

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ
Математическая логика, ИТМО, М3232-М3239, осень 2024 года

Общие замечания

1. Одно задание оценивается в 3.5 балла. При использовании TeX или Turst для оформления задание оценивается в 4 балла. При крайне плохом оформлении оценка может быть понижена до 3 баллов.
2. Заданием (по умолчанию) считается один пункт, занумерованный цифрой или буквой. Пункты без нумерации считаются частями одного задания.
3. Курс можно условно разделить на три части (исчисления высказываний и предикатов, формальная арифметика, теория множеств). В каждой из частей можно ответить не более четырёх заданий.

Задание №1. Знакомство с классическим исчислением высказываний.

При решении заданий вам может потребоваться теорема о дедукции (будет доказана на второй лекции):

Теорема 1. $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\gamma_1, \dots, \gamma_n \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

Пример использования: пусть необходимо доказать $\vdash A \rightarrow A$ — то есть доказать существование вывода формулы $A \rightarrow A$ (заметьте, так поставленное условие не требует этот вывод предъявлять, только доказать его существование). Тогда заметим, что последовательность из одной формулы A доказывает $A \vdash A$. Далее, по теореме о дедукции, отсюда следует и $\vdash A \rightarrow A$ (то есть, существование вывода формулы $A \rightarrow A$, не использующего гипотезы).

Теорема будет доказана конструктивно: будет предъявлен алгоритм, перестраивающий вывод $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \alpha \vdash \beta$ в вывод $\gamma_1, \dots, \gamma_n \vdash \alpha \rightarrow \beta$

1. Докажите:

- (a) $\vdash (A \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- (b) $\vdash \neg(A \& \neg A)$
- (c) $\vdash A \& B \rightarrow B \& A$
- (d) $\vdash A \vee B \rightarrow B \vee A$
- (e) $A \& \neg A \vdash B$

2. Докажите:

- (a) $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$
- (b) $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$
- (c) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
- (d) $A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$
- (e) $\neg A, B \vdash A \rightarrow B$

3. Докажите:

- (a) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
- (b) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ (правило контрапозиции)
- (c) $\vdash \neg(\neg A \& \neg B) \rightarrow (A \vee B)$ (вариант I закона де Моргана)
- (d) $\vdash A \vee B \rightarrow \neg(\neg A \& \neg B)$
- (e) $\vdash (\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \& B)$ (II закон де Моргана)
- (f) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$
- (g) $\vdash A \& B \rightarrow A \vee B$
- (h) $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ (закон Пирса)
- (i) $\vdash A \vee \neg A$
- (j) $\vdash (A \& B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow C)$

- (k) $\vdash A \& (B \vee C) \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C)$ (*дистрибутивность*)
 (l) $\vdash (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \& B \rightarrow C)$
 (m) $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$
 (n) $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$

4. Даны высказывания α и β , причём $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ и $\nvdash \beta \rightarrow \alpha$. Укажите способ построения высказывания γ , такого, что $\vdash \alpha \rightarrow \gamma$ и $\vdash \gamma \rightarrow \beta$, причём $\nvdash \gamma \rightarrow \alpha$ и $\nvdash \beta \rightarrow \gamma$.
5. Покажите, что если $\alpha \vdash \beta$ и $\neg\alpha \vdash \beta$, то $\vdash \beta$.
6. Покажите, что классическое исчисление высказываний допускает правило Modus Tollens:

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \neg\psi}{\neg\varphi}$$

А именно, пусть дан некоторый вывод, в котором каждая формула — либо аксиома, либо получена по правилу Modus Ponens, либо имеет вид $\delta_n \equiv \neg\varphi$, причём ранее в доказательстве встречается $\delta_i \equiv \neg\psi$ и $\delta_j \equiv \varphi \rightarrow \psi$ (при этом $\max(i, j) < n$). Тогда такой вывод можно перестроить в корректное доказательство в классическом исчислении высказываний.

В данном задании от вас требуется аккуратное изложение доказательства, видимо, использующее математическую индукцию. То есть, чётко сформулированное индукционное предположение и полные доказательства базы и перехода.

Задание №2. Теоремы об исчислении высказываний. Знакомство с интуиционистским исчислением высказываний.

