

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ**  
*Математическая логика, ИТМО, М3232-М3239, осень 2024 года*

## Общие замечания

1. Одно задание оценивается в 3.5 балла. При использовании TeX или Turst для оформления задание оценивается в 4 балла. При крайне плохом оформлении оценка может быть понижена до 3 баллов.
2. Заданием (по умолчанию) считается один пункт, занумерованный цифрой или буквой. Пункты без нумерации считаются частями одного задания.
3. Курс можно условно разделить на три части (исчисления высказываний и предикатов, формальная арифметика, теория множеств). В каждой из частей можно ответить не более четырёх заданий.

## Задание №1. Знакомство с классическим исчислением высказываний.

При решении заданий вам может потребоваться теорема о дедукции (будет доказана на второй лекции):

**Теорема 1.**  $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \alpha \vdash \beta$  тогда и только тогда, когда  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \vdash \alpha \rightarrow \beta$ .

Пример использования: пусть необходимо доказать  $\vdash A \rightarrow A$  — то есть доказать существование вывода формулы  $A \rightarrow A$  (заметьте, так поставленное условие не требует этот вывод предъявлять, только доказать его существование). Тогда заметим, что последовательность из одной формулы  $A$  доказывает  $A \vdash A$ . Далее, по теореме о дедукции, отсюда следует и  $\vdash A \rightarrow A$  (то есть, существование вывода формулы  $A \rightarrow A$ , не использующего гипотезы).

Теорема будет доказана конструктивно: будет предъявлен алгоритм, перестраивающий вывод  $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \alpha \vdash \beta$  в вывод  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \vdash \alpha \rightarrow \beta$

1. Докажите:

- (a)  $\vdash (A \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- (b)  $\vdash \neg(A \& \neg A)$
- (c)  $\vdash A \& B \rightarrow B \& A$
- (d)  $\vdash A \vee B \rightarrow B \vee A$
- (e)  $A \& \neg A \vdash B$

2. Докажите:

- (a)  $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$
- (b)  $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$
- (c)  $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
- (d)  $A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$
- (e)  $\neg A, B \vdash A \rightarrow B$

3. Докажите:

- (a)  $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
- (b)  $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$  (правило контрапозиции)
- (c)  $\vdash \neg(\neg A \& \neg B) \rightarrow (A \vee B)$  (вариант I закона де Моргана)
- (d)  $\vdash A \vee B \vdash \neg(\neg A \& \neg B)$
- (e)  $\vdash (\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \& B)$  (II закон де Моргана)
- (f)  $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$
- (g)  $\vdash A \& B \rightarrow A \vee B$
- (h)  $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$  (закон Пирса)
- (i)  $\vdash A \vee \neg A$
- (j)  $\vdash (A \& B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow C)$

(k)  $\vdash A \& (B \vee C) \vdash (A \& B) \vee (A \& C)$  (дистрибутивность)

(l)  $\vdash (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \& B \rightarrow C)$

(m)  $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$

(n)  $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$

4. Даны высказывания  $\alpha$  и  $\beta$ , причём  $\vdash \alpha \rightarrow \beta$  и  $\nvdash \beta \rightarrow \alpha$ . Укажите способ построения высказывания  $\gamma$ , такого, что  $\vdash \alpha \rightarrow \gamma$  и  $\vdash \gamma \rightarrow \beta$ , причём  $\nvdash \gamma \rightarrow \alpha$  и  $\nvdash \beta \rightarrow \gamma$ .
5. Покажите, что если  $\alpha \vdash \beta$  и  $\neg\alpha \vdash \beta$ , то  $\vdash \beta$ .
6. Покажите, что классическое исчисление высказываний допускает правило Modus Tollens:

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \neg\psi}{\neg\varphi}$$

А именно, пусть дан некоторый вывод, в котором каждая формула — либо аксиома, либо получена по правилу Modus Ponens, либо имеет вид  $\delta_n \equiv \neg\varphi$ , причём ранее в доказательстве встречается  $\delta_i \equiv \neg\psi$  и  $\delta_j \equiv \varphi \rightarrow \psi$  (при этом  $\max(i, j) < n$ ). Тогда такой вывод можно перестроить в корректное доказательство в классическом исчислении высказываний.

В данном задании от вас требуется аккуратное изложение доказательства, видимо, использующее математическую индукцию. То есть, чётко сформулированное индукционное предположение и полные доказательства базы и перехода.

