

Теоремы об исчислении высказываний.

Корректность и полнота

Определение (корректность теории)

Теория корректна, если любое доказуемое в ней утверждение общезначимо. То есть, $\vdash \alpha$ влечёт $\models \alpha$.

Определение (полнота теории)

Теория семантически полна, если любое общезначимое в ней утверждение доказуемо. То есть, $\models \alpha$ влечёт $\vdash \alpha$.

Контекст, метаязык

Будем обозначать большими греческими буквами середины алфавита, возможно с индексами, $(\Gamma, \Delta_1, \dots)$ списки формул. Будем использовать, где удобно:

$$\Gamma \vdash \alpha$$

Контекст, метаязык

Будем обозначать большими греческими буквами середины алфавита, возможно с индексами, $(\Gamma, \Delta_1, \dots)$ списки формул. Будем использовать, где удобно:

$$\Gamma \vdash \alpha$$

Списки можно указывать через запятую:

$$\Gamma, \Delta, \zeta \vdash \alpha$$

Контекст, метаязык

Будем обозначать большими греческими буквами середины алфавита, возможно с индексами, $(\Gamma, \Delta_1, \dots)$ списки формул. Будем использовать, где удобно:

$$\Gamma \vdash \alpha$$

Списки можно указывать через запятую:

$$\Gamma, \Delta, \zeta \vdash \alpha$$

это означает то же, что и

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m, \zeta \vdash \alpha$$

если

$$\Gamma := \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}, \quad \Delta := \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$$

Теорема о дедукции

Theorem (О дедукции, Жак Эрбран, 1930)

$\Gamma, \alpha \vdash \beta$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Теорема о дедукции

Theorem (О дедукции, Жак Эрбран, 1930)

$\Gamma, \alpha \vdash \beta$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Доказательство «в две стороны», сперва «справа налево». Пусть $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, покажем $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

Теорема о дедукции

Theorem (О дедукции, Жак Эрбран, 1930)

$\Gamma, \alpha \vdash \beta$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Доказательство «в две стороны», сперва «справа налево». Пусть $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, покажем $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

То есть по условию существует вывод:

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \alpha \rightarrow \beta$$

Теорема о дедукции

Theorem (О дедукции, Жак Эрбран, 1930)

$\Gamma, \alpha \vdash \beta$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Доказательство «в две стороны», сперва «справа налево». Пусть $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, покажем $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

То есть по условию существует вывод:

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \alpha \rightarrow \beta$$

Тогда следующая последовательность — тоже вывод:

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \alpha \rightarrow \beta, \alpha, \beta$$

Доказательство: $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ влечёт $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

№ п/п	формула	пояснение
(1)	δ_1	в соответствии с исходным доказательством
	\dots	
$(n-1)$	δ_{n-1}	в соответствии с исходным доказательством
(n)	$\alpha \rightarrow \beta$	в соответствии с исходным доказательством
$(n+1)$	α	гипотеза
$(n+2)$	β	Modus Ponens $n+1, n$

Доказательство: $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ влечёт $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

№ п/п	формула	пояснение
(1)	δ_1	в соответствии с исходным доказательством
	\dots	
$(n-1)$	δ_{n-1}	в соответствии с исходным доказательством
(n)	$\alpha \rightarrow \beta$	в соответствии с исходным доказательством
$(n+1)$	α	гипотеза
$(n+2)$	β	Modus Ponens $n+1, n$

Вывод $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ предоставлен, первая часть теоремы доказана.

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Пусть даны формулы вывода

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \beta$$

Аналогично предыдущему пункту, перестроим вывод.

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Пусть даны формулы вывода

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \beta$$

Аналогично предыдущему пункту, перестроим вывод.

Построим «черновик» вывода, приписав α слева к каждой формуле:

$$\alpha \rightarrow \delta_1, \alpha \rightarrow \delta_2, \dots, \alpha \rightarrow \delta_{n-1}, \alpha \rightarrow \beta$$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Пусть даны формулы вывода

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \beta$$

Аналогично предыдущему пункту, перестроим вывод.

