Sean $f, g : [a, b] \to [0, \infty)$ funciones continuas y no decrecientes tales que para cada $x \in [a, b]$ se tiene que

$$\int_a^x \sqrt{f(t)}\, \mathrm{d}t \leqslant \int_a^x \sqrt{g(t)}\, \mathrm{d}t$$

y que $\displaystyle\int_a^b \sqrt{f(t)}\, \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{g(t)}\, \mathrm{d}t$.

Prueba que

$$\int_a^b \sqrt{1 + f(t)}\, \mathrm{d}t \geqslant \int_a^b \sqrt{1 + g(t)}\, \mathrm{d}t$$

Solución:

Sean las funciones $F(x) = \displaystyle\int_a^x \sqrt{f(t)}\, \mathrm{d}t$ y $G(x) = \displaystyle\int_a^x \sqrt{g(t)}\, \mathrm{d}t$.

Se cumple que $f(x) = (F'(x))^2$ y que $g(x) = (G'(x))^2$, por lo que la desigualdad a probar es equivalente a

$$\int_a^b \sqrt{1 + (F'(x))^2}\, \mathrm{d}t \geqslant \int_a^b \sqrt{1 + (G'(x))^2}\, \mathrm{d}t$$

Es decir, hay que demostrar que la longitud de la gráfica de F entre a y b es mayor que la de G.

Sabiendo que $F'(x) = \sqrt{f(x)} \geqslant 0$ y que $F''(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \geqslant 0$ (ya que $f'(x) \geqslant 0$, debido a que f no es decreciente) se tiene que F es una función convexa. Lo mismo aplica para G.

Además, se sabe que $F(a) = G(a) = 0$, que $F(x) \leqslant G(x)$ para todo $x \in [a, b]$ y que $F(b) = G(b)$. Como ambas funciones son convexas, se cortan en $x = a$ y en $x = b$, y la función G está por encima de la función F, entonces la longitud de la gráfica de F será mayor que la de G, con lo que se demuestra la desigualdad del enunciado.