

Трансфинитная индукция

## Два вида индукции

### Определение (принцип математической индукции)

*Какое бы ни было  $\varphi(x)$ , если  $\varphi(0)$  и при всех  $x$  выполнено  $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x')$ , то при всех  $x$  выполнено и само  $\varphi(x)$ .*

### Определение (принцип полной математической индукции)

*Какое бы ни было  $\psi(x)$ , если  $\psi(0)$  и при всех  $x$  выполнено  $(\forall t. t \leq x \rightarrow \psi(t)) \rightarrow \psi(x')$ , то при всех  $x$  выполнено и само  $\psi(x)$ .*

### Теорема

*Принципы математической индукции эквивалентны*

### Доказательство.

$(\Rightarrow)$  взяв  $\varphi := \psi$ , имеем выполненность  $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x')$ , значит,  $\forall x. \psi(x)$ .

## Два вида индукции

### Определение (принцип математической индукции)

*Какое бы ни было  $\varphi(x)$ , если  $\varphi(0)$  и при всех  $x$  выполнено  $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x')$ , то при всех  $x$  выполнено и само  $\varphi(x)$ .*

### Определение (принцип полной математической индукции)

*Какое бы ни было  $\psi(x)$ , если  $\psi(0)$  и при всех  $x$  выполнено  $(\forall t. t \leq x \rightarrow \psi(t)) \rightarrow \psi(x')$ , то при всех  $x$  выполнено и само  $\psi(x)$ .*

### Теорема

*Принципы математической индукции эквивалентны*

### Доказательство.

$(\Rightarrow)$  взяв  $\varphi := \psi$ , имеем выполненность  $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x')$ , значит,  $\forall x. \psi(x)$ .

$(\Leftarrow)$  возьмём  $\psi(x) := \forall t. t \leq x \rightarrow \varphi(t)$ .



# Наследственные подмножества

## Определение

Назовём вполне упорядоченное отношение  $(\in)$  множество  $S$  наследственным подмножеством  $A$ , если  $\forall x. x \in A \rightarrow (\forall t. t \in x \rightarrow t \in S) \rightarrow x \in S$ .

## Теорема

Единственным наследственным подмножеством вполне упорядоченного множества является оно само.

## Доказательство.

Пусть  $B \subseteq A$  — наследственное и  $B \neq A$ . Тогда существует  $a = \min(A \setminus B)$ . Тогда  $(\forall t. t \in a \rightarrow t \in B) \rightarrow a \in B$  по наследственности  $B$ , и выполнено  $\forall t. t \in a \rightarrow t \in B$  (по минимальности  $a$ ). Значит,  $a \in B$ . □

# Трансфинитная индукция

## Теорема (ограниченная трансфинитная индукция)

Если для  $\varphi(x)$  (некоторого утверждения теории множеств) и некоторого ординала  $\varepsilon$  (ограничения) выполнено  $\forall x. x \in \varepsilon \rightarrow (\forall t. t \in x \rightarrow \varphi(t)) \rightarrow \varphi(x)$ , то  $\forall x. x \in \varepsilon \rightarrow \varphi(x)$ .

### Доказательство.

Рассмотрим  $S = \{x \in \varepsilon \mid \varphi(x)\}$ . Тогда  $x \in S$  равносильно  $x \in \varepsilon \ \& \ \varphi(x)$ . Тогда перепишем:  $\forall e. e \in \varepsilon \rightarrow (\forall x. x \in e \rightarrow x \in S) \rightarrow e \in S$ . Отсюда по теореме о наследственных множествах  $S = \varepsilon$ . □

## Теорема (неограниченная трансфинитная индукция)

Если для  $\varphi(x)$  (некоторого утверждения теории множеств) выполнено  $\forall x. \text{ордиал}(x) \rightarrow (\forall t. t \in x \rightarrow \varphi(t)) \rightarrow \varphi(x)$ , то  $\forall x. \text{ордиал}(x) \rightarrow \varphi(x)$ .

