# Técnicas de integração

## Método de Simpson 1/3

Matheus Roos

Universidade Federal de Santa Maria

4 de agosto de 2022

# Definição de Método de Newton-Cotes fechado

- Definição: aproximar $f$ entre $-h$ e $-h$ por uma função que possa ser integrada exatamente.
- Supomos então que conhecemos $f$ em todos os pontos de uma rede igualmente espaçada, assim

$$f_n = f(x_n)\,; \qquad x_n = nh \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)\,.$$

- Utilizando a aproximação em série de Taylor para $f$

$$\begin{aligned} f(x) &\approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!} \left[ \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right]_{x=x_0} \\ &= f(x_0) + (x - x_0) \left( \frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x_0} + O\left( (x - x_0)^2 \right)\,. \end{aligned}$$

- Avaliando na vizinhança de $x_0 = 0$

$$f(x) \approx f_0 + x f' + \frac{x^2}{2!} f'' + \frac{x^3}{3!} f''' + \frac{x^4}{4!} f^{(iv)} + \dots$$

# Graficamente

- Podemos então definir

$$f_{\pm 1} = f\left(x = \pm h\right) \approx f_0 \pm hf' + \frac{h^2}{2!}f'' \pm \frac{h^3}{3!}f''' + O\left(h^4\right)$$

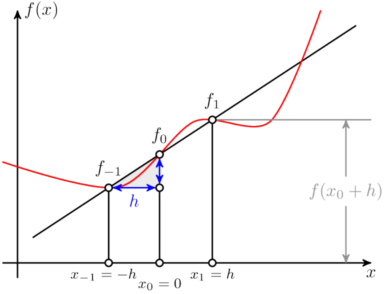


Figura: Figura inspirada de Computational Physics (Steve K.) e *tex* adaptado de Henri Menke.

# Regra dos retângulos

- Começamos supondo que $f$ possa ser aproximada por uma constante nos subintervalos de tamanho $h$, vide figura de exemplo.

$$f\left(x\right) \approx f\left(x_0\right) + \mathcal{O}\left(x\right) = f_0 + \mathcal{O}\left(x\right)$$

# Regra dos retângulos

- Começamos supondo que $f$ possa ser aproximada por uma constante nos subintervalos de tamanho $h$, vide figura de exemplo.

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathcal{O}(x) = f_0 + \mathcal{O}(x)$$

- Então devemos integrar, neste caso, no intervalo entre 0 e $h$:

$$\int_0^h f(x)\,dx = \int_0^{x_0} f(x)\,dx,$$

# Regra dos retângulos

- Começamos supondo que $f$ possa ser aproximada por uma constante nos subintervalos de tamanho $h$, vide figura de exemplo.

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathcal{O}(x) = f_0 + \mathcal{O}(x)$$

- Então devemos integrar, neste caso, no intervalo entre 0 e $h$:

$$\int_0^h f(x)\,dx = \int_0^{x_0} f(x)\,dx,$$

- substituímos a aproximação,

$$\int_0^h f(x)\,dx \approx \int_0^h \left[f_0 + \mathcal{O}(x)\right] dx,$$

# Regra dos retângulos

- Começamos supondo que $f$ possa ser aproximada por uma constante nos subintervalos de tamanho $h$, vide figura de exemplo.

$$f\left(x\right) \approx f\left(x_0\right) + \mathcal{O}\left(x\right) = f_0 + \mathcal{O}\left(x\right)$$

- Então devemos integrar, neste caso, no intervalo entre 0 e $h$:

$$\int_0^h f\left(x\right) dx = \int_0^{x_0} f\left(x\right) dx,$$

- substituímos a aproximação,

$$\int_0^h f\left(x\right) dx \approx \int_0^h \left[f_0 + \mathcal{O}\left(x\right)\right] dx,$$

- resultando em

$$\int_0^h f\left(x\right) dx \approx hf_0 + \mathcal{O}\left(h^2\right). \tag{1}$$

# Desenvolvendo a fórmula numérica

- Para implementarmos computacionalmente a integração através deste método, devemos antes, submeter a fórmula anterior no internalo $[a, b]$ a equação:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+h} f(x)\,dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)\,dx + \ldots + \int_{b-h}^{b} f(x)\,dx.$$

# Desenvolvendo a fórmula numérica

- Para implementarmos computacionalmente a integração através deste método, devemos antes, submeter a fórmula anterior no internalo $[a, b]$ a equação:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+h} f(x)\,dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)\,dx + \ldots + \int_{b-h}^{b} f(x)\,dx.$$

- Então utilizamos a Eq.(1)

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= hf(a) + hf(a+h) + hf(a+2h) \\ &\quad + \ldots + hf(b-h) + \mathcal{O}\left(h^2\right),\end{aligned}$$

