a) Demuestra que para cualquier $m \in \mathbb{N}$ existe una matriz real $A_{m\times m}$ que cumple que $A^3 = A + I$, donde I es la matriz identidad.

b) Demuestra que $\det(A) > 0$ para todas las matrices $m \times m$ que cumplen que $A^3 = A + I$.

Solución:

El apartado a) es sencillo de demostrar, ya que siempre se puede considerar una matriz diagonal $m \times m$ cuyos elementos de la diagonal sean raíces del polinomio $p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda - 1$. Como es un polinomio de grado impar de coeficientes reales, seguro que tiene al menos una raíz real, ya que las raíces complejas se presentan en pares conjugados.

Sea $\lambda_1 \mid p(\lambda_1) = 0$, entonces la matriz $A = \lambda_1 I$ cumple que $A^3 = A + I$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Para demostrar el apartado b), se puede utilizar el hecho de que el determinante de A es igual al producto de sus autovalores. Resulta además que los posibles autovalores de A serán raíces de $p(\lambda)$.

Se pueden calcular los máximos y mínimos relativos del polinomio, de manera que se tiene $p'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, siendo $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ el máximo relativo y $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ el mínimo relativo. Sucede que $p\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0$ y $p\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0$, por lo que $p(\lambda)$ solo tiene una solucion real (λ_1), y dos soluciones complejas (λ_2 y λ_3).

Utilizando el teorema de Bolzano, se puede acotar λ_1, de manera que $\lambda_1 \in (1, 2)$, ya que $p(1) = -1 < 0$ y $p(2) = 5 > 0$. Entonces $\lambda_1 > 0$.

Por otro lado, sean $\lambda_2 = r\,e^{\mathrm{i}\phi}$ y $\lambda_3 = r\,e^{-\mathrm{i}\phi}$ las raíces complejas de $p(\lambda)$. Por tanto, $\det(A) = \lambda_1^\alpha \cdot (\lambda_2\,\lambda_3)^\beta$, siendo α y β las multiplicidades de los autovalores. Se cumple que $\lambda_1^\alpha > 0$ ya que $\lambda_1 > 0$. Y por otro lado, $(\lambda_2\,\lambda_3)^\beta = \left(r\,e^{\mathrm{i}\phi} \cdot r\,e^{-\mathrm{i}\phi}\right)^\beta = (r^2)^\beta = \left(r^\beta\right)^2 > 0$. Y como todos los factores son estrictamente positivos, se sigue que $\det(A) > 0$.