Determina todos los pares (a, b) de números reales para los que existe una única matriz simétrica $M_{2\times 2}$, con entradas reales tal que $\operatorname{tr}(M) = a$ y $\det(M) = b$.

Solución:

Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$. Es fácil ver que:

$$\begin{cases} a &= \operatorname{tr}(M) &= x + z &\Longrightarrow z &= a - x \\ b &= \det(M) &= xz - y^2 &\Longrightarrow y &= \sqrt{ax - x^2 - b} \end{cases}$$

Entonces, la matriz M queda como:

$$M = \begin{pmatrix} x & \sqrt{ax - x^2 - b} \\ \sqrt{ax - x^2 - b} & a - x \end{pmatrix}$$

Como las entradas de M son reales, $\sqrt{ax - x^2 - b} \in \mathbb{R} \iff ax - x^2 - b \geqslant 0$.

$$ax - x^2 - b \geqslant 0 \iff x^2 - ax + b \leqslant 0$$

$$x^2 - ax + b = 0 \iff x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

$$x^2 - ax + b \leqslant 0 \iff \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Sin embargo, este parámetro x puede tomar infinitos valores para valores (a, b) tales que $a^2 - 4b > 0$. Solamente cuando ocurra que $a^2 - 4b = 0 \Longrightarrow a^2 = 4b$, el parámetro x tendrá un único valor, que será $x = \frac{a}{2}$. Entonces, la matriz M sería:

$$M = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$