Sean A, B y C matrices cuadradas reales del mismo orden. Se sabe que A es invertible. Demuestra que si $(A-B)C = BA^{-1}$ entonces $C(A-B) = A^{-1}B$.

Solución:

Modificando la expresión que se cumple, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}(A-B)C = BA^{-1} &\iff (A-B)CA = B\\ &\iff A^{-1}(A-B)CA = A^{-1}B\\ &\iff (I - A^{-1}B)CA = A^{-1}B\\ &\iff CA - A^{-1}BCA = A^{-1}B\end{aligned}$$

Para que se cumpla que $C(A-B) = A^{-1}B$, basta con demostrar que $A^{-1}BCA = CB$, lo cual se puede ver suponiendo que se cumple que $C(A-B) = A^{-1}B$. Entonces:

$$(A-B)C = BA^{-1} \iff (A-B)CA = B \iff ACA - BCA = B$$

$$C(A-B) = A^{-1}B \iff AC(A-B) = B \iff ACA - ACB = B$$

Uniendo estas dos expresiones se obtiene $BCA = ACB \iff A^{-1}BCA = CB$, con lo cual queda demostrado que si $(A-B)C = BA^{-1}$ entonces $C(A-B) = A^{-1}B$.

Otra manera de verlo:

$$\begin{aligned}(A-B)C = BA^{-1} &\iff AC - BC - BA^{-1} + I = I\\ &\iff AC - BC + AA^{-1} - BA^{-1} = I\\ &\iff (A-B)(C + A^{-1}) = I\\ &\iff (C + A^{-1})(A-B) = I\\ &\iff CA + A^{-1}A - CB - A^{-1}B = I\\ &\iff CA + I - CB - A^{-1}B = I\\ &\iff C(A-B) = A^{-1}B\end{aligned}$$