1. Давайте вспомним, что импликация правоассоциативна: $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \equiv \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$. Но рассмотрим иную расстановку скобок: $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma$. Возможно ли доказать логическое следствие между этими вариантами расстановки скобок — и каково его направление? Зависит ли это от варианта исчисления (классическое/интуиционистское)?
2. Покажите, что в классическом исчислении высказываний $\Gamma \models \alpha$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha$.
3. Покажите, что в классическом исчислении высказываний $\Gamma \vdash \alpha$ влечёт $\Gamma \models \alpha$.
4. Возможно ли, что какая-то из аксиом задаётся двумя разными схемами аксиом? Опишите все возможные коллизии для какой-то одной такой пары схем аксиом. Ответ обоснуйте (да, тут потребуется доказательство по индукции).
5. Заметим, что можно вместо отрицания ввести в исчисление ложь. Рассмотрим *исчисление высказываний с ложью*. В этом языке будет отсутствовать одноместная связка (\neg), вместо неё будет присутствовать нульместная связка «ложь» (\perp), а 9 и 10 схемы аксиом будут заменены на одну схему:

$$(9_{\perp}) \quad ((\alpha \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow \alpha$$

Будем записывать доказуемость в новом исчислении как $\vdash_{\perp} \alpha$, а доказуемость в исчислении высказываний с отрицанием как $\vdash_{\neg} \beta$. Также определим операцию трансляции между языками обычного исчисления высказываний и исчисления с ложью как операции рекурсивной замены $\perp := A \& \neg A$ и $\neg\alpha := \alpha \rightarrow \perp$ (и обозначим их как $|\varphi|_{\neg}$ и $|\psi|_{\perp}$ соответственно).

Докажите:

- (a) $\vdash_{\perp} \alpha$ влечёт $\vdash_{\neg} |\alpha|_{\neg}$
 (b) $\vdash_{\neg} \alpha$ влечёт $\vdash_{\perp} |\alpha|_{\perp}$
6. Покажите, что топологическое пространство на вещественных числах с базой $\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ совпадает с топологическим пространством \mathbb{R} из матанализа (то есть, совпадают множества открытых множеств).
7. Покажите, что дискретная топология, антидискретная топология (открыты только \emptyset и X), топология стрелки, топология Зарисского (носитель — \mathbb{R} , открыты \emptyset , \mathbb{R} и все множества с конечным дополнением) являются топологиями.

8. Заметим, что определения стараются давать как можно более узкими: если некоторое свойство вытекает из других, то это уже не свойство из определения, а теорема. Поэтому приведите примеры $\langle X, \Omega \rangle$, нарушающие только первое, только второе и только третье условие на топологию.
9. Напомним, что замкнутое множество — такое, дополнение которого открыто. Заметим, что на \mathbb{R} ровно два множества одновременно открыты и замкнуты — \emptyset и всё пространство. Постройте другую (не евклидову) топологию на \mathbb{R} , чтобы в ней было ровно четыре множества, которые одновременно открыты и замкнуты. А возможно ли построить топологическое пространство, в котором было бы ровно три открыто-замкнутых множества?
10. Назовём минимальной базой топологии такую базу, что в ней никакое множество не может быть получено объединением семейства других множеств из базы.
- Постройте минимальную базу для дискретной топологии.
 - Существует ли минимальная база для топологии стрелки?
 - Существует ли минимальная база для топологии Зарисского (носитель — \mathbb{R} , открыты \emptyset , \mathbb{R} и все множества с конечным дополнением)?
11. Предложите пример топологического пространства, в котором пересечение произвольного семейства открытых множеств — открыто. Топологическое пространство должно иметь бесконечный носитель (чтобы задача имела содержательный смысл) и не должно иметь дискретную или антидискретную топологию (не должно быть в каком-то смысле вырожденным).
12. Наибольшим (наименьшим) значением в каком-то множестве назовём такое, которое больше (меньше) всех других элементов множества. Несложно заметить, что для отношения включения множеств далеко не всегда такое можно определить: например, на \mathbb{R}^2 не существует наибольшего круга с радиусом 1, хотя такой круг существует на $\{z \mid z \in \mathbb{R}^2, |z| \leq 1\}$.
- Внутренностью* множества A° назовём наибольшее открытое множество, содержащееся в A . Покажите, что внутренность множества всегда определена.
13. Напомним определения: *замкнутое* множество — такое, дополнение которого открыто. *Замыканием* множества \bar{A} назовём наименьшее замкнутое множество, содержащее A . Назовём *окрестностью* точки x такое открытое множество V , что $x \in V$. Будем говорить, что точка $x \in A$ *внутренняя*, если существует окрестность V , что $V \subseteq A$. Точка x — *граничная*, если любая её окрестность V пересекается как с A , так и с его дополнением.
- Покажите, что A открыто тогда и только тогда, когда все точки A — внутренние. Также покажите, что $A^\circ = \{x \mid x \in A \text{ \& } x \text{ — внутренняя точка}\}$;
 - Покажите, что A замкнуто тогда и только тогда, когда содержит все свои граничные точки. Также покажите, что $\bar{A} = \{x \mid x \text{ — внутренняя или граничная точка}\}$.
 - Верно ли, что $\bar{A} = X \setminus ((X \setminus A)^\circ)$?
 - Пусть $A \subseteq B$. Как связаны A° и B° , а также \bar{A} и \bar{B} ? Верно ли $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ и $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$?
 - Задача Куратовского.* Будем применять операции взятия внутренней и замыкания к некоторому множеству всевозможными способами. Сколько различных множеств может всего получиться? *Указание.* Покажите, что $(\bar{A}^\circ)^\circ = \bar{A}^\circ$.
14. Задача проверки высказываний на истинность в ИИВ сложнее, чем в КИВ — не существует конечного набора значений, на которых можно проверить формулу, чтобы определить её истинность (мы эту теорему докажем). Тем не менее, если формула опровергается, то она опровергается на \mathbb{R} с евклидовой топологией. Если же такого опровержения нет, то формула доказуема (то есть, ИИВ семантически полно на \mathbb{R}). Например, формула $A \vee \neg A$ опровергается при $\llbracket A \rrbracket = (0, +\infty)$, так как $\llbracket A \vee \neg A \rrbracket = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Очевидно, что любая интуиционистская тавтология общезначима и в классической логике:

