Se define la sucesión de números $a_0, a_1, \ldots$ con la siguiente recurrencia:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad (n+3)a_{n+2} = (6n+9)a_{n+1} - na_n \quad \forall n \geqslant 0$$

Prueba que todos los términos de la sucesión son números enteros.

Solución:

En este ejercicio parece bastante conveniente el uso de la función generatriz de la sucesión, de manera que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$. La derivada de esta función generatriz es $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}$. Entonces

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left((6n+9)a_{n+1} - (n+3)a_{n+2}\right) x^{n-1} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 6na_{n+1}x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 9a_{n+1}x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} na_{n+2}x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 3a_{n+2}x^{n-1} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 6na_{n+1}x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 9a_{n+1}x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} na_{n+2}x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 3a_{n+2}x^{n-1} = \\
&= \frac{6}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty} na_{n+1}x^{n+1} + \frac{9}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} - \frac{1}{x^3}\sum_{n=1}^{\infty} na_{n+2}x^{n+2} - \frac{3}{x^3}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^{n+2} = \\
&= \frac{6}{x^2}\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_nx^n + \frac{9}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n - \frac{1}{x^3}\sum_{n=3}^{\infty}(n-2)a_nx^n - \frac{3}{x^3}\sum_{n=2}^{\infty} a_nx^n = \\
&= \frac{6}{x^2}\sum_{n=2}^{\infty} na_nx^n - \frac{6}{x^2}\sum_{n=2}^{\infty} a_nx^n + \frac{9}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n - \frac{1}{x^3}\sum_{n=3}^{\infty} na_nx^n + \\
&\quad + \frac{2}{x^3}\sum_{n=3}^{\infty} a_nx^n - \frac{3}{x^3}\sum_{n=2}^{\infty} a_nx^n =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{6}{x}\sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \frac{6}{x^2}\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n + \frac{9}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - \frac{1}{x^2}\sum_{n=3}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \\
&\quad + \frac{2}{x^3}\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n - \frac{3}{x^3}\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \\
&= \frac{6}{x}(f'(x) - a_1) - \frac{6}{x^2}(f(x) - a_0 - a_1 x) + \frac{9}{x^2}(f(x) - a_0)) - \frac{1}{x^2}(f'(x) - a_1 - 2a_2 x) + \\
&\quad + \frac{2}{x^3}(f(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2) - \frac{3}{x^3}(f(x) - a_0 - a_1 x)
\end{aligned}
$$

Sabiendo que $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ y que $a_2 = 6$, la expresión queda como

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{6}{x}(f'(x) - 2) - \frac{6}{x^2}(f(x) - 1 - 2x) + \frac{9}{x^2}(f(x) - 1)) - \frac{1}{x^2}(f'(x) - 2 - 12x) + \\
&\quad + \frac{2}{x^3}(f(x) - 1 - 2x - 6x^2) - \frac{3}{x^3}(f(x) - 1 - 2x) = \\
&= \left(\frac{6}{x} - \frac{1}{x^2}\right) f'(x) + \left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) f(x) + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)
\end{aligned}
$$

Y entonces se llega a la siguiente ecuación diferencial:

$$
\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\right) f'(x) = \left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) f(x) + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)
$$

Que es equivalente a una EDO lineal:

$$
f'(x) + \frac{1 - 3x}{x^3 - 6x^2 + x} f(x) = \frac{x + 1}{x^3 - 6x^2 + x}
$$

Con $f(0) = a_0 = 1$. La solución de esta EDO es

$$
f(x) = e^{-\int \frac{1-3x}{x^3 - 6x^2 + x}\,\mathrm{d}x} \cdot \left(C + \int \frac{x + 1}{x^3 - 6x^2 + x} \cdot e^{\int \frac{1-3x}{x^3 - 6x^2 + x}\,\mathrm{d}x} \mathrm{d}x\right)
$$

Por un lado,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1 - 3x}{x^3 - 6x^2 + x}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x - 3}{x^2 - 6x + 1}\right) \mathrm{d}x = \\
&= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2 - 6x + 1| = \\
&= \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2 - 6x + 1}}\right|
\end{aligned}
$$

Y entonces

$$e^{-\int \frac{1-3x}{x^3-6x^2+x}\,\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{x^2-6x+1}}{x}$$