Построим «черновик» вывода, приписав α слева к каждой формуле:

$$\alpha \rightarrow \delta_1, \alpha \rightarrow \delta_2, \dots, \alpha \rightarrow \delta_{n-1}, \alpha \rightarrow \beta$$

Данная последовательность формул не обязательно вывод: $\Gamma := \emptyset, \alpha := A$

$$\delta_1 := A \rightarrow B \rightarrow A$$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Пусть даны формулы вывода

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \beta$$

Аналогично предыдущему пункту, перестроим вывод.

Построим «черновик» вывода, приписав α слева к каждой формуле:

$$\alpha \rightarrow \delta_1, \alpha \rightarrow \delta_2, \dots, \alpha \rightarrow \delta_{n-1}, \alpha \rightarrow \beta$$

Данная последовательность формул не обязательно вывод: $\Gamma := \emptyset, \alpha := A$

$$\delta_1 := A \rightarrow B \rightarrow A$$

припишем A слева — вывод не получим:

$$\alpha \rightarrow \delta_1 \equiv A \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow A)$$

Последовательности, странная нумерация

Определение (конечная последовательность)

Функция $\delta : 1 \dots n \rightarrow \mathcal{F}$

Определение (конечная последовательность, индексированная дробными числами)

Функция $\zeta : I \rightarrow \mathcal{F}$, где $I \subset \mathbb{Q}$ и I конечно.

Пример (странный мотивационный пример: язык Фокал)

Программа		Вывод	
10.1	t n, !	=	0.0000
10.15	s n = n+1	=	1.0000
10.17	i (n-3) 10.1, 11.0, 11.0	=	2.0000
11.0	t "That's all"		That's all

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Доказательство.

(индукция по длине вывода). Если $\delta_1, \dots, \delta_n$ — вывод $\Gamma, \alpha \vdash \delta_n$, то найдётся вывод ζ_k для $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \delta_n$, причём $\zeta_1 \equiv \alpha \rightarrow \delta_1, \dots, \zeta_n \equiv \alpha \rightarrow \delta_n$.

- ▶ База ($n = 1$): частный случай перехода (без M.P.).
- ▶ Переход. Пусть $\delta_1, \dots, \delta_{n+1}$ — исходный вывод. И пусть (по индукционному предположению) уже по начальному фрагменту $\delta_1, \dots, \delta_n$ построен вывод ζ_k утверждения $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \delta_n$.

Но δ_{n+1} как-то был обоснован — разберём случаи:

1. δ_{n+1} — аксиома или $\delta_{n+1} \in \Gamma$
2. $\delta_{n+1} \equiv \alpha$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Доказательство.

(индукция по длине вывода). Если $\delta_1, \dots, \delta_n$ — вывод $\Gamma, \alpha \vdash \delta_n$, то найдётся вывод ζ_k для $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \delta_n$, причём $\zeta_1 \equiv \alpha \rightarrow \delta_1, \dots, \zeta_n \equiv \alpha \rightarrow \delta_n$.

- ▶ База ($n = 1$): частный случай перехода (без M.P.).
- ▶ Переход. Пусть $\delta_1, \dots, \delta_{n+1}$ — исходный вывод. И пусть (по индукционному предположению) уже по начальному фрагменту $\delta_1, \dots, \delta_n$ построен вывод ζ_k утверждения $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \delta_n$.

Но δ_{n+1} как-то был обоснован — разберём случаи:

1. δ_{n+1} — аксиома или $\delta_{n+1} \in \Gamma$
2. $\delta_{n+1} \equiv \alpha$
3. δ_{n+1} — Modus Ponens из δ_j и $\delta_k \equiv \delta_j \rightarrow \delta_{n+1}$.

В каждом из случаев можно дополнить черновик до полноценного вывода.



Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, случай аксиомы

№ п/п	новый вывод	пояснение
	...	
(1)	$\alpha \rightarrow \delta_1$	
	...	
(2)	$\alpha \rightarrow \delta_2$	
	...	
(n)	$\alpha \rightarrow \delta_n$	
	$\alpha \rightarrow \delta_{n+1}$	δ_{n+1} — аксиома, либо $\delta_{n+1} \in \Gamma$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, случай аксиомы

№ п/п	НОВЫЙ ВЫВОД	ПОЯСНЕНИЕ
	...	
(1)	$\alpha \rightarrow \delta_1$	
	...	
(2)	$\alpha \rightarrow \delta_2$	
	...	
$(n + 0.3)$	$\delta_{n+1} \rightarrow \alpha \rightarrow \delta_{n+1}$	схема аксиом 1
$(n + 0.6)$	δ_{n+1}	аксиома, либо $\delta_{n+1} \in \Gamma$
$(n + 1)$	$\alpha \rightarrow \delta_{n+1}$	М.Р. $n + 0.6, n + 0.3$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, случай $\delta_{n+1} \equiv \alpha$

№ п/п	НОВЫЙ ВЫВОД	ПОЯСНЕНИЕ
	...	
(1)	$\alpha \rightarrow \delta_1$	
	...	
(2)	$\alpha \rightarrow \delta_2$	
	...	
$(n + 0.2)$	$\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$	Сх. акс. 1
$(n + 0.4)$	$(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$	Сх. акс. 2
$(n + 0.6)$	$(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$	М.Р. $n + 0.2, n + 0.4$
$(n + 0.8)$	$\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$	Сх. акс. 1
$(n + 1)$	$\alpha \rightarrow \alpha$	М.Р. $n + 0.8, n + 0.6$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, случай Modus Ponens

№ п/п	НОВЫЙ ВЫВОД	ПОЯСНЕНИЕ
	...	
(1)	$\alpha \rightarrow \delta_1$	
	...	
(2)	$\alpha \rightarrow \delta_2$	
	...	
(j)	$\alpha \rightarrow \delta_j$	
	...	
(k)	$\alpha \rightarrow \delta_j \rightarrow \delta_{n+1}$	
	...	
(n + 0.3)	$(\alpha \rightarrow \delta_j) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta_j \rightarrow \delta_{n+1}) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta_{n+1})$	Сх. акс. 2
(n + 0.6)	$(\alpha \rightarrow \delta_j \rightarrow \delta_{n+1}) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta_{n+1})$	M.P. j, n + 0.3
(n + 1)	$\alpha \rightarrow \delta_{n+1}$	M.P. k, n + 0.6

Некоторые полезные правила

Лемма (Правило контрапозиции)

Каковы бы ни были формулы α и β , справедливо, что $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$.

Некоторые полезные правила

Лемма (Правило контрапозиции)

Каковы бы ни были формулы α и β , справедливо, что $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$.

Лемма (правило исключённого третьего)

Какова бы ни была формула α , $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$.

Лемма (об исключении допущения)

Пусть справедливо $\Gamma, \rho \vdash \alpha$ и $\Gamma, \neg\rho \vdash \alpha$. Тогда также справедливо $\Gamma \vdash \alpha$.

Доказательство.

Доказывается с использованием лемм, указанных выше.



Теорема о полноте исчисления высказываний

Теорема

Если $\models \alpha$, то $\vdash \alpha$.

Специальное обозначение

Определение (условное отрицание)

Зададим некоторую оценку переменных, такую, что $\llbracket \alpha \rrbracket = x$.

Тогда условным отрицанием формулы α назовём следующую формулу $\langle \alpha \rangle$:

$$\langle \alpha \rangle = \begin{cases} \alpha, & x = \text{И} \\ \neg \alpha, & x = \text{Л} \end{cases}$$

Аналогично записи для оценок, будем указывать оценку переменных, если это потребуется / будет неочевидно из контекста:

$$\langle \neg X \rangle^{x:=\text{Л}} = \neg X \qquad \langle \neg X \rangle^{x:=\text{И}} = \neg \neg X$$

Также, если $\Gamma := \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, то за $\langle \Gamma \rangle$ обозначим $\langle \gamma_1 \rangle, \langle \gamma_2 \rangle, \dots, \langle \gamma_n \rangle$.

