Técnicas de integração

Método de Simpson $1/3$

Matheus Roos

Universidade Federal de Santa Maria

31 de julho de 2022

1. Método fechado de Newton-Cotes

2. Partindo dos métodos já conhecidos
   - Regra dos retângulos
   - Regra dos trapézios

3. O Método de Simpson 1/3
   - Desenvolvendo a fórmula

Definição de Método fechado de Newton-Cotes

- Definição: aproximar f entre $-h$ e $-h$ por uma função que possa ser integrada exatamente.
- Supomos então que conhecemos f em todos os pontos de uma rede igualmente espaçada, assim

$$f_n = f(x_n); \qquad x_n = nh \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

- Utilizando a aproximação em série de Taylor para f

$$\begin{aligned} f(x) &\approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!} \left[\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right]_{x=x_0} \\ &= f(x_0) + (x - x_0) \left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0} + O\left((x - x_0)^2\right). \end{aligned}$$

- Avaliando na vizinhança de $x_0 = 0$

$$f(x) \approx f_0 + xf' + \frac{x^2}{2!} f'' + \frac{x^3}{3!} f''' + \frac{x^4}{4!} f^{(iv)} \ldots$$

Graficamente

- Podemos então definir

$$f_{\pm 1} = f\left(x = \pm h\right) \approx f_0 \pm hf' + \frac{h^2}{2!}f'' \pm \frac{h^3}{3!}f''' + O\left(h^4\right)$$

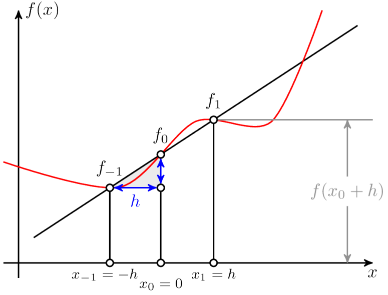

Figura: Figura inspirada de Computational Physics (Steve K.) e *tex* adaptado de Henri Menke.

Regra dos retângulos

- Começamos supondo que f possa ser aproximada por uma constante nos subintervalos de tamanho h, vide figura de exemplo.

$$f\left(x\right) \approx f\left(x_0\right) + \mathcal{O}\left(x\right) = f_0 + \mathcal{O}\left(x\right)$$

Regra dos retângulos

- Começamos supondo que f possa ser aproximada por uma constante nos subintervalos de tamanho h, vide figura de exemplo.

$$f\left(x\right) \approx f\left(x_0\right) + \mathcal{O}\left(x\right) = f_0 + \mathcal{O}\left(x\right)$$

- Então devemos integrar, neste caso, no intervalo entre 0 e h:

$$\int_0^h f\left(x\right) dx = \int_{x_0}^{x_1} f\left(x\right) dx,$$

Regra dos retângulos

- Começamos supondo que f possa ser aproximada por uma constante nos subintervalos de tamanho h, vide figura de exemplo.

$$f\left(x\right) \approx f\left(x_0\right) + \mathcal{O}\left(x\right) = f_0 + \mathcal{O}\left(x\right)$$

- Então devemos integrar, neste caso, no intervalo entre 0 e h:

$$\int_0^h f\left(x\right) dx = \int_{x_0}^{x_1} f\left(x\right) dx,$$

- substituímos a aproximação,

$$\int_0^h f\left(x\right) dx \approx \int_0^h \left[f_0 + \mathcal{O}\left(x\right)\right] dx,$$

Regra dos retângulos

- Começamos supondo que f possa ser aproximada por uma constante nos subintervalos de tamanho h, vide figura de exemplo.

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathcal{O}(x) = f_0 + \mathcal{O}(x)$$

- Então devemos integrar, neste caso, no intervalo entre 0 e h:

$$\int_0^h f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx,$$

- substituímos a aproximação,

$$\int_0^h f(x)\,dx \approx \int_0^h \left[f_0 + \mathcal{O}(x)\right] dx,$$

- resultando em

$$\int_0^h f(x)\,dx \approx hf_0 + \mathcal{O}\left(h^2\right). \tag{1}$$

Desenvolvendo a fórmula numérica

- Para implementarmos computacionalmente a integração através deste método, devemos antes, submeter a fórmula anterior no internalo $[a, b]$ a equação:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+h} f(x)\,dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)\,dx + ... + \int_{b-h}^{b} f(x)\,dx.$$

Desenvolvendo a fórmula numérica

- Para implementarmos computacionalmente a integração através deste método, devemos antes, submeter a fórmula anterior no internalo $[a, b]$ a equação:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+h} f(x)\,dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)\,dx + \ldots + \int_{b-h}^{b} f(x)\,dx.$$

