Исчисление предикатов

Категорические силлогизмы

- Силлогизм — «подытоживание, подсчёт, умозаключение»
- Категорический — потому, что речь идёт о категориях (в философском смысле).
- Определяем некоторые стандартные мыслительные блоки, с которыми у образованной аудитории есть навык работы. Цель — сделать неформальный человеческий язык чуть более формальным. Где важно: научный трактат, диспут, для исключения ошибок в рассуждениях.
- Язык рассуждений понимается единым, без разделения на язык исследователя и предметный.
- Пример категорического силлогизма:

$$\frac{\text{Каждый человек смертен} \qquad \text{Сократ есть человек}}{\text{Сократ смертен}}$$

- Восходят к Аристотелю и Теофрасту, активно развивались в средневековье.

Категорический силлогизм: вспомогательные определения

Категорический силлллогизм соединяет три термина:

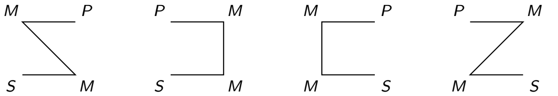
- предикат (больший термин, P)
- субъект (меньший термин, S)
- средний термин (M).

На основании соотношений P и M, а также M и S строим соотношение P и S. Возможные соотношения:

A	Affirmato (общеутвердительное)	Матан есть раздел математики (SaP)
I	affIrmato (частноутвердительное)	Некоторые разделы математики сложны (SiP)
E	nEgo (общеотрицательное)	Никакой человек не знает всю математику
O	negO (частноотрицательное)	Некоторые разделы математики — не матан

Фигуры и модусы

	Фигура 1	Фигура 2	Фигура 3	Фигура 4



Большая посылка:	M—P	P—M	M—P	P—M
Меньшая посылка:	S—M	S—M	M—S	M—S
Заключение:	S—P	S—P	S—P	S—P

Расстановка соотношений вместо «—» в фигуре — модус. Например, тут — фигура 1, aaa.

$$\frac{\text{Каждый человек смертен} \qquad \text{Сократ есть человек}}{\text{Сократ смертен}}$$

Как этим пользоваться: по умозаключению (на русском языке) определяем, где в нём P, M, S и каковы между ними соотношения, находим соответствующую фигуру и модус, а дальше определяем силлогизм и его свойства в соответствии со следующими правилами.

Правильные модусы

Не все модусы осмысленны, большинство некорректно. Например фигура 1, aae:

$$\frac{\text{Каждый человек смертен} \qquad \text{Сократ есть человек}}{\text{Сократ не есть смертен}}$$

Список всех правильных модусов (из них выделяют *слабые*, выводящие частное соотношение при возможности общего — указаны курсивом):

Фигура 1	Фигура 2	Фигура 3	Фигура 4
Barbara	Cesare	Darapti	Bramantip
Celarent	Camestres	Disamis	Camenes
Darii	Festino	Datisi	Dimaris
Ferio	Baroco	Felapton	Fesapo
Barbari	*Cesaro*	Bocardo	Fresison
Celaront	*Camestros*	Ferison	*Camenos*

Некоторые модусы требуют непустоты M: это все слабые модусы и четыре сильных (указаны серым), например Darapti:

$$\frac{\text{Все единороги имеют рог} \qquad \text{Все единороги суть лошади}}{\text{Некоторые лошади имеют рог}}$$

Ограничения языка исчисления высказываний

$$\frac{\text{Каждый человек смертен} \qquad \text{Сократ есть человек}}{\text{Сократ смертен}}$$

Ограничения языка исчисления высказываний

$$\frac{\text{Каждый человек смертен} \qquad \text{Сократ есть человек}}{\text{Сократ смертен}}$$

Цель: увеличить формализованную часть метаязыка.

Ограничения языка исчисления высказываний

$$\frac{\text{Каждый человек смертен} \qquad \text{Сократ есть человек}}{\text{Сократ смертен}}$$

Цель: увеличить формализованную часть метаязыка.

