Sean x, y, z números enteros tales que $S = x^4+y^4+z^4$ es divisible entre 29. Demuestra que S es divisible entre 29^4.

Solución:

Sean a y r dos números enteros tales que $a \equiv r \pmod{29}$. Es bien sabido que este número $r \in \{0, 1, 2, \ldots, 27, 28\}$, o lo que es lo mismo, $r \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 13, \pm 14\}$.

Si se analiza $a^2 \equiv r^2 \pmod{29}$, entonces los posibles restos de la división entre 29 son $r^2 \in \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196\}$, y expresado de otra manera: $r^2 \in \{0, \pm 1, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 9, \pm 13\}$.

Por último, si $a^4 \equiv r^4 \pmod{29}$, se cumple que $r^4 \in \{0, 1, 16, 25, 36, 49, 81, 169\}$, que es equivalente a decir que $r^4 \in \{0, 1, 7, 20, 23, 24, 25\}$.

Sean b y c otros dos números enteros. Para que $a^4 + b^4 + c^4 \equiv 0 \pmod{29}$, tiene que ocurrir que los restos de cada sumando al dividirse entre 29 sumen un múltiplo de 29. Utilizando el resultado anterior, se ve que solo existe una combinación para la cual se verifica lo dicho anteriormente. Esta combinación se da cuando $a^4 + b^4 + c^4 \equiv 0 + 0 + 0 \equiv 0 \pmod{29}$.

Y si $a^4 \equiv 0 \pmod{29}$, entonces $a \equiv 0 \pmod{29}$, ya que 29 es primo. Y por tanto, a es un múltiplo de 29, lo que implica que a^4 es un múltiplo de 29^4 (equivalente a decir que a^4 es divisible entre 29^4).

Y con esto, queda demostrado que si $x^4 + y^4 + z^4$ es divisible entre 29, entonces también lo será entre 29^4.