Sean $a_0, a_1, \ldots, a_n$ números reales positivos tales que $a_{k+1} - a_k \geqslant 1$ para todo $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Prueba que:

$$1 + \frac{1}{a_0}\left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{a_n - a_0}\right) \leqslant \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)\left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)$$

Solución:

La expresión se puede probar mediante inducción. Para $n = 0$, la desigualdad es cierta (y se cumple la igualdad). Y para $n+1$ se ve que:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{a_0}\left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{a_n - a_0}\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{a_{n+1} - a_0}\right) \leqslant \\ \leqslant \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)\left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{a_{n+1}}\right) \iff \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff \left[1 + \frac{1}{a_0}\left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{a_n - a_0}\right)\right] + \\ + \frac{1}{a_0}\left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{a_n - a_0}\right)\cdot\frac{1}{a_{n+1} - a_0} \leqslant \\ \leqslant \left[\left(1 + \frac{1}{a_0}\right)\left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)\right] + \\ + \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)\left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)\cdot\frac{1}{a_{n+1}} \end{aligned}$$

Al aplicar inducción, se asume que la expresión del enunciado es cierta para n. Se ha visto que para $n+1$ aparece precisamente dicha expresión (remarcada entre corchetes). Entonces basta con demostrar que:

$$\frac{1}{a_0}\left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{a_n - a_0}\right)\cdot\frac{1}{a_{n+1} - a_0} \leqslant \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)\cdot\frac{1}{a_{n+1}}$$

Y para demostrarlo, se puede utilizar una segunda inducción. Para $n = 0$, la desigualdad se cumple, ya que:

$$\frac{1}{a_0}\cdot\frac{1}{a_1 - a_0} \leqslant \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)\cdot\frac{1}{a_1} \iff a_0\cdot(a_1 - a_0 - 1) \geqslant 0 \iff a_1 - a_0 \geqslant 1$$

Y para $n+1$ se tiene que:

$$\frac{1}{a_0}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_{n+1}-a_0}\right)\cdot\frac{1}{a_{n+2}-a_0}\leqslant\left(1+\frac{1}{a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_{n+1}}\right)\cdot\frac{1}{a_{n+2}}$$

Como la desigualdad se asume cierta para n, se ve, de manera análoga a la primera inducción, que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_0}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n-a_0}\right)\left(1+\frac{1}{a_{n+1}-a_0}\right)\cdot\frac{1}{a_{n+2}-a_0}\leqslant\\ \leqslant\left(1+\frac{1}{a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\left(1+\frac{1}{a_{n+1}}\right)\cdot\frac{1}{a_{n+2}}\iff\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iff\left[\frac{1}{a_0}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n-a_0}\right)\cdot\frac{1}{a_{n+1}-a_0}\right]\cdot\frac{1}{a_{n+2}-a_0}+\\ +\frac{1}{a_0}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n-a_0}\right)\cdot\frac{1}{a_{n+2}-a_0}\leqslant\\ \leqslant\left[\left(1+\frac{1}{a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\cdot\frac{1}{a_{n+1}}\right]\cdot\frac{1}{a_{n+2}}+\\ +\left(1+\frac{1}{a_0}\right)\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\cdot\frac{1}{a_{n+2}}\iff\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iff\left[\frac{1}{a_0}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n-a_0}\right)\cdot\frac{1}{a_{n+1}-a_0}\right]\cdot\frac{1}{a_{n+2}-a_0}+\\ +\left[\frac{1}{a_0}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n-a_0}\right)\cdot\frac{1}{a_{n+1}-a_0}\right]\cdot\frac{a_{n+1}-a_0}{a_{n+2}-a_0}\leqslant\\ \leqslant\left[\left(1+\frac{1}{a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\cdot\frac{1}{a_{n+1}}\right]\cdot\frac{1}{a_{n+2}}+\\ +\left[\left(1+\frac{1}{a_0}\right)\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\cdot\frac{1}{a_{n+1}}\right]\cdot\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\iff\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iff\left[\frac{1}{a_0}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n-a_0}\right)\cdot\frac{1}{a_{n+1}-a_0}\right]\cdot\frac{a_{n+1}-a_0+1}{a_{n+2}-a_0}\leqslant\\ \leqslant\left[\left(1+\frac{1}{a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\cdot\frac{1}{a_{n+1}}\right]\cdot\frac{a_{n+1}+1}{a_{n+2}}\end{aligned}$$

Como aparece la misma expresión utilizada en la hipótesis de esta segunda inducción, tiene que ocurrir que:

$$\frac{a_{n+1} - a_0 + 1}{a_{n+2} - a_0} \leqslant \frac{a_{n+1} + 1}{a_{n+2}} \iff a_0 \cdot (a_{n+2} - a_{n+1}) \geqslant a_0 \iff a_{n+2} - a_{n+1} \geqslant 1$$

Por tanto, esta segunda inducción demuestra la primera inducción, que a su vez prueba que la desigualdad del enunciado es cierta.