Para todo número natural $n \geqslant 2$ y dos matrices $n \times n$ con entradas reales, A y B que satisfacen la siguiente ecuación:

$$A^{-1} + B^{-1} = (A+B)^{-1}$$

Probar que $\det(A) = \det(B)$.

¿Se puede concluir lo mismo para matrices con entradas complejas?

Solución:

Si se multiplica la expresión matricial por $(A+B)$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
A^{-1} + B^{-1} = (A+B)^{-1} &\iff (A^{-1}+B^{-1}) \cdot (A+B) = (A+B)^{-1} \cdot (A+B) \\
&\iff I + B^{-1}A + A^{-1}B + I = I \\
&\iff A = B(-I - A^{-1}B) \\
&\iff A = -B(B^{-1} + A^{-1})B \\
&\iff A = -B(A+B)^{-1}B
\end{aligned}$$

Y, por otro lado,

$$\begin{aligned}
A^{-1} + B^{-1} = (A+B)^{-1} &\iff (A^{-1}+B^{-1}) \cdot (A+B) = (A+B)^{-1} \cdot (A+B) \\
&\iff I + B^{-1}A + A^{-1}B + I = I \\
&\iff B = A(-I - B^{-1}A) \\
&\iff B = -A(A^{-1} + B^{-1})A \\
&\iff B = -A(A+B)^{-1}A
\end{aligned}$$

Estas dos expresiones de A y B son muy similares. Si se toman determinantes se puede ver lo siguiente:

$$\det(A) = \det\left(-B(A+B)^{-1}B\right) = \frac{(-1)^n \cdot \det(B)^2}{\det(A+B)}$$

$$\det(B) = \det\left(-A(A+B)^{-1}A\right) = \frac{(-1)^n \cdot \det(A)^2}{\det(A+B)}$$

Y, uniendo estas dos expresiones tan parecidas:

$$\frac{\det(A)}{\det(B)^2} = \frac{(-1)^n}{\det(A+B)} = \frac{\det(B)}{\det(A)^2} \iff \left(\frac{\det(A)}{\det(B)}\right)^3 = 1 \iff \frac{\det(A)}{\det(B)} = \sqrt[3]{1}$$

Como $\sqrt[3]{1} = 1$ en $\mathbb{R}$, se demuestra que $\det(A) = \det(B)$ para matrices reales. Sin embargo, en $\mathbb{C}$, $\sqrt[3]{1} = \left\{1, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right\}$, por lo que puede ocurrir que $\det(A) \neq \det(B)$ en matrices complejas. Lo único que se puede asegurar es que $|\det(A)| = |\det(B)|$.