Аксиома выбора

Аксиома выбора

Аксиома (Аксиома выбора)

Из любого семейства дизъюнктных непустых множеств $\{A_i\}$ *можно выбрать непустую трансверсаль — множество* S, *что* $S \cap A_i = \{x_i\}$. *Иначе,* $S \in \times\{A_i\}$.

Теорема (Аксиома выбора)

Пусть $\{A_i\}$ *— семейство непустых множеств. Тогда существует* $f : \{A_i\} \to \cup A_i$, *причём* $\forall a.a \in \{A_i\} \to f(a) \in a$

Доказательство.

По семейству A_i рассмотрим семейство множеств $X(A_i)$:
$X(A_i) = \{\langle A_i, a\rangle \mid a \in A_i\}$, если $A_i \neq A_j$, то $X(A_i) \cap X(A_j) = \varnothing$, тогда
$\exists f.f \in \times\{X(A_i)\}$. $\square$

Обратное утверждение также легко показать.

Аксиома выбора: альтернативные формулировки

Теорема (Лемма Цорна)

Если задано $\langle M, (\preceq) \rangle$ и для всякого линейно-упорядоченного $S \subseteq M$ выполнено $upb_M S \neq \varnothing$, то в M существует максимальный элемент.

Теорема (Теорема Цермело)

На любом множестве можно задать полный порядок.

Теорема

У любой сюръективной функции существует частичная обратная.

Теорема

Аксиома выбора $\Rightarrow$ лемма Цорна: без доказательства

Начальный отрезок

Определение

Назовём (для данного раздела) упорядоченным множеством пару $\langle S, (\prec_S)\rangle$. Отношение порядка $(\prec_S)$ может быть как строгим, так и нестрогим. Будем говорить, что $\langle S, (\prec_S)\rangle$ — начальный отрезок $\langle T, (\prec_T)\rangle$, если:

- $S \subseteq T$;
- *если* $a, b \in S$, *то* $a \prec_S b$ *тогда и только тогда, когда* $a \prec_T b$;
- *если* $a \in S$, $b \in T \setminus S$, *то* $a \prec_T b$.

Будем обозначать это как $\langle S, (\prec_S)\rangle \sqsubseteq \langle T, (\prec_T)\rangle$ или как $S \sqsubseteq T$, если порядок на множествах понятен из контекста.

Теорема

Отношение «быть начальным отрезком» является отношением нестрогого порядка.

Верхняя грань семейства упорядоченных множеств

Теорема

Если семейство упорядоченных множеств X линейно упорядочено отношением «быть начальным отрезком», то у него есть верхняя грань.

Доказательство.

Пусть $M = \cup\{T | \langle T, (\prec)\rangle \in X\}$ и $(\prec)_M = \cup\{(\prec) | \langle T, (\prec)\rangle \in X\}$.
Покажем, что если $\langle A, (\prec_A)\rangle \in X$, то $A \sqsubseteq M$. Рассмотрим определение:

- $A \subseteq M$ — выполнено по построению M;
- если $a, b \in A$, то $a \prec_A b$ влечёт $a \prec_M b$ (по построению M). Если же $a \prec_M b$, но $a \not\prec_A b$, то существует A', что $a, b \in A'$ и $a \prec_{A'} b$. Тогда $A \not\sqsubseteq A'$ и $A' \not\sqsubseteq A$, что невозможно по линейности порядка;
- если $a \in A$, $b \in M \setminus A$, то найдётся B, что $b \in B$, отчего $a \prec_B b$ (так как $A \sqsubseteq B$) и $a \prec_M b$ (по построению M).

Тогда $\langle M, (\prec_M)\rangle$ — требуемая верхняя грань. □

Лемма Цорна $\Rightarrow$ теорема Цермело

Пусть выполнена лемма Цорна и дано некоторое X. Покажем, что на нём можно ввести полный порядок.

