

Теоремы о формальной арифметике

Consis

Лемма

$\vdash 1 = 0$ тогда и только тогда, когда $\vdash \alpha$ при любом α .

Определение

Обозначим за $\psi(x, p)$ формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение *Proof*: $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in \text{Proof}$, если p — гёделев номер доказательства ξ .

Consis

Лемма

$\vdash 1 = 0$ тогда и только тогда, когда $\vdash \alpha$ при любом α .

Определение

Обозначим за $\psi(x, p)$ формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение *Proof*: $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in \text{Proof}$, если p — гёделев номер доказательства ξ .

Обозначим $\pi(x) \equiv \exists p. \psi(x, p)$

Consis

Лемма

$\vdash 1 = 0$ тогда и только тогда, когда $\vdash \alpha$ при любом α .

Определение

Обозначим за $\psi(x, p)$ формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение *Proof*: $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in \text{Proof}$, если p — гёделев номер доказательства ξ .

Обозначим $\pi(x) \equiv \exists p. \psi(x, p)$

Определение

Формулой *Consis* назовём формулу $\neg \pi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner})$

Consis

Лемма

$\vdash 1 = 0$ тогда и только тогда, когда $\vdash \alpha$ при любом α .

Определение

Обозначим за $\psi(x, p)$ формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение *Proof*: $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in \text{Proof}$, если p — гёделев номер доказательства ξ .

Обозначим $\pi(x) \equiv \exists p. \psi(x, p)$

Определение

Формулой *Consis* назовём формулу $\neg \pi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner})$

Неформальный смысл: «формальная арифметика непротиворечива»

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально)

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ ».

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ ». То есть, $\forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$.

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ ». То есть, $\forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$.

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ ». То есть, $\forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$, — и это можно доказать, то есть $\vdash \text{Consis} \rightarrow \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$.

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ ». То есть, $\forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$, — и это можно доказать, то есть $\vdash \text{Consis} \rightarrow \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Однако если формальная арифметика непротиворечива, то $\nvdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$.



Слишком много неформальности

Рассмотрим такой особый Consis' :

$$\begin{aligned}\pi'(x) &:= \exists p. \psi(x, p) \ \& \ \neg \psi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner}, p) \\ \text{Consis}' &:= \neg \pi'(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner})\end{aligned}$$

Заметим:

1. Если ФА непротиворечива, то $\llbracket \pi'(x) \rrbracket = \llbracket \pi(x) \rrbracket$:
 - ▶ если $x \neq \ulcorner 1 = 0 \urcorner$ и $\llbracket \psi(x, p) \rrbracket = \text{И}$, то $\llbracket \psi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner}, p) \rrbracket = \text{Л}$
 - ▶ если $x = \ulcorner 1 = 0 \urcorner$, то $\llbracket \psi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner}, p) \rrbracket = \text{Л}$ при любом p .
2. Но $\vdash \text{Consis}'$.

Условия выводимости Гильберта-Бернайса-Лёба

Определение

Будем говорить, что формула ψ , выражающая отношение *Proof*, формула π и формула *Consis* соответствуют условиям Гильберта-Бернайса-Лёба, если следующие условия выполнены для любой формулы α :

1. $\vdash \alpha$ влечет $\vdash \pi(\overline{\Gamma\alpha})$
2. $\vdash \pi(\overline{\Gamma\alpha}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\pi(\overline{\Gamma\alpha})})$
3. $\vdash \pi(\overline{\Gamma\alpha \rightarrow \beta}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\alpha}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\beta})$

Невыразимость доказуемости

Определение

$$Th_S = \{\ulcorner \alpha \urcorner \mid \vdash_S \alpha\}; Tr_S = \{\ulcorner \alpha \urcorner \mid \llbracket \alpha \rrbracket_S = \mathcal{I}\}$$

Лемма

Пусть $D(\ulcorner \alpha \urcorner) = \ulcorner \alpha(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}) \urcorner$ для любой формулы $\alpha(x)$. Тогда D представима в формальной арифметике.

