Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que g es diferenciable. Estas funciones satisfacen que $(f(0) - g'(0)) \cdot (g'(1) - f(1)) > 0$. Demuestra que existe un punto $c \in (0,1)$ tal que f(c) = g'(c).

Solución:

Sea
$$h(x) = \int_0^x f(t) dt - g(x)$$
.

Se tiene que h es una función continua. Y h'(x) = f(x) - g'(x). Por el teorema de los valores intermedios para derivadas (propiedad de Darboux), h'(x) toma todos los valores comprendidos entre h'(0) y h'(1).

La condición $(f(0) - g'(0)) \cdot (g'(1) - f(1)) > 0$ es equivalente a que $-h'(0) \cdot h'(1) > 0$. De esta condición se ve que h'(0) y h'(1) tienen signos opuestos, y por tanto, tiene que existir un punto $c \in (0, 1)$ tal que h'(c) = 0, es decir que f(c) = g'(c).