- Пусть $S = \{\langle P, (\prec)\rangle \mid P \subseteq X, (\prec) — \text{полный порядок}\}$. Например, для $X = \{0, 1\}$ множество $S = \{\langle\varnothing, \varnothing\rangle, \langle\{0\}, \varnothing\rangle, \langle\{1\}, \varnothing\rangle, \langle X, 0 \prec 1\rangle, \langle X, 1 \prec 0\rangle\}$
- Введём порядок на S как $(\sqsubseteq)$. Заметим, что это — частичный, но не линейный порядок. Например, $\langle X, 0 \prec 1\rangle$ несравним с $\langle X, 1 \prec 0\rangle$.
- Любое линейно-упорядоченное подмножество $\langle T, (\sqsubseteq)\rangle$ (где $T \subseteq S$) имеет верхнюю грань (она же максимальный элемент): $\langle \cup T, \cup(\sqsubseteq)\rangle$. Например, для $\{\langle\varnothing, \varnothing\rangle, \langle\{0\}, \varnothing\rangle, \langle X, 0 \prec 1\rangle\}$ это $\langle X, 0 \prec 1\rangle$.
- По лемме Цорна тогда есть $\langle R, (\sqsubseteq_R)\rangle = \max S$. Заметим, что $R = X$, потому что иначе пусть $a \in X \setminus R$. Тогда положив $M = \langle R \cup \{a\}, (\sqsubseteq_R) \cup \{x \prec a \mid x \in R\}\rangle$ получим, что M тоже вполне упорядоченное (и потому $M \in S$), значит, R не максимальное.

Теорема Цермело $\Rightarrow$ существование обратной $\Rightarrow$ аксиома выбора

Теорема

Теорема Цермело $\Rightarrow$ у сюрьективных функций существует частичная обратная.

Доказательство.

Рассмотрим сюрьективную $f : A \to B$. Рассмотрим семейство $R_b = \{a \in A \mid f(a) = b\}$. Построим полный порядок на каждом из R_b. Тогда $f^{-1}(b) = \min R_b$. □

Теорема

Существует частичная обратная у сюръективных функций $\Rightarrow$ существует трансверсаль у дизъюнктных множеств.

Доказательство.

Пусть дано семейство дизъюнктных множеств $\{A_i\}$. Рассмотрим $f : \cup A_i \to \{A_i\}$, что $f(a) = \cup\{A_i \in \{A_i\} \mid a \in A_i\}$. Поскольку A_i дизъюнктны, $f(a) = A_i$ при всех a. Тогда существует $f^{-1}(A_i) \in A_i$. Тогда $\{f^{-1}(A_i)\} \in \times\{A_i\}$. □

Зачем нужна аксиома выбора?

Определение

Пределом функции f в точке x_0 по Коши называется такой y, что

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ . \exists \delta \in \mathbb{R}^+ . \forall x . |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon$$

Определение

Пределом функции f в точке x_0 по Гейне называется такой y, что для любой $x_n \rightarrow x_0$ выполнено $f(x_n) \rightarrow y$.

Предел по Гейне влечёт предел по Коши

Теорема

Если $\lim_{x \to x_0} f(x) = y$ *по Гейне, то* $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x. |x - x_0| < \delta \to |f(x) - y| < \varepsilon$.

Доказательство.

Пусть не так: $\exists \varepsilon > 0. \forall \delta > 0. \exists x_\delta. |x_\delta - x_0| < \delta \;\&\; |f(x_\delta) - y| \geq \varepsilon$. Фиксируем ε и возьмём $\delta_n = \frac{1}{n}$ и $p_n = x_{\delta_n}$. $p_n \to x_0$, так как $|x_{\frac{1}{n}} - x_0| < \frac{1}{n}$, по определению предела по Гейне $f(p_n) \to y$, но по предположению $\forall n \in \mathbb{N}. |f(p_n) - y| \geq \varepsilon$. □

Предел по Гейне влечёт предел по Коши

Теорема

Если $\lim_{x\to x_0} f(x) = y$ *по Гейне, то* $\forall \varepsilon > 0.\exists \delta > 0.\forall x.|x - x_0| < \delta \to |f(x) - y| < \varepsilon$.

Доказательство.

Пусть не так: $\exists \varepsilon > 0.\forall \delta > 0.\exists x_\delta.|x_\delta - x_0| < \delta \ \& \ |f(x_\delta) - y| \geq \varepsilon$. Фиксируем ε и возьмём $\delta_n = \frac{1}{n}$ и $p_n = x_{\delta_n}$. $p_n \to x_0$, так как $|x_{\frac{1}{n}} - x_0| < \frac{1}{n}$, по определению предела по Гейне $f(p_n) \to y$, но по предположению $\forall n \in \mathbb{N}.|f(p_n) - y| \geq \varepsilon$. $\square$

Пояснение

Для применения предела по Гейне нужна p_n*: то есть* $p : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Предел по Гейне влечёт предел по Коши

Теорема

Если $\lim_{x \to x_0} f(x) = y$ *по Гейне, то* $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x. |x - x_0| < \delta \to |f(x) - y| < \varepsilon$.

Доказательство.