Y, por otro lado

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^3-6x^2+x}\cdot e^{\int \frac{1-3x}{x^3-6x^2+x}\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x &= \int \frac{x+1}{x^3-6x^2+x}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-6x+1}}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int \frac{x+1}{(x^2-6x+1)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int \frac{x-3}{(x^2-6x+1)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{4}{(x^2-6x+1)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{x^2-6x+1}} + \int \frac{4}{((x-3)^2-8)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{4}{((x-3)^2-8)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x &= \left\{\begin{matrix} x & = & t+3 \\ \mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t\end{matrix}\right\} = \int \frac{4}{(t^2-8)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t = \\ &= \left\{\begin{matrix} t & = & \sqrt{8}\sec u \\ \mathrm{d}t & = & \sqrt{8}\tan u \sec u\,\mathrm{d}u\end{matrix}\right\} = \int \frac{4\sqrt{8}\tan u\sec u}{(8\sec^2 u-8)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u = \\ &= \int \frac{4\sqrt{8}\tan u\sec u}{(\sqrt{8})^3\tan^3 u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int \frac{\sec u}{\tan^2 u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int\frac{\cos u}{\sin^2 u}\,\mathrm{d}u = \\ &= \left\{\begin{matrix} v & = & \sin u \\ \mathrm{d}v & = & \cos u\,\mathrm{d}u\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}v}{v^2} = \\ &= \frac{-1}{2v} = \frac{-1}{2\sin u} = \frac{-1}{2\sin\left(\operatorname{arc}\cos\left(\frac{\sqrt{8}}{t}\right)\right)} = \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{1-\frac{8}{t^2}}} = \frac{-t}{2\sqrt{t^2-8}} = \\ &= \frac{-(x-3)}{2\sqrt{(x-3)^2-8}} = \frac{3-x}{2\sqrt{x^2-6x+1}}\end{aligned}$$

Y por tanto,

$$\int \frac{x+1}{x^3-6x^2+x}\cdot e^{\int \frac{1-3x}{x^3-6x^2+x}\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \frac{-1}{\sqrt{x^2-6x+1}} + \frac{3-x}{2\sqrt{x^2-6x+1}} = \frac{1-x}{2\sqrt{x^2-6x+1}}$$

Entonces, la solución a la EDO es:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{-\int \frac{1-3x}{x^3-6x^2+x}\,\mathrm{d}x} \cdot \left(C + \int \frac{x+1}{x^3-6x^2+x} \cdot e^{\int \frac{1-3x}{x^3-6x^2+x}\,\mathrm{d}x} \mathrm{d}x \right) = \\
&= \frac{\sqrt{x^2-6x+1}}{x} \cdot \left(C + \frac{1-x}{2\sqrt{x^2-6x+1}} \right) = \\
&= C \cdot \frac{\sqrt{x^2-6x+1}}{x} + \frac{1-x}{2x} = \\
&= \frac{1-x+2C\sqrt{x^2-6x+1}}{2x}
\end{aligned}
$$

Sabiendo que $f(0) = 1$, se tiene que

$$
f(x) = \frac{1-x+2C\sqrt{x^2-6x+1}}{2x} \iff 2x\,f(x) = 1-x+2C\sqrt{x^2-6x+1}
$$

$$
2 \cdot 0\,f(0) = 1-0+2C\sqrt{0^2-6\cdot 0+1} \iff 0 = 1+2C \iff C = \frac{-1}{2}
$$

Entonces

$$
f(x) = \frac{1-x-\sqrt{(1-x)^2-4x}}{2x}
$$

De donde se puede ver que f es solución de un polinomio $p(z) = xz^2 + (x-1)z + 1$, ya que $p(f(x)) = 0$. Y, por tanto

$$
x(f(x))^2 + (x-1)f(x) + 1 = 0
$$

Sustituyendo $f(x)$ por $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$, se ve que

$$
x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\right)^2 + (x-1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n + 1 = 0 \iff
$$

$$
x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\right)^2 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+1} - a_0 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^n + 1 = 0 \iff
$$

$$
x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\right)^2 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^n = 0 \iff
$$

$$x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\right)^2 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}\, x^{n+1} = 0 \iff$$

$$x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)\, x^{n+1} \iff$$

$$x\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)\, x^{n+1} \iff$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right) x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)\, x^{n+1} \iff$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = a_{n+1} - a_n \iff$$

$$a_{n+1} = a_n + \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

Finalmente, se puede ver que las operaciones involucradas para obtener explícitamente los términos de la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ son sumas y multiplicaciones. Al ser $a_0 = 1$ y $a_1 = 2$ dos números enteros, para $n \geqslant 2$, inductivamente, todos los términos serán enteros también.