- формула общезначима в интуиционистской логике;
- значит, истинна при всех оценках;
- значит, в частности, при всех оценках на \mathbb{R} ;
- то есть, по теореме, упомянутой выше, доказуема в ИИВ;
- а схема аксиом 10и — частный случай схемы аксиом 10.

Обратное же неверно. Определите, являются ли следующие формулы тавтологиями в КИВ и ИИВ (предложите опровержение или доказательство общезначимости/выводимости для каждого из исчислений):

- (a) $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$;
 - (b) $\neg\neg A \rightarrow A$;
 - (c) $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ (из двух утверждений одно непременно следует из другого: например, «я не люблю зиму» и «я не люблю лето»);
 - (d) $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C)$;
 - (e) $(A \rightarrow (B \vee \neg B)) \vee (\neg A \rightarrow (B \vee \neg B))$;
 - (f) $\alpha \vee \beta \vdash \neg(\neg\alpha \& \neg\beta)$ и $\neg(\neg\alpha \& \neg\beta) \vdash \alpha \vee \beta$;
 - (g) $\neg\alpha \& \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$ и $\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \& \neg\beta$;
 - (h) $\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg\alpha \vee \beta$ и $\neg\alpha \vee \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$.
15. Известно, что в КИВ все связки могут быть выражены через операцию «и-не» («или-не»). Также, они могут быть выражены друг через друга (достаточно, например, отрицания и конъюнкции). Однако, в ИИВ это не так.
- Покажите, что никакие связки не выражаются друг через друга: то есть, нет такой формулы $\varphi(A, B)$ из языка интуиционистской логики, не использующей связку \star , что $\vdash A \star B \rightarrow \varphi(A, B)$ и $\vdash \varphi(A, B) \rightarrow A \star B$. Покажите это для каждой связки в отдельности:
- (a) конъюнкция;
 - (b) дизъюнкция;
 - (c) импликация;
 - (d) отрицание.

Задание №3. Изоморфизм Карри-Ховарда. Дополнительные топологические определения. Решётки.

- Непрерывной функцией называется такая, для которой прообраз открытого множества всегда открыт. Путём на топологическом пространстве X назовём непрерывное отображение вещественного отрезка $[0, 1]$ в X . Опишите пути (то есть, опишите, какие функции могли бы являться путями):
 - (a) на \mathbb{N} (с дискретной топологией);
 - (b) в топологии Зарисского;
 - (c) на дереве (с топологией с лекции);
- Докажите, что функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна тогда и только тогда, когда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ для всех $x_0 \in \mathbb{R}$.
- Связным множеством в топологическом пространстве назовём такое, которое связно как подпространство. Линейно связным множеством назовём такое, в котором две произвольные точки могут быть соединены путём, образ которого целиком лежит в множестве.
 - (a) Покажите, что линейно связное множество всегда связно;
 - (b) Покажите, что связное не обязательно линейно связное.
- Всегда ли непрерывным образом связного пространства является другое связное (под)пространство? Докажите или опровергните.
- Как мы помним с лекции, возможно доказывать интуиционистские утверждения, воспользовавшись изоморфизмом Карри-Ховарда, то есть написав соответствующую программу на каком-нибудь статически типизированном языке программирования.