# Альтернативная формулировка

## Теорема

*Для ординала  $\varepsilon$  подмножество  $S \in \varepsilon$  — наследственное, если одновременно:*

*Если  $x \in \varepsilon$  и  $x = \emptyset$ , то  $x \in S$ ;*

*Если  $x \in \varepsilon$  и существует  $y: y' = x$ , то  $y \in S \rightarrow x \in S$ ;*

*Если  $x \in \varepsilon$  и  $x$  — предельный, то  $(\forall t. t \in x \rightarrow t \in S) \rightarrow (x \in S)$ .*

## Доказательство.

$(\Rightarrow)$  очевидно.

# Альтернативная формулировка

## Теорема

Для ординала  $\varepsilon$  подмножество  $S \in \varepsilon$  — наследственное, если одновременно:

Если  $x \in \varepsilon$  и  $x = \emptyset$ , то  $x \in S$ ;

Если  $x \in \varepsilon$  и существует  $y: y' = x$ , то  $y \in S \rightarrow x \in S$ ;

Если  $x \in \varepsilon$  и  $x$  — предельный, то  $(\forall t. t \in x \rightarrow t \in S) \rightarrow (x \in S)$ .

## Доказательство.

$(\Rightarrow)$  очевидно. Докажем  $(\Leftarrow)$ : пусть  $S$  не наследственное:

$E := \{e \in \varepsilon \mid (\forall t. t \in e \rightarrow t \in S) \ \& \ e \notin S\}$  и  $E \neq \emptyset$ . Тогда пусть  $e = \min E$ .

1.  $e = \emptyset$  или предельный. Тогда  $(\forall t. t \in e \rightarrow t \in S) \rightarrow (e \in S)$ .
2.  $e = y'$ . Тогда  $y \in \varepsilon$  ( $\varepsilon$  — ординал) и  $(\forall t. t \in y \rightarrow t \in S) \rightarrow (y \in S)$  (так как  $e$  минимальный, для которого  $S$  не наследственное).

# Альтернативная формулировка

## Теорема

Для ординала  $\varepsilon$  подмножество  $S \in \varepsilon$  — наследственное, если одновременно:

Если  $x \in \varepsilon$  и  $x = \emptyset$ , то  $x \in S$ ;

Если  $x \in \varepsilon$  и существует  $y: y' = x$ , то  $y \in S \rightarrow x \in S$ ;

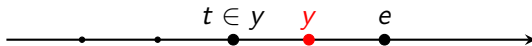
Если  $x \in \varepsilon$  и  $x$  — предельный, то  $(\forall t. t \in x \rightarrow t \in S) \rightarrow (x \in S)$ .

## Доказательство.

$(\Rightarrow)$  очевидно. Докажем  $(\Leftarrow)$ : пусть  $S$  не наследственное:

$E := \{e \in \varepsilon \mid (\forall t. t \in e \rightarrow t \in S) \ \& \ e \notin S\}$  и  $E \neq \emptyset$ . Тогда пусть  $e = \min E$ .

1.  $e = \emptyset$  или предельный. Тогда  $(\forall t. t \in e \rightarrow t \in S) \rightarrow (e \in S)$ .
2.  $e = y'$ . Тогда  $y \in \varepsilon$  ( $\varepsilon$  — ординал) и  $(\forall t. t \in y \rightarrow t \in S) \rightarrow (y \in S)$  (так как  $e$  минимальный, для которого  $S$  не наследственное). По условию,  $(y \in S) \rightarrow (e \in S)$ , откуда  $(\forall t. t \in e \rightarrow t \in S) \rightarrow (e \in S)$ .





Пример применения:  $\alpha \cdot \alpha = \alpha$  при  $\alpha \geq \aleph_0$

## Теорема

Если  $\alpha$  — кардинальное число,  $\alpha \geq \aleph_0$ , то  $\alpha \cdot \alpha = \alpha$ .

