

Теоремы Гёделя о неполноте арифметики

Основные свойства исчислений: Ф.А.

	К.И.В.	И.И.В.	К.И.П.	Ф.А. + кл. модель
корректность	да	да	да (лекция 5)	да (сейчас)
непротиворечивость	да	да	да (лекция 6)	верим (т. Гёделя №2)
полнота	да	да	да (лекция 6)	нет (т. Гёделя №1)
разрешимость	да	да	нет (лекция 7)	нет (док-во т. Тарского)

Классическая модель Ф.А.

А как определять «нестандартные» предикаты и функции (Q'_1 , $c(p, q)$ и т.п.)?

Классическая модель Ф.А.

А как определять «нестандартные» предикаты и функции (Q'_1 , $c(p, q)$ и т.п.)?
Для простоты разрешим только нелогические функциональные и предикатные символы ($=$, $+$, \cdot , 0 , $'$).

Классическая модель Ф.А.

А как определять «нестандартные» предикаты и функции (Q'_1 , $c(p, q)$ и т.п.)? Для простоты разрешим только нелогические функциональные и предикатные символы ($=$, $+$, \cdot , 0 , $'$).

Определение

Классическая модель формальной арифметики: $D = \mathbb{N}_0$, оценки предикатных и функциональных символов — естественные.

Теорема

Формальная арифметика корректна

Доказательство.

Свойства аксиом $A1 \dots A8$ очевидны.

Доказательство схемы аксиом индукции:

$$\psi(0) \ \& \ (\forall x. \psi(x) \rightarrow \psi(x')) \rightarrow \psi(x)$$

Индукция по структуре формулы ψ , затем математическая индукция по x .



Схема аксиом индукции чуть подробнее

Индукция по структуре формулы ψ в

$$\psi(0) \ \& \ (\forall x. \psi(x) \rightarrow \psi(x')) \rightarrow \psi(x)$$

Для примера база:

$$\theta_0(0) = \theta_1(0) \ \& \ (\forall x. \theta_0(x) = \theta_1(x) \rightarrow \theta_0(x') = \theta_1(x')) \rightarrow \theta_0(x) = \theta_1(x)$$

Докажем индукцией по x .

1. $x := 0$. Тогда либо $\llbracket \theta_0(0) = \theta_1(0) \rrbracket = \text{Л}$, либо $\llbracket \theta_0(x) = \theta_1(x) \rrbracket^{x:=0} = \text{И}$
2. $x := s$. Тогда s раз применяем переход

$$\llbracket \theta_0(x) = \theta_1(x) \rightarrow \theta_0(x') = \theta_1(x') \rrbracket^{x:=\overline{0\dots s}} = \text{И}$$

отсюда

$$\llbracket \theta_0(x') = \theta_1(x') \rrbracket^{x:=s} = \llbracket \theta_0(x) = \theta_1(x) \rrbracket^{x:=s+1} = \text{И}$$

Схема аксиом индукции чуть подробнее

Индукция по структуре формулы ψ в

$$\psi(0) \ \& \ (\forall x. \psi(x) \rightarrow \psi(x')) \rightarrow \psi(x)$$

Для примера база:

$$\theta_0(0) = \theta_1(0) \ \& \ (\forall x. \theta_0(x) = \theta_1(x) \rightarrow \theta_0(x') = \theta_1(x')) \rightarrow \theta_0(x) = \theta_1(x)$$

Докажем индукцией по x .

1. $x := 0$. Тогда либо $\llbracket \theta_0(0) = \theta_1(0) \rrbracket = \text{Л}$, либо $\llbracket \theta_0(x) = \theta_1(x) \rrbracket^{x:=0} = \text{И}$
2. $x := s$. Тогда s раз применяем переход

$$\llbracket \theta_0(x) = \theta_1(x) \rightarrow \theta_0(x') = \theta_1(x') \rrbracket^{x:=\overline{0\dots s}} = \text{И}$$

отсюда

$$\llbracket \theta_0(x') = \theta_1(x') \rrbracket^{x:=s} = \llbracket \theta_0(x) = \theta_1(x) \rrbracket^{x:=s+1} = \text{И}$$

Можно ли верить этому доказательству (доказываем индукцию через индукцию)?

