Determina si existe algún número natural impar n y dos matrices $n \times n$ de entradas enteras A y B que satisfacen las siguientes condiciones:

1. $\det(B) = 1$.
2. $AB = BA$.
3. $A^4 + 4A^2B^2 + 16B^4 = 2019I$.

Solución:

Se cumple que

$$A^4 \equiv A^4 + 4A^2B^2 + 16B^4 = 2019I \pmod{4} \Longrightarrow A^4 \equiv 2019I \pmod{4}$$

Y entonces

$$\det(A^4) = (\det(A))^4 \equiv \det(2019I) = 2019^n \pmod{4}$$

Como n es impar, $2019^n \equiv 3 \pmod{4}$, y por tanto $(\det(A))^4 \equiv 2019^n \equiv 3 \pmod{4}$, pero 3 no es un residuo cuadrático módulo 4, por lo que no existen tales matrices A y B.