## Доказательство.

Трансфинитная индукция:  $\varphi(x) := x < \omega \vee x \cdot x = x$

1. База:  $x = \emptyset$ . Тогда  $\varphi(\emptyset) \equiv \emptyset < \omega \vee |\emptyset \times \emptyset| = \emptyset$ , что доказуемо.
2. Переход:  $\forall u. u < x \rightarrow \varphi(u)$ , тогда  $\varphi(x)$ . Три случая:
  - 2.1  $x < \omega$ . Тогда  $\varphi(x)$  истинно (аналогично базе).
  - 2.2  $x = \omega$ . Счётный случай (рассмотрим отдельно).
  - 2.3  $x > \omega$ . Общий случай (рассмотрим отдельно).



Счётный случай:  $\omega < \omega \vee |\omega \cdot \omega| = \omega$

Тогда  $\omega \times \omega$  упорядочим так:  $\langle p, q \rangle \prec \langle s, t \rangle$ , если

1.  $\max(p, q) < \max(s, t)$
2.  $\max(p, q) = \max(s, t)$  и  $q < t$
3.  $\max(p, q) = \max(s, t)$ ,  $q = t$  и  $p < s$

Очевидно, можно построить биекцию между так упорядоченными значениями и  $\omega$ .

12 $\langle 0, 3 \rangle$	13 $\langle 1, 3 \rangle$	14 $\langle 2, 3 \rangle$	15 $\langle 3, 3 \rangle$
6 $\langle 0, 2 \rangle$	7 $\langle 1, 2 \rangle$	8 $\langle 2, 2 \rangle$	11 $\langle 3, 2 \rangle$
2 $\langle 0, 1 \rangle$	3 $\langle 1, 1 \rangle$	5 $\langle 2, 1 \rangle$	10 $\langle 3, 1 \rangle$
0 $\langle 0, 0 \rangle$	1 $\langle 1, 0 \rangle$	4 $\langle 2, 0 \rangle$	9 $\langle 3, 0 \rangle$

## Общий случай: $|\alpha \cdot \alpha| = \alpha$

Аналогично счётному случаю,  $\alpha \times \alpha$  упорядочим так:  $\langle p, q \rangle \prec \langle s, t \rangle$ , если

1.  $p \cup q < s \cup t$
2.  $p \cup q = s \cup t$  и  $q < t$
3.  $p \cup q = s \cup t$ ,  $q = t$  и  $p < s$

- ▶ Легко заметить, что это — линейный порядок (показав, что  $p \not\prec q$  и  $q \not\prec p$  влечёт  $p = q$ )
- ▶ ... и полный порядок. Найти наименьший в  $S \neq \emptyset$  возможно, рассмотрев  $m_1 := \min\{p \cup q \mid \langle p, q \rangle \in S\}$  и  $M_1 := \{\langle p, q \rangle \mid \langle p, q \rangle \in S, p \cup q = m_1\}$ , затем  $m_2 := \min\{q \mid \langle p, q \rangle \in M_1\}$ ,  $M_2 := \{\langle p, q \rangle \mid \langle p, q \rangle \in M_1, q = m_2\}$ . Тогда требуемым наименьшим в  $S$  будет  $\min\{p \mid \langle p, q \rangle \in M_2\}$
- ▶ Тогда  $\langle \alpha \times \alpha, (\prec) \rangle$  соответствует какой-то ординал  $\tau$  и сохраняющая порядок биекция  $t: \tau \rightarrow \alpha \times \alpha$ .
- ▶ Заметим, что  $x < \omega$  тогда и только тогда, когда  $\cup(\cup t(x)) < \omega$  (очевидно из того, что  $|\{z \mid \text{ординал}(z), z < x\}| = |\{p \mid p \prec t(x)\}|$ ).
- ▶ Покажем, что  $|\tau| = \alpha$ .

## Докажем $\tau = \alpha$

$\langle \alpha \times \alpha, (\prec) \rangle$  соответствует какой-то ординал  $\tau$   
 $t: \tau \rightarrow \alpha \times \alpha$

Очевидно, что  $\tau \geq \alpha$  (так как  $|\tau| = |\alpha \times \alpha| \geq \alpha$ ). Но пусть  $\tau > \alpha$ .