Самоприменимость

Определение

Пусть ξ — формула с единственной свободной переменной x_1 . Тогда:
 $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in W_1$, если $\vdash \xi(\overline{\ulcorner \xi \urcorner})$ и p — номер доказательства.

Определение

Отношение W_1 рекурсивно, поэтому выражено в Ф.А. формулой ω_1 со свободными переменными x_1 и x_2 , причём:

1. $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}, \overline{p})$, если p — гёделев номер доказательства самоприменения φ ;
2. $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}, \overline{p})$ иначе.

Определение

Определим формулу $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$.

Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Определение

Если для любой формулы $\phi(x)$ из $\vdash \phi(0), \vdash \phi(\bar{1}), \vdash \phi(\bar{2}), \dots$ выполнено $\nvdash \exists x. \neg \phi(x)$, то теория ω -непротиворечива.

Теорема

Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики

- ▶ Если формальная арифметика непротиворечива, то $\nvdash \sigma(\overline{\neg \sigma})$.
- ▶ Если формальная арифметика ω -непротиворечива, то $\nvdash \neg \sigma(\overline{\neg \sigma})$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Значит, p — номер доказательства.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$.
Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \overline{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\ulcorner \sigma \urcorner, \bar{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\ulcorner \sigma \urcorner, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\ulcorner \sigma \urcorner, p)$. То есть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Противоречие.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \overline{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Противоречие.
- ▶ Пусть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Противоречие.
- ▶ Пусть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. То есть $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Противоречие.
- ▶ Пусть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. То есть $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$.
 - ▶ Но найдётся ли натуральное число p , что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$?

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Противоречие.
- ▶ Пусть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. То есть $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$.
 - ▶ Но найдётся ли натуральное число p , что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$? Пусть нет. То есть $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{0})$, $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{1})$, ...

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Противоречие.
- ▶ Пусть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. То есть $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$.
 - ▶ Но найдётся ли натуральное число p , что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$? Пусть нет. То есть $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{0})$, $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{1})$, ... По ω -непротиворечивости $\not\vdash \exists p. \neg \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \overline{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Противоречие.
- ▶ Пусть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. То есть $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$.
 - ▶ Но найдётся ли натуральное число p , что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \overline{p})$? Пусть нет. То есть $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \overline{0})$, $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \overline{1})$, ... По ω -непротиворечивости $\nvdash \exists p. \neg \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. Значит, найдётся натуральное p , что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \overline{p})$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Противоречие.
- ▶ Пусть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. То есть $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$.
 - ▶ Но найдётся ли натуральное число p , что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$? Пусть нет. То есть $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{0})$, $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{1})$, ... По ω -непротиворечивости $\not\vdash \exists p. \neg \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. Значит, найдётся натуральное p , что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$. То есть, $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Противоречие.
- ▶ Пусть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. То есть $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$.
 - ▶ Но найдётся ли натуральное число p , что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$? Пусть нет. То есть $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{0})$, $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{1})$, ... По ω -непротиворечивости $\nvdash \exists p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. Значит, найдётся натуральное p , что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$. То есть, $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$. То есть, p — доказательство самоприменения W_1 : $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Противоречие.
- ▶ Пусть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. То есть $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$.
 - ▶ Но найдётся ли натуральное число p , что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$? Пусть нет. То есть $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{0})$, $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{1})$, ... По ω -непротиворечивости $\nvdash \exists p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. Значит, найдётся натуральное p , что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$. То есть, $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$. То есть, p — доказательство самоприменения W_1 : $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Противоречие.



Почему теорема о неполноте?

Определение

Семантически полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема.

Синтаксически полная теория — теория, в которой для каждой формулы α выполнено $\vdash \alpha$ или $\vdash \neg\alpha$.

Теорема

Формальная арифметика с классической моделью семантически неполна.