Мы неформально знакомы с предикатами $(P : D \to V)$ и кванторами $(\forall x.H(x) \to S(x))$.

$$\frac{\forall x.H(x) \to S(x) \qquad H(\text{Сократ})}{S(\text{Сократ})}$$

Начнём с примера

$$\forall x. \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

Начнём с примера

$$\forall x . \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

1. Предметные (здесь: числовые) выражения
   1.1 Предметные переменные (x).

Начнём с примера

$$\forall x. \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

1. Предметные (здесь: числовые) выражения
   1.1 Предметные переменные (x).
   1.2 Одно- и двухместные функциональные символы «синус», «возведение в квадрат» и «сложение».

Начнём с примера

$$\forall x. \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

1. Предметные (здесь: числовые) выражения
   1.1 Предметные переменные (x).
   1.2 Одно- и двухместные функциональные символы «синус», «возведение в квадрат» и «сложение».
   1.3 Нульместные функциональные символы «ноль» (0) и «один» (1).

Начнём с примера

$$\forall x . \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

1. Предметные (здесь: числовые) выражения
   1.1 Предметные переменные (x).
   1.2 Одно- и двухместные функциональные символы «синус», «возведение в квадрат» и «сложение».
   1.3 Нульместные функциональные символы «ноль» (0) и «один» (1).
2. Логические выражения
   2.1 Предикатные символы «равно» и «больше»

Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.

Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метапеременная θ.

Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метапеременная θ.
   - Предметные переменные: a, b, c, $\ldots$, метапеременные x, y.

Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метапеременная θ.
   - Предметные переменные: a, b, c, ..., метапеременные x, y.
   - Функциональные выражения: $f(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, метапеременные f, g, ...

Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метапеременная θ.
   - Предметные переменные: a, b, c, ..., метапеременные x, y.
   - Функциональные выражения: $f(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, метапеременные f, g, ...
   - Примеры: r, $q(p(x, s), r)$.

Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метапеременная θ.
   - Предметные переменные: a, b, c, ..., метапеременные x, y.
   - Функциональные выражения: $f(\theta_1, \dots, \theta_n)$, метапеременные f, g, ...
   - Примеры: r, $q(p(x, s), r)$.
3. Логические выражения: метапеременные α, β, γ, ...
   - Предикатные выражения: $P(\theta_1, \dots, \theta_n)$, метапеременная P.

Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метапеременная θ.
   - Предметные переменные: a, b, c, $\dots$, метапеременные x, y.
   - Функциональные выражения: $f(\theta_1, \dots, \theta_n)$, метапеременные f, g, $\dots$
   - Примеры: r, $q(p(x, s), r)$.
3. Логические выражения: метапеременные α, β, γ, $\dots$
   - Предикатные выражения: $P(\theta_1, \dots, \theta_n)$, метапеременная P.
     Имена: A, B, C, $\dots$

Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метапеременная θ.
   - Предметные переменные: a, b, c, ..., метапеременные x, y.
   - Функциональные выражения: $f(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, метапеременные f, g, ...
   - Примеры: r, $q(p(x, s), r)$.
3. Логические выражения: метапеременные α, β, γ, ...
   - Предикатные выражения: $P(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, метапеременная P.
     Имена: A, B, C, ...
   - Связки: $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \,\&\, \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\neg\varphi)$.

Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метапеременная θ.
   - Предметные переменные: a, b, c, ..., метапеременные x, y.
   - Функциональные выражения: $f(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, метапеременные f, g, ...
   - Примеры: r, $q(p(x, s), r)$.
3. Логические выражения: метапеременные α, β, γ, ...
   - Предикатные выражения: $P(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, метапеременная P.
     Имена: A, B, C, ...
   - Связки: $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \,\&\, \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\neg\varphi)$.
   - Кванторы: $(\forall x.\varphi)$ и $(\exists x.\varphi)$.