## Задание №2. Теоремы об исчислении высказываний. Знакомство с интуиционистским исчислением высказываний.

1. Давайте вспомним, что импликация правоассоциативна:  $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \equiv \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ . Но рассмотрим иную расстановку скобок:  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma$ . Возможно ли доказать логическое следствие между этими вариантами расстановки скобок — и каково его направление? Зависит ли это от варианта исчисления (классическое/интуиционистское)?
2. Покажите, что в классическом исчислении высказываний  $\Gamma \models \alpha$  влечёт  $\Gamma \vdash \alpha$ .
3. Покажите, что в классическом исчислении высказываний  $\Gamma \vdash \alpha$  влечёт  $\Gamma \models \alpha$ .
4. Возможно ли, что какая-то из аксиом задаётся двумя разными схемами аксиом? Опишите все возможные коллизии для какой-то одной такой пары схем аксиом. Ответ обоснуйте (да, тут потребуется доказательство по индукции).
5. Заметим, что можно вместо отрицания ввести в исчисление ложь. Рассмотрим *исчисление высказываний с ложью*. В этом языке будет отсутствовать одноместная связка ( $\neg$ ), вместо неё будет присутствовать нульместная связка «ложь» ( $\perp$ ), а 9 и 10 схемы аксиом будут заменены на одну схему:

$$(9_{\perp}) \quad ((\alpha \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow \alpha$$

Будем записывать доказуемость в новом исчислении как  $\vdash_{\perp} \alpha$ , а доказуемость в исчислении высказываний с отрицанием как  $\vdash_{\neg} \beta$ . Также определим операцию трансляции между языками обычного исчисления высказываний и исчисления с ложью как операции рекурсивной замены  $\perp := A \& \neg A$  и  $\neg\alpha := \alpha \rightarrow \perp$  (и обозначим их как  $|\varphi|_{\neg}$  и  $|\psi|_{\perp}$  соответственно).

Докажите:

$$(a) \quad \vdash_{\perp} \alpha \text{ влечёт } \vdash_{\neg} |\alpha|_{\neg}$$

$$(b) \quad \vdash_{\neg} \alpha \text{ влечёт } \vdash_{\perp} |\alpha|_{\perp}$$

6. Покажите, что топологическое пространство на вещественных числах с базой  $\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  совпадает с топологическим пространством  $\mathbb{R}$  из матанализа (то есть, совпадают множества открытых множеств).
7. Покажите, что дискретная топология, антидискретная топология (открыты только  $\emptyset$  и  $X$ ), топология стрелки, топология Зарисского (носитель —  $\mathbb{R}$ , открыты  $\emptyset$ ,  $\mathbb{R}$  и все множества с конечным дополнением) являются топологиями.

