Sea n un entero positivo. Calcula el número de palabras w (sucesiones finitas de letras) que satisfacen las siguientes tres propiedades:

1. w tiene n letras, todas del abecedario $\{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}, \texttt{d}\}$.
2. w tiene un número par de letras `a`.
3. w tiene un número par de letras `b`.

(Por ejemplo, para $n = 2$, hay seis palabras de este estilo: `aa`, `bb`, `cc`, `dd`, `cd` y `dc`)

Solución:

En primer lugar, es fácil ver que el número de palabras que se pueden formar con el abecedario $\{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}, \texttt{d}\}$ en función de n es de 4^n. Se definen los siguientes conjuntos:

- A_n: Conjunto de palabras con un número par de letras `a` y `b`.
- B_n: Conjunto de palabras con un número impar de letras `a` y `b`.
- C_n: Conjunto de palabras con un número par de letras `a` e impar de letras `b`.
- D_n: Conjunto de palabras con un número impar de letras `a` y par de letras `b`.

Como estos conjuntos son disjuntos, obviamente, se sabe que

$$|A_n| + |B_n| + |C_n| + |D_n| = 4^n$$

Por otro lado, se sabe que a partir del conjunto A_n, si a cada palabra del conjunto se le quita la última letra y esta es `c` o `d`, las palabras resultantes serán del conjunto A_{n-1}. Si la última letra es una `a`, las palabras resultantes serán del conjunto D_{n-1}. Y si fuera una `b`, las palabras pertenecerán a C_{n-1}. Por tanto:

$$|A_n| = 2|A_{n-1}| + |C_{n-1}| + |D_{n-1}|$$

Se puede ver que existe una biyección entre los conjuntos C_n y D_n, que consiste en cambiar todas las letras `a` por `b` y viceversa, de manera que $|C_n| = |D_n|$. Entonces

$$|A_n| = 2|A_{n-1}| + |C_{n-1}| + |D_{n-1}| = 2|A_{n-1}| + 2|C_{n-1}|$$

Siguiendo con la misma estrategia, si a cada palabra del conjunto B_n se le quita la última letra, si esta es una `a`, la palabra resultante sería del conjunto C_{n-1}; si es una b, la palabra sería del conjunto D_{n-1}, y si es una c o una d, la palabra sería del conjunto B_{n-1}, de manera que

$$|B_n| = 2|B_{n-1}| + |C_{n-1}| + |D_{n-1}| = 2|B_{n-1}| + 2|C_{n-1}|$$

Si a las palabras del conjunto C_n les quitamos la última letra, si esta es una letra a, la palabra resultante será del conjunto B_{n-1}; si es una b, la palabra será de A_{n-1}; y si es una c o una d, la palabra será de C_{n-1}, de forma que

$$|C_n| = |A_{n-1}| + |B_{n-1}| + 2|C_{n-1}|$$

Resumiendo, se tienen las siguientes relaciones:

$$|A_n| + |B_n| + 2|C_n| = 4^n$$

$$|A_n| = 2|A_{n-1}| + 2|C_{n-1}|$$
$$|B_n| = 2|B_{n-1}| + 2|C_{n-1}|$$
$$|C_n| = |A_{n-1}| + |B_{n-1}| + 2|C_{n-1}|$$

Es fácil darse cuenta de que $|C_n| = 4^{n-1}$, por lo que se reducen las relaciones a

$$|A_n| + |B_n| + 2 \cdot 4^{n-1} = 4^n \Longrightarrow |A_n| + |B_n| = 2 \cdot 4^{n-1}$$

$$|A_n| = 2|A_{n-1}| + 2 \cdot 4^{n-2}$$
$$|B_n| = 2|B_{n-1}| + 2 \cdot 4^{n-2}$$

Restando las dos últimas relaciones, se tiene que

$$|A_n| - |B_n| = 2\left(|A_{n-1}| - |B_{n-1}|\right)$$

Se sabe que $A_1 = \{\mathtt{c}, \mathtt{d}\}$ y que $B_1 = \varnothing$, por lo que $|A_1| - |B_1| = 2$, y entonces, $|A_2| - |B_2| = 4$, e inductivamente

$$|A_n| - |B_n| = 2^n$$

Uniendo esta relación con $|A_n| + |B_n| = 2 \cdot 4^{n-1}$, se tiene que

$$|A_n| = 2^{n-1} + 4^{n-1}$$

Siendo este el número de palabras w de n letras con las características requeridas.