ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS
INGENIERÍA COMPUTACION

ASIGNATURA: ICCD412 Métodos Numéricos **GRUPO:** GR2CC
TIPO DE INSTRUMENTO: Deber
FECHA DE ENTREGA LÍMITE: 01/06/2025
ALUMNO: Contreras Carrión Anthony Alexander

Splines Cubicos

OBJETIVOS

- **A**plicar el método de interpolación por splines cúbicos para obtener una función suave que pase por un conjunto de puntos dados.Se considera la condición de frontera natural para garantizar continuidad hasta la segunda derivada y un comportamiento armónico en los extremos.
- **D**eterminar una función spline cúbica que interpole un conjunto de datos, incorporando condiciones de derivada en los extremos.El objetivo es asegurar una transición suave entre tramos, respetando las pendientes impuestas en los bordes del intervalo.

DESARROLLO

Ejercicios Aplicados.

1. Dados los puntos $x = [-2, -1, 1, 3]$, $y = [3, 1, 2, -1]$.

a) Determine el spline cubico con frontera natural.

b) Determine el spline cubico con frontera natural condicional.

Tenemos 4 datos $\rightarrow$ 3 intervalos $\rightarrow (4-1)\,4 = 12$ incognitas.

$-2 \leq x \leq -1$

$-1 \leq x \leq 1$

$1 \leq x \leq 3$

Nodos interiores -1 y 1

Nodos exteriores -2 y 3.

$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$, $-2 \leq x \leq -1$.

$f_1(-2) = a_1(-2)^3 + b_1(-2)^2 + c_1(-2) + d_1 = 3$

$-8a_1 + 4b_1 - 2c_1 + d_1 = 3$ (1)

$f_1(-1) = a_1(-1)^3 + b_1(-1)^2 + c_1(-1) + d_1 = 1$.

$-a_1 + b_1 - c_1 + d_1 = 1$. (2)

$f_2(x) = a_2 x^3 + b_2 x^2 + c_2 x + d_2$, $-1 \leq x \leq 1$.

$f_2(-1) = a_2(-1)^3 + b_2(-1)^2 + c_2(-1) + d_1 = 1$

$-a_2 + b_2 - c_2 + d_2 = 1$. (3)

$f_2(1) = a_2(1)^3 + b_2(1)^2 + c_2(1) + d_1 = 2$

$a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 2$ (4)

$f_3(x) = a_3 x^3 + b_3 x^2 + c_3 x + d_3 \quad 1 \leq x \leq 3$

$f_3(1) = a_3(1)^3 + b_3(1)^2 + c_3(1) + d_3 = 2$

$a_3 + b_3 + c_3 + d_3 = 2$. (5)

$f_3(3) = a_3(3)^3 + b_3(3)^2 + c_3(3) + d_3 = -1$.

$27a_3 + 9b_3 + 3c_3 + d_3 = -1$ (6)

$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$

$f'(x) = 3a_i x^2 + 2b_i x + c_i \qquad f''(x) = 6a_i x + 2b_i$

$f_1'(-1) = f_2'(-1) \qquad f_2'(1) = f_3'(1).$

$3a_1(-1)^2 + 2b_1(-1) + c_1 = 3a_2(-1) + 2b_2(-1) + c_2.$

$-3a_1 - 2b_1 + c_1 + 3a_2 + 2b_2 - c_2 = 0.$ (7)

$3a_2(1)^2 + 2b_2(1) + c_2 = 3a_3(1) + 2b_3(1) + c_3.$

$3a_2 + 2b_2 + c_2 - 3a_3 - 2b_3 - c_3 = 0.$ (8)

$f_1''(-1) = f_2''(-1) \qquad f_2''(1) = f_3''(1).$

$6a_1(-1) + 2b_1 = 6a_2(-1) + 2b_2. \qquad 6a_2(1) + 2b_2 = 6a_3(1) + 2b_3$

$-6a_1 + 2b_1 + 6a_2 - 2b_1 = 0$ (9) $\qquad 6a_2 + 2b_2 - 6a_3 - 2b_3 = 0$ (10)

Frontera natural.