Например, на C++ так можно доказать $A \rightarrow A$:

```
A identity (A x) { return x; }
```

Докажите следующие утверждения, не пользуясь в коде тем фактом, что обычно языки программирования противоречивы (то есть, не используйте исключений, функций, не возвращающих управления, и других подобных конструкций).

- (a) $A \rightarrow B \rightarrow A$
 - (b) $A \& B \rightarrow A \vee B$
 - (c) $(A \& (B \vee C)) \rightarrow ((A \& B) \vee (A \& C))$
 - (d) $(A \rightarrow C) \& (B \rightarrow C) \& (A \vee B) \rightarrow C$
 - (e) $(B \vee C \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A) \& (C \rightarrow A)$
 - (f) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
 - (g) $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$
 - (h) $(A \rightarrow B) \& (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$
 - (i) Выразимые в интуиционистском исчислении высказываний аналоги правил де Моргана для импликации.
6. Рассмотрим подмножество частично упорядоченного множества, и рассмотрим следующие свойства: (а) наличие наибольшего элемента; (б) наличие супремума; (в) наличие единственного максимального элемента. Всего можно рассмотреть шесть утверждений ((а) влечёт (б), (а) влечёт (в), и т.п.) — про каждое определите, выполнено ли оно в общем случае, и приведите либо доказательство, либо контрпример. Задача состоит из одного пункта, для получения баллов все шесть утверждений должны быть разобраны.
7. Покажите следующие утверждения для импликативных решёток:
- (a) монотонность: пусть $a \leq b$ и $c \leq d$, тогда $a + c \leq b + d$ и $a \cdot c \leq b \cdot d$;
 - (b) законы поглощения: $a \cdot (a + b) = a$; $a + (a \cdot b) = a$;
 - (c) $a \leq b$ выполнено тогда и только тогда, когда $a \rightarrow b = 1$;
 - (d) из $a \leq b$ следует $b \rightarrow c \leq a \rightarrow c$ и $c \rightarrow a \leq c \rightarrow b$;
 - (e) из $a \leq b \rightarrow c$ следует $a \cdot b \leq c$;
 - (f) $b \leq a \rightarrow b$ и $a \rightarrow (b \rightarrow a) = 1$;
 - (g) $a \rightarrow b \leq ((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c))$;
 - (h) $a \leq b \rightarrow a \cdot b$ и $a \rightarrow (b \rightarrow (a \cdot b)) = 1$;
 - (i) $a \rightarrow c \leq (b \rightarrow c) \rightarrow (a + b \rightarrow c)$;
 - (j) импликативная решётка дистрибутивна: $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$
8. Докажите, основываясь на формулах предыдущих заданий, что интуиционистское исчисление высказываний корректно, если в качестве модели выбрать алгебру Гейтинга.
9. Покажите, что на конечном множестве дистрибутивная решётка всегда импликативна.
10. Постройте пример дистрибутивной, но не импликативной решётки.
11. Покажите, что в дистрибутивной решётке всегда $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$.
12. Пусть $R \subseteq A \times A$ — отношение эквивалентности (то есть транзитивное, рефлексивное и симметричное). Тогда фактор-множество $A/R := \{[x]_R \mid x \in A\}$ — множество классов эквивалентности, где $[x]_R = \{t \in A \mid tRx\}$.
Покажите, что каждый элемент множества A принадлежит в точности одному классу эквивалентности. Два класса эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают.
13. Пусть $R \subseteq A \times A$ — отношение нестрогого предпорядка (транзитивное и рефлексивное). И пусть $a \approx b$, если aRb и bRa . Покажите, что
- (a) Если aRb и $a \approx a'$, $b \approx b'$, то $a'Rb'$.
 - (b) R/\approx — отношение нестрогого порядка на A/\approx в следующем смысле: $[a]_{\approx} R/\approx [b]_{\approx}$ выполнено, если aRb (корректность определения также необходимо показать).
14. Покажите, что (\leq) из определения алгебры Линденбаума — отношение нестрогого предпорядка, (\approx) — отношение эквивалентности, а $(\leq)/\approx$ — отношение нестрогого порядка.
15. Покажите, что $[\alpha]_{\mathcal{L}} + [\beta]_{\mathcal{L}} = [\alpha \vee \beta]_{\mathcal{L}}$. Зависит ли результат от выбора представителей классов эквивалентности $[\alpha]$ и $[\beta]$? Ответ также докажите.
16. Покажите, что $[\alpha \rightarrow \beta]_{\mathcal{L}}$ — псевдодополнение $[\alpha]_{\mathcal{L}}$ до $[\beta]_{\mathcal{L}}$.