Sea $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales tal que $a_0 = 0$ y

$$a_{n+1}^3 = a_n^2 - 8 \quad \forall n = 0, 1, 2, ...$$

Prueba que la siguiente serie es convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$$

Solución:

Un criterio para averiguar la convergencia de una serie es el criterio del cociente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad \text{es convergente} \iff \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$$

Utilizando la expresión de la sucesión a_n, se puede llegar a:

$$a_{n+1}^3 = a_n^2 - 8 \iff a_n^3 = a_{n-1}^2 - 8 \Longrightarrow a_{n+1}^3 - a_n^3 = a_n^2 - a_{n-1}^2 = (a_n - a_{n-1})(a_n + a_{n-1})$$

Y, por otro lado:

$$a_{n+1}^3 - a_n^3 = (a_{n+1} - a_n) \cdot (a_{n+1}^2 + a_{n+1} \cdot a_n + a_n^2)$$

Con estas dos igualdades, se puede ver que:

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_{n+1}^2 + a_{n+1} \cdot a_n + a_n^2}$$

Y ahora, basta con aplicar límites y valor absoluto:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n + a_{n-1}}{a_{n+1}^2 + a_{n+1} \cdot a_n + a_n^2} \right| = \left| \frac{2\, a_\infty}{3\, a_\infty^2} \right| = \frac{2}{3\, |a_\infty|}$$

El término a_∞ corresponde con el valor de la sucesión a_n cuando $n \to \infty$:

$$a_\infty^3 = a_\infty^2 - 8 \iff a_\infty^3 - a_\infty^2 + 8 = 0 \Longrightarrow p(x) = x^3 - x^2 + 8$$

Utilizando el Teorema de Bolzano, se puede encontrar una raíz de $p(x)$ en el intervalo $[-3,-2]$, ya que $p(-2)=-4$ y $p(-1)=6$, por lo que $\exists\, x_0 \in [-2,-1] \mid p(x_0)=0$.

Se sabe que $p'(x) = 3x^2 - 2x = 0 \iff x = \left\{0, \dfrac{2}{3}\right\} \implies p(0), p\left(\dfrac{2}{3}\right) > 0$. Es decir, como el valor de $p(x)$ en los extremos relativos es estrictamente positivo, se puede concluir que solo existe una raíz real (la ya estimada), ya que $p(x \leqslant -2) < 0$ y $p(x \geqslant -1) > 0$.

Por consiguiente, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in [-2,-1]$. Y si se elige $b_n = |a_n - a_{n-1}|$, se puede demostrar que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente ya que:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n - a_{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n + a_{n-1}}{a_{n+1}^2 + a_{n+1}\cdot a_n + a_n^2}\right| \\ &= \frac{2}{3\,|a_\infty|} \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] < 1\end{aligned}$$

Con lo cual, queda demostrada la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$.