(Q1) $x-3y-4z=0$, $A=[1\ -3\ -4]$

Finding null space of A we get $A=\begin{matrix} x & y & z \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$

y and z are free variables $y=t_1$, $z=t_2$

$\Rightarrow x=3t_1+4t_2$

$(x,y,z)=(3t_1+4t_2, t_1, t_2)=t_1(3,1,0)+t_2(4,0,1)$

Null space of A $=\{(3,1,0),(4,0,1)\}$

Finding the row space of A we get $A=[1\ -3\ -4]$

row space $=\{(1,-3,-4)\}$

$\Rightarrow$ dimention of null space $=2$

dimention of rowspace $=1$

(Q2) $2x+3y=5$, $-x+y=6$, $x+4y=a$

Forming the augmented matrix we get,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2\to R_2+R_1/2 \\ R_3\to R_3-R_1/2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 5/2 & 17/2 \\ 0 & 5/2 & a-5/2 \end{bmatrix} R_3\to R_3-R_2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 5/2 & 17/2 \\ 0 & 0 & a-22/2 \end{bmatrix}$$

for the system to be consistent

Rank(A) + Rank([A|B])

$\Rightarrow \boxed{a\neq 11}$ - (system to be inconsistent)

suppose $a=6$ we get: we know that system is inconsistent

$2x+3y=5$, $-x+y=6$, $x+4y=6$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Applying least square method we get:

$A^TA\hat{x}=A^TB$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 26 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 \\ 45 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow 6x+9y=10$, $9x+26y=45$

$\Rightarrow y=12/5$, $x=-58/30$

$2x+3y=\frac{-58}{30}\times 2+\frac{58}{30}\times 3=10/3$

$-x+y=-58/30+12/5=13/3$

$x+4y=\frac{-58}{30}+48/5=23/3$

11(b) $-(A\hat{x})\| = \left\|\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 10/3 \\ 13/3 \\ 23/3 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 5/3 \\ 5/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}\right\|$

$= \sqrt{\frac{25}{9} \times 3} = \frac{5}{\sqrt{3}}$, Hence the error of solution is 2.88

Question 3

(a) CHENNAI i) $K_1 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

C H E N N A I Z → CH $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 23 \\ 18 \end{bmatrix} \% 26$

23 18 21 12 12 25 17 0

$= \begin{bmatrix} 164 \\ 93 \end{bmatrix} \% 26 = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ K \end{bmatrix} \rightarrow RK$

* EN $= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \\ 12 \end{bmatrix} \% 26 = \begin{bmatrix} 132 \\ 135 \end{bmatrix} \% 26 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ U \end{bmatrix}$

* NA $= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 25 \end{bmatrix} \% 26 = \begin{bmatrix} 148 \\ 186 \end{bmatrix} \% 26 = \begin{bmatrix} 18 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ V \end{bmatrix}$

* IZ $= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 \\ 6 \end{bmatrix} \% 26 = \begin{bmatrix} 68 \\ 51 \end{bmatrix} \% 26 = \begin{bmatrix} 16 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ A \end{bmatrix}$

∴ CHENNAI → RKXUHVI

ii) $K_2 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

* CH $= \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 23 \\ 18 \end{bmatrix} \% 26 = \begin{bmatrix} 187 \\ 131 \end{bmatrix} \% 26 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ Y \end{bmatrix} \rightarrow U, Y$

* EN $= \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \\ 12 \end{bmatrix} \% 26 = \begin{bmatrix} 153 \\ 93 \end{bmatrix} \% 26 = \begin{bmatrix} 23 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ K \end{bmatrix}$

* NA $= \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 25 \end{bmatrix} \% 26 = \begin{bmatrix} 160 \\ 162 \end{bmatrix} \% 26 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ T \end{bmatrix}$

* IZ $= \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 \\ 6 \end{bmatrix} \% 26 = \begin{bmatrix} 85 \\ 17 \end{bmatrix} \% 26 = \begin{bmatrix} 7 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \\ I \end{bmatrix}$

∴ CHENNAI → UYCKVTS

iii) $K_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

* CH $= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 23 \\ 18 \end{bmatrix} \% 26 = \begin{bmatrix} 105 \\ 77 \end{bmatrix} \% 26 = \begin{bmatrix} 1 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ A \end{bmatrix}$

* EN $= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \\ 12 \end{bmatrix} \% 26 = \begin{bmatrix} 87 \\ 57 \end{bmatrix} \% 26 = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ U \end{bmatrix}$

* NA $= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 25 \end{bmatrix} \% 26 = \begin{bmatrix} 86 \\ 87 \end{bmatrix} \% 26 = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ Q \end{bmatrix}$

* IZ $= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 \\ 6 \end{bmatrix} \% 26 = \begin{bmatrix} 51 \\ 17 \end{bmatrix} \% 26 = \begin{bmatrix} 25 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix}$

∴ CHENNAI → YAQURQA

B) OFGUIH $K = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ cipher text to plain text

$K^{-1} = 1/5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ ∴ $(A+B) \% 26 = 0$

$K^{-1} = 1/5 \begin{bmatrix} 1 & 25 \\ 24 & 7 \end{bmatrix}$ ∴ $(A \cdot B) \% 26 = 1$

$K^{-1} = 21 \begin{bmatrix} 1 & 25 \\ 24 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 525 \\ 504 & 147 \end{bmatrix} \% 26$

$K^{-1} = \begin{bmatrix} 21 & 5 \\ 10 & 17 \end{bmatrix}$

$k^{-1} \bmod 26$

* OF $\Rightarrow \begin{bmatrix} 21 & 5 \\ 10 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 20 \end{bmatrix} \% 26 = \begin{bmatrix} 331 \\ 450 \end{bmatrix} \% 26 = \begin{bmatrix} 19 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ R \end{bmatrix}$

* GU $\Rightarrow \begin{bmatrix} 21 & 5 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ 5 \end{bmatrix} \% 26 = \begin{bmatrix} 424 \\ 275 \end{bmatrix} \% 26 = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ K \end{bmatrix}$

IH $\Rightarrow \begin{bmatrix} 21 & 5 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 \\ 18 \end{bmatrix} \% 26 = \begin{bmatrix} 447 \\ 476 \end{bmatrix} \% 26 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ K \end{bmatrix}$

OFGUIH $\Rightarrow$ GRRKURR

Question 4 $f = [5, 9, 4, 6, 3, 7, 8, 8, 5, 9, 3, 0, 2, 2, 4, 5]$

$q_1 = \{ \frac{14}{\sqrt{2}}, \frac{10}{\sqrt{2}}, \frac{10}{\sqrt{2}}, \frac{16}{\sqrt{2}}, \frac{14}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{9}{\sqrt{2}} \}$

$d_1 = \{ -4/\sqrt{2}, \frac{-2}{\sqrt{2}}, -4/\sqrt{2}, 0, -4/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2} \}$

Inverse Transformation $f_{2m-1} = \frac{q_m + d_m}{\sqrt{2}}$

$f_{2m} = \frac{q_m - d_m}{\sqrt{2}}$

$f = \{ 5, 9, 4, 6, 3, 7, 8, 8, 5, 9, 3, 0, 2, 2, 4, 5 \}$