Почему теорема о неполноте?

Определение

Семантически полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема.

Синтаксически полная теория — теория, в которой для каждой формулы α выполнено $\vdash \alpha$ или $\vdash \neg\alpha$.

Теорема

Формальная арифметика с классической моделью семантически неполна.

Доказательство.

Рассмотрим Ф.А. с классической моделью.

Почему теорема о неполноте?

Определение

Семантически полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема.

Синтаксически полная теория — теория, в которой для каждой формулы α выполнено $\vdash \alpha$ или $\vdash \neg\alpha$.

Теорема

Формальная арифметика с классической моделью семантически неполна.

Доказательство.

Рассмотрим Ф.А. с классической моделью. Из теоремы Гёделя имеем $\nVdash \sigma(\overline{\Gamma\sigma})$.

Почему теорема о неполноте?

Определение

Семантически полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема.

Синтаксически полная теория — теория, в которой для каждой формулы α выполнено $\vdash \alpha$ или $\vdash \neg\alpha$.

Теорема

Формальная арифметика с классической моделью семантически неполна.

Доказательство.

Рассмотрим Ф.А. с классической моделью. Из теоремы Гёделя имеем $\nVdash \sigma(\overline{\Gamma\sigma\overline{)}}.$

Рассмотрим $\sigma(\overline{\Gamma\sigma\overline{)}} \equiv \forall p. \neg \omega_1(\overline{\Gamma\sigma\overline{}}, p)$: нет числа p , что p — номер доказательства $\sigma(\overline{\Gamma\sigma\overline{}})$.

Почему теорема о неполноте?

Определение

Семантически полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема.

Синтаксически полная теория — теория, в которой для каждой формулы α выполнено $\vdash \alpha$ или $\vdash \neg\alpha$.

Теорема

Формальная арифметика с классической моделью семантически неполна.

Доказательство.

Рассмотрим Ф.А. с классической моделью. Из теоремы Гёделя имеем $\nVdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$.

Рассмотрим $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}) \equiv \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$: нет числа p , что p — номер доказательства $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. То есть, $\llbracket \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p) \rrbracket = \text{И}$.

Почему теорема о неполноте?

Определение

Семантически полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема.

Синтаксически полная теория — теория, в которой для каждой формулы α выполнено $\vdash \alpha$ или $\vdash \neg\alpha$.

Теорема

Формальная арифметика с классической моделью семантически неполна.

Доказательство.

Рассмотрим Ф.А. с классической моделью. Из теоремы Гёделя имеем $\nVdash \sigma(\overline{\Gamma\sigma\overline{}})$.

Рассмотрим $\sigma(\overline{\Gamma\sigma\overline{}}) \equiv \forall p. \neg \omega_1(\overline{\Gamma\sigma\overline{}}, p)$: нет числа p , что p — номер доказательства $\sigma(\overline{\Gamma\sigma\overline{}})$. То есть, $\llbracket \forall p. \neg \omega_1(\overline{\Gamma\sigma\overline{}}, p) \rrbracket = \text{И}$. То есть, $\models \sigma(\overline{\Gamma\sigma\overline{}})$. □

Первая теорема Гёделя о неполноте в форме Россера

Определение

$$\theta_1 \leq \theta_2 \equiv \exists p. p + \theta_1 = \theta_2 \qquad \theta_1 < \theta_2 \equiv \theta_1 \leq \theta_2 \ \& \ \neg \theta_1 = \theta_2$$

Первая теорема Гёделя о неполноте в форме Россера

Определение

$$\theta_1 \leq \theta_2 \equiv \exists p. p + \theta_1 = \theta_2 \quad \theta_1 < \theta_2 \equiv \theta_1 \leq \theta_2 \ \& \ \neg \theta_1 = \theta_2$$

Определение

Пусть $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in W_2$, если $\vdash \neg \xi(\overline{\ulcorner \xi \urcorner})$. Пусть ω_2 выражает W_2 в формальной арифметике.

