Hoy **Ivan the Confessor** *prefiere* las funciones $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ que cumplen que $f(x) + f(y) \geqslant |x - y|$ para cualquier pareja de valores $x, y \in [0,1]$. Encuentra el mínimo valor de $\displaystyle\int_0^1 f$ de todas las posibles funciones *preferidas*.

Solución:

Aprovechando la simetría de la expresión del enunciado, se puede suponer que la variable $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y que $y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. De esta manera

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(y)\,\mathrm{d}y$$

Y realizando un cambio de variable $y = x + \frac{1}{2}$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} f\left(x + \frac{1}{2}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(f(x) + f\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)\,\mathrm{d}x \\
&\geqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \left|x - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right|\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Y entonces, $\displaystyle\int_0^1 f \geqslant \frac{1}{4}$.