$f_1'''(-2) = 0 \qquad f_3''(3) = 0$

$6a_1(-2) + 2b_1 = 0 \qquad 6a_3(3) + 2b_3 = 0$

$-12a_1 + 2b_1 = 0$ (11) $\qquad 18a_3 + 2b_3 = 0.$ (12).

Con esas doce ecuaciones, resolvemos el sistema de ecuaciones.

$$-8a_1+4b_1-2c_1+d_1=3$$
$$-a_1+b_1-c_1+d_1=1$$
$$-a_2+b_2-c_2+d_2=1$$
$$a_2+b_2+c_2+d_2=2$$
$$a_3+b_3+c_3+d_3=2$$
$$27a_3+9b_3+3c_3+d_3=-1.$$
$$+3a_1-2b_1+c_1-3a_2+2b_2-c_2=0$$
$$3a_2+2b_2+c_2-3a_3-2b_3-c_3=0$$
$$-6a_1+2b_1+6a_2-2b_1=0$$
$$6a_2+2b_2-6a_3-2b_3=0$$
$$-12a_1+2b_1=0$$
$$18a_3+2b_3=0.$$

Respuestas.

$a_1=1/2$
$a_2=1/2$
$a_3=2/7$
$b_1=3$
$b_2=-45/14$
$b_3=-18/7$
$c_1=7/2$
$c_2=-13/7$
$c_3=71/14$
$d_1=2$
$d_2=20/7$
$d_3=-11/14$.

Ahora reemplazamos en cada tramo

Tramo 1.

$$f_1(x)=\frac{1}{2}x^3+3x^2+\frac{7}{2}x+2$$

Tramo 2.

$$f_2(x)=\frac{1}{2}x^3+(-45/14)x^2+(-13/7)x+20/7$$

Tramo 3

$$f_3(x)=\frac{2}{7}x^3-\frac{18}{7}x^2+\frac{71}{14}x-\frac{11}{14}.$$

2. Dados los puntos $(0,1);(1,5);(2,3)$, determine el splin cubico.

$$X = 0,\ 1,\ 2$$
$$y = 1,\ 5,\ 3.$$

Tenemos 3 datos → 2 intervalos → $(3-1)4 = 8$ incognitas.

$$0 \le x \le 1$$
$$1 \le x \le 2.$$

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

$$f_1(0) = a_1(0)^3 + b_1(0)^2 + c_1(0) + d_1 = 1.$$
$$d_1 = 1.$$

$$f_1(1) = a_1(1)^3 + b_1(1)^2 + c_1(1) + d_1 = 5.$$
$$a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 5.$$

$$f_2(1) = a_2(1)^3 + b_2(1)^2 + c_2(1) + d_2 = 5.$$
$$a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 5.$$

$$f_2(2) = a_2(2)^3 + b_2(2)^2 + c_2(2) + d_2 = 3.$$
$$8a_2 + 4b_2 + 2c_2 + d_2 = 3.$$

$$f_i'(x) = 3a_i x^2 + 2b_i x + c_i$$
$$f_1'(1) = f_2'(1)$$
$$3a_1(1)^2 + 2b_1(1) + c_1 = 3a_2(1)^2 + 2b_2(1) + c_2.$$
$$3a_1 + 2b_1 + c_1 - 3a_2 - 2b_2 - c_2 = 0.$$

$$f_i''(x) = 6a_i x + 2b_i$$
$$f_1''(1) = f_2''(1)$$
$$6a_1 + 2b_1 = 6a_2 + 2b_2$$
$$6a_1 + 2b_1 - 6a_2 - 2b_2 = 0$$

Ya que no se especifica, utilizamos frontera natural.