Первая теорема Гёделя о неполноте в форме Россера

Определение

$$\theta_1 \leq \theta_2 \equiv \exists p. p + \theta_1 = \theta_2 \quad \theta_1 < \theta_2 \equiv \theta_1 \leq \theta_2 \ \& \ \neg \theta_1 = \theta_2$$

Определение

Пусть $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in W_2$, если $\vdash \neg \xi(\overline{\ulcorner \xi \urcorner})$. Пусть ω_2 выражает W_2 в формальной арифметике.

Теорема

Рассмотрим $\rho(x_1) = \forall p. \omega_1(x_1, p) \rightarrow \exists q. q \leq p \ \& \ \omega_2(x_1, q)$.

Первая теорема Гёделя о неполноте в форме Россера

Определение

$$\theta_1 \leq \theta_2 \equiv \exists p. p + \theta_1 = \theta_2 \quad \theta_1 < \theta_2 \equiv \theta_1 \leq \theta_2 \ \& \ \neg \theta_1 = \theta_2$$

Определение

Пусть $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in W_2$, если $\vdash \neg \xi(\overline{\ulcorner \xi \urcorner})$. Пусть ω_2 выражает W_2 в формальной арифметике.

Теорема

Рассмотрим $\rho(x_1) = \forall p. \omega_1(x_1, p) \rightarrow \exists q. q \leq p \ \& \ \omega_2(x_1, q)$. Тогда $\nVdash \rho(\overline{\ulcorner \rho \urcorner})$ и $\nVdash \neg \rho(\overline{\ulcorner \rho \urcorner})$.

Первая теорема Гёделя о неполноте в форме Россера

Определение

$$\theta_1 \leq \theta_2 \equiv \exists p. p + \theta_1 = \theta_2 \quad \theta_1 < \theta_2 \equiv \theta_1 \leq \theta_2 \ \& \ \neg \theta_1 = \theta_2$$

Определение

Пусть $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in W_2$, если $\vdash \neg \xi(\overline{\ulcorner \xi \urcorner})$. Пусть ω_2 выражает W_2 в формальной арифметике.

Теорема

Рассмотрим $\rho(x_1) = \forall p. \omega_1(x_1, p) \rightarrow \exists q. q \leq p \ \& \ \omega_2(x_1, q)$. Тогда $\nVdash \rho(\overline{\ulcorner \rho \urcorner})$ и $\nVdash \neg \rho(\overline{\ulcorner \rho \urcorner})$. $\rho(\overline{\ulcorner \rho \urcorner})$: «Меня легче опровергнуть, чем доказать»

Формальное доказательство

Неполнота варианта теории, изложенной выше, формально доказана на Coq, Russell O'Connor, 2005:

“My proof, excluding standard libraries and the library for Pocklington’s criterion, consists of 46 source files, 7 036 lines of specifications, 37 906 lines of proof, and 1 267 747 total characters. The size of the gzipped tarball (gzip -9) of all the source files is 146 008 bytes, which is an estimate of the information content of my proof.”

```
Theorem Incompleteness : forall T : System,  
  Included Formula NN T ->  
  RepresentsInSelf T ->  
  DecidableSet Formula T ->  
  exists f : Formula,  
  Sentence f /\ (SysPrf T f /\ SysPrf T (notH f) -> Inconsistent LNN T).
```

Consis

Лемма

$\vdash 1 = 0$ тогда и только тогда, когда $\vdash \alpha$ при любом α .

Определение

Обозначим за $\psi(x, p)$ формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение *Proof*: $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in \text{Proof}$, если p — гёделев номер доказательства ξ .

Consis

Лемма

$\vdash 1 = 0$ тогда и только тогда, когда $\vdash \alpha$ при любом α .

Определение

Обозначим за $\psi(x, p)$ формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение *Proof*: $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in \text{Proof}$, если p — гёделев номер доказательства ξ .

Обозначим $\pi(x) \equiv \exists p. \psi(x, p)$

Consis

Лемма

$\vdash 1 = 0$ тогда и только тогда, когда $\vdash \alpha$ при любом α .

