

Теоремы о формальной арифметике

Consis

Лемма

$\vdash 1 = 0$ тогда и только тогда, когда $\vdash \alpha$ при любом α .

Определение

Обозначим за $\psi(x, p)$ формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение *Proof*: $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in \text{Proof}$, если p — гёделев номер доказательства ξ .

Consis

Лемма

$\vdash 1 = 0$ тогда и только тогда, когда $\vdash \alpha$ при любом α .

Определение

Обозначим за $\psi(x, p)$ формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение *Proof*: $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in \text{Proof}$, если p — гёделев номер доказательства ξ .

Обозначим $\pi(x) \equiv \exists p. \psi(x, p)$

Consis

Лемма

$\vdash 1 = 0$ тогда и только тогда, когда $\vdash \alpha$ при любом α .

Определение

Обозначим за $\psi(x, p)$ формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение *Proof*: $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in \text{Proof}$, если p — гёделев номер доказательства ξ .

Обозначим $\pi(x) \equiv \exists p. \psi(x, p)$

Определение

Формулой *Consis* назовём формулу $\neg \pi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner})$

Consis

Лемма

$\vdash 1 = 0$ тогда и только тогда, когда $\vdash \alpha$ при любом α .

Определение

Обозначим за $\psi(x, p)$ формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение *Proof*: $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in \text{Proof}$, если p — гёделев номер доказательства ξ .

Обозначим $\pi(x) \equiv \exists p. \psi(x, p)$

Определение

Формулой *Consis* назовём формулу $\neg \pi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner})$

Неформальный смысл: «формальная арифметика непротиворечива»

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально)

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ ».

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ ». То есть, $\forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$.

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ ». То есть, $\forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$.

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ ». То есть, $\forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$, — и это можно доказать, то есть $\vdash \text{Consis} \rightarrow \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$.

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ ». То есть, $\forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$, — и это можно доказать, то есть $\vdash \text{Consis} \rightarrow \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Однако если формальная арифметика непротиворечива, то $\nvdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$.



Слишком много неформальности

Рассмотрим такой особый Consis':

$$\begin{aligned}\pi'(x) &:= \exists p. \psi(x, p) \ \& \ \neg \psi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner}, p) \\ \text{Consis}' &:= \pi'(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner})\end{aligned}$$

Заметим:

1. Если ФА непротиворечива, то $\llbracket \pi'(x) \rrbracket = \llbracket \pi(x) \rrbracket$:
 - ▶ если $x \neq \ulcorner 1 = 0 \urcorner$ и $\llbracket \psi(x, p) \rrbracket = \text{И}$, то $\llbracket \psi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner}, p) \rrbracket = \text{Л}$
 - ▶ если $x = \ulcorner 1 = 0 \urcorner$, то $\llbracket \psi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner}, p) \rrbracket = \text{Л}$ при любом p .
2. Но $\vdash \text{Consis}'$.

Условия выводимости Гильберта-Бернайса-Лёба

Определение

Будем говорить, что формула ψ , выражающая отношение *Proof*, формула π и формула *Consis* соответствуют условиям Гильберта-Бернайса-Лёба, если следующие условия выполнены для любой формулы α :

1. $\vdash \alpha$ влечет $\vdash \pi(\overline{\Gamma\alpha})$
2. $\vdash \pi(\overline{\Gamma\alpha}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\pi(\overline{\Gamma\alpha})})$
3. $\vdash \pi(\overline{\Gamma\alpha \rightarrow \beta}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\alpha}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\beta})$

Невыразимость доказуемости

Определение

$$Th_S = \{\ulcorner \alpha \urcorner \mid \vdash_S \alpha\}; Tr_S = \{\ulcorner \alpha \urcorner \mid \llbracket \alpha \rrbracket_S = \mathcal{I}\}$$

Лемма

Пусть $D(\ulcorner \alpha \urcorner) = \ulcorner \alpha(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}) \urcorner$ для любой формулы $\alpha(x)$. Тогда D представима в формальной арифметике.

Теорема

Если расширение Ф.А. S непротиворечиво и D представима в нём, то Th_S невыразимо в S

Доказательство.

Пусть $\delta(a, p)$ представляет D , и пусть $\sigma(x)$ выражает множество Th_S (рассматриваемое как одноместное отношение).

Пусть $\alpha(x) := \forall p. \delta(x, p) \rightarrow \neg \sigma(p)$. Верно ли, что $\ulcorner \alpha \urcorner \in Th$?