Пусть не так: $\exists \varepsilon > 0. \forall \delta > 0. \exists x_\delta. |x_\delta - x_0| < \delta \ \& \ |f(x_\delta) - y| \geq \varepsilon$. Фиксируем ε и возьмём $\delta_n = \frac{1}{n}$ и $p_n = x_{\delta_n}$. $p_n \to x_0$, так как $|x_{\frac{1}{n}} - x_0| < \frac{1}{n}$, по определению предела по Гейне $f(p_n) \to y$, но по предположению $\forall n \in \mathbb{N}. |f(p_n) - y| \geq \varepsilon$. □

Пояснение

Для применения предела по Гейне нужна p_n*: то есть* $p : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
... Фиксируем ε *и рассмотрим* $X_\delta = \{x \mid |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - y| \geq \varepsilon\}$. *Отрицание предела по Коши означает, что* $X_\delta \neq \varnothing$ *при любом* $\delta > 0$.

Предел по Гейне влечёт предел по Коши

Теорема

Если $\lim_{x \to x_0} f(x) = y$ *по Гейне, то* $\forall \varepsilon > 0 . \exists \delta > 0 . \forall x . |x - x_0| < \delta \to |f(x) - y| < \varepsilon$.

Доказательство.

Пусть не так: $\exists \varepsilon > 0 . \forall \delta > 0 . \exists x_\delta . |x_\delta - x_0| < \delta \ \& \ |f(x_\delta) - y| \geq \varepsilon$. Фиксируем ε и возьмём $\delta_n = \frac{1}{n}$ и $p_n = x_{\delta_n}$. $p_n \to x_0$, так как $|x_{\frac{1}{n}} - x_0| < \frac{1}{n}$, по определению предела по Гейне $f(p_n) \to y$, но по предположению $\forall n \in \mathbb{N} . |f(p_n) - y| \geq \varepsilon$. $\square$

Пояснение

Для применения предела по Гейне нужна p_n*: то есть* $p : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

... Фиксируем ε *и рассмотрим* $X_\delta = \{x \mid |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - y| \geq \varepsilon\}$. *Отрицание предела по Коши означает, что* $X_\delta \neq \varnothing$ *при любом* $\delta > 0$.

... То есть, по семейству $Q := \{X_1, X_{\frac{1}{2}}, X_{\frac{1}{4}}, \dots\}$ *по аксиоме выбора построим* $q : Q \to \cup Q$, *что* $q(X_{\frac{1}{n}}) \in X_{\frac{1}{n}}$. *Далее, взяв композицию* $p_n := q(X_{\delta_n})$, *получаем* $p_n \to x_0$, *что* $\forall n \in \mathbb{N} . |f(p_n) - y| \geq \varepsilon$.

Предел по Коши влечёт предел по Гейне

Теорема

Пусть $\lim_{x \to x_0} f(x) = y$ *и дана* $x_n \to x_0$*. Тогда* $f(x_n) \to y$*.*

Доказательство.

Фиксируем $\varepsilon > 0$.

- $\exists \delta > 0. \exists N \in \mathbb{N}.(\forall x.|x - x_0| < \delta \to |f(x) - y| < \varepsilon) \,\&\, (\forall n \in \mathbb{N}.n > N \to |x_n - x_0| < \delta)$
- $(\forall x.|x - x_0| < \delta \to |f(x) - y| < \varepsilon) \to (|x_n - x_0| < \delta \to |f(x_n) - y| < \varepsilon)$ (сх. 11).
- $\exists \delta > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n \in \mathbb{N}.n > N \to |f(x_n) - y| < \varepsilon$.
- Поскольку δ не используется в формуле, $\exists \delta > 0$ можно устранить.
- Отсюда $\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \in \mathbb{N}.n > N \to |f(x_n) - y| < \varepsilon$

$\square$

Предел по Коши влечёт предел по Гейне

Теорема

Пусть $\lim_{x \to x_0} f(x) = y$ *и дана* $x_n \to x_0$. *Тогда* $f(x_n) \to y$.

Доказательство.

Фиксируем $\varepsilon > 0$.

- $\exists \delta > 0. \exists N \in \mathbb{N}. (\forall x. |x - x_0| < \delta \to |f(x) - y| < \varepsilon) \,\&\, (\forall n \in \mathbb{N}. n > N \to |x_n - x_0| < \delta)$
- $(\forall x. |x - x_0| < \delta \to |f(x) - y| < \varepsilon) \to (|x_n - x_0| < \delta \to |f(x_n) - y| < \varepsilon)$ (сх. 11).
- $\exists \delta > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n \in \mathbb{N}. n > N \to |f(x_n) - y| < \varepsilon$.
- Поскольку δ не используется в формуле, $\exists \delta > 0$ можно устранить.
- Отсюда $\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \in \mathbb{N}. n > N \to |f(x_n) - y| < \varepsilon$