Определение

Обозначим за $\psi(x, p)$ формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение *Proof*: $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in \text{Proof}$, если p — гёделев номер доказательства ξ .

Обозначим $\pi(x) \equiv \exists p. \psi(x, p)$

Определение

Формулой *Consis* назовём формулу $\neg \pi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner})$

Consis

Лемма

$\vdash 1 = 0$ тогда и только тогда, когда $\vdash \alpha$ при любом α .

Определение

Обозначим за $\psi(x, p)$ формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение *Proof*: $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in \text{Proof}$, если p — гёделев номер доказательства ξ .

Обозначим $\pi(x) \equiv \exists p. \psi(x, p)$

Определение

Формулой *Consis* назовём формулу $\neg \pi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner})$

Неформальный смысл: «формальная арифметика непротиворечива»

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально)

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ ».

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ ». То есть, $\forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$.

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ ». То есть, $\forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$.

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ ». То есть, $\forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$, — и это можно доказать, то есть $\vdash \text{Consis} \rightarrow \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$.

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ ». То есть, $\forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$, — и это можно доказать, то есть $\vdash \text{Consis} \rightarrow \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Однако если формальная арифметика непротиворечива, то $\nvdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$.



Слишком много неформальности

Рассмотрим такой особый Consis' :

$$\begin{aligned}\pi'(x) &:= \exists p. \psi(x, p) \ \& \ \neg \psi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner}, p) \\ \text{Consis}' &:= \pi'(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner})\end{aligned}$$

Заметим:

1. Если ФА непротиворечива, то $\llbracket \pi'(x) \rrbracket = \llbracket \pi(x) \rrbracket$:
 - ▶ если $x \neq \ulcorner 1 = 0 \urcorner$ и $\llbracket \psi(x, p) \rrbracket = \text{И}$, то $\llbracket \psi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner}, p) \rrbracket = \text{Л}$
 - ▶ если $x = \ulcorner 1 = 0 \urcorner$, то $\llbracket \psi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner}, p) \rrbracket = \text{Л}$ при любом p .
2. Но $\vdash \text{Consis}'$.

Условия выводимости Гильберта-Бернайса-Лёба

Определение

Будем говорить, что формула ψ , выражающая отношение *Proof*, формула π и формула *Consis* соответствуют условиям Гильберта-Бернайса-Лёба, если следующие условия выполнены для любой формулы α :

1. $\vdash \alpha$ влечет $\vdash \pi(\overline{\Gamma\alpha})$
2. $\vdash \pi(\overline{\Gamma\alpha}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\pi(\overline{\Gamma\alpha})})$
3. $\vdash \pi(\overline{\Gamma\alpha \rightarrow \beta}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\alpha}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\beta})$

Первая теорема Гёделя о неполноте ещё раз

Лемма

Лемма об автоссылках. Для любой формулы $\phi(x_1)$ можно построить такую замкнутую формулу α (не использующую неаксиоматических предикатных и функциональных символов), что $\vdash \phi(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}) \leftrightarrow \alpha$.

Теорема

Существует такая замкнутая формула γ , что если $\Phi.A.$ непротиворечива, то $\not\vdash \gamma$, а если $\Phi.A.$ ω -непротиворечива, то и $\not\vdash \neg\gamma$.

Доказательство.

Рассмотрим $\phi(x_1) \equiv \neg\pi(x_1)$. Тогда по лемме об автоссылках существует γ , что $\vdash \gamma \leftrightarrow \neg\pi(\overline{\ulcorner \gamma \urcorner})$.

- ▶ Предположим, что $\vdash \gamma$. Тогда $\vdash \gamma \rightarrow \neg\pi(\overline{\ulcorner \gamma \urcorner})$, то есть $\not\vdash \gamma$
- ▶ Предположим, что $\vdash \neg\gamma$. Тогда $\vdash \pi(\overline{\ulcorner \gamma \urcorner})$, то есть $\vdash \exists p.\psi(\overline{\ulcorner \gamma \urcorner}, p)$. Тогда по ω -непротиворечивости найдётся p , что $\vdash \psi(\overline{\ulcorner \gamma \urcorner}, \overline{p})$, то есть $\vdash \gamma$.