Таблицы истинности и высказывания

Рассмотрим связку «импликация» и её таблицу истинности:

$\llbracket A \rrbracket$	$\llbracket B \rrbracket$	$\llbracket A \rightarrow B \rrbracket$	формула
Л	Л	И	$\neg A, \neg B \vdash A \rightarrow B$
Л	И	И	$\neg A, B \vdash A \rightarrow B$
И	Л	Л	$A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$
И	И	И	$A, B \vdash A \rightarrow B$

Таблицы истинности и высказывания

Рассмотрим связку «импликация» и её таблицу истинности:

$\llbracket A \rrbracket$	$\llbracket B \rrbracket$	$\llbracket A \rightarrow B \rrbracket$	формула
Л	Л	И	$\neg A, \neg B \vdash A \rightarrow B$
Л	И	И	$\neg A, B \vdash A \rightarrow B$
И	Л	Л	$A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$
И	И	И	$A, B \vdash A \rightarrow B$

Заметим, что с помощью условного отрицания данную таблицу можно записать в одну строку:

$$\langle A \rangle, \langle B \rangle \vdash \langle A \rightarrow B \rangle$$

Полнота исчисления высказываний

Теорема (О полноте исчисления высказываний)

Если $\models \alpha$, то $\vdash \alpha$

Полнота исчисления высказываний

Теорема (О полноте исчисления высказываний)

Если $\models \alpha$, то $\vdash \alpha$

1. Построим таблицы истинности для каждой связки (\star) и докажем в них каждую строку:

$$(\varphi), (\psi) \vdash (\varphi \star \psi)$$

Полнота исчисления высказываний

Теорема (О полноте исчисления высказываний)

Если $\models \alpha$, то $\vdash \alpha$

1. Построим таблицы истинности для каждой связки (\star) и докажем в них каждую строку:

$$\langle \varphi \rangle, \langle \psi \rangle \vdash \langle \varphi \star \psi \rangle$$

2. Построим таблицу истинности для α и докажем в ней каждую строку:

$$\langle \Xi \rangle \vdash \langle \alpha \rangle$$

Полнота исчисления высказываний

Теорема (О полноте исчисления высказываний)

Если $\models \alpha$, то $\vdash \alpha$

1. Построим таблицы истинности для каждой связки (\star) и докажем в них каждую строку:

$$\langle \varphi \rangle, \langle \psi \rangle \vdash \langle \varphi \star \psi \rangle$$

2. Построим таблицу истинности для α и докажем в ней каждую строку:

$$\langle \Xi \rangle \vdash \langle \alpha \rangle$$

3. Если формула общезначима, то в ней все строки будут иметь вид $\langle \Xi \rangle \vdash \alpha$, потому от гипотез мы сможем избавиться и получить требуемое $\vdash \alpha$.

Шаг 1. Лемма о связках

Запись

$$(\varphi), (\psi) \vdash (\varphi \star \psi)$$

сводится к 14 утверждениям:

$$\neg\varphi, \neg\psi \vdash \neg(\varphi \& \psi)$$

$$\neg\varphi, \psi \vdash \neg(\varphi \& \psi)$$

$$\varphi, \neg\psi \vdash \neg(\varphi \& \psi)$$

$$\varphi, \psi \vdash (\varphi \& \psi)$$

$$\neg\varphi, \neg\psi \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$$

$$\neg\varphi, \psi \vdash (\varphi \vee \psi)$$

$$\varphi, \neg\psi \vdash (\varphi \vee \psi)$$

$$\varphi, \psi \vdash (\varphi \vee \psi)$$

$$\neg\varphi, \neg\psi \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$$

$$\neg\varphi, \psi \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$$

$$\varphi, \neg\psi \vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi)$$

$$\varphi, \psi \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$$

$$\varphi \vdash \neg\neg\varphi$$

$$\neg\varphi \vdash \neg\varphi$$

Шаг 2. Обобщение на любую формулу

Лемма (Условное отрицание формул)

Пусть пропозициональные переменные $\Xi := \{X_1, \dots, X_n\}$ — все переменные, которые используются в формуле α . И пусть задана некоторая оценка переменных. Тогда, $(\Xi) \vdash (\neg\alpha)$

Шаг 2. Обобщение на любую формулу

Лемма (Условное отрицание формул)

Пусть пропозициональные переменные $\Xi := \{X_1, \dots, X_n\}$ — все переменные, которые используются в формуле α . И пусть задана некоторая оценка переменных. Тогда, $(\Xi) \vdash (\alpha)$

Доказательство.

Индукция по длине формулы α .