$\square$

Почему здесь не потребовалась аксиома выбора? Потому что нам нужен единственный δ, а для него — единственный N

Равенство и функции

Пример

Пусть $A_0 = \{0, 1, 3, 5\}$ *и* $A_1 = \{3, 5, 1, 0, 0, 5, 3\}$. *Верно ли, что* $A_0 = A_1$*?*

Равенство и функции

Пример

Пусть $A_0 = \{0, 1, 3, 5\}$ *и* $A_1 = \{3, 5, 1, 0, 0, 5, 3\}$. *Верно ли, что* $A_0 = A_1$*?*
Да, так как $\forall x. x \in \{0, 1, 3, 5\} \leftrightarrow x \in \{3, 5, 1, 0, 0, 5, 3\}$.

Равенство и функции

Пример

Пусть $A_0 = \{0, 1, 3, 5\}$ *и* $A_1 = \{3, 5, 1, 0, 0, 5, 3\}$*. Верно ли, что* $A_0 = A_1$*?*
Да, так как $\forall x. x \in \{0, 1, 3, 5\} \leftrightarrow x \in \{3, 5, 1, 0, 0, 5, 3\}$*.*

Теорема (конгруэнтность)

Если $f : A \to B$*, также* $a, b \in A$ *и* $a = b$*, то* $f(a) = f(b)$*.*

Доказательство.

Пусть $F \subseteq A \times B$ — график функции f.
По определению функции, $\forall x. \forall y_1. \forall y_2. \langle x, y_1 \rangle \in F \,\&\, \langle x, y_2 \rangle \in F \to y_1 = y_2$.
Также, если $f(a) = y_1$, $f(b) = y_2$, то $\langle a, y_1 \rangle \in F$ и $\langle b, y_2 \rangle \in F$.
Тогда: $\langle a, y_1 \rangle = \langle b, y_1 \rangle = \langle b, y_2 \rangle = \langle a, y_2 \rangle$, то есть $f(a) = y_2 = f(b)$.

$\square$

Теорема Диаконеску

Теорема

Если рассмотреть ИИП с ZFC, то для любого P выполнено $\vdash P \vee \neg P$.

Доказательство.

Рассмотрим $\mathcal{B} = \{0, 1\}$, $A_0 = \{x \in \mathcal{B} | x = 0 \vee P\}$ и $A_1 = \{x \in \mathcal{B} | x = 1 \vee P\}$.
$\{A_0, A_1\}$ — непустое семейство непустых множеств, и по акс. выбора существует $f : \{A_0, A_1\} \to \cup A_i$, что $f(A_i) \in A_i$. (Если P, то $A_0 = A_1$ и $\{A_0, A_1\} = \{\mathcal{B}\}$).

$\vdash f(A_0) \in A_0 \,\&\, f(A_1) \in A_1$	а.выбора: $f(A_i) \in A_i$
$\vdash f(A_0) \in \mathcal{B} \,\&\, (f(A_0) = 0 \vee P) \,\&\, f(A_1) \in \mathcal{B} \,\&\, (f(A_1) = 1 \vee P)$	а.выделения
$\vdash (f(A_0) = 0 \,\&\, f(A_1) = 1) \vee P$	Удал. (&) + дистр.
$\vdash P \vee f(A_0) \neq f(A_1)$	$0 \neq 1$ и транз.

Теорема Диаконеску

Теорема

Если рассмотреть ИИП с ZFC, то для любого P выполнено $\vdash P \vee \neg P$.

Доказательство.

Рассмотрим $\mathcal{B} = \{0, 1\}$, $A_0 = \{x \in \mathcal{B} | x = 0 \vee P\}$ и $A_1 = \{x \in \mathcal{B} | x = 1 \vee P\}$.
$\{A_0, A_1\}$ — непустое семейство непустых множеств, и по акс. выбора существует $f : \{A_0, A_1\} \to \cup A_i$, что $f(A_i) \in A_i$. (Если P, то $A_0 = A_1$ и $\{A_0, A_1\} = \{\mathcal{B}\}$).