- ▶ Тогда  $t(\alpha) = \langle \zeta, \eta \rangle$  определено (у  $\alpha$  есть образ).
- ▶ Пусть  $\sigma := \zeta \cup \eta$ . Очевидно,  $\langle \zeta, \eta \rangle \preceq \langle \sigma, \sigma \rangle$  и  $\sigma \in \alpha$ .
- ▶ Каков образ  $t$  на этом начальном отрезке?  
 $\{t(x) \mid x < \alpha\} \subseteq \{\langle p, q \rangle \mid p, q \leq \sigma\}$ . Поэтому  $\alpha \leq |(\sigma + 1) \times (\sigma + 1)|$ .
- ▶ С другой стороны,  $\sigma < \alpha$ . Поскольку  $\alpha$  — кардинал (т.е., в частности, предельный ординал), то  $\sigma + 1 < \alpha$  и  $|\sigma + 1| < \alpha$ .
- ▶ По предположению индукции,  $|\sigma + 1| < \omega \vee |\sigma + 1| = |\sigma + 1| \cdot |\sigma + 1|$ , по свойствам  $(\prec)$  имеем  $\sigma \geq \omega$ .
- ▶ Отсюда  $\alpha \leq |(\sigma + 1) \times (\sigma + 1)| = |\sigma + 1| < \alpha$ , что невозможно.

# Теорема о непротиворечивости формальной арифметики

## Исчисление $S_\infty$

1. Язык: связки  $\neg, \vee, \forall, =$ ; нелогические символы:  $(+), (\cdot), ('), 0$ ; переменные:  $x$ .
2. Аксиомы: все истинные формулы вида  $\theta_1 = \theta_2$ ; все истинные отрицания формул вида  $\neg\theta_1 = \theta_2$  ( $\theta_i$  — термы без переменных).
3. Структурные (слабые) правила:

$$\frac{\zeta \vee \alpha \vee \beta \vee \delta}{\zeta \vee \beta \vee \alpha \vee \delta} \qquad \frac{\alpha \vee \alpha \vee \delta}{\alpha \vee \delta}$$

сильные правила

$$\frac{\beta}{\alpha \vee \beta} \quad \frac{\neg\alpha \vee \delta \quad \neg\beta \vee \delta}{\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta} \quad \frac{\alpha \vee \delta}{\neg\neg\alpha \vee \delta} \quad \frac{\neg\alpha[x := \theta] \vee \delta}{(\neg\forall x.\alpha) \vee \delta}$$

Формулы в правилах, обозначенные буквами  $\zeta$  и  $\delta$ , называются боковыми и могут отсутствовать.

4. и ещё два правила ...

## Ещё правила $S_\infty$

Бесконечная индукция:

$$\frac{\alpha[x := \bar{0}] \vee \delta \quad \alpha[x := \bar{1}] \vee \delta \quad \alpha[x := \bar{2}] \vee \delta \quad \dots}{(\forall x. \alpha) \vee \delta}$$

Сечение:

$$\frac{\zeta \vee \alpha \quad \neg \alpha \vee \delta}{\zeta \vee \delta}$$

Здесь  $\alpha$  — секущая формула, число связок в  $\neg \alpha$  — степень сечения.

В отличие от других правил, в правиле сечения хотя бы одна из боковых формул  $\zeta$  или  $\delta$  должна присутствовать.

## Дерево доказательства

1. Доказательства образуют деревья.
2. Каждой формуле в дереве сопоставим порядковое число (ординал).
3. Порядковое число заключения любого неструктурного правила строго больше порядкового числа его посылок (больше или равно в случае структурного правила).

$$\frac{(\neg 1 = 0)_1 \quad (\neg 2 = 0)_2 \quad (\neg 3 = 0)_4 \quad (\neg 4 = 0)_8 \dots}{(\forall x. \neg x' = 0)_\omega}$$
$$\frac{(\forall x. \neg x' = 0)_\omega}{(\neg \neg \forall x. \neg x' = 0)_{\omega+1}}$$

4. Существует конечная максимальная степень сечения в дереве (назовём её степенью вывода).



