武漢科技大学

非参数统计实验报告

专业班级：统计

学　　号：

姓　　名：

成　　绩：

武汉科技大学理学院

数学与统计系

填 写 说 明

1. 排版要求：正文小四号字体，中文使用宋体，西文使用 Time New Roman 字体，行距使用 1.25 倍行距。

2. 内容要求：按题目要求填写内容。运行结果截图大小适当。

3. 双面打印。

实验七　完全区组设计：Friedman 秩和检验、Kendall 协同系数检验、Cochran 检验

实验名称	完全区组设计：Friedman 秩和检验、Kendall 协同系数检验、Cochran 检验		
指导教师	宋硕	实验日期	2024.11.10

一、　实验目的

1、熟悉完全区组设计：Friedman 秩和检验、Kendall 协同系数检验、Cochran 检验的原理和检验步骤；

2、熟练应用 Friedman 秩和检验、Kendall 协同系数检验、Cochran 检验对相关问题进行检验；

3、使用 R 软件进行 Friedman 秩和检验、Kendall 协同系数检验、Cochran 检验.

二、　检验原理和步骤：

1、 Friedman 秩和检验：

Friedman 秩和检验是用来检验完全随机区组设计的一种秩方差分析法. 检验的问题为：

$$H_0:\theta_1=\cdots=\theta_k \Leftrightarrow H_1:\exists i,j\in 1,\cdots,k,\theta_i\neq\theta_j$$

其中θ_i，$i=1,2,\cdots,k$对应k个处理的位置参数.

完全随机区组设计表为

	区组 1	区组 2	$\cdots$	区组 b
处理 1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1b}
处理 2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2b}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
处理 k	x_{k1}	x_{k2}	$\cdots$	x_{kb}

在每一个区组中计算各个处理的秩，再计算每个处理水平下的秩和,即

$$R_i=\sum_{j=1}^{b}R_{ij},i=1,\ldots,k$$

上表所对应的秩表如下：

	区组 1	区组 2	$\cdots$	区组 b	秩和
处理 1	R_{11}	R_{12}	$\cdots$	R_{1b}	R_1
处理 2	R_{21}	R_{22}	$\cdots$	R_{2b}	R_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
处理 k	R_{k1}	R_{k2}	$\cdots$	R_{kb}	R_k

由于每个处理水平的平均秩为：

$$\bar{R}=\frac{R_1+R_2+\cdots+R_k}{k}=\frac{\mathrm{b}(1+2+\cdots+k)}{k}=\frac{\mathrm{b}k(k+1)}{2}=\frac{\mathrm{b}(k+1)}{2}\quad,$$

类似于方差分析统计量的构造如下统计量：

$$Q=\frac{12}{bk(k+1)}\sum_{i=1}^{k}\left(R_i-\frac{b(k+1)}{2}\right)^2=\frac{12}{bk(k+1)}\sum_{i=1}^{k}R_i^2-3b(k+1)\quad,$$

在零假设成立下，令$W=\dfrac{Q}{b(k-1)}$，可查分布表. 无法查表时，对于固定的k，当b较大时，可近似得到$Q\sim\chi^2_{(k-1)}$，如果Q偏大，那么就考虑拒绝原假设。如果存在打结的情况，则可采用修正公式计算：

$$Q_c=\frac{Q}{1-C},\text{ 其中 }C=\frac{\sum_{i,j}\left(\tau_{ij}^3-\tau_{ij}\right)}{bk(k^2-1)},\ \tau_{ij}\text{ 为第 }j\text{ 个区组的第 }i\text{ 个结统计量.}$$

2、 Kendall 协同系数检验

在实践中，经常需要按照某特别的性质来多次（m 次）对 n 个个体进行评估或排序. 比如：m 个裁判对 n 种品牌的酒类的排序，m 个选民对 n 个候选人的评价，m 个咨询机构对 n 个企业的评估等等. Kendall 协同系数检验就是用于检验这类评估中 m 个评估结果的一致性的. 检验问题如下：

$$\mathrm{H}_0:\text{这些评估是不相关的或随机的}\Leftrightarrow\mathrm{H}_1:\text{这些评估是正相关的或多少一致的.}$$

定义 Kendall 协同系数为：

$$W=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(R_i-m(n+1)/2\right)^2}{\left[m^2n(n^2-1)\right]/12}=\frac{12\sum_{i=1}^{n}R_i^2-3m^2n(n+1)^2}{m^2n(n^2-1)}\quad ,$$

其中的 R_i 为第 i 个个体的秩的和 $\left(i=1,\mathrm{L}\ ,n\right)$.