Неразрешимость формальной арифметики

Теорема

Если формальная арифметика непротиворечива, то формальная арифметика неразрешима

Доказательство.

Пусть формальная арифметика разрешима. Значит, есть рекурсивная функция $f(x)$: $f(x) = 1$ тогда и только тогда, когда $x \in \text{Th}_{\text{Ф.А.}}$. То есть, $\text{Th}_{\text{Ф.А.}}$ выразимо в формальной арифметике.

По теореме о невыразимости доказуемости, $\text{Th}_{\text{Ф.А.}}$ невыразимо в формальной арифметике. Противоречие. □

Теорема Тарского

Теорема (Тарского о невыразимости истины)

Не существует формулы $\varphi(x)$, что $\llbracket \varphi(x) \rrbracket = И$ (в стандартной интерпретации) тогда и только тогда, когда $x \in Tr_{ФА}$.

Доказательство.

Пусть теория \mathcal{S} — формальная арифметика + аксиомы: все истинные в стандартной интерпретации формулы. Очевидно, что $Th_{\mathcal{S}} = Tr_{\mathcal{S}} = Tr_{ФА}$. То есть $Tr_{ФА}$ невыразимо в \mathcal{S} .

Пусть φ таково, что $\llbracket \varphi(x) \rrbracket = И$ при $x \in Tr$. Тогда $\vdash \varphi(x)$, если $x \in Tr$ и $\vdash \neg \varphi(x)$, если $x \notin Tr$.

Тогда Tr выразимо в \mathcal{S} . Противоречие.



Теорема Тарского

Теорема (Тарского о невыразимости истины)

Не существует формулы $\varphi(x)$, что $\llbracket \varphi(x) \rrbracket = И$ (в стандартной интерпретации) тогда и только тогда, когда $x \in Tr_{ФА}$.

Доказательство.

Пусть теория \mathcal{S} — формальная арифметика + аксиомы: все истинные в стандартной интерпретации формулы. Очевидно, что $Th_{\mathcal{S}} = Tr_{\mathcal{S}} = Tr_{ФА}$. То есть $Tr_{ФА}$ невыразимо в \mathcal{S} .

Пусть φ таково, что $\llbracket \varphi(x) \rrbracket = И$ при $x \in Tr$. Тогда $\vdash \varphi(x)$, если $x \in Tr$ и $\vdash \neg \varphi(x)$, если $x \notin Tr$.

Тогда Tr выразимо в \mathcal{S} . Противоречие. □

Однако, если взять $D = \mathbb{R}$, истина становится выразима (алгоритм Тарского).

Положительные результаты про исчисления.

Что можно сделать для разрешимости исчисления предикатов?

- По теореме о полноте можем рассматривать (\models) вместо (\vdash) . Напомним: $M \models \alpha$, если для всех $M = \langle D, F, P, E \rangle$ выполнено $M \models \alpha$.

Что можно сделать для разрешимости исчисления предикатов?

- ▶ По теореме о полноте можем рассматривать (\models) вместо (\vdash). Напомним: $M \models \alpha$, если для всех $M = \langle D, F, P, E \rangle$ выполнено $M \models \alpha$.
- ▶ Что мешает:
 1. слишком сложные формулы — кванторы по бесконечным множествам;
 2. слишком большое разнообразие D , включая несчётные;
 3. даже $D = \mathbb{N}$ в формальной арифметике представляет проблему.

Что можно сделать для разрешимости исчисления предикатов?

- ▶ По теореме о полноте можем рассматривать (\models) вместо (\vdash) . Напомним: $M \models \alpha$, если для всех $M = \langle D, F, P, E \rangle$ выполнено $M \models \alpha$.
- ▶ Что мешает:
 1. слишком сложные формулы — кванторы по бесконечным множествам;
 2. слишком большое разнообразие D , включая несчётные;
 3. даже $D = \mathbb{N}$ в формальной арифметике представляет проблему.
- ▶ Будем последовательно бороться:
 1. упростим формулу (борьба с кванторами);
 2. заменим произвольное D на какое-то рекурсивно-перечислимое множество, устроенное некоторым фиксированным образом (борьба с разнообразием D);
 3. устроим правильный перебор, позволяющий быстро находить решения, если они есть (борьба с бесконечностью D).

