实验六 DLP问题和DH密钥交换协议

> 17341125 蒙亚愿 信息安全

一、实验目的

> 了解DLP问题的挑战性和DH密钥交换协议，计算位数较小的离散对数，解决DLP问题，并获取DH密钥交换协议中的共同信息。

二、 实验要求

设p是一个素数，g是模p剩余类群中的非零元素。已知模数p，g和y，求解x满足同余方程$y \equiv g^x (mod\ p)$的计算数论问题，称为模p剩余类域中离散对数求解问题。DH（Diffie-Hellman）密钥交换协议是 20 世纪 70 年代由 Whitfield Diffie 和 Martin Hellman 共同提出的，在网络安全中有着广泛的应用，其目的是让参与两方能够共享一个秘密信息（密钥）。DH 密钥交换协议的过程如下图：

A 发起方	B 应答方
产生 x_a并计算$y_a \equiv g^{x_a} mod\ p$	产生x_b并计算$y_b \equiv g^{x_b} mod\ p$
A 使用公共信道把 y_a发送给 B	B 使用公共信道把y_b发送给 A
接收到y_b并计算$y_b{}^{x_a}(mod\ p)$	接收到y_a并计算$y_a{}^{x_b}(mod\ p)$
此时，A 有信息 $y_b{}^{x_a} \equiv g^{x_b x_a}\ (mod\ p)$，B 有信息$y_a{}^{x_b} \equiv g^{x_a x_b}\ (mod\ p)$，而 $g^{x_a x_b} \equiv g^{x_b x_a}\ (mod\ p)$。这样，A 和 B 就得到了共同的信息。	

DH 协议的安全性基于素域（模素数p剩余类域）上离散对数求解的困难性。如果第三方可以在公共信道截获y_a和y_b，通过求取离散对数x_a，就可求出 A 和 B 的共同信息

$$y_b{}^{x_a} \equiv g^{x_b x_a}\ (mod\ p)$$

三、 实验介绍

3.1 实验综述

已知一个乘法群$(Z_P^*, \cdot)$，$g \in Z_p^*$是一个ord_g阶的元素，在信道中截取到A发给B的y_a和B发给A的y_b，通过$Shanks$算法计算出唯一的指数x_a和x_b，$0 \le x_a \le ord\_g$，

$0 \le x_b \le ord\_g$，使得

$$g^{x_a} = y_a\ modp$$
$$g^{x_b} = y_b\ modp$$

A、B双方得到对方的y之后，就用自己的信息和对方的信息结合起来，计算共同信息，而不需要知道对方的离散对数。

$$\begin{aligned} A: &\quad same = y_b^{x_a}\ mod\ p = g^{x_b * x_a}\ modp \\ B: &\quad same = y_a^{x_b}\ mod\ p = g^{x_a * x_b}\ modp \end{aligned}$$

3.2 开发环境

运行环境：Windows

使用语言：C++

编译器：CodeBlocks

四、 算法原理以及代码实现

题中已经给出了g和p，首先需要计算元素g的阶。通过网站计算得到

$$ord\_g = 4309874666$$

接着就可以根据书中的伪代码实现计算出离散对数：

算法 6.1 SHANKS(G, n, α, β)

1. $m \leftarrow \lceil \sqrt{n} \rceil$
2. **for** $j \leftarrow 0$ **to** $m-1$
   do 计算α^{mj}
3. 对m个有序对(j, α^{mj})关于第二个坐标排序，得到一个列表L_1
4. **for** $i \leftarrow 0$ **to** $m-1$
   do 计算$\beta\alpha^{-i}$
5. 对m个有序对$(i, \beta\alpha^{-i})$关于第二个坐标排序，得到一个列表L_2
6. 找到对$(j, y) \in L_1$和$(i, y) \in L_2$（即找到两个具有相同第二坐标的对）
7. $\log_\alpha \beta \leftarrow (mj + i) \bmod n$

