Para todo número entero positivo n, sea $p(n)$ el número de maneras en las que se puede escribir dicho número n como suma de enteros positivos. Por ejemplo, $p(4) = 5$:

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

Se define también $p(0) = 1$. Probar que $p(n) - p(n-1)$ indica el número de maneras en las que se puede escribir n como suma de enteros estrictamente mayores que 1.

Solución:

Si se supone que $p(n-1) = x$, entonces x es el número de maneras en las que se puede escribir $n-1$. Para calcular $p(n)$, puede uno darse cuenta de que $n = (n-1)+1$. Como $n-1$ puede escribirse de x maneras, todas esas x maneras tendrán al menos un término igual a 1. Entonces, aquellas sumas cuyos sumandos sean mayores que 1 se denotarán como y, de tal manera que $p(n) = x + y$, concluyendo que $y = p(n) - p(n-1)$.

Por ejemplo, $p(5) = 7$:

$$5 = (4) + 1 = 3 + 2 = (3 + 1) + 1 = (2 + 2) + 1 = (2 + 1 + 1) + 1 = (1 + 1 + 1 + 1) + 1$$

Se puede observar que las expresiones entre paréntesis son las mismas que aparecen en el ejemplo del enunciado. En este caso, $x = p(4) = 5$, e $y = 2$, de manera que $p(5) = 5 + 2 = 7$.

Siendo un poco más rigurosos, se pueden definir las particiones $\mathcal{P}_n$ para definir el número de particiones de n, y $\mathcal{Q}_n$ para definir el número de particiones de n con al menos un sumando igual a 1. Así, $p(n) = |\mathcal{P}_n|$. Entonces

$$\mathcal{P}_n = \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_k), k \in \mathbb{N} : \lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n \right\}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_n &= \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_k), k \in \mathbb{N} : \lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k = 1, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n \right\} = \\ &= \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, 1), k \in \mathbb{N} : \lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{k-1}, \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i = n - 1 \right\}\end{aligned}$$

Nótese que el número de particiones de $\mathcal{Q}_n$ es igual al número de particiones de $\mathcal{P}_{n-1}$, ya que

$$\mathcal{P}_{n-1} = \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}), k \in \mathbb{N} : \lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{k-1}, \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i = n - 1 \right\}$$

Por lo que $|\mathcal{Q}_n| = |\mathcal{P}_{n-1}|$. Entonces, el conjunto de particiones de n con todos los sumandos estrictamente mayores que 1 será $\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{Q}_n$, de manera que el número de elementos del conjunto será

$$|\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{Q}_n| = |\mathcal{P}_n| - |\mathcal{Q}_n| = |\mathcal{P}_n| - |\mathcal{P}_{n-1}| = p(n) - p(n-1)$$

Esto se debe demostrar más rigurosamente definiendo un mapa biyectivo entre los conjuntos $\mathcal{P}_{n-1}$ y $\mathcal{Q}_n$, de manera que

$$\varphi : \mathcal{P}_{n-1} \to \mathcal{Q}_n \quad / \quad \varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k, 1)$$

Para que este mapa sea biyectivo, debe ser inyectivo y sobreyectivo.

El mapa φ es inyectivo ya que $\varphi(\bar{v}) = \varphi(\bar{w}) \iff (\bar{v}, 1) = (\bar{w}, 1) \iff \bar{v} = \bar{w}$. Y es sobreyectivo ya que $\forall\, \bar{V} = (\bar{v}, 1) \in \mathcal{Q}_n\ \exists\, \bar{v} \in \mathcal{P}_{n-1} : \varphi(\bar{v}) = (\bar{v}, 1) = \bar{V}$.