

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función tal que  $(f(x))^n$  es un polinomio para todo  $n \geq 2$ . Entonces, ¿se cumple que  $f$  es un polinomio?

**Solución:**

La respuesta es: sí.

Sea  $\frac{f^3}{f^2} = \frac{p}{q}$ , una función racional irreducible con  $p$  y  $q$  dos polinomios. Entonces  $\frac{p^2}{q^2}$  también es irreducible, y se cumple que  $\frac{p^2}{q^2} = \left(\frac{f^3}{f^2}\right)^2 = f^2$ . Como  $f^2$  es un polinomio, se tiene que  $q$  es constante (ya que  $q^2$  lo es).

Por tanto,  $f = \frac{f^3}{f^2} = \frac{p}{q}$  es un polinomio  $p$  entre una constante  $q$ , de donde está claro que  $f$  es un polinomio.