- ▶ База: формула α — атомарная, т.е. $\alpha \equiv X_i$. Тогда при любом Ξ выполнено $(\Xi)^{X_i:=И} \vdash X_i$ и $(\Xi)^{X_i:=Л} \vdash \neg X_i$.
- ▶ Переход: $\alpha \equiv \varphi \star \psi$, причём $(\Xi) \vdash (\varphi)$ и $(\Xi) \vdash (\psi)$

Шаг 2. Обобщение на любую формулу

Лемма (Условное отрицание формул)

Пусть пропозициональные переменные $\Xi := \{X_1, \dots, X_n\}$ — все переменные, которые используются в формуле α . И пусть задана некоторая оценка переменных. Тогда, $(\Xi) \vdash \langle \alpha \rangle$

Доказательство.

Индукция по длине формулы α .

- ▶ База: формула α — атомарная, т.е. $\alpha \equiv X_i$. Тогда при любом Ξ выполнено $(\Xi)^{X_i:=\text{И}} \vdash X_i$ и $(\Xi)^{X_i:=\text{Л}} \vdash \neg X_i$.
- ▶ Переход: $\alpha \equiv \varphi \star \psi$, причём $(\Xi) \vdash \langle \varphi \rangle$ и $(\Xi) \vdash \langle \psi \rangle$

Тогда построим вывод:

(1) ... (n)	$\langle \varphi \rangle$	индукционное предположение
(n + 1) ... (k)	$\langle \psi \rangle$	индукционное предположение
(k + 1) ... (l)	$\langle \varphi \star \psi \rangle$	лемма о связках: $\langle \varphi \rangle$ и $\langle \psi \rangle$ доказаны выше, значит, их можно использовать как гипотезы



Шаг 3. Избавляемся от гипотез

Лемма

Пусть при всех оценках переменных $(\Xi) \vdash \alpha$, тогда $\vdash \alpha$.

Шаг 3. Избавляемся от гипотез

Лемма

Пусть при всех оценках переменных $(\Xi) \vdash \alpha$, тогда $\vdash \alpha$.

Доказательство.

Индукция по количеству переменных n .

- База: $n = 0$. Тогда $\vdash \alpha$ есть из условия.

Шаг 3. Избавляемся от гипотез

Лемма

Пусть при всех оценках переменных $(\Xi) \vdash \alpha$, тогда $\vdash \alpha$.

Доказательство.

Индукция по количеству переменных n .

- База: $n = 0$. Тогда $\vdash \alpha$ есть из условия.
- Переход: пусть $(X_1, X_2, \dots, X_{n+1}) \vdash \alpha$. Рассмотрим 2^n пар выводов:

$$(X_1, X_2, \dots, X_n), X_{n+1} \vdash \alpha \quad (X_1, X_2, \dots, X_n), \neg X_{n+1} \vdash \alpha$$

По лемме об исключении допущения тогда

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) \vdash \alpha$$

При этом, $(X_1, X_2, \dots, X_n) \vdash \alpha$ при всех оценках переменных X_1, \dots, X_n . Значит, $\vdash \alpha$ по индукционному предположению. □

Заключительные замечания

Теорема о полноте — конструктивна. Получающийся вывод — экспоненциальный по длине.

Несложно по изложенному доказательству разработать программу, строящую вывод.

Вывод для формулы с 3 переменными — порядка 3 тысяч строк.

Интуиционистская логика

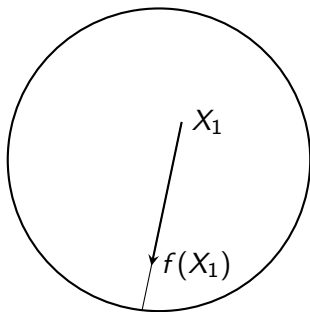
Доказательства чистого существования

Теорема (Брауэра о неподвижной точке)

Любое непрерывное отображение f шара в \mathbb{R}^n на себя имеет неподвижную точку

Доказательство.

Не существует непрерывного отображения шара на границу (без доказательства),
однако:



Один из примеров подробно

Теорема

Существует пара иррациональных чисел a и b , такая, что a^b — рационально.

Один из примеров подробно

Теорема

Существует пара иррациональных чисел a и b , такая, что a^b — рационально.