- Então utilizamos a Eq.(1)

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= hf(a) + hf(a+h) + hf(a+2h) \\ &\quad + \ldots + hf(b-h) + \mathcal{O}\left(h^2\right),\end{aligned}$$

Desenvolvendo a fórmula numérica

- Para implementarmos computacionalmente a integração através deste método, devemos antes, submeter a fórmula anterior no internalo $[a, b]$ a equação:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+h} f(x)\,dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)\,dx + ... + \int_{b-h}^{b} f(x)\,dx.$$

- Então utilizamos a Eq.(1)

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= hf(a) + hf(a+h) + hf(a+2h) \\ &\quad + ... + hf(b-h) + \mathcal{O}\left(h^2\right),\end{aligned}$$

- ou então,

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \mathcal{O}\left(h^2\right).$$

Desenvolvendo a fórmula numérica

- Para implementarmos computacionalmente a integração através deste método, devemos antes, submeter a fórmula anterior no internalo $[a, b]$ a equação:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+h} f(x)\,dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)\,dx + \ldots + \int_{b-h}^{b} f(x)\,dx.$$

- Então utilizamos a Eq.(1)

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= hf(a) + hf(a+h) + hf(a+2h) \\ &\quad + \ldots + hf(b-h) + \mathcal{O}\left(h^2\right), \end{aligned}$$

- ou então,

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \mathcal{O}\left(h^2\right).$$

- Onde $x_i = x_0 + i \times h$.

Regra dos trapézios

- Agora supomos que f possa ser aproximada por uma reta nos subintervalos $[-h, h]$

$$f(x) \approx f_0 + xf' + \mathcal{O}\left(x^2\right).$$

Regra dos trapézios

- Agora supomos que f possa ser aproximada por uma reta nos subintervalos $[-h, h]$

$$f(x) \approx f_0 + xf' + \mathcal{O}\left(x^2\right).$$

- Então integramos no intervalo entre $-h$ e h, dividindo o intervalo de integração :

$$\int_{-h}^{h} f(x)\, dx = \int_{-h}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{h} f(x)\, dx$$

Regra dos trapézios

- Agora supomos que f possa ser aproximada por uma reta nos subintervalos $[-h, h]$

$$f(x) \approx f_0 + xf' + \mathcal{O}\left(x^2\right).$$

- Então integramos no intervalo entre $-h$ e h, dividindo o intervalo de integração :

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx = \int_{-h}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{h} f(x)\,dx$$

- Substituímos a aproximação,

$$\begin{aligned}\int_{-h}^{h} f(x)\,dx &\approx \int_{x_{-1}}^{x_0}\left[f_0 + x\frac{f_0 - f_{-1}}{h} + \mathcal{O}\left(x^2\right)\right]dx \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_1}\left[f_0 + x\frac{f_1 - f_0}{h} + \mathcal{O}\left(x^2\right)\right]dx.\end{aligned}$$

- Resultando em

$$
\begin{aligned}
\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \quad &\approx \quad [0-(-h)]\,f_0 + \frac{f_0 - f_{-1}}{h}\frac{0^2-(-h)^2}{2} \\
&\quad + (h-0)\,f_0 + \frac{f_1 - f_0}{h}\left[\frac{h^2-0^0}{2}\right] + \mathcal{O}\left(h^3\right).
\end{aligned}
$$

- Resultando em

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \approx [0-(-h)]\,f_0 + \frac{f_0 - f_{-1}}{h}\frac{0^2-(-h)^2}{2} + (h-0)\,f_0 + \frac{f_1 - f_0}{h}\left[\frac{h^2-0^0}{2}\right] + \mathcal{O}\left(h^3\right).$$

- Chegamos em

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left(f_{-1} + 2f_0 + f_1\right) + \mathcal{O}\left(h^3\right). \qquad (2)$$

Desenvolvendo a fórmula numérica

- Novamente, devemos submeter nossa fórmula à

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+h} f(x)\,dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)\,dx + ... + \int_{b-h}^{b} f(x)\,dx.$$

Desenvolvendo a fórmula numérica

- Novamente, devemos submeter nossa fórmula à

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+h} f(x)\,dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)\,dx + ... + \int_{b-h}^{b} f(x)\,dx.$$

- Mas há um detalhe sutil, de que, agora temos a exigência de n subintervalos pares.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+2h} f(x)\,dx + \int_{a+2h}^{a+4h} f(x)\,dx + ... + \int_{b-2h}^{b} f(x)\,dx.$$

Desenvolvendo a fórmula numérica

- Novamente, devemos submeter nossa fórmula à

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+h} f(x)\,dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)\,dx + ... + \int_{b-h}^{b} f(x)\,dx.$$

