4| = |A| \iff |A| \cdot (|A|^3 - 1) = 0 \iff |A| = \left\{0, 1, e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}, e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right\}$$