Sea A una matriz real $n \times n$ tal que $A^3 = 0$.

(a) Prueba que existe una única matriz X real $n \times n$ que satisface la ecuación

$$X + AX + XA^2 = A$$

(b) Expresa X en términos de A.

Solución:

Supóngase que existe una matriz $Y \neq X$ tal que $Y + AY + YA^2 = A$. Como X también cumple la ecuación, se tiene que

$$X + AX + XA^2 - (Y + AY + YA^2) = 0 \iff (X - Y) + A(X - Y) + (X - Y)A^2 = 0$$

Sea $Z = X - Y$. Se sigue entonces que $Z \neq 0$ ya que $X \neq Y$. Entonces

$$\begin{aligned} Z + AZ + ZA^2 = 0 \Longrightarrow A^2(Z + AZ + ZA^2)A = 0 \\ \iff A^2ZA + A^3ZA + A^2ZA^3 = 0 \\ \iff A^2ZA = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z + AZ + ZA^2 = 0 \Longrightarrow A(Z + AZ + ZA^2)A = 0 \\ \iff AZA + A^2ZA + AZA^3 = 0 \\ \iff AZA = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z + AZ + ZA^2 = 0 \Longrightarrow (Z + AZ + ZA^2)A = 0 \\ \iff ZA + AZA + ZA^3 = 0 \\ \iff ZA = 0 \Longrightarrow ZA^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z + AZ + ZA^2 = 0 \Longrightarrow A^2(Z + AZ + ZA^2) = 0 \\ \iff A^2Z + A^3Z + A^2ZA^2 = 0 \\ \iff A^2Z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z + AZ + ZA^2 = 0 \Longrightarrow A(Z + AZ + ZA^2) = 0 \\ \iff AZ + A^2Z + AZA^2 = 0 \\ \iff AZ = 0 \end{aligned}$$

Entonces, hemos concluido que $AZ = 0$ y que $ZA^2 = 0$. Y por tanto

$$Z + AZ + ZA^2 = 0 \iff Z = 0$$

Contradicción. Entonces ocurre que $X = Y$, y por tanto, la matriz X que cumple la ecuación es única.

Se puede seguir un procedimiento similar para hallar X:

$$\begin{aligned} X + AX + XA^2 = A \Longrightarrow A^2(X + AX + XA^2)A = A^4 = 0 \\ \iff A^2XA + A^3XA + A^2XA^3 = 0 \\ \iff A^2XA = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X + AX + XA^2 = A \Longrightarrow A(X + AX + XA^2)A = A^3 = 0 \\ \iff AXA + A^2XA + AXA^3 = 0 \\ \iff AXA = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X + AX + XA^2 = A \Longrightarrow (X + AX + XA^2)A = A^2 \\ \iff XA + AXA + XA^3 = A^2 \\ \iff XA = A^2 \Longrightarrow XA^2 = A^3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X + AX + XA^2 = A \Longrightarrow A^2(X + AX + XA^2) = A^3 = 0 \\ \iff A^2X + A^3X + A^2XA^2 = 0 \\ \iff A^2X = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X + AX + XA^2 = A \Longrightarrow A(X + AX + XA^2) = A^2 \\ \iff AX + A^2X + AXA^2 = A^2 \\ \iff AX = A^2 \end{aligned}$$

Y así, $AX = A^2$ y $XA^2 = 0$, por lo que

$$X + AX + XA^2 = A \Longrightarrow X + A^2 = A \Longrightarrow X = A - A^2$$

Otra manera de verlo es definir $X = aI + bA + cA^2$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$. De manera que

$$\begin{aligned} X + AX + XA^2 &= aI + bA + cA^2 + aA + bA^2 + cA^3 + aA^2 + bA^3 + cA^4 = \\ &= aI + bA + cA^2 + aA + bA^2 + aA^2 = \\ &= aI + (a+b)A + (a+b+c)A^2 = \\ &= A \iff \begin{cases} a & = 0 \\ a + b & = 1 \\ a + b + c & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Y finalmente queda que $X = A - A^2$.