- Mas há um detalhe sutil, de que, agora temos a exigência de n subintervalos pares.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+2h} f(x)\,dx + \int_{a+2h}^{a+4h} f(x)\,dx + ... + \int_{b-2h}^{b} f(x)\,dx.$$

- Então utilizamos a Eq.(2)

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{h}{2}\left[f(a) + 2f(a+h) + f(a+2h)\right] \\ &\quad + \frac{h}{2}\left[f(a+2h) + 2f(a+3h) + f(a+4h)\right] \\ &\quad + ... + \frac{h}{2}\left[f(b-2h) + 2f(b-h) + f(b)\right] + \mathcal{O}\left(h^5\right).\end{aligned}$$

- Agrupando os termos em comum,

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{h}{2}\left[f(a) + 2f(a+h) + (2)\,f(a+2h)\right] \\
&\quad + \frac{h}{2}\left[+2f(a+3h) + f(a+4h)\right] \\
&\quad + \ldots + \frac{h}{2}\left[f(b-2h) + 2f(b-h) + f(b)\right] + \mathcal{O}\left(h^5\right).
\end{aligned}
$$

- Agrupando os termos em comum,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{h}{2}\left[f(a)+2f(a+h)+(2)\,f(a+2h)\right] \\ &+\frac{h}{2}\left[+2f(a+3h)+f(a+4h)\right] \\ &+\ldots+\frac{h}{2}\left[f(b-2h)+2f(b-h)+f(b)\right]+\mathcal{O}\left(h^5\right).\end{aligned}$$

- Rearranjando,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(x_n)\right]+\mathcal{O}\left(h^5\right).$$

- Agrupando os termos em comum,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{h}{2}\left[f(a) + 2f(a+h) + (2)\,f(a+2h)\right] \\ &+ \frac{h}{2}\left[+2f(a+3h) + f(a+4h)\right] \\ &+ \ldots + \frac{h}{2}\left[f(b-2h) + 2f(b-h) + f(b)\right] + \mathcal{O}\left(h^5\right).\end{aligned}$$

- Rearranjando,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right] + \mathcal{O}\left(h^5\right).$$

- Lembrando que, $x_i = x_0 + i \times h$, x_0 é o limite inferior e x_n é o limite superior.

Desenvolvendo a fórmula

- Agora supomos que f possa ser aproximada por uma parábola nos subintervalos $[-h, h]$

$$
\begin{aligned}
f(x) &\approx f_0 + xf' + \frac{x^2}{2!}f'' + \mathcal{O}\left(x^3\right) \\
&\approx f_0 + x\frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + \frac{x^2}{2}\frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + \mathcal{O}\left(x^3\right). \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Desenvolvendo a fórmula

- Agora supomos que f possa ser aproximada por uma parábola nos subintervalos $[-h, h]$

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f_0 + xf' + \frac{x^2}{2!} f'' + \mathcal{O}\left(x^3\right) \\ &\approx f_0 + x \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + \frac{x^2}{2} \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + \mathcal{O}\left(x^3\right). \end{aligned} \tag{3}$$

- Então integramos no intervalo entre $-h$ e h, substituindo a aproximação Eq.(3),

$$\int_{-h}^{h} f(x)\, dx \approx \left[xf_0 + \frac{x^2}{2} \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + \frac{x^3}{3!} \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} \right]_{-h}^{h} + \mathcal{O}\left(h^5\right)$$

Desenvolvendo a fórmula

- Agora supomos que f possa ser aproximada por uma parábola nos subintervalos $[-h, h]$

$$
\begin{aligned}
f(x) &\approx f_0 + xf' + \frac{x^2}{2!}f'' + \mathcal{O}\left(x^3\right) \\
&\approx f_0 + x\frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + \frac{x^2}{2}\frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + \mathcal{O}\left(x^3\right). \qquad (3)
\end{aligned}
$$

- Então integramos no intervalo entre $-h$ e h, substituindo a aproximação Eq.(3),

$$
\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \approx \left[xf_0 + \frac{x^2}{2}\frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + \frac{x^3}{3!}\frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}\right]_{-h}^{h} + \mathcal{O}\left(h^5\right)
$$

- Resultando em

$$
\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \approx h\frac{f_1 + 4f_0 + f_{-1}}{3} + \mathcal{O}\left(h^5\right) \qquad (4)
$$

Desenvolvendo a fórmula numérica

- Submetendo nossa fórmula à

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+2h} f(x)\,dx + \int_{a+2h}^{a+4h} f(x)\,dx + \ldots + \int_{b-2h}^{b} f(x)\,dx.$$