Шаги рассуждения

1. Упростим формулу — поверхностные кванторы всеобщности, сколемизация.
2. Заменяем D .
3. Правильный перебор

Упрощаем формулу α . Сколемизация

1. Предварённая форма (поверхностные кванторы) — для примера возьмём чередующиеся:

$$\beta := \forall x_1. \exists x_2. \forall x_3. \exists x_4 \dots \forall x_{n-1}. \exists x_n. \varphi$$

2. Убрать кванторы существования: заменим x_{2k} функциями Сколема $e_{2k}(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1})$. Получим:

$$\gamma := \forall x_1. \forall x_3 \dots \forall x_{n-1}. \varphi[x_2 := e_2(x_1), x_4 := e_4(x_1, x_3), \dots, x_n := e_n(x_1, x_3, \dots, x_{n-1})]$$

3. ДНФ (с конъюнктов, в каждом $d(c)$ дизъюнктов):

$$\delta := \forall x_1. \forall x_3 \dots \forall x_{n-1}. \bigwedge_c \left(\bigvee_{i=1, d(c)} (\neg) P_i(\theta_i) \right)$$

4. Исходная задача: проверка $\vdash \alpha$. Это эквивалентно $\vdash \beta$. Эквивалентно $\models \beta$. Эквивалентно выполнимости δ при всех D (найдутся e_i , что $\llbracket \delta \rrbracket = \text{И}$).

Шаги рассуждения

1. Упростим формулу — поверхностные кванторы всеобщности, сколемизация.
2. Заменяем D .
3. Правильный перебор

Эрбранов универсум.

Определение

$H_0(\varphi)$ — все константы в формуле φ (либо особая константа a , если констант в φ нет)

$H_{k+1}(\varphi) = H_k(\varphi)$ и все функции от значений $H_k(\varphi)$ (как строки)

$H = \cup H_n(\varphi)$ — основные термы.

Пример

$P(a) \vee Q(f(b))$:

$$H_0 = \{a, b\}$$

$$H_1 = \{a, b, f(a), f(b)\}$$

$$H_2 = \{a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b))\}$$

...

$$H = \{f^{(n)}(x) \mid n \in \mathbb{N}_0, x \in \{a, b\}\}$$

Выполнимость не теряется. Заменяем D на H

Теорема

Формула выполнима тогда и только тогда, когда она выполнима на Эрбрановом универсуме.

Доказательство.

(\Rightarrow) Пусть $M \models \forall \bar{x}.\varphi$. Тогда построим отображение $\text{eval} : H \rightarrow M$ (смысл названия вдохновлён языками программирования: $\text{eval}("f(f(b))")$ перейдёт в $f(f(b))$, где f и b — из M).

Предикатам дадим согласованную оценку:

$P_H(t_1, \dots, t_n) = P_M(\text{eval}(t_1), \dots, \text{eval}(t_n))$. Очевидно, любая формула сохранит своё значение, кванторы всеобщности по меньшему множеству также останутся истинными.

(\Leftarrow) Очевидно.



Противоречивость системы дизъюнктов

Определение

Система дизъюнктов $\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ противоречива, если для каждой интерпретации M найдётся δ_k и такой набор $d_1 \dots d_v$, что $\llbracket \delta_k \rrbracket^{x_1:=d_1, \dots, x_v:=d_v} = \perp$.

Теорема

Система дизъюнктов противоречива, если она невыполнима на Эрбрановом универсуме.

Доказательство.

Контрапозиция теоремы о выполнимости + разбор определения.



Основные примеры.

Определение

Дизъюнкт с подставленными основными термами вместо переменных называется основным примером. Системой основных примеров \mathcal{E} назовём множество основных примеров.

А именно, рассмотрим $\delta_1 \& \delta_2 \& \dots \& \delta_n$.

$$\mathcal{E} = \{ \text{все возможные основные примеры } \delta_k \mid \mathcal{M} \not\models \delta_k, \mathcal{M} \text{ из } H \}$$

Теорема

Система дизъюнктов S противоречива тогда и только тогда, когда система всевозможных основных примеров \mathcal{E} противоречива

Доказательство.

Для некоторой эрбрановой интерпретации дизъюнкт δ_k опровергается тогда и только тогда, когда соответствующая ему подстановка в \mathcal{E} опровергается.



Теорема Эрбрана

Теорема (Эрбрана)

Система дизъюнктов S противоречива тогда и только тогда, когда существует конечное противоречивое множество основных примеров системы дизъюнктов S

Доказательство.

