Sea $F(0)=0$, $F(1)=\dfrac{3}{2}$ y $F(n)=\dfrac{5}{2}\cdot F(n-1)-F(n-2)$ para $n\geqslant 2$. Determina si $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F\left(2^{n}\right)}$ es un número racional o no.

Solución:

En primer lugar, puede ser útil encontrar una expresión de $F(n)$ en función de n, sin recurrencias. Para ello, hay que hallar las raíces de su polinomio característico:

$$F(n)=\frac{5}{2}\cdot F(n-1)-F(n-2)\Longrightarrow r^{n}=\frac{5}{2}\cdot r^{n-1}-r^{n-2}\Longrightarrow r^{2}=\frac{5}{2}\cdot r-1\Longrightarrow r=\begin{cases}2\\ \frac{1}{2}\end{cases}$$

Por tanto, $F(n)=a\cdot 2^{n}+b\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$. Y tomando $n=0$ y $n=1$, se ve fácilmente que $a=1$ y $b=-1$, por lo que $F(n)=2^{n}-\dfrac{1}{2^{n}}$

Entonces, $F(2^{n})=2^{2^{n}}-\dfrac{1}{2^{2^{n}}}=\dfrac{\left(2^{2^{n}}\right)^{2}-1}{2^{2^{n}}}$. Para simplificar, $v=2^{n}$, y la expresión anterior queda como: $F(v)=\dfrac{2^{2v}-1}{2^{v}}$. Y, por tanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F(v)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{v}}{2^{2v}-1}$$

Es posible hallar el valor de la serie:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F(v)}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{v}}{2^{2v}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{v}+1-1}{(2^{v}+1)(2^{v}-1)}=\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{v}-1}-\frac{1}{(2^{v}+1)(2^{v}-1)}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{v}-1}-\frac{1}{2^{2v}-1}\right)=\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{2^{n}}-1}-\frac{1}{2^{2\cdot 2^{n}}-1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{2^{n}}-1}-\frac{1}{2^{2^{n+1}}-1}\right)=\\&=\frac{1}{2^{2^{0}}-1}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{2^{n+1}}-1}=\frac{1}{2^{1}-1}-\frac{1}{\infty}=1-0=1\end{aligned}$$

Evidentemente, $1\in\mathbb{Q}$. Y con esto, queda todo perfectamente demostrado.