Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ continuas y derivables dos veces que cumplen que

$$f''(x)f(x) \geqslant 2(f'(x))^2$$

para todo $x \in \mathbb{R}$

Solución:

Se puede ver que la desigualdad del enunciado forma parte de una derivada. Por ejemplo, al derivar la siguiente función:

$$g = \frac{1}{f} \Longrightarrow g'' = \left(\frac{1}{f}\right)'' = \left(\frac{-f'}{f^2}\right)' = \frac{-f''f^2 + 2f(f')^2}{f^4} = \frac{2(f')^2 - f''f}{f^3}$$

Sabiendo que $2(f'(x))^2 - f''(x)f(x) \leqslant 0$, se tiene que

$$\frac{2(f')^2 - f''f}{f^3} \geqslant 0 \Longrightarrow g'' \geqslant 0$$

Por lo que la función g es cóncava para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces, para cualquier conjunto de valores $a < b$, $u < a$ y $b < v$, se cumple que

$$\frac{g(a) - g(u)}{a - u} \geqslant \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \geqslant \frac{g(v) - g(b)}{v - b}$$

Tomando límites en la expresión anterior cuando $u \to -\infty$ y $v \to +\infty$, se sigue que

$$0 \geqslant \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \geqslant 0$$

Como $g = \dfrac{1}{f}$ es una función estrictamente positiva para todo $x \in \mathbb{R}$, la única posibilidad es que $g(a) = g(b)$ para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces, g es constante y por tanto f también. Y de aquí se deduce que las únicas funciones que cumplen la desigualdad del enunciado son las funciones constantes positivas, del tipo $f(x) = C$, con $C > 0$.