Сокращения записи, метаязык

1. Метапеременные:
   - ψ, ϕ, π, ... — формулы
   - P, Q, ... — предикатные символы
   - θ, ... — термы
   - f, g, ... — функциональные символы
   - x, y, ... — предметные переменные

Сокращения записи, метаязык

1. Метапеременные:
   - ψ, ϕ, π, ... — формулы
   - P, Q, ... — предикатные символы
   - θ, ... — термы
   - f, g, ... — функциональные символы
   - x, y, ... — предметные переменные
2. Скобки — как в И.В.; квантор — жадный:

$$(\forall a.\ \underbrace{A \vee B \vee C \to \exists b.\ \underbrace{D \ \&\ \neg E}_{\exists b....}}_{\forall a....})\ \&\ F$$

Сокращения записи, метаязык

1. Метапеременные:
   - ψ, ϕ, π, ... — формулы
   - P, Q, ... — предикатные символы
   - θ, ... — термы
   - f, g, ... — функциональные символы
   - x, y, ... — предметные переменные
2. Скобки — как в И.В.; квантор — жадный:

$$(\forall a.\ \underbrace{A \vee B \vee C \rightarrow \exists b.\ \underbrace{D \mathbin{\&} \neg E}_{\exists b\ldots}}_{\forall a\ldots}) \mathbin{\&} F$$

3. Дополнительные обозначения при необходимости:
   - $(\theta_1 = \theta_2)$ вместо $E(\theta_1, \theta_2)$
   - $(\theta_1 + \theta_2)$ вместо $p(\theta_1, \theta_2)$
   - 0 вместо z
   - ...

Теория моделей: два типа значений

Напомним формулу:

$$\forall x.\, \sin x = 0 \lor (\sin x)^2 + 1 > 1$$

Без синтаксического сахара:

$$\forall x. E(s(x), z) \ \lor \ G(p(q(s(x)), o), o)$$

Теория моделей: два типа значений

Напомним формулу:

$$\forall x.\, \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

Без синтаксического сахара:

$$\forall x. E(s(x), z) \ \vee \ G(p(q(s(x)), o), o)$$

1. Истинностные (логические) значения:
   1.1 предикаты (в том числе пропозициональные переменные = нульместные предикаты);

Теория моделей: два типа значений

Напомним формулу:

$$\forall x.\, \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

Без синтаксического сахара:

$$\forall x. E(s(x), z) \vee G(p(q(s(x)), o), o)$$

1. Истинностные (логические) значения:
   1.1 предикаты (в том числе пропозициональные переменные = нульместные предикаты);
   1.2 логические связки и кванторы.

Теория моделей: два типа значений

Напомним формулу:

$$\forall x. \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

Без синтаксического сахара:

$$\forall x. E(s(x), z) \vee G(p(q(s(x)), o), o)$$

1. Истинностные (логические) значения:
   1.1 предикаты (в том числе пропозициональные переменные = нульместные предикаты);
   1.2 логические связки и кванторы.
2. Предметные значения:
   2.1 предметные переменные;

Теория моделей: два типа значений

Напомним формулу:

$$\forall x.\,\sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

Без синтаксического сахара:

$$\forall x.E(s(x), z) \vee G(p(q(s(x)), o), o)$$

1. Истинностные (логические) значения:
   1.1 предикаты (в том числе пропозициональные переменные = нульместные предикаты);
   1.2 логические связки и кванторы.
2. Предметные значения:
   2.1 предметные переменные;
   2.2 функциональные символы (в том числе константы = нульместные функциональные символы)

Оценка исчисления предикатов

Определение

Оценка — упорядоченная четвёрка $\langle D, F, P, E \rangle$*, где:*

Оценка исчисления предикатов

Определение

Оценка — упорядоченная четвёрка $\langle D, F, P, E \rangle$*, где:*

1. $D \neq \varnothing$ *— предметное множество;*

Оценка исчисления предикатов

Определение

Оценка — упорядоченная четвёрка $\langle D, F, P, E\rangle$, *где:*

1. $D \neq \varnothing$ *— предметное множество;*
2. F *— оценка для функциональных символов; пусть* f_n *—* n*-местный функциональный символ:*
$$F_{f_n} : D^n \to D$$

Оценка исчисления предикатов

Определение

Оценка — упорядоченная четвёрка $\langle D, F, P, E\rangle$, где:

1. $D \neq \varnothing$ *— предметное множество;*
2. F *— оценка для функциональных символов; пусть* f_n *—* n*-местный функциональный символ:*
$$F_{f_n} : D^n \to D$$
3. P *— оценка для предикатных символов; пусть* T_n *—* n*-местный предикатный символ:*
$$P_{T_n} : D^n \to V$$