Desenvolvendo a fórmula numérica

- Submetendo nossa fórmula à

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+2h} f(x)\,dx + \int_{a+2h}^{a+4h} f(x)\,dx + ... + \int_{b-2h}^{b} f(x)\,dx.$$

- Então utilizamos a Eq.(4)

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)\right] \\
&+ \frac{h}{3}\left[f(a+2h) + 4f(a+3h) + f(a+4h)\right] \\
&+ \frac{h}{3}\left[f(a+4h) + 4f(a+5h) + f(a+6h)\right] \\
&+ ... + \frac{h}{3}\left[f(b-2h) + 4f(b-h) + f(b)\right] + \mathcal{O}\left(h^5\right).
\end{aligned}$$

- Agrupando os termos em comum,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{h}{3}\left[f(a)+4f(a+h)+(2)\,f(a+2h)\right]\\ &+\frac{h}{3}\left[4f(a+3h)+(2)\,f(a+4h)\right]\\ &+\frac{h}{3}\left[4f(a+5h)+f(a+6h)\right]\\ &+\ldots+\frac{h}{3}\left[f(b-2h)+4f(b-h)+f(b)\right]+\mathcal{O}\left(h^5\right).\end{aligned}$$

- Agrupando os termos em comum,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{h}{3}\left[f(a)+4f(a+h)+(2)\,f(a+2h)\right]\\ &+\frac{h}{3}\left[4f(a+3h)+(2)\,f(a+4h)\right]\\ &+\frac{h}{3}\left[4f(a+5h)+f(a+6h)\right]\\ &+\ldots+\frac{h}{3}\left[f(b-2h)+4f(b-h)+f(b)\right]+\mathcal{O}\left(h^5\right).\end{aligned}$$

- Rearranjando,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4\left(\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)_{ímpar}\right]\\ &+\frac{h}{3}\left[2\left(\sum_{i=2}^{n-2} f(x_i)\right)_{par}+f(x_n)\right]+\mathcal{O}\left(h^5\right),\end{aligned}$$

- Agrupando os termos em comum,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(a+h) + (2)\,f(a+2h)\right] \\ &+\frac{h}{3}\left[4f(a+3h) + (2)\,f(a+4h)\right] \\ &+\frac{h}{3}\left[4f(a+5h) + f(a+6h)\right] \\ &+\ldots+\frac{h}{3}\left[f(b-2h) + 4f(b-h) + f(b)\right] + \mathcal{O}\left(h^5\right).\end{aligned}$$

- Rearranjando,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\left(\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)_{\acute{\imath}mpar}\right] \\ &+\frac{h}{3}\left[2\left(\sum_{i=2}^{n-2} f(x_i)\right)_{par} + f(x_n)\right] + \mathcal{O}\left(h^5\right),\end{aligned}$$

- onde $x_0 = a$, $x_i = x_0 + i \times h$, $x_n = b$.

Compléments de Mathématiques, André Angot.

n	H_0	H_1	H_2	H_3	H_4	$\mathcal{O}$
1	1	1				$\mathcal{O}\left(h^3\right)$
2	$1/3$	$4/3$	$1/3$			$\mathcal{O}\left(h^5\right)$
3	$1/4$	$3/4$	$3/4$	$1/4$		$\mathcal{O}\left(h^5\right)$
4	$7/45$	$32/45$	$12/45$	$32/45$	$7/45$	$\mathcal{O}\left(h^7\right)$
5	$19/144$	$75/144$	$50/144$	$50/144$	...	$\mathcal{O}\left(h^7\right)$
6	$41/420$	$216/420$	$27/420$	$272/420$	...	$\mathcal{O}\left(h^9\right)$
7	$\frac{751}{8640}$	$\frac{3577}{8640}$	$\frac{1323}{8640}$	$\frac{2989}{8640}$	...	$\mathcal{O}\left(h^9\right)$
8	$\frac{989}{14175}$	$\frac{5888}{14175}$	$\frac{-928}{14175}$	$\frac{10496}{14175}$	...	$\mathcal{O}\left(h^{11}\right)$

Funções de Teste

- Função oscilatória

$$\int_0^{1,5} \cos(2t)dt = \frac{1}{2}sen(2t)\bigg|_0^{2,55} = 0,07056 \quad .$$

- Função exponencial

$$\int_0^{1,5} e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\bigg|_0^{1,5} = 9,54280 \quad .$$

- Função logarítmica

$$\int_{1,5}^{3} \ln(2x)dx = x(\ln(2) + \ln(x) - 1)|_{1,5}^{3} = 2,2274 \quad .$$