Любая теорема Ф.А. — теорема  $S_\infty$

Теорема

Если  $\vdash_{\text{фа}} \alpha$ , то  $\vdash_\infty |\alpha|_\infty$

Пример

Обратное неверно:

$$\frac{\neg\omega_1(\bar{0}, \overline{\ulcorner\sigma\urcorner}) \quad \neg\omega_1(\bar{1}, \overline{\ulcorner\sigma\urcorner}) \quad \neg\omega_1(\bar{2}, \overline{\ulcorner\sigma\urcorner}) \quad \dots}{\forall x. \neg\omega_1(x, \overline{\ulcorner\sigma\urcorner})}$$

Теорема

Если Ф.А. противоречива, то противоречива и  $S_\infty$

# Обратимость правил де Моргана, отрицания, бесконечной индукции

## Теорема

$$\frac{\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta}{\neg\alpha \vee \delta \quad \neg\beta \vee \delta} \quad \frac{\neg\neg\alpha \vee \delta}{\alpha \vee \delta} \quad \frac{(\forall x.\alpha) \vee \delta}{\alpha[x := \bar{0}] \vee \delta \quad \alpha[x := \bar{1}] \vee \delta \quad \alpha[x := \bar{2}] \vee \delta \quad \dots}$$

## Доказательство.

Например, формула вида  $\neg\neg\alpha \vee \delta$ .

# Обратимость правил де Моргана, отрицания, бесконечной индукции

## Теорема

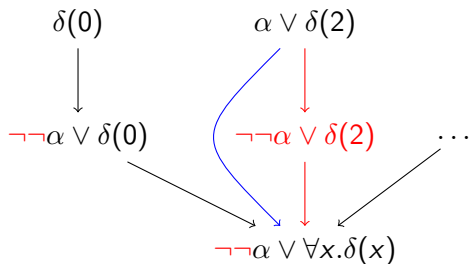
$$\frac{\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta}{\neg\alpha \vee \delta \quad \neg\beta \vee \delta} \quad \frac{\neg\neg\alpha \vee \delta}{\alpha \vee \delta} \quad \frac{(\forall x.\alpha) \vee \delta}{\alpha[x := \bar{0}] \vee \delta \quad \alpha[x := \bar{1}] \vee \delta \quad \alpha[x := \bar{2}] \vee \delta \quad \dots}$$

## Доказательство.

Например, формула вида  $\neg\neg\alpha \vee \delta$ .

Проследим историю  $\neg\neg\alpha$ ; она могла быть получена:

1. ослаблением — заменим  $\neg\neg\alpha$  на  $\alpha$  в этом узле и последующих.
2. отрицанием — выбросим правило, заменим  $\neg\neg\alpha$  на  $\alpha$  в последующих.



# Устранение сечений

## Теорема

*Если  $\alpha$  имеет вывод степени  $m > 0$  порядка  $t$ , то можно найти вывод степени строго меньшей  $m$  с порядком  $2^t$ .*

## Доказательство.

Трансфинитная индукция. Пусть для всех деревьев порядка  $t_1 < t$  условие выполнено. Покажем, что оно выполнено для порядка  $t$ . Рассмотрим заключительное правило. Это может быть...

1. Не сечение.
2. Сечение, секущая формула — элементарная.
3. Сечение, секущая формула —  $\neg\alpha$ .
4. Сечение, секущая формула —  $\alpha \vee \beta$ .
5. Сечение, секущая формула —  $\forall x.\alpha$ .



## Случай 1. Не сечение

$$\frac{(\pi_0)_{t_0} \quad (\pi_1)_{t_1} \quad (\pi_2)_{t_2} \quad \dots}{(\alpha)_t}$$

Заменяем доказательства посылок  $(\pi_i)_{t_i}$  на  $(\pi'_i)_{2^{t_i}}$  по индукционному предположению.

1. Поскольку степени посылок  $m'_i < m_i$ , то  $\max m'_i < \max m_i$ .
2. Поскольку  $t_i \leq t$ , то  $2^{t_i} \leq 2^t$ .

## Случай 5. Сечение с формулой вида $\forall x.\alpha$

$$\frac{\zeta \vee \forall x.\alpha \quad (\neg \forall x.\alpha) \vee \delta}{\zeta \vee \delta}$$

Причём степень и порядок выводов компонент, соответственно,  $(m_1, t_1)$  и  $(m_2, t_2)$ .