(\Leftarrow) Пусть $\delta_1[\bar{x} := \bar{\theta}], \dots, \delta_k[\bar{x} := \bar{\theta}]$ — противоречивое множество примеров дизъюнктов. Тогда интерпретация $\bar{\theta}$ опровергает хотя бы один из δ_k и система противоречива.

(\Rightarrow) Если S противоречива, то значит, множество основных примеров S противоречиво (по теореме о выполнимости Эрбранова универсума). Тогда по теореме компактности в нём найдётся конечное противоречивое подмножество.



Шаги рассуждения

1. Упростим формулу — поверхностные кванторы всеобщности, сколемизация.
2. Упрощаем D — заменили на H , свели к перебору основных примеров.
3. Правильный перебор.

Пример: как проверяем выполнимость формулы?

Допустим, формула: $(\forall x.P(x) \ \& \ P(x')) \ \& \ \exists x.\neg P(x''')$

1. Поверхностные кванторы, сколемизация, ДНФ:
 $(\forall x.P(x)) \ \& \ (\forall x.P(x')) \ \& \ (\neg P(e))$
2. Строим Эрбранов универсум: $H = \{e, e', e'', e''', \dots\}$
3. Если есть противоречие, то среди основных примеров:

$$\mathcal{E} = \{P(e), P(e'), P(e''), P(e'''), P(e'''), \neg P(e'''), \dots\}$$

Напомним, \mathcal{E} — подстановки элементов H вместо переменных под кванторами.
Причём, либо $\models \& E$, либо противоречие достигается на конечном подмножестве (т. Эрбрана).

Добавляем по примеру и проверяем. $P(e)$ при $\llbracket P(e) \rrbracket = \text{И}$.

$P(e')$ при $\llbracket P(e') \rrbracket = \text{И}$.

...

$P(e''')$ при $\llbracket P(e''') \rrbracket = \text{И}$.

$\neg P(e''')$ при $\llbracket P(e''') \rrbracket = \text{Л}$. Противоречие.

Правило резолюции (исчисление высказываний)

Пусть даны два дизъюнкта, $\alpha_1 \vee \beta$ и $\alpha_2 \vee \neg\beta$. Тогда следующее правило вывода называется правилом резолюции:

$$\frac{\alpha_1 \vee \beta \quad \alpha_2 \vee \neg\beta}{\alpha_1 \vee \alpha_2}$$

Теорема

Система дизъюнктов противоречива, если в процессе всевозможного применения правила резолюции будет построено явное противоречие, т.е. найдено два противоречивых дизъюнкта: β и $\neg\beta$.

Расширение правила резолюции на исчисление предикатов

Заметим, что правило резолюции для исчисления высказываний не подойдёт для исчисления предикатов.

$$S = \{P(x), \neg P(0)\}$$

Здесь $P(x)$ противоречит $\neg P(0)$, но правило резолюции для исчисления высказываний здесь неприменимо, потому что x можно заменять, это не константа:

$$\frac{P(\textcolor{red}{x}) \quad \neg P(\textcolor{red}{0})}{???}$$

Нужно заменять $P(x)$ на основные примеры, и искать среди них. Модифицируем правило резолюции для этого.

Алгебраические термы

Определение

Алгебраический терм

$$\theta := x | (f(\theta_1, \dots, \theta_n))$$

где x — переменная, $f(\theta_1, \dots, \theta_n)$ — применение функции. Напомним, что константы — нульместные функциональные символы, собственно переменные будем обозначать последними буквами латинского алфавита.

Определение

Система уравнений в алгебраических термах
$$\begin{cases} \theta_1 = \sigma_1 \\ \vdots \\ \theta_n = \sigma_n \end{cases}$$

где θ_i и σ_i — термы

Уравнение в алгебраических термах

Определение

$\{x_i\} = X$ —множество переменных, $\{\theta_i\} = T$ —множество термов.

Определение

Подстановка—отображение вида: $\pi_0 : X \rightarrow T$, тождественное почти везде.
 $\pi_0(x)$ может быть либо $\pi_0(x) = \theta_i$, либо $\pi_0(x) = x$.

Доопределим $\pi : T \rightarrow T$, где

1. $\pi(x) = \pi_0(x)$
2. $\pi(f(\theta_1, \dots, \theta_k)) = f(\pi(\theta_1), \dots, \pi(\theta_k))$

Определение

Решить уравнение в алгебраических термах—найти такую наиболее общую подстановку π , что $\pi(\theta_1) = \pi(\theta_2)$. Наиболее общая подстановка — такая, для которой другие подстановки являются её частными случаями.

