Sea n un número natural. Considérese una matriz $n \times n$ cuyas entradas son $1, 2, \dots, n^2$ escritas en orden empezando de arriba a abajo y de izquierda a derecha. Se eligen n entradas de la matriz de manera que exactamente una entrada es elegida de cada columna y de cada fila. ¿Cuáles son los posibles valores de la suma de las entradas seleccionadas?

Solución:

En primer lugar, es conveniente tomar algunos ejemplos:

$$n = 1 : \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow S_1 = 1$$

$$n = 2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow S_2 = 5$$

$$n = 3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Longrightarrow S_3 = 15$$

Es sencillo darse cuenta de la expresión genérica que tiene esta matriz:

$$\begin{pmatrix} 0n+1 & 0n+2 & \dots & 0n+n \\ 1n+1 & 1n+2 & \dots & 1n+n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & \dots & (n-1)n+n \end{pmatrix}$$

Como se cogen n entradas de cada fila y columna de manera que no haya filas ni columnas con más de una entrada seleccionada o con ninguna escogida, se ve que la expresión genérica de la suma será:

$$S_n = n \sum_{k=1}^{n} (k-1) + \sum_{k=1}^{n} k = n \left(\frac{(n-1)n}{2} \right) + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n^3+n}{2}$$