1. По индукции, вывод  $\zeta \vee \forall x.\alpha$  можно упростить до  $(m'_1, 2^{t_1})$ .
2. По обратимости, можно построить вывод  $\zeta \vee \alpha[x := \theta]$  за  $(m'_1, 2^{t_1})$ .
3. В формуле  $(\neg \forall x.\alpha) \vee \delta$  формула  $\neg \forall x.\alpha$  получена либо ослаблением, либо квантификацией из  $\neg \alpha[x := \theta_k] \vee \delta_k$ .

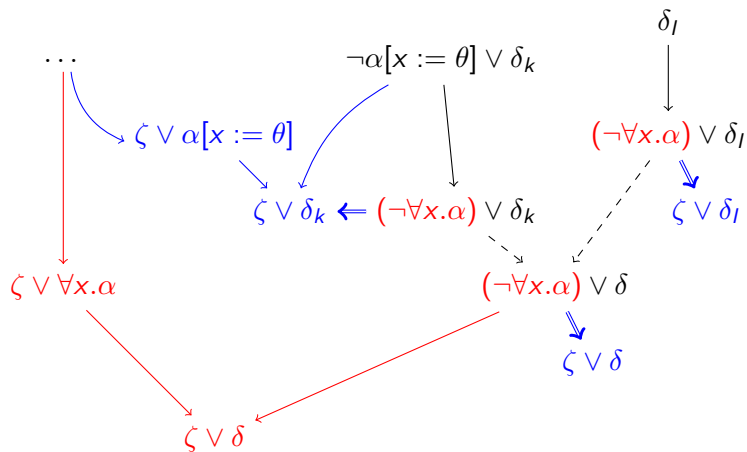
3.1 Каждое правило квантификации заменим на:

$$\frac{\zeta \vee \alpha[x := \theta_k] \quad (\neg \alpha[x := \theta_k]) \vee \delta_k}{\zeta \vee \delta_k}$$

3.2 Остальные вхождения  $\neg \forall x.\alpha$  заменим на  $\zeta$  (в правилах ослабления).

4. В получившемся дереве меньше степень — так как в  $\neg \alpha[x := \theta]$  меньше связок, чем в  $\neg \forall x.\alpha$ .

## Случай 5. Как перестроим доказательство



# Теорема об устранении сечений

## Определение

*Итерационная экспонента*

$$(a \uparrow)^m(t) = \begin{cases} t, & m = 0 \\ a^{(a \uparrow)^{m-1}(t)}, & m > 0 \end{cases}$$

## Теорема

Если  $\vdash_{\infty} \sigma$  степени  $m$  порядка  $t$ , то найдётся доказательство без сечений порядка  $(2 \uparrow)^m(t)$

## Доказательство.

В силу конечности  $m$  воспользуемся индукцией по  $m$  и теоремой об уменьшении степени.





# Порядок трансфинитной индукции

## Определение

$\varepsilon_0$  — неподвижная точка  $\varepsilon_0 = \omega^{\varepsilon_0}$

Иначе говоря,  $\varepsilon_0 = \{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, (\omega \uparrow)^3(\omega), (\omega \uparrow)^4(\omega), \dots\}$ .

Очевидно, что теорема об устранении сечений может быть доказана трансфинитной индукцией до ординала  $\varepsilon_0$  (максимальный порядок дерева вывода, при правильной нумерации вершин).

# Непротиворечивость формальной арифметики

Теорема

*Система  $S_{\infty}$  непротиворечива*

Доказательство.

# Непротиворечивость формальной арифметики

## Теорема

*Система  $S_\infty$  непротиворечива*

## Доказательство.

Рассмотрим формулу  $\neg 0 = 0$ . Если эта формула выводима в  $S_\infty$ , то она выводима и в  $S_\infty$  без сечений. Тогда какое заключительное правило?

# Непротиворечивость формальной арифметики

## Теорема

*Система  $S_\infty$  непротиворечива*

## Доказательство.

Рассмотрим формулу  $\neg 0 = 0$ . Если эта формула выводима в  $S_\infty$ , то она выводима и в  $S_\infty$  без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило де Моргана?