# Desenvolvendo a fórmula numérica

- Para implementarmos computacionalmente a integração através deste método, devemos antes, submeter a fórmula anterior no internalo $[a, b]$ a equação:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+h} f(x)\,dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)\,dx + ... + \int_{b-h}^{b} f(x)\,dx.$$

- Então utilizamos a Eq.(1)

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= hf(a) + hf(a+h) + hf(a+2h) \\ &\quad + ... + hf(b-h) + \mathcal{O}\left(h^2\right),\end{aligned}$$

- ou então,

$$\int_a^b f(x)\,dx = hf(a) + h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \mathcal{O}\left(h^2\right).$$

# Desenvolvendo a fórmula numérica

- Para implementarmos computacionalmente a integração através deste método, devemos antes, submeter a fórmula anterior no internalo $[a, b]$ a equação:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+h} f(x)\,dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)\,dx + ... + \int_{b-h}^{b} f(x)\,dx.$$

- Então utilizamos a Eq.(1)

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= hf(a) + hf(a+h) + hf(a+2h) \\ &\quad + ... + hf(b-h) + \mathcal{O}\left(h^2\right),\end{aligned}$$

- ou então,

$$\int_a^b f(x)\,dx = hf(a) + h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \mathcal{O}\left(h^2\right).$$

- Onde $x_i = a + i \times h$.

# Regra dos trapézios

- Agora supomos que $f$ possa ser aproximada por uma reta nos subintervalos $[-h, h]$

$$f(x) \approx f_0 + xf' + \mathcal{O}\left(x^2\right).$$

# Regra dos trapézios

- Agora supomos que $f$ possa ser aproximada por uma reta nos subintervalos $[-h, h]$

$$f(x) \approx f_0 + xf' + \mathcal{O}\left(x^2\right).$$

- Então integramos no intervalo entre $-h$ e $h$, dividindo o intervalo de integração :

$$\int_{-h}^{h} f(x)\, dx = \int_{-h}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{h} f(x)\, dx$$

# Regra dos trapézios

- Agora supomos que $f$ possa ser aproximada por uma reta nos subintervalos $[-h, h]$

$$f(x) \approx f_0 + xf' + \mathcal{O}\left(x^2\right).$$

- Então integramos no intervalo entre $-h$ e $h$, dividindo o intervalo de integração :

$$\int_{-h}^{h} f(x)\, dx = \int_{-h}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{h} f(x)\, dx$$

- Substituímos a aproximação,

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{h} f(x)\, dx \quad \approx & \quad \int_{x_{-1}}^{x_0} \left[ f_0 + x\frac{f_0 - f_{-1}}{h} + \mathcal{O}\left(x^2\right)\right] dx \\ & + \int_{x_0}^{x_1} \left[ f_0 + x\frac{f_1 - f_0}{h} + \mathcal{O}\left(x^2\right)\right] dx. \end{aligned}$$

- Resultando em

$$
\begin{aligned}
\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \quad &\approx \quad [0-(-h)]\,f_0 + \frac{f_0 - f_{-1}}{h}\frac{0^2-(-h)^2}{2} \\
&\quad + (h-0)\,f_0 + \frac{f_1 - f_0}{h}\left[\frac{h^2-0^0}{2}\right] + \mathcal{O}\left(h^3\right).
\end{aligned}
$$

- Resultando em

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \approx [0-(-h)]\,f_0 + \frac{f_0 - f_{-1}}{h}\frac{0^2-(-h)^2}{2} + (h-0)\,f_0 + \frac{f_1 - f_0}{h}\left[\frac{h^2-0^0}{2}\right] + \mathcal{O}\left(h^3\right).$$

- Chegamos em

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left(f_{-1} + 2f_0 + f_1\right) + \mathcal{O}\left(h^3\right). \tag{2}$$

# Desenvolvendo a fórmula numérica

- Novamente, devemos submeter nossa fórmula à

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+h} f(x)\,dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)\,dx + \ldots + \int_{b-h}^{b} f(x)\,dx.$$

# Desenvolvendo a fórmula numérica

- Novamente, devemos submeter nossa fórmula à

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+h} f(x)\,dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)\,dx + \ldots + \int_{b-h}^{b} f(x)\,dx.$$

- Mas há um detalhe sutil, de que, agora temos a exigência de $n$ subintervalos pares.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+2h} f(x)\,dx + \int_{a+2h}^{a+4h} f(x)\,dx + \ldots + \int_{b-2h}^{b} f(x)\,dx.$$

# Desenvolvendo a fórmula numérica

- Novamente, devemos submeter nossa fórmula à

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+h} f(x)\,dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)\,dx + ... + \int_{b-h}^{b} f(x)\,dx.$$