Доказательство второй теоремы Гёделя

1. Пусть γ таково, что $\vdash \gamma \leftrightarrow \neg\pi(\overline{\Gamma\gamma})$.
2. Покажем $\pi(\overline{\Gamma\gamma}) \vdash \pi(\overline{\Gamma 1 = 0})$.
 - 2.1 По условию 2, $\vdash \pi(\overline{\Gamma\gamma}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\pi(\overline{\Gamma\gamma})})$. По теореме о дедукции $\pi(\overline{\Gamma\gamma}) \vdash \pi(\overline{\Gamma\pi(\overline{\Gamma\gamma})})$;
 - 2.2 Так как $\vdash \pi(\overline{\Gamma\gamma}) \rightarrow \neg\gamma$, то по условию 1 $\vdash \pi(\overline{\Gamma\pi(\overline{\Gamma\gamma}) \rightarrow \neg\gamma})$;
 - 2.3 По условию 3, $\pi(\overline{\Gamma\gamma}) \vdash \pi(\overline{\Gamma\pi(\overline{\Gamma\gamma})}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\pi(\overline{\Gamma\gamma}) \rightarrow \neg\gamma}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\neg\gamma})$;
 - 2.4 Таким образом, $\pi(\overline{\Gamma\gamma}) \vdash \pi(\overline{\Gamma\neg\gamma})$;
 - 2.5 Однако $\vdash \gamma \rightarrow \neg\gamma \rightarrow 1 = 0$. Условие 3 (применить два раза) даст $\pi(\overline{\Gamma\gamma}) \vdash \pi(\overline{\Gamma 1 = 0})$.
3. $\neg\pi(\overline{\Gamma 1 = 0}) \rightarrow \neg\pi(\overline{\Gamma\gamma})$ (т. о дедукции, контрапозиция).
4. $\vdash \neg\pi(\overline{\Gamma 1 = 0}) \rightarrow \gamma$ (определение γ).

Расширение на другие теории

Определение

Теория S — расширение теории T , если из $\vdash_T \alpha$ следует $\vdash_S \alpha$

Определение

Теория S — рекурсивно-аксиоматизируемая, если найдётся теория S' с тем же языком, что:

- 1. $\vdash_S \alpha$ тогда и только тогда, когда $\vdash_{S'} \alpha$;*
- 2. Множество аксиом теории S' рекурсивно.*

Теорема

Если S — непротиворечивое рекурсивно-аксиоматизируемое расширение формальной арифметики, то в ней можно доказать аналоги теорем Гёделя о неполноте арифметики.

Сужение: система Робинсона

Определение

Теория первого порядка, использующая нелогические функциональные символы 0 , $(+)$ и (\cdot) , нелогический предикатный символ $(=)$ и следующие нелогические аксиомы, называется системой Робинсона.

$$a = a$$

$$a = b \rightarrow b = c \rightarrow a = c$$

$$a' = b' \rightarrow a = b$$

$$a = b \rightarrow a + c = b + c \ \& \ c + a = c + b$$

$$\neg a = 0 \rightarrow \exists b. a = b'$$

$$a + b' = (a + b)'$$

$$a \cdot b' = a \cdot b + a$$

$$a = b \rightarrow b = a$$

$$a = b \rightarrow a' = b'$$

$$\neg 0 = a'$$

$$a = b \rightarrow a \cdot c = b \cdot c \ \& \ c \cdot a = c \cdot b$$

$$a + 0 = a$$

$$a \cdot 0 = 0$$

Система Робинсона неполна: аксиомы — в точности утверждения, необходимые для доказательства теорем Гёделя. Система Робинсона не имеет схем аксиом.