在零假设成立的情况下，W 有表可查. 当 n 很大时， $m(n-1)W\rightarrow\ \chi_{\alpha}^{2}(n-1)$，可以进行显著性检验决策.

3、 Cochran 检验

当完全区组设计，并且观测只是二元定性数据时，Cochran Q 检验方法进行处

理. 数据形式类似如下表：

处理	区组						N_i
	I	II	III	IV	V	VI	
A	1	1	1	1	1	1	6
B	1	1	0	1	1	1	5
C	0	0	0	1	0	0	1
D	0	1	0	0	1	1	3
L_j	2	3	1	3	3	3	15

其中 N_i 是行和， L_j 为列和.

假设检验问题： $H_0:\theta_1=\mathrm{L}\ =\theta_k\ \Leftrightarrow\ H_1:\exists i,j\in 1,\mathrm{L}\ ,k,\theta_i\neq\theta_j$ ，

其中 θ_i, $i=1,2,\mathrm{L}\ ,k$. 对应 k 个处理的位置参数.

Cochran Q 检验统计量为：

$$\mathrm{Q}=\frac{k(k-1)\sum_{i=1}^{k}(N_i-\overline{N})^2}{kN-\sum_{j=1}^{b}L_j^2}=\frac{k(k-1)\sum_{i=1}^{k}N_i^2-(k-1)N^2}{kN-\sum_{j=1}^{b}L_j^2}\quad ,$$

其中 $\overline{N}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}N_i$. 当原假设成立的时候，$Q\rightarrow\chi_{(k-1)}^{2}$，可以进行显著性检验决策.

三、　　案例分析（请详细写出您的检验步骤并附上程序源代码）

案例一

下表是美国三大汽车公司(A,B,C 三种处理)的五种不同的车型某年产品的油耗，试分析不同公司的油耗是否存在差异。

	1	2	3	4	5
A	20.3	21.2	18.2	18.6	18.5
B	25.6	24.7	19.3	19.3	20.7
C	24.0	23.1	20.6	19.8	21.4

（1）　这里应该使用 kruskal 检验还是 Friedman 检验，给出你的理由；

（2）　请提出你的检验问题，并给出检验步骤过程和检验结果且分析结果.

答：（1）多样本位置参数检验问题，根据样本是否独立选择使用 kruskal 检验还是 Friedman 检验，据分析，汽车公司与车型存在相关关系，因此选择 Friedman 检验。

（2）H0:u1=u2=u3，不同公司的油耗不存在差异　vs　H1:不是所有的位置参数都相等，不同公司的油耗存在差异。

```
#代码：
#读取数据
#车型
blocks<-factor(rep(1:3,each=5))
#公司
treatments<-factor(rep(1:5,times=3))
#油耗数据
fuel_consumption<-c(20.3,21.2,18.2,18.6,18.5,
                    25.6,24.7,19.3,19.3,20.7,
                    24.0,23.1,20.6,19.8,21.4)
#创建数据框
df<-data.frame(block=blocks,treatment=treatments,fuel=fuel_consumption)
#Friedman 检验
friedman.test(fuel~treatment|block,data=df)
```

案例二

（数据 4.10.5.txt）下面是 4 个机构对 12 中彩电综合性能的排序结果：

评估机构	被评估的 12 种彩电（A-L）的排名											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L

I	12	9	2	4	10	7	11	6	8	5	3	1
II	10	1	3	12	8	7	5	9	6	11	4	2
III	11	8	4	12	2	10	9	7	5	6	3	1
IV	9	1	2	10	12	6	7	4	8	5	11	3

检验这些排序是否产生较一致的结果.