其中，$n = ord\_g$，$\alpha = g$，$\beta = y$。

4.1 算法原理

按照我的理解，主要是以下的式子：

$$i, j = 0 \dots m-1$$
$$若\ \alpha^{mj} = \beta\alpha^{-i}\ mod\ p$$

$$等式两边乘\ \alpha^{-i}\ 的逆\ a^{i}$$
$$\alpha^{mj+i} = \beta\ mod\ p$$

$$则 \qquad log_\alpha\beta = (mj+i)\ mod\ p$$

很好理解，就是计算α^{mj}和$\beta\alpha^{-i}$，找到一样的就计算$mj + i$即可。

4.2 算法优化

针对其题目的特殊性，考虑到存储空间和运行时间可以更进一步的减少，可以对算法进行稍微的优化：

1. 只需建立一个列表L_1存储有序对。

当计算第二组有序对时，可以“边算边查找检验”。也就是在第二个循环当中，如果是在第i个有序对发现第二坐标相同，而在第i个有序对和离散对数的计算过程中，前$i-1$个有序对实际上是用不到的，所以没有必要存储。

也就是只需要一个变量ans来存储当前第i个循环计算出的$\beta\alpha^{-i}$，并且直接去查找列表L_1当中有没有有序对的第二坐标与之相同，如果没有，就继续循环，用下一个循环的值更新ans。

2. 使用map容器来查找。

在计算出列表L_1之后，不需要进行坐标排序。个人认为坐标排序只是为了更快的查找到第二坐标相同的有序对。但是map容器在查找上也能提供一对一的映射，并且能够自己排序，不需要我们亲自排序，会更加的便捷。

特别的，map中存储的有序对的第一个变量（关键字）不是伪代码中的i，而是伪代码中的第二坐标，也就是(value, number)，这对于之后的查找会比较方便，而且对于排序什么的也不会有影响，甚至实际上排序并没有什么作用。

3. 只需要建立L_1一次。

考虑到题目的特殊性。计算x_a之后已经建立好了L_1，再计算x_b实际上也是在相同的L_1表上查找，所以就不需要再次建立了，毕竟要迭代ord_g+1次，这样可以减少运行时间。

使用布尔变量$ready$标记是否建立了L_1，如果为真，就省去了这一个迭代，否则，就建立L_1。

4.3 代码实现

1. Shanks函数

传参：mpz_class y (模幂结果)　mpz_class &x (离散对数)

建立L_1列表：$couple(g^{mj},\ j)$

```
    if(ready==false){
        for(mpz_class j=0; j<m-1; j++){
            ans = j*m;
            mpz_powm(ans.get_mpz_t(), g.get_mpz_t(), ans.get_mpz_t(),
 p.get_mpz_t()) ;
            couple[ans] = j ;
        }
        ready = 1 ;
    }
```

计算$\beta\alpha^{-i}$,并查找i，计算离散对数。

```
    for(mpz_class i=0; i<m-1; i++){
        mpz_powm(ans.get_mpz_t(), g.get_mpz_t(), i.get_mpz_t(), p.get_mpz_t()) ;
        mpz_invert(ans.get_mpz_t(), ans.get_mpz_t(), p.get_mpz_t()) ;
        ans = y*ans ;
        mpz_mod(ans.get_mpz_t(), ans.get_mpz_t(), p.get_mpz_t()) ;

        if(couple[ans]){
            mpz_class j = couple[ans] ;
            x = m*j+i ;
            mpz_mod(x.get_mpz_t(), x.get_mpz_t(), ord_g.get_mpz_t()) ;
            return ;
         }
    }
```

2. main函数

验证计算出的x_a和x_b是否是真解。

```
    mpz_class ta, tb ;
    mpz_powm(ta.get_mpz_t(), g.get_mpz_t(), xa.get_mpz_t(), p.get_mpz_t()) ;
    mpz_powm(tb.get_mpz_t(), g.get_mpz_t(), xb.get_mpz_t(), p.get_mpz_t()) ;
    if(ta!=ya || tb!=yb){
        cout<<" 实验失败！ ";
        if(ta!=ya)   cout<<xa<<"不是正确解！"<<endl;
        else cout<<xb<<"不是正确解！"<<endl;
        return 1 ;
    }
```