- Mas há um detalhe sutil, de que, agora temos a exigência de $n$ subintervalos pares.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+2h} f(x)\,dx + \int_{a+2h}^{a+4h} f(x)\,dx + ... + \int_{b-2h}^{b} f(x)\,dx.$$

- Então utilizamos a Eq.(2)

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{h}{2}\left[f(a) + 2f(a+h) + f(a+2h)\right] \\ &+ \frac{h}{2}\left[f(a+2h) + 2f(a+3h) + f(a+4h)\right] \\ &+ ... + \frac{h}{2}\left[f(b-2h) + 2f(b-h) + f(b)\right] + \mathcal{O}\left(h^3\right).\end{aligned}$$

- Agrupando os termos em comum,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{h}{2}\left[f(a)+2f(a+h)+(2)\,f(a+2h)\right]\\ &+\frac{h}{2}\left[2f(a+3h)+f(a+4h)\right]\\ &+...+\frac{h}{2}\left[f(b-2h)+2f(b-h)+f(b)\right]+\mathcal{O}\left(h^3\right).\end{aligned}$$

- Agrupando os termos em comum,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{h}{2}\left[f(a) + 2f(a+h) + (2)\,f(a+2h)\right] \\ &+ \frac{h}{2}\left[2f(a+3h) + f(a+4h)\right] \\ &+ ... + \frac{h}{2}\left[f(b-2h) + 2f(b-h) + f(b)\right] + \mathcal{O}\left(h^3\right).\end{aligned}$$

- Rearranjando,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right] + \mathcal{O}\left(h^3\right).$$

- Agrupando os termos em comum,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{h}{2}\left[f(a)+2f(a+h)+(2)\,f(a+2h)\right] \\ &+\frac{h}{2}\left[2f(a+3h)+f(a+4h)\right] \\ &+\ldots+\frac{h}{2}\left[f(b-2h)+2f(b-h)+f(b)\right]+\mathcal{O}\left(h^3\right).\end{aligned}$$

- Rearranjando,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(b)\right]+\mathcal{O}\left(h^3\right).$$

- Lembrando que, $x_i = a + i \times h$

# Desenvolvendo a fórmula

- Agora supomos que $f$ possa ser aproximada por uma parábola nos subintervalos $[-h, h]$

$$
\begin{aligned}
f(x) &\approx f_0 + xf' + \frac{x^2}{2!}f'' + \mathcal{O}\left(x^3\right) \\
&\approx f_0 + x\frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + \frac{x^2}{2}\frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + \mathcal{O}\left(x^3\right). \qquad (3)
\end{aligned}
$$

# Desenvolvendo a fórmula

- Agora supomos que $f$ possa ser aproximada por uma parábola nos subintervalos $[-h, h]$

$$
\begin{aligned}
f(x) &\approx f_0 + xf' + \frac{x^2}{2!} f'' + \mathcal{O}\left(x^3\right) \\
&\approx f_0 + x\frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + \frac{x^2}{2}\frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + \mathcal{O}\left(x^3\right). \qquad (3)
\end{aligned}
$$

- Então integramos no intervalo entre $-h$ e $h$, substituindo a aproximação Eq.(3),

$$
\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \approx \left[x f_0 + \frac{x^2}{2}\frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + \frac{x^3}{3!}\frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}\right]_{-h}^{h} + \mathcal{O}\left(h^5\right)
$$

# Desenvolvendo a fórmula

- Agora supomos que $f$ possa ser aproximada por uma parábola nos subintervalos $[-h, h]$

$$
\begin{aligned}
f(x) &\approx f_0 + x f' + \frac{x^2}{2!} f'' + \mathcal{O}\left(x^3\right) \\
&\approx f_0 + x \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + \frac{x^2}{2} \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + \mathcal{O}\left(x^3\right). \qquad (3)
\end{aligned}
$$

- Então integramos no intervalo entre $-h$ e $h$, substituindo a aproximação Eq.(3),

$$
\int_{-h}^{h} f(x)\, dx \approx \left[ x f_0 + \frac{x^2}{2} \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + \frac{x^3}{3!} \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} \right]_{-h}^{h} + \mathcal{O}\left(h^5\right)
$$

- Resultando em

$$
\int_{-h}^{h} f(x)\, dx \approx h \frac{f_1 + 4f_0 + f_{-1}}{3} + \mathcal{O}\left(h^5\right) \qquad (4)
$$

# Desenvolvendo a fórmula numérica

- Submetendo nossa fórmula à

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+2h} f(x)\,dx + \int_{a+2h}^{a+4h} f(x)\,dx + \ldots + \int_{b-2h}^{b} f(x)\,dx.$$

# Desenvolvendo a fórmula numérica

- Submetendo nossa fórmula à

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+2h} f(x)\,dx + \int_{a+2h}^{a+4h} f(x)\,dx + ... + \int_{b-2h}^{b} f(x)\,dx.$$