答：根据题目选择 Kendall 检验，H0:机构评估是随机的 vs H1:机构评估排序是较一致的。

```
#代码：
#读取数据
d=read.table("C:/Users/86156/Desktop/《非参数统计》数据/4.10.5.txt")
#Kendall 秩和检验
R=apply(d,2,sum);b=nrow(d);k=ncol(d);S=sum((R-b*(k+1)/2)^2);W=12*S/b^2/(k^3-k)
pchisq(b*(k-1)*W,k-1,low=F)
```

案例三

（数据 4.10.7.txt）按照一项调查，15 名顾客对三种电讯服务的态度（“满意”或“不满意”）为：

服务	15 个顾客的评价（“满意”为 1，“不满意”为 0）														
A	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
B	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1
C	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0

请检验顾客对这三种服务的表态是否有显著差异.

答：根据题目数据选择 Cochran 检验，H0:u1=u2=u3，三种服务在顾客眼中没有差别 vs H1:不是所有位置参数都相等，三种服务存在差异

```
#代码：
#读取数据
d=read.table("C:/Users/86156/Desktop/《非参数统计》数据/4.10.7.txt")
#Cochran 检验
n=apply(d,2,sum);N=sum(n);L=apply(d,1,sum);k=dim(d)[2]
Q=(k*(k-1)*sum((n-mean(n))^2))/(k*N-sum(L^2))
pchisq(Q,k-1,low=F)
```

四、实验结果（请分析实验结果并给出你的结论）

1.（1）Kruskal-Wallis 检验：适用于独立样本的情况，即不同组的数据是独立的，每组内的数据是从不同总体中随机抽取的。

Friedman 检验：适用于相关样本的情况，即不同组的数据来自相同的总体或相关总体（如重复测量设计）。

在这个问题中，不同公司的油耗数据来自不同的车型，车型的选择是相同的，可以认为是存在相关关系的。因此，我们应该使用 Friedman 检验。

（2）结果

```
        Friedman rank sum test

data:  fuel and treatment and block
Friedman chi-squared = 10.102, df = 4, p-value = 0.03875
```

由 p 值=0.03875<显著性水平 a=0.05 可得，拒绝原假设，认为三大公司的油耗存在差异。

2.根据题目表达意思选择 Kendall 秩和检验

```
> pchisq(b*(k-1)*W,k-1,low=F)
[1] 0.02349443
```

由 p 值=0.02349443<显著性水平 a=0.05 可得，拒绝原假设，认为 4 个评估机构的结果存在一致性。

3.根据题目二元数据选择 Cochran 检验

```
> pchisq(Q,k-1,low=F)
[1] 0.000911882
```

由 p 值=0.000911882<显著性水平 a=0.05 可得，拒绝原假设，认为三种服务存在差异。

五、 结果分析

1. Kruskal-Wallis 检验用于比较三个或更多独立样本的非参数检验方法，基于各组数据的秩和进行比较，不依赖于数据的原始尺度。Friedman 检验用于比较三个或更多相关样本的非参数检验方法，同样基于各组数据的秩和进行比较，但适用于重复测量设计或匹配样本设计。其原理假设是多个配对样本来自的多个总体分布无显著差异。根据对两种检验方法的充分了解，分析题目可以得知存在相关性，选择 Friedman 检验。根据检验结果，p 值=0.03875<显著性水平 a=0.05 可得，拒绝原假设，认为三大公司的油耗存在差异。

2.根据题目表达，要求检验数据的一致性，Kendall 秩和检验专门用于检测时间序列数据的上升或下降趋势，因此选择 Kendall 秩和检验。根据检验结果，由 p 值=0.02349443<显著性水平 a=0.05 可得，拒绝原假设，认为 4 个评估机构的结果存在一致性。

3.题目数据为二元数据，这种情况下一般选择 Cochran 检验。根据检验结果，由 p 值=0.000911882<显著性水平 a=0.05 可得，拒绝原假设，认为三种服务存在差异。