Теорема

Если расширение Ф.А. S непротиворечиво и D представима в нём, то Th_S невыразимо в S

Доказательство.

Пусть $\delta(a, p)$ представляет D , и пусть $\sigma(x)$ выражает множество Th_S (рассматриваемое как одноместное отношение).

Пусть $\alpha(x) := \forall p. \delta(x, p) \rightarrow \neg \sigma(p)$. Верно ли, что $\ulcorner \alpha \urcorner \in Th$?



Неразрешимость формальной арифметики

Теорема

Если формальная арифметика непротиворечива, то формальная арифметика неразрешима

Доказательство.

Пусть формальная арифметика разрешима. Значит, есть рекурсивная функция $f(x)$: $f(x) = 1$ тогда и только тогда, когда $x \in \text{Th}_{\text{Ф.А.}}$. То есть, $\text{Th}_{\text{Ф.А.}}$ выразимо в формальной арифметике.

По теореме о невыразимости доказуемости, $\text{Th}_{\text{Ф.А.}}$ невыразимо в формальной арифметике. Противоречие. □

Теорема Тарского

Теорема (Тарского о невыразимости истины)

Не существует формулы $\varphi(x)$, что $\llbracket \varphi(x) \rrbracket = И$ (в стандартной интерпретации) тогда и только тогда, когда $x \in Tr_{ФА}$.

Доказательство.

Пусть теория \mathcal{S} — формальная арифметика + аксиомы: все истинные в стандартной интерпретации формулы. Очевидно, что $Th_{\mathcal{S}} = Tr_{\mathcal{S}} = Tr_{ФА}$. То есть $Tr_{ФА}$ невыразимо в \mathcal{S} .

Пусть φ таково, что $\llbracket \varphi(x) \rrbracket = И$ при $x \in Tr$. Тогда $\vdash \varphi(x)$, если $x \in Tr$ и $\vdash \neg \varphi(x)$, если $x \notin Tr$.

Тогда Tr выразимо в \mathcal{S} . Противоречие.



Теорема Тарского

Теорема (Тарского о невыразимости истины)

Не существует формулы $\varphi(x)$, что $\llbracket \varphi(x) \rrbracket = И$ (в стандартной интерпретации) тогда и только тогда, когда $x \in Tr_{ФА}$.

Доказательство.

Пусть теория \mathcal{S} — формальная арифметика + аксиомы: все истинные в стандартной интерпретации формулы. Очевидно, что $Th_{\mathcal{S}} = Tr_{\mathcal{S}} = Tr_{ФА}$. То есть $Tr_{ФА}$ невыразимо в \mathcal{S} .

Пусть φ таково, что $\llbracket \varphi(x) \rrbracket = И$ при $x \in Tr$. Тогда $\vdash \varphi(x)$, если $x \in Tr$ и $\vdash \neg \varphi(x)$, если $x \notin Tr$.

Тогда Tr выразимо в \mathcal{S} . Противоречие. □

Однако, если взять $D = \mathbb{R}$, истина становится выразима (алгоритм Тарского).

Положительные результаты про исчисления.

Что можно сделать для разрешимости исчисления предикатов?

- По теореме о полноте можем рассматривать (\models) вместо (\vdash) . Напомним: $M \models \alpha$, если для всех $M = \langle D, F, P, E \rangle$ выполнено $M \models \alpha$.

Что можно сделать для разрешимости исчисления предикатов?

- ▶ По теореме о полноте можем рассматривать (\models) вместо (\vdash). Напомним: $M \models \alpha$, если для всех $M = \langle D, F, P, E \rangle$ выполнено $M \models \alpha$.
- ▶ Что мешает:
 1. слишком сложные формулы — кванторы по бесконечным множествам;
 2. слишком большое разнообразие D , включая несчётные;
 3. даже $D = \mathbb{N}$ в формальной арифметике представляет проблему.