- Então utilizamos a Eq.(4)

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)\right] \\ &+ \frac{h}{3}\left[f(a+2h) + 4f(a+3h) + f(a+4h)\right] \\ &+ \frac{h}{3}\left[f(a+4h) + 4f(a+5h) + f(a+6h)\right] \\ &+ ... + \frac{h}{3}\left[f(b-2h) + 4f(b-h) + f(b)\right] + \mathcal{O}\left(h^5\right).\end{aligned}$$

- Agrupando os termos em comum,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{h}{3}\left[f(a)+4f(a+h)+(2)\,f(a+2h)\right]\\ &+\frac{h}{3}\left[4f(a+3h)+(2)\,f(a+4h)\right]\\ &+\frac{h}{3}\left[4f(a+5h)+f(a+6h)\right]\\ &+\ldots+\frac{h}{3}\left[f(b-2h)+4f(b-h)+f(b)\right]+\mathcal{O}\left(h^5\right).\end{aligned}$$

- Agrupando os termos em comum,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{h}{3}\left[f(a)+4f(a+h)+(2)f(a+2h)\right] \\ &+\frac{h}{3}\left[4f(a+3h)+(2)f(a+4h)\right] \\ &+\frac{h}{3}\left[4f(a+5h)+f(a+6h)\right] \\ &+\ldots+\frac{h}{3}\left[f(b-2h)+4f(b-h)+f(b)\right]+\mathcal{O}\left(h^5\right).\end{aligned}$$

- Rearranjando,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{h}{3}\left[f(a)+4\left(\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)_{\acute{\imath}mpar}\right] \\ &+\frac{h}{3}\left[2\left(\sum_{i=2}^{n-2} f(x_i)\right)_{par}+f(b)\right]+\mathcal{O}\left(h^5\right),\end{aligned}$$

- Agrupando os termos em comum,

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(a+h) + (2)\,f(a+2h)\right] \\
&+ \frac{h}{3}\left[4f(a+3h) + (2)\,f(a+4h)\right] \\
&+ \frac{h}{3}\left[4f(a+5h) + f(a+6h)\right] \\
&+ \ldots + \frac{h}{3}\left[f(b-2h) + 4f(b-h) + f(b)\right] + \mathcal{O}\left(h^5\right).
\end{aligned}
$$

- Rearranjando,

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\left(\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)_{ímpar}\right] \\
&+ \frac{h}{3}\left[2\left(\sum_{i=2}^{n-2} f(x_i)\right)_{par} + f(b)\right] + \mathcal{O}\left(h^5\right),
\end{aligned}
$$

- onde $x_i = a + i \times h$.

Compléments de Mathématiques, André Angot.

| n | $H_0$ | $H_1$ | $H_2$ | $H_3$ | $H_4$ | $\mathcal{O}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | | | | $\mathcal{O}\left(h^3\right)$ |
| 2 | $1/3$ | $4/3$ | $1/3$ | | | $\mathcal{O}\left(h^5\right)$ |
| 3 | $1/4$ | $3/4$ | $3/4$ | $1/4$ | | $\mathcal{O}\left(h^5\right)$ |
| 4 | $7/45$ | $32/45$ | $12/45$ | $32/45$ | $7/45$ | $\mathcal{O}\left(h^7\right)$ |
| 5 | $19/144$ | $75/144$ | $50/144$ | $50/144$ | ... | $\mathcal{O}\left(h^7\right)$ |
| 6 | $41/420$ | $216/420$ | $27/420$ | $272/420$ | ... | $\mathcal{O}\left(h^9\right)$ |
| 7 | $\frac{751}{8640}$ | $\frac{3577}{8640}$ | $\frac{1323}{8640}$ | $\frac{2989}{8640}$ | ... | $\mathcal{O}\left(h^9\right)$ |
| 8 | $\frac{989}{14175}$ | $\frac{5888}{14175}$ | $\frac{-928}{14175}$ | $\frac{10496}{14175}$ | ... | $\mathcal{O}\left(h^{11}\right)$ |

## Funções de Teste

- Função quadrática:

$$\int_{1,5}^{3} 3x^2 dx = (x^3)\big|_{1,5}^{3} = 23,625 \quad .$$

- Função oscilatória:

$$\int_{1,5}^{3} \cos(2t) dt = \frac{1}{2} sen(2t)\bigg|_{1,5}^{3} = -0,21026 \quad .$$

- Função exponencial:

$$\int_{1,5}^{3} e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}\bigg|_{1,5}^{3} = 191,67192 \quad .$$

- Função logarítmica:

$$\int_{1,5}^{3} \ln(2x) dx = x(\ln(2) + \ln(x))\big|_{1,5}^{3} = 2,22735 \quad .$$