$\vdash f(A_0) \in A_0 \mathbin{\&} f(A_1) \in A_1$	а.выбора: $f(A_i) \in A_i$
$\vdash f(A_0) \in \mathcal{B} \mathbin{\&} (f(A_0) = 0 \vee P) \mathbin{\&} f(A_1) \in \mathcal{B} \mathbin{\&} (f(A_1) = 1 \vee P)$	а.выделения
$\vdash (f(A_0) = 0 \mathbin{\&} f(A_1) = 1) \vee P$	Удал. (&) + дистр.
$\vdash P \vee f(A_0) \neq f(A_1)$	$0 \neq 1$ и транз.
$\vdash P \to A_0 = A_1$	Определение A_i
$\vdash A_0 = A_1 \to f(A_0) = f(A_1)$	Конгруэнтность
$\vdash f(A_0) \neq f(A_1) \to \neg P$	Контрапозиция
$\vdash P \vee \neg P$	Подставили

$\square$

Слабые варианты аксиомы выбора

Теорема (конечного выбора)

Если $X_1 \neq \varnothing, \dots, X_n \neq \varnothing$, $X_i \cap X_j = \varnothing$ *при* $i \neq j$, *то* $\times\{X_1, \dots, X_n\} \neq \varnothing$.

Доказательство.

- База: $n = 1$. Тогда $\exists x_1 . x_1 \in X_1$, поэтому $\exists x_1 . \{x_1\} \in \times\{X_1\}$.
- Переход:
  $\exists v . v \in \times\{X_{1,n}\} \to \exists x_{n+1} . x_{n+1} \in X_{n+1} \to v \cup \{x_{n+1}\} \in \times(X_{1,n} \cup \{X_{n+1}\})$

$\square$

Аксиома (счётного выбора)

Для счётного семейства непустых множеств существует функция, каждому из которых сопоставляющая один из своих элементов

Аксиома (зависимого выбора)

если $\forall x \in E . \exists y \in E . xRy$, *то существует последовательность* $x_n : \forall n . x_n R x_{n+1}$

Теорема Диаконеску и конечный выбор

Заметим, что семейство $\{A_0, A_1\}$ из теоремы Диаконеску в ИИП не является конечным (равно как и бесконечным).

Определение

Конечное множество — равномощное некоторому конечному кардинальному числу.

- Какова мощность семейства?
- 1, если P, и 2, если $\neg P$.
- Но поскольку $P \vee \neg P$ не выполнено в ИИП, мы не можем доказать, что мощность семейства 1 или 2.
- Поэтому мы не можем воспользоваться теоремой конечного выбора.

Наследственные фундированные множества

Определение

Наследственным свойством множества назовём такое свойство, которым обладает как само множество, так и все его подмножества.

Определение

Фундированным множеством назовём такое, которое не пересекается хотя бы с одним своим элементом.

Определение

Аксиома фундирования. В каждом непустом множестве найдется элемент, не пересекающийся с исходным множеством.

$$\forall x.x = \varnothing \vee \exists y.y \in x \,\&\, \forall z.z \in x \rightarrow z \notin y$$

Иными словами, в каждом множестве есть элемент, минимальный по отношению ($\in$).

Каковы возможные модели для теории множеств?

Определение

Универсум фон Неймана V — все наследственные фундированные множества.

При наличии аксиомы фундирования можно показать, что $V = \cup_a V_a$, где:

$$V_a = \begin{cases} \varnothing, & a = 0 \\ \mathcal{P}(V_b), & a = b' \\ \bigcup_{b<a}(V_b), & a \text{ — предельный} \end{cases}$$

Определение

Конструктивный универсум $L = \cup_a L_a$, где:

$$L_a = \begin{cases} \varnothing, & a = 0 \\ \{\{x \in L_b \mid \varphi(x, t_1, \ldots, t_k)\} \mid \varphi \text{ — формула}, t_i \in L_b\}, & a = b' \\ \bigcup_{b<a}(L_b), & a \text{ — пред.} \end{cases}$$

Усиление аксиомы выбора

Определение

Аксиома конструктивности: $V = L$, то есть допустимы только те фундированные множества, которые задаются формулами.

Теорема

Аксиома выбора и континуум-гипотеза следуют из аксиомы конструктивности

Для некоторых теорий аксиома слишком сильна.

Заключительный обзор

Конструктивность теории — насколько легко строить сложные объекты в ней:

1. Неконструктивные теории допускают доказательства чистого существования произвольных по сложности объектов.
2. Конструктивные теории: требуют процесс построения (желательно конечный или хотя бы счётный), состоящий из интуитивно-понятных шагов.

Аксиома выбора и её рассмотренные варианты влияют на её конструктивность:

1. КИП + ЦФ + Акс. выбора: менее конструктивна. Например, возможно показать существование разбиения шара на 5 частей, из которых можно составить два шара, равных исходному (теорема Банаха-Тарского). Интуитивно нарушается аддитивность объёма (формального парадокса нет).
2. КИП + ЦФ
3. ИИП + ЦФ: более конструктивна. Она проще формализуется с помощью компьютера, но мат. анализ в ней сложнее и довольно сильно отличается от классического.