Оценка исчисления предикатов

Определение

Оценка — упорядоченная четвёрка $\langle D, F, P, E \rangle$*, где:*

1. $D \neq \varnothing$ *— предметное множество;*
2. F *— оценка для функциональных символов; пусть* f_n *—* n*-местный функциональный символ:*
$$F_{f_n} : D^n \to D$$
3. P *— оценка для предикатных символов; пусть* T_n *—* n*-местный предикатный символ:*
$$P_{T_n} : D^n \to V \qquad V = \{И, Л\}$$

Оценка исчисления предикатов

Определение

Оценка — упорядоченная четвёрка $\langle D, F, P, E \rangle$, *где:*

1. $D \neq \varnothing$ *— предметное множество;*
2. F *— оценка для функциональных символов; пусть* f_n *—* n*-местный функциональный символ:*
$$F_{f_n} : D^n \to D$$
3. P *— оценка для предикатных символов; пусть* T_n *—* n*-местный предикатный символ:*
$$P_{T_n} : D^n \to V \qquad V = \{И, Л\}$$
4. E *— оценка для предметных переменных.*
$$E(x) \in D$$

Оценка формулы

Запись и сокращения записи подобны исчислению высказываний:

$$[\![\phi]\!] \in V, \quad [\![Q(x, f(x)) \vee R]\!]^{x:=1, f(t):=t^2, R:=\text{И}} = \text{И}$$

Оценка формулы

Запись и сокращения записи подобны исчислению высказываний:

$$[\![\phi]\!] \in V, \quad [\![Q(x, f(x)) \vee R]\!]^{x:=1, f(t):=t^2, R:=\text{И}} = \text{И}$$

1. Правила для связок $\vee$, &, $\neg$, $\rightarrow$ остаются прежние;

Оценка формулы

Запись и сокращения записи подобны исчислению высказываний:

$$[\![\phi]\!] \in V, \quad [\![Q(x, f(x)) \vee R]\!]^{x:=1, f(t):=t^2, R:=И} = И$$

1. Правила для связок $\vee$, $\&$, $\neg$, $\rightarrow$ остаются прежние;
2. $[\![f_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)]\!] = F_{f_n}([\![\theta_1]\!], [\![\theta_2]\!], \dots, [\![\theta_n]\!])$

Оценка формулы

Запись и сокращения записи подобны исчислению высказываний:

$$[\![\phi]\!] \in V, \quad [\![Q(x, f(x)) \vee R]\!]^{x:=1, f(t):=t^2, R:=\text{И}} = \text{И}$$

1. Правила для связок $\vee$, &, $\neg$, $\rightarrow$ остаются прежние;
2. $[\![f_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)]\!] = F_{f_n}([\![\theta_1]\!], [\![\theta_2]\!], \dots, [\![\theta_n]\!])$
3. $[\![P_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)]\!] = P_{T_n}([\![\theta_1]\!], [\![\theta_2]\!], \dots, [\![\theta_n]\!])$

Оценка формулы

Запись и сокращения записи подобны исчислению высказываний:

$$[\![\phi]\!] \in V, \quad [\![Q(x, f(x)) \vee R]\!]^{x:=1, f(t):=t^2, R:=\text{И}} = \text{И}$$

1. Правила для связок $\vee$, $\&$, $\neg$, $\rightarrow$ остаются прежние;
2. $[\![f_n(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)]\!] = F_{f_n}([\![\theta_1]\!], [\![\theta_2]\!], \ldots, [\![\theta_n]\!])$
3. $[\![P_n(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)]\!] = P_{T_n}([\![\theta_1]\!], [\![\theta_2]\!], \ldots, [\![\theta_n]\!])$
4. $$[\![\forall x.\phi]\!] = \begin{cases} \text{И}, & \text{если } [\![\phi]\!]^{x:=t} = \text{И при всех } t \in D \\ \text{Л}, & \text{если найдётся } t \in D, \text{ что } [\![\phi]\!]^{x:=t} = \text{Л} \end{cases}$$

Оценка формулы

Запись и сокращения записи подобны исчислению высказываний:

$$[\![\phi]\!] \in V, \quad [\![Q(x, f(x)) \vee R]\!]^{x:=1, f(t):=