# Непротиворечивость формальной арифметики

## Теорема

*Система  $S_\infty$  непротиворечива*

## Доказательство.

Рассмотрим формулу  $\neg 0 = 0$ . Если эта формула выводима в  $S_\infty$ , то она выводима и в  $S_\infty$  без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило де Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции  $(\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta)$ .

# Непротиворечивость формальной арифметики

## Теорема

*Система  $S_\infty$  непротиворечива*

## Доказательство.

Рассмотрим формулу  $\neg 0 = 0$ . Если эта формула выводима в  $S_\infty$ , то она выводима и в  $S_\infty$  без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило де Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции  $(\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta)$ .
2. Отрицание?

# Непротиворечивость формальной арифметики

## Теорема

*Система  $S_\infty$  непротиворечива*

## Доказательство.

Рассмотрим формулу  $\neg 0 = 0$ . Если эта формула выводима в  $S_\infty$ , то она выводима и в  $S_\infty$  без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило де Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции  $(\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta)$ .
2. Отрицание? Нет двойного отрицания  $(\neg\neg\alpha \vee \delta)$ .

# Непротиворечивость формальной арифметики

## Теорема

*Система  $S_\infty$  непротиворечива*

## Доказательство.

Рассмотрим формулу  $\neg 0 = 0$ . Если эта формула выводима в  $S_\infty$ , то она выводима и в  $S_\infty$  без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило де Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции ( $\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta$ ).
2. Отрицание? Нет двойного отрицания ( $\neg\neg\alpha \vee \delta$ ).
3. Бесконечная индукция или квантификация?



# Непротиворечивость формальной арифметики

## Теорема

*Система  $S_\infty$  непротиворечива*

## Доказательство.

Рассмотрим формулу  $\neg 0 = 0$ . Если эта формула выводима в  $S_\infty$ , то она выводима и в  $S_\infty$  без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило де Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции ( $\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta$ ).
2. Отрицание? Нет двойного отрицания ( $\neg\neg\alpha \vee \delta$ ).
3. Бесконечная индукция или квантификация? Нет квантора.

# Непротиворечивость формальной арифметики

## Теорема

*Система  $S_\infty$  непротиворечива*

## Доказательство.

Рассмотрим формулу  $\neg 0 = 0$ . Если эта формула выводима в  $S_\infty$ , то она выводима и в  $S_\infty$  без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило де Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции ( $\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta$ ).
2. Отрицание? Нет двойного отрицания ( $\neg\neg\alpha \vee \delta$ ).
3. Бесконечная индукция или квантификация? Нет квантора.
4. Ослабление?

# Непротиворечивость формальной арифметики

## Теорема

*Система  $S_\infty$  непротиворечива*

## Доказательство.

Рассмотрим формулу  $\neg 0 = 0$ . Если эта формула выводима в  $S_\infty$ , то она выводима и в  $S_\infty$  без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило де Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции  $(\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta)$ .
2. Отрицание? Нет двойного отрицания  $(\neg\neg\alpha \vee \delta)$ .
3. Бесконечная индукция или квантификация? Нет квантора.
4. Ослабление? Нет дизъюнкции  $(\alpha \vee \beta)$ , в правиле ослабления  $\beta$  обязана присутствовать.

# Непротиворечивость формальной арифметики

## Теорема

*Система  $S_\infty$  непротиворечива*

## Доказательство.

Рассмотрим формулу  $\neg 0 = 0$ . Если эта формула выводима в  $S_\infty$ , то она выводима и в  $S_\infty$  без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило де Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции  $(\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta)$ .
2. Отрицание? Нет двойного отрицания  $(\neg\neg\alpha \vee \delta)$ .
3. Бесконечная индукция или квантификация? Нет квантора.
4. Ослабление? Нет дизъюнкции  $(\alpha \vee \beta)$ , в правиле ослабления  $\beta$  обязана присутствовать.

То есть, неизбежно,  $\neg 0 = 0$  — аксиома, что также неверно.