Задача унификации

Определение

Пусть даны формулы α и β . Тогда решением задачи унификации будет такая наиболее общая подстановка $\pi = \mathcal{U}[\alpha, \beta]$, что $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$.

Также, η назовём наиболее общим унификатором.

Пример

- ▶ Формулы $P(a, g(b))$ и $P(c, d)$ не имеют унификатора (мы считаем, что a, b, c, d — нульместные функции, а f — одноместная функция).
- ▶ Проверим формулу на соответствие 11 схеме аксиом:

$$(\forall x. P(x)) \rightarrow P(f(t, g(t), y))$$

Пусть $\pi = \mathcal{U}[P(x), P(f(t, g(t), y))]$, тогда $\pi(x) = f(t, g(t), y)$.

Правило резолюции для исчисления предикатов

Определение

Пусть σ_1 и σ_2 — подстановки, заменяющие переменные в формуле на свежие.
Тогда правило резолюции выглядит так:

$$\frac{\alpha_1 \vee \beta_1 \quad \alpha_2 \vee \neg\beta_2}{\pi(\sigma_1(\alpha_1) \vee \sigma_2(\alpha_2))} \pi = \mathcal{U}[\sigma_1(\beta_1), \sigma_2(\beta_2)]$$

σ_1 и σ_2 разделяют переменные у дизъюнктов, чтобы π не осуществила лишние замены, ведь $\vdash (\forall x.P(x) \& Q(x)) \leftrightarrow (\forall x.P(x)) \& (\forall x.Q(x))$, но $\nvdash (\forall x.P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x.P(x)) \vee (\forall x.Q(x))$.

Пример

$$\frac{Q(x) \vee P(x) \quad \neg P(a) \vee T(x)}{Q(a) \vee T(x'')} \text{ подстановки: } \sigma_1(x) = x', \sigma_2(x) = x'', \pi(x') = a$$

Метод резолюции

Ищем $\vdash \alpha$.

1. будем искать опровержение $\neg\alpha$.
2. перестроим $\neg\alpha$ в ДНФ.
3. будем применять правило резолюции, пока получаем новые дизъюнкты и пока не найдём явное противоречие (дизъюнкты вида β и $\neg\beta$).

Если противоречие нашлось, значит, $\vdash \neg\neg\alpha$. Если нет — значит, $\vdash \neg\alpha$. Процесс может не закончиться.

SMT-решатели

Обычно требуется не логическое исчисление само по себе, а теория первого порядка. То есть, «Satisfiability Modulo Theory», «выполнимость в теории» — вместо SAT, выполнимости.

- ▶ Иногда можно вложить теорию в логическое исчисление, даже в исчисление высказываний: $\overline{S_2 S_1 S_0} = \overline{A_1 A_0} + \overline{B_1 B_0}$

$$\begin{aligned} S_0 &= A_0 \oplus B_0 & C_0 &= A_0 \& B_0 \\ S_1 &= A_1 \oplus B_1 \oplus C_0 & C_1 &= (A_1 \& B_1) \vee (A_1 \& C_0) \vee (B_1 \& C_0) \\ S_2 &= C_1 \end{aligned}$$

- ▶ А можно что-то добавить прямо на уровень унификации / резолюции: Например, можем зафиксировать арифметические функции — и производить вычисления в правиле резолюции вместе с унификацией. Тогда противоречие в $\{x = 1 + 3 + 1, \neg x = 5\}$ можно найти за один шаг.

Уточнённые типы (Refinement types), LiquidHaskell

Определение

(Неформальное) Уточнённый тип — тип вида $\{\tau(x) \mid P(x)\}$, где P — некоторый предикат.

Пример на LiquidHaskell:

```
data [a] <p :: a -> a -> Prop> where
  | []    :: [a] <p>
  | (:)   :: h:a -> [a<p h>]<p> -> [a]<p>
```

- ▶ $h:a$ — голова (h) имеет тип a
- ▶ $[a<p h>]<p>$ — хвост состоит из значений типа a , уточнённых p — $\{t : a \mid p\ h\ t\}$ (картинг: $a\ <p\ h>$).

```
{-@ type IncrList a = [a] <{\xi xj -> xi <= xj}> @-}
{-@ insertSort    :: (Ord a) => xs:[a] -> (IncrList a) @-}
insertSort []      = []
insertSort (x:xs) = insert x (insertSort xs)
```