计算共同信息并验证：

$$g^{x_a x_b} = g^{x_b x_a} \ mod \ p$$

```
mpz_class same_a, same_b;
mpz_powm(same_a.get_mpz_t(), yb.get_mpz_t(), xa.get_mpz_t(), p.get_mpz_t()) ;
mpz_powm(same_b.get_mpz_t(), ya.get_mpz_t(), xb.get_mpz_t(), p.get_mpz_t()) ;

if(same_a==same_b)   cout<<"\n 实验成功！\n 共同信息为 "<<same_a<<endl;
else { cout<<"\n 实验失败,共同信息错误！"<<endl; return 1; }
```

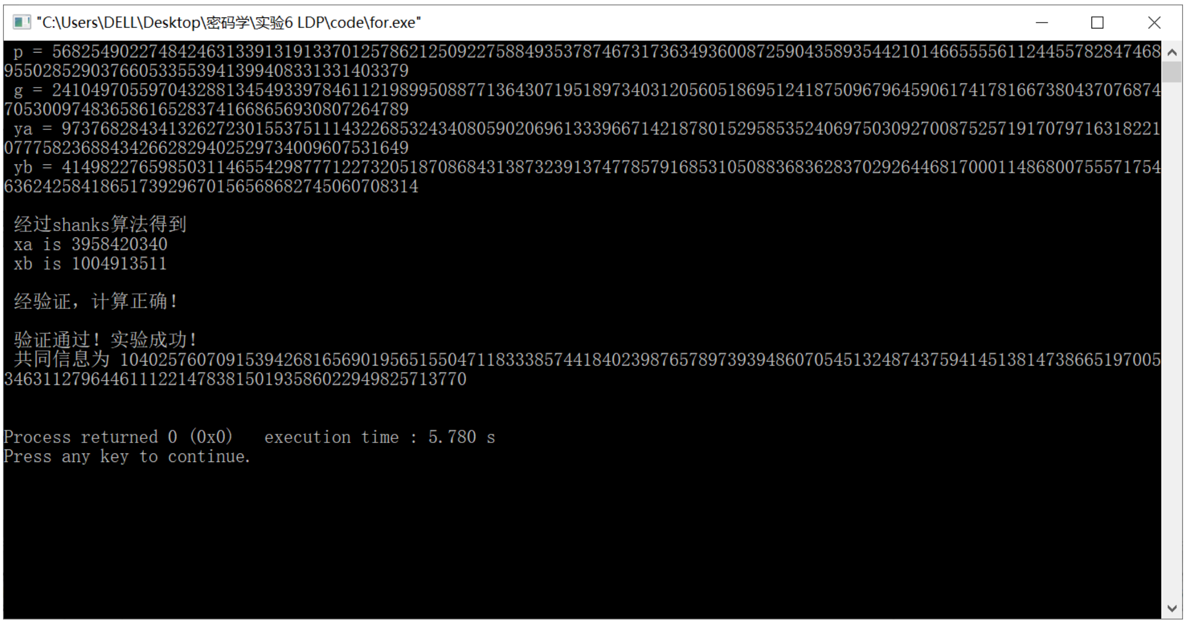
五、实验效果及分析

经过计算和验证，结果如下：

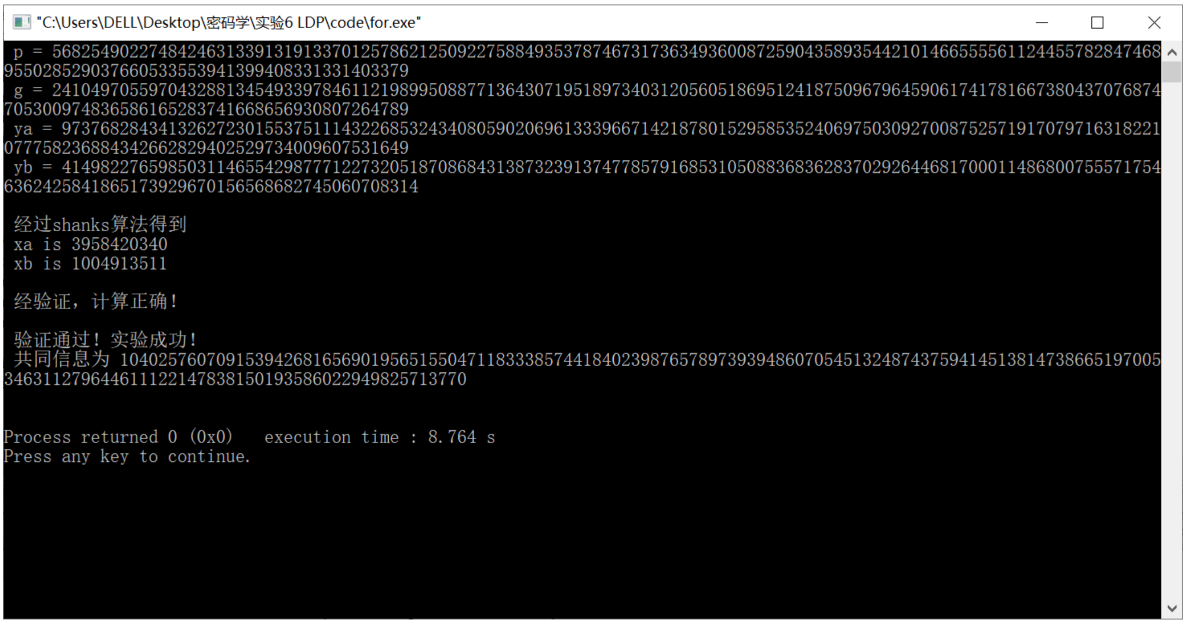
xa = 3958420340
xb = 1004913511

共同信息：
1040257607091539426816569019565155047118333857441840239876578973939486070545132487437594145138147386651970053463112796446111221478381501935860229498257137770

只算一次L_1列表：

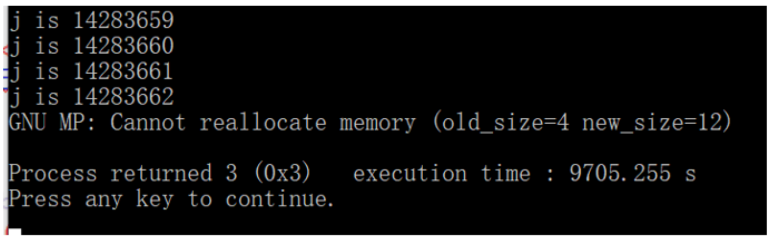


算两次L_1列表:



显然，运行时间短了。而关于排序时间、变量存储的优化效果，显然是成功的。