Что можно сделать для разрешимости исчисления предикатов?

- ▶ По теореме о полноте можем рассматривать (\models) вместо (\vdash) . Напомним: $M \models \alpha$, если для всех $M = \langle D, F, P, E \rangle$ выполнено $M \models \alpha$.
- ▶ Что мешает:
 1. слишком сложные формулы — кванторы по бесконечным множествам;
 2. слишком большое разнообразие D , включая несчётные;
 3. даже $D = \mathbb{N}$ в формальной арифметике представляет проблему.
- ▶ Будем последовательно бороться:
 1. упростим формулу (борьба с кванторами);
 2. заменим произвольное D на какое-то рекурсивно-перечислимое множество, устроенное некоторым фиксированным образом (борьба с разнообразием D);
 3. устроим правильный перебор, позволяющий быстро находить решения, если они есть (борьба с бесконечностью D).

Шаги рассуждения

1. Упростим формулу — поверхностные кванторы всеобщности, сколемизация.
2. Заменяем D .
3. Правильный перебор

Упрощаем формулу α . Сколемизация

1. Предварённая форма (поверхностные кванторы) — для примера возьмём чередующиеся:

$$\beta := \forall x_1. \exists x_2. \forall x_3. \exists x_4 \dots \forall x_{n-1}. \exists x_n. \varphi$$

2. Убрать кванторы существования: заменим x_{2k} функциями Сколема $e_{2k}(x_1, x_3, \dots, x_{2k-1})$. Получим:

$$\gamma := \forall x_1. \forall x_3 \dots \forall x_{n-1}. \varphi[x_2 := e_2(x_1), x_4 := e_4(x_1, x_3), \dots, x_n := e_n(x_1, x_3, \dots, x_{n-1})]$$

3. КНФ (с конъюнктов, в каждом $d(c)$ дизъюнктов):

$$\delta := \forall x_1. \forall x_3 \dots \forall x_{n-1}. \bigwedge_c \left(\bigvee_{i=1, d(c)} (\neg) P_i(\theta_i) \right)$$

4. Исходная задача: проверка $\vdash \alpha$. Это эквивалентно $\vdash \beta$. Эквивалентно $\models \beta$. Эквивалентно выполнимости δ при всех D (найдутся e_i , что $\llbracket \delta \rrbracket = \text{И}$).

Шаги рассуждения

1. Упростим формулу — поверхностные кванторы всеобщности, сколемизация.
2. Заменяем D .
3. Правильный перебор

Эрбранов универсум.

Определение

$H_0(\varphi)$ — все константы в формуле φ (либо особая константа a , если констант в φ нет)

$H_{k+1}(\varphi) = H_k(\varphi)$ и все функции от значений $H_k(\varphi)$ (как строки)

$H = \cup H_n(\varphi)$ — основные термы.

Пример

$P(a) \vee Q(f(b))$:

$$H_0 = \{a, b\}$$

$$H_1 = \{a, b, f(a), f(b)\}$$

$$H_2 = \{a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b))\}$$

...

$$H = \{f^{(n)}(x) \mid n \in \mathbb{N}_0, x \in \{a, b\}\}$$

Выполнимость не теряется. Заменяем D на H

Теорема

Формула выполнима тогда и только тогда, когда она выполнима на Эрбрановом универсуме.

Доказательство.

(\Rightarrow) Пусть $M \models \forall \bar{x}.\varphi$. Тогда построим отображение $\text{eval} : H \rightarrow M$ (смысл названия вдохновлён языками программирования: $\text{eval}("f(f(b))")$ перейдёт в $f(f(b))$, где f и b — из M).

Предикатам дадим согласованную оценку:

$P_H(t_1, \dots, t_n) = P_M(\text{eval}(t_1), \dots, \text{eval}(t_n))$. Очевидно, любая формула сохранит своё значение, кванторы всеобщности по меньшему множеству также останутся истинными.

(\Leftarrow) Очевидно.