- ▶ $2^5, 3^3, 7^{10}, \sqrt{2}^2$ — рациональны;
- ▶ $2^{\sqrt{2}}, e^{\pi}$ — иррациональны (как это доказать?);

Один из примеров подробно

Теорема

Существует пара иррациональных чисел a и b , такая, что a^b — рационально.

Доказательство.

Рассмотрим $a = b = \sqrt{2}$ и рассмотрим a^b . Возможны два варианта:

1. $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ — рационально;
2. $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ — иррационально; отлично, тогда возьмём $a_1 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ и получим

$$a_1^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$



Интуиционизм

“Over de Grondslagen der Wiskunde” (Брайэр, 1907 г.)

Основные положения:

1. Математика не формальна.
2. Математика независима от окружающего мира.
3. Математика не зависит от логики — это логика зависит от математики.

ВНК-интерпретация логических связей

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

ВНК-интерпретация логических связок

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α, β — некоторые конструкции, тогда:

ВНК-интерпретация логических связей

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α , β — некоторые конструкции, тогда:

- ▶ $\alpha \ \& \ \beta$ построено, если построены α и β

ВНК-интерпретация логических связей

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α , β — некоторые конструкции, тогда:

- ▶ $\alpha \& \beta$ построено, если построены α и β
- ▶ $\alpha \vee \beta$ построено, если построено α или β , и мы знаем, что именно

ВНК-интерпретация логических связей

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α , β — некоторые конструкции, тогда:

- ▶ $\alpha \& \beta$ построено, если построены α и β
- ▶ $\alpha \vee \beta$ построено, если построено α или β , и мы знаем, что именно
- ▶ $\alpha \rightarrow \beta$ построено, если есть способ перестроения α в β

ВНК-интерпретация логических связей

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α , β — некоторые конструкции, тогда:

- ▶ $\alpha \& \beta$ построено, если построены α и β
- ▶ $\alpha \vee \beta$ построено, если построено α или β , и мы знаем, что именно
- ▶ $\alpha \rightarrow \beta$ построено, если есть способ перестроения α в β
- ▶ \perp — конструкция, не имеющая построения

ВНК-интерпретация логических связей

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α, β — некоторые конструкции, тогда:

- ▶ $\alpha \& \beta$ построено, если построены α и β
- ▶ $\alpha \vee \beta$ построено, если построено α или β , и мы знаем, что именно
- ▶ $\alpha \rightarrow \beta$ построено, если есть способ перестроения α в β
- ▶ \perp — конструкция, не имеющая построения
- ▶ $\neg\alpha$ построено, если построено $\alpha \rightarrow \perp$

Дизъюнкция

Конструкция $\alpha \vee \neg\alpha$ не имеет построения в общем случае. Что может быть построено: α или $\neg\alpha$?

Дизъюнкция

Конструкция $\alpha \vee \neg\alpha$ не имеет построения в общем случае. Что может быть построено: α или $\neg\alpha$?

Возьмём за α нерешённую проблему, например, $P = NP$

Дизъюнкция

Конструкция $\alpha \vee \neg\alpha$ не имеет построения в общем случае. Что может быть построено: α или $\neg\alpha$?

Возьмём за α нерешённую проблему, например, $P = NP$

Авторам в данный момент не известно, выполнено $P = NP$ или же $P \neq NP$.

Отличия импликации

Высказывание общезначимо в И.В. и не выполнено в ВНК-интерпретации:

$$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$$

Отличия импликации

Высказывание общезначимо в И.В. и не выполнено в ВНК-интерпретации:

$$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$$

Давайте дадим следующий смысл пропозициональным переменным:

- ▶ A — 14.09.2024 в Санкт-Петербурге идёт дождь;
- ▶ B — 14.09.2024 в Санкт-Петербурге светит солнце;
- ▶ C — во 2 семестре 3 человека из группы 3239 получили «отлично» по матанализу.

Отличия импликации

Высказывание общезначимо в И.В. и не выполнено в ВНК-интерпретации:

$$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$$

Давайте дадим следующий смысл пропозициональным переменным:

- ▶ A — 14.09.2024 в Санкт-Петербурге идёт дождь;
- ▶ B — 14.09.2024 в Санкт-Петербурге светит солнце;
- ▶ C — во 2 семестре 3 человека из группы 3239 получили «отлично» по матанализу.