8. Заметим, что определения стараются давать как можно более узкими: если некоторое свойство вытекает из других, то это уже не свойство из определения, а теорема. Поэтому приведите примеры  $\langle X, \Omega \rangle$ , нарушающие только первое, только второе и только третье условие на топологию.
9. Напомним, что замкнутое множество — такое, дополнение которого открыто. Заметим, что на  $\mathbb{R}$  ровно два множества одновременно открыты и замкнуты —  $\emptyset$  и всё пространство. Постройте другую (не евклидову) топологию на  $\mathbb{R}$ , чтобы в ней было ровно четыре множества, которые одновременно открыты и замкнуты. А возможно ли построить топологическое пространство, в котором было бы ровно три открыто-замкнутых множества?
10. Назовём минимальной базой топологии такую базу, что в ней никакое множество не может быть получено объединением семейства других множеств из базы.
- Постройте минимальную базу для дискретной топологии.
  - Существует ли минимальная база для топологии стрелки?
  - Существует ли минимальная база для топологии Зарисского (носитель —  $\mathbb{R}$ , открыты  $\emptyset$ ,  $\mathbb{R}$  и все множества с конечным дополнением)?
11. Предложите пример топологического пространства, в котором пересечение произвольного семейства открытых множеств — открыто. Топологическое пространство должно иметь бесконечный носитель (чтобы задача имела содержательный смысл) и не должно иметь дискретную или антидискретную топологию (не должно быть в каком-то смысле вырожденным).
12. Наибольшим (наименьшим) значением в каком-то множестве назовём такое, которое больше (меньше) всех других элементов множества. Несложно заметить, что для отношения включения множеств далеко всегда такое можно определить: например, на  $\mathbb{R}^2$  не существует наибольшего круга с радиусом 1, хотя такой круг существует на  $\{z \mid z \in \mathbb{R}^2, |z| \leq 0.5\}$ .
- Внутренностью* множества  $A^\circ$  назовём наибольшее открытое множество, содержащееся в  $A$ . Покажите, что внутренность множества всегда определена.
13. Напомним определения: *замкнутое* множество — такое, дополнение которого открыто. *Замыканием* множества  $\bar{A}$  назовём наименьшее замкнутое множество, содержащее  $A$ . Назовём *окрестностью* точки  $x$  такое открытое множество  $V$ , что  $x \in V$ . Будем говорить, что точка  $x \in A$  *внутренняя*, если существует окрестность  $V$ , что  $V \subseteq A$ . Точка  $x$  — *граничная*, если любая её окрестность  $V$  пересекается как с  $A$ , так и с его дополнением.
- Покажите, что  $A$  открыто тогда и только тогда, когда все точки  $A$  — внутренние. Также покажите, что  $A^\circ = \{x \mid x \in A \text{ \& } x \text{ — внутренняя точка}\}$ ;
    - Покажите, что  $A$  замкнуто тогда и только тогда, когда содержит все свои граничные точки. Также покажите, что  $\bar{A} = \{x \mid x \text{ — внутренняя или граничная точка}\}$ .
    - Верно ли, что  $\bar{A} = X \setminus ((X \setminus A)^\circ)$ ?
  - Пусть  $A \subseteq B$ . Как связаны  $A^\circ$  и  $B^\circ$ , а также  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$ ? Верно ли  $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$  и  $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$ ?
  - Задача Куратовского.* Будем применять операции взятия внутренней и замыкания к некоторому множеству всевозможными способами. Сколько различных множеств может всего получиться? *Указание.* Покажите, что  $(\bar{A}^\circ)^\circ = \bar{A}^\circ$ .
14. Задача проверки высказываний на истинность в ИИВ сложнее, чем в КИВ — не существует конечного набора значений, на которых можно проверить формулу, чтобы определить её истинность (мы эту теорему докажем). Тем не менее, если формула опровергается, то она опровергается на  $\mathbb{R}$  с евклидовой топологией. Если же такого опровержения нет, то формула доказуема (то есть, ИИВ семантически полно на  $\mathbb{R}$ ). Например, формула  $A \vee \neg A$  опровергается при  $\llbracket A \rrbracket = (0, +\infty)$ , так как  $\llbracket A \vee \neg A \rrbracket = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Очевидно, что любая интуиционистская тавтология общезначима и в классической логике:

- формула общезначима в интуиционистской логике;
- значит, истинна при всех оценках;
- значит, в частности, при всех оценках на  $\mathbb{R}$ ;
- то есть, по теореме, упомянутой выше, доказуема в ИИВ;
- а схема аксиом 10и — частный случай схемы аксиом 10.

Обратное же неверно. Определите, являются ли следующие формулы тавтологиями в КИВ и ИИВ (предложите опровержение или доказательство общезначимости/выводимости для каждого из исчислений):

- (a)  $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ ;
  - (b)  $\neg\neg A \rightarrow A$ ;
  - (c)  $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$  (из двух утверждений одно непременно следует из другого: например, «я не люблю зиму» и «я не люблю лето»);
  - (d)  $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C)$ ;
  - (e)  $(A \rightarrow (B \vee \neg B)) \vee (\neg A \rightarrow (B \vee \neg B))$ ;
  - (f)  $\alpha \vee \beta \vdash \neg(\neg\alpha \& \neg\beta)$  и  $\neg(\neg\alpha \& \neg\beta) \vdash \alpha \vee \beta$ ;
  - (g)  $\neg\alpha \& \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$  и  $\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \& \neg\beta$ ;
  - (h)  $\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg\alpha \vee \beta$  и  $\neg\alpha \vee \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$ .
15. Известно, что в КИВ все связки могут быть выражены через операцию «и-не» («или-не»). Также, они могут быть выражены друг через друга (достаточно, например, отрицания и конъюнкции). Однако, в ИИВ это не так.

Покажите, что никакие связки не выражаются друг через друга: то есть, нет такой формулы  $\varphi(A, B)$  из языка интуиционистской логики, не использующей связку  $\star$ , что  $\vdash A \star B \rightarrow \varphi(A, B)$  и  $\vdash \varphi(A, B) \rightarrow A \star B$ . Покажите это для каждой связки в отдельности:

- (a) конъюнкция;
- (b) дизъюнкция;
- (c) импликация;
- (d) отрицание.