$f_1''(0) = 0.$ $\qquad$ $f_2''(2) = 0$

$6a_1(0) + 2b_1 = 0.$ $\qquad$ $6a_2(2) + 2b_2 = 0$

$2b_1 = 0.$ $\qquad$ $12a_2 + 2b_2 = 0.$

$b_1 = 0.$

Sistema de ecuaciones.

$$d_1 = 1$$
$$a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 5$$
$$a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 5$$
$$8a_2 + 4b_2 + 2c_2 + d_2 = 3$$
$$3a_1 + 2b_1 + c_1 - 3a_2 - 2b_2 - c_2 = 0$$
$$6a_1 + 2b_1 - 6a_2 - 2b_2 = 0$$
$$b_1 = 0$$
$$12a_2 + 2b_2 = 0.$$

Respuesta.

$a_1 = -3/2$

$a_2 = 3/2$

$b_1 = 0$

$b_2 = -9$

$c_1 = 11/2$

$c_2 = 29/2$

$d_1 = 1$

$d_2 = -2.$

$$\begin{cases} -3/2\,x^3 + 11/2\,x + 1 \\ 3/2\,x^3 - 9x^2 + 29/2\,x - 2 \end{cases}$$

3. Dados los puntos $(-1,1)$; $(1,3)$; $(0{,}5,\ 4.8)$, determine el spline cúbico sabiendo que $f'(x_0)=1$, $f'(x_n)=2$.

$X = -1,\ 1,\ 0{,}5. \rightarrow -1,\ 0{,}5,\ 1$

$y = 1,\ 3,\ 4{,}8 \rightarrow 1,\ 4{,}8,\ 3.$

Tenemos 3 puntos $\rightarrow$ 2 intervalos $\rightarrow$ 8 incógnitas

$-1 \leq x \leq 0{,}5$

$0{,}5 \leq x \leq 1.$

$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i.$

$f_1(x) = a_1(-1)^3 + b_1(-1)^2 + c_1(-1) + d_1$

$= -a_1 + b_1 - c_1 + d_1 = 1$ (1)

$f_1(0{,}5) = a_1(0{,}5)^3 + b_1(0{,}5)^2 + c_1(0{,}5) + d_1.$

$= \frac{1}{8}a_1 + \frac{1}{4}b_1 + \frac{1}{2}c_1 + d_1 = 4{,}8.$ (2)

$f_2(0{,}5) = \frac{1}{8}a_2 + \frac{1}{4}b_2 + \frac{1}{2}c_2 + d_2 = 4{,}8$ (3)

$f_2(1) = a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 3$ (4)

$f_1'(0{,}5) = f_2'(0{,}5)$

$3a_1(0{,}5)^2 + 2b_1(0{,}5) + c_1 = 3a_2(0{,}5) + 2b_2(0{,}5) + c_2$

(5) $3a_1(0{,}5)^2 + 2b_1(0{,}5) + c_1 - 3a_2(0{,}5) - 2b_2(0{,}5) - c_2 = 0.$

$f_1''(0{,}5) = f_2''(0{,}5)$

$6a_1(0{,}5) + 2b_1 = 6a_2(0{,}5) + 2b_2$

$6a_1(0{,}5) + 2b_1 - 6a_2(0{,}5) - 2b_2 = 0$ (6)

Condición de Frontera.

$$f_1''(-1) = 1. \qquad f_2''(1) = 2$$

(7) $3a_1(-1)^2 + 2b_1(-1) + c_1 = 1.$ (8) $3a_2(1)^2 + 2b_2(1) + c_2 = 2.$

Con estas ecuaciones ya tenemos el splin para cada tramo.

CONCLUSIONES

Conclusión: La interpolación mediante splines cúbicos permitió construir una función compuesta por polinomios de tercer grado que es continua y suave en todo el intervalo. Tanto en el caso de condiciones naturales como condicionadas, se logró obtener una aproximación precisa que respeta los valores dados y las derivadas impuestas en los extremos.