Sean $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números positivos. Demuestra que los siguientes enunciados son equivalentes.

(1) Existe una sucesión $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ de números positivos tal que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c_n}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{b_n}$ son convergentes.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{b_n}}$ converge.

Solución:

Se trata de un "si y solo si", es decir, hay que demostrar dos implicaciones:

(1) $\Longleftarrow$ (2):

La expresión radical del enunciado (2) se puede expresar de las siguientes maneras:

$$\sqrt{\frac{a_n}{b_n}} = \sqrt{\frac{a_n}{b_n}} \cdot \sqrt{\frac{a_n}{a_n}} = \frac{a_n}{\sqrt{a_n \cdot b_n}} = \frac{a_n}{c_n}$$

$$\sqrt{\frac{a_n}{b_n}} = \sqrt{\frac{a_n}{b_n}} \cdot \sqrt{\frac{b_n}{b_n}} = \frac{\sqrt{a_n \cdot b_n}}{b_n} = \frac{c_n}{b_n}$$

Si se elige $c_n = \sqrt{a_n \cdot b_n}$, y sabiendo que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{b_n}}$ converge, entonces seguro que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c_n}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{b_n}$ son convergentes; y por tanto existe una sucesión $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ que hace que ambas sumas converjan.

(1) $\Longrightarrow$ (2):

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \beta_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k^2\right)$$

Y asignando $\alpha_k = \sqrt{\dfrac{a_k}{c_k}}$ y $\beta_k = \sqrt{\dfrac{c_k}{b_k}}$, se obtiene lo siguiente

$$
\begin{aligned}
0 &< \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{c_n}} \cdot \sqrt{\frac{c_n}{b_n}}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{a_n}{c_n}}\right)^2\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{c_n}{b_n}}\right)^2\right) \\
\iff 0 &< \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c_n}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{b_n}\right) \\
\iff 0 &< \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{b_n}} \leqslant \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c_n}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{b_n}\right)}
\end{aligned}
$$

Como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{b_n}}$ está acotada superiormente por un valor finito (e inferiormente, al tratarse de una sucesión de números positivos), se demuestra que es convergente.

Y con esto, queda demostrado que (1) $\iff$ (2).