Probar que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,(n+1)} < 2$$

Solución:

Se parte de la siguiente serie telescópica, ya que se conoce su resultado:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \right) = \frac{2}{\sqrt{1}} - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1}} = 2 - 0 = 2$$

Entonces, hay que demostrar que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,(n+1)} < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \right)$$

Operando un poco la serie telescópica, se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+1) - 2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}(n+1)} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1-2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}(n+1)} \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,(n+1)} = 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1-2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}(n+1)} \end{aligned}$$

Entonces, si la sucesión $\frac{2n+1-2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}(n+1)}$ es de números positivos, queda demostrado el problema. Y, en efecto, lo es por la desigualdad de las medias aritmética y geométrica:

$$\begin{aligned} \frac{2n+1-2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}(n+1)} > 0 &\iff 2n+1-2\sqrt{n}\sqrt{n+1} > 0 \\ &\iff \frac{n+(n+1)}{2} > \sqrt{n\cdot(n+1)} \end{aligned}$$