Sea $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que existe $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ (puede ser finito o infinito). Prueba que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)\,\mathrm{d}x = L$$

Solución:

Realizando un cambio de variable, se obtiene lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} t = nx \\ \mathrm{d}t = n\,\mathrm{d}x \end{array}\right\} \Longrightarrow \int_0^1 f(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} \cdot \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

Utilizando ahora la Regla de L'Hôpital, se demuestra el resultado:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}(n)} = \lim_{n\to\infty} f(n) = L$$