在计算version 1和version 2的过程中，发现如果使用$Shanks$算法，内存是不够的，version 2需要循环34728980674次，在第14283662次内存就不够了，并且跑了快3h，所以，$Shanks$算法适用于数比较小的DLP问题，如果要计算出更大的数，我想似乎会有更好的方法。



六、总结与思考

1. 这次实验我几乎尝试了所有方法。首先是$Pollard\ \rho$离散对数算法，因为比较看得懂，但是实现之后发现数组不能创建足够大的，而且我也没有很好的解决方法。然后尝试$Pohlig-Hellman$算

法，这个算法真的太费劲了，看了半天没看懂原理，看例子加上伪代码才实现出来的，不过只能通过小一点的数的测试，这次实验的数据要跑好久，两天都不出来。最后看了$Shanks$算法，原以为第一个算法都是最不推荐的，最后没想到是最好的，不到一小时就写完了，跑得很快，很好理解，优化一下算得很快，不需要一板一眼地按照伪代码实现，后来想想似乎$BSGS$算法其实跟这个差不多哎，不知道为什么不推荐emmm。害，打了这么多算法还是有点收获的，最起码知道在小一点的数上，这些算法是咋算的，也顺便复习了MR素性检验，不亏！

2. 数据给了这么多，其实只有最后一个快，其他的真的算的好慢好慢，最开始还没有阶，想到要自己算真的都不敢写了，耽误了好多天不知道阶怎么办，下次希望TA能够一次性把数据都说清楚。
3. 不过也通过这么多数据，感受到了DLP问题的挑战性，对于很大的数据真的跑了好久，电脑放着跑了两天都不出来。这次试验也比较简单，不需要很绕的算法，就是一直算一直找碰撞，最后的DH密钥交换就是模幂运算一下就可以了。收获很大，辛苦老师和TA了。