Импликацию можно понимать как «формальную» и как «материальную».

- ▶ Материальная импликация $A \rightarrow B$ — надо посмотреть в окно.

Отличия импликации

Высказывание общезначимо в И.В. и не выполнено в ВНК-интерпретации:

$$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$$

Давайте дадим следующий смысл пропозициональным переменным:

- ▶ A — 14.09.2024 в Санкт-Петербурге идёт дождь;
- ▶ B — 14.09.2024 в Санкт-Петербурге светит солнце;
- ▶ C — во 2 семестре 3 человека из группы 3239 получили «отлично» по матанализу.

Импликацию можно понимать как «формальную» и как «материальную».

- ▶ Материальная импликация $A \rightarrow B$ — надо посмотреть в окно.
- ▶ Формальная импликация $A \rightarrow B$ места не имеет (причинно-следственной связи нет).

Формализация

Формализация интуиционистской логики возможна, но интуитивное понимание — основное.

Определение

Аксиоматика интуиционистского исчисления высказываний в гильбертовском стиле: аксиоматика КИВ, в которой 10 схема аксиом

$$(10) \quad \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$$

заменена на

$$(10и) \quad \alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$$

Немного об общей топологии.

Топологическое пространство

Определение

Топологическим пространством называется упорядоченная пара $\langle X, \Omega \rangle$, где X — некоторое множество, а $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$, причём:

1. $\emptyset, X \in \Omega$
2. если $A_1, \dots, A_n \in \Omega$, то $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \Omega$;
3. если $\{A_\alpha\}$ — семейство множеств из Ω , то и $\bigcup_\alpha A_\alpha \in \Omega$.

Множество Ω называется топологией. Элементы Ω называются открытыми множествами.

Определение

\mathcal{B} — база топологического пространства $\langle X, \Omega \rangle$ ($\mathcal{B} \subseteq \Omega$), если всевозможные объединения множеств (в т.ч. пустые) из \mathcal{B} дают Ω .

Примеры топологических пространств

Определение

Евклидово пространство (евклидова топология) на \mathbb{R} : база топологии $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

Определение

Дискретная топология: $\langle X, \mathcal{P}(X) \rangle$ — все множества открыты.

Определение

Топология стрелки: $\langle \mathbb{R}, \{(x, +\infty) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\} \rangle$ — открыты все положительные лучи.

Метрические пространства

Определение

Метрикой на X назовём множество, на котором определена функция расстояния $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1. $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (неравенство треугольника)

Определение

Открытым ε -шаром с центром в точке $x \in X$ назовём

$$O_\varepsilon(x) = \{t \in X \mid d(x, t) < \varepsilon\}.$$

Определение

Если X — некоторое множество и d — метрика на X , то будем говорить, что топологическое пространство, задаваемое базой $\mathcal{B} = \{O_\varepsilon(x) \mid \varepsilon \in \mathbb{R}^+, x \in X\}$, порождено метрикой d .

Недоказуемость закона исключённого третьего в ИИВ

Определение

Внутренность множества A° — наибольшее T , что $T \in \Omega$ и $T \subseteq A$.

Теорема

Если $\langle X, \Omega \rangle$ — некоторое топологическое пространство, то следующий способ оценки высказываний даёт корректную модель ИИВ: $V = \Omega$, $I = X$ и

$$\llbracket \alpha \ \& \ \beta \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket \cap \llbracket \beta \rrbracket$$

$$\llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket \cup \llbracket \beta \rrbracket$$

$$\llbracket \neg \alpha \rrbracket = (c[\llbracket \alpha \rrbracket])^\circ$$

$$\llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket = (c[\llbracket \alpha \rrbracket])^\circ \cup \llbracket \beta \rrbracket$$

Теорема

$$\not\models A \vee \neg A$$

Доказательство.

Рассмотрим топологию стрелки на $\{0, 1\}$: $\Omega = \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Пусть $\llbracket A \rrbracket = \{1\}$. Тогда $\llbracket \neg A \rrbracket = \{0\}^\circ = \emptyset$, поэтому $\llbracket A \vee \neg A \rrbracket = \{1\}$. □