Арифметика Пресбургера

Определение

Теория первого порядка, использующая нелогические функциональные символы 0 , 1 , $(+)$, нелогический предикатный символ $(=)$ и следующие нелогические аксиомы, называется арифметикой Пресбургера.

$$\neg(0 = x + 1)$$

$$x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y$$

$$x + 0 = x$$

$$x + (y + 1) = (x + y) + 1$$

$$(\varphi(0) \ \& \ \forall x. \varphi(x) \rightarrow \varphi(x + 1)) \rightarrow \forall y. \varphi(y)$$

Теорема

Арифметика Пресбургера разрешима и синтаксически и семантически полна.

Невыразимость доказуемости

Определение

$$Th_S = \{\ulcorner \alpha \urcorner \mid \vdash_S \alpha\}; Tr_S = \{\ulcorner \alpha \urcorner \mid \llbracket \alpha \rrbracket_S = \mathcal{I}\}$$

Лемма

Пусть $D(\ulcorner \alpha \urcorner) = \ulcorner \alpha(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}) \urcorner$ для любой формулы $\alpha(x)$. Тогда D представима в формальной арифметике.

Теорема

Если расширение Ф.А. S непротиворечиво и D представима в нём, то Th_S невыразимо в S

Доказательство.

Пусть $\delta(a, p)$ представляет D , и пусть $\sigma(x)$ выражает множество Th_S (рассматриваемое как одноместное отношение).

Пусть $\alpha(x) := \forall p. \delta(x, p) \rightarrow \neg \sigma(p)$. Верно ли, что $\ulcorner \alpha \urcorner \in Th$?



Неразрешимость формальной арифметики

Теорема

Если формальная арифметика непротиворечива, то формальная арифметика неразрешима

Доказательство.

Пусть формальная арифметика разрешима. Значит, есть рекурсивная функция $f(x)$: $f(x) = 1$ тогда и только тогда, когда $x \in \text{Th}_{\text{Ф.А.}}$. То есть, $\text{Th}_{\text{Ф.А.}}$ выразимо в формальной арифметике.

По теореме о невыразимости доказуемости, $\text{Th}_{\text{Ф.А.}}$ невыразимо в формальной арифметике. Противоречие. □

Теорема Тарского

Теорема (Тарского о невыразимости истины)

Не существует формулы $\varphi(x)$, что $\llbracket \varphi(x) \rrbracket = И$ (в стандартной интерпретации) тогда и только тогда, когда $x \in Tr_{ФА}$.

Доказательство.

Пусть теория \mathcal{S} — формальная арифметика + аксиомы: все истинные в стандартной интерпретации формулы. Очевидно, что $Th_{\mathcal{S}} = Tr_{\mathcal{S}} = Tr_{ФА}$. То есть $Tr_{ФА}$ невыразимо в \mathcal{S} .

Пусть φ таково, что $\llbracket \varphi(x) \rrbracket = И$ при $x \in Tr$. Тогда $\vdash \varphi(x)$, если $x \in Tr$ и $\vdash \neg \varphi(x)$, если $x \notin Tr$.

Тогда Tr выразимо в \mathcal{S} . Противоречие.



Теорема Тарского

Теорема (Тарского о невыразимости истины)

Не существует формулы $\varphi(x)$, что $\llbracket \varphi(x) \rrbracket = И$ (в стандартной интерпретации) тогда и только тогда, когда $x \in Tr_{ФА}$.

Доказательство.

Пусть теория \mathcal{S} — формальная арифметика + аксиомы: все истинные в стандартной интерпретации формулы. Очевидно, что $Th_{\mathcal{S}} = Tr_{\mathcal{S}} = Tr_{ФА}$. То есть $Tr_{ФА}$ невыразимо в \mathcal{S} .

Пусть φ таково, что $\llbracket \varphi(x) \rrbracket = И$ при $x \in Tr$. Тогда $\vdash \varphi(x)$, если $x \in Tr$ и $\vdash \neg \varphi(x)$, если $x \notin Tr$.

Тогда Tr выразимо в \mathcal{S} . Противоречие. □

Однако, если взять $D = \mathbb{R}$, истина становится выразима (алгоритм Тарского).