Sea $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable tal que

$$2f'(x)+xf''(x)\geqslant 1$$

Demostrar que

$$\int_{-1}^{1} xf(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{3}$$

Solución:

Sea $g(x)=xf(x)-\dfrac{x^2}{2}$. Se cumple que

$$g''(x)=\left(xf(x)-\frac{x^2}{2}\right)''=\left(f(x)+xf'(x)-x\right)'=2f'(x)+xf''(x)-1\geqslant 0$$

Entonces, la función g es convexa. Ahora, se ve que

$$\int_{-1}^{1} xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left(g(x)+\frac{x^2}{2}\right)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}+\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x$$

Si se aproxima la función g por la recta tangente en $x=0$, se tiene que $g(x)\approx g(0)+g'(0)\cdot x=ax$, siendo $a=g'(0)$, de hecho, se cumplirá que $g(x)\geqslant ax$, porque g es convexa. Entonces

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_{-1}^{1} ax\,\mathrm{d}x=0$$

Y, por tanto, se demuestra que

$$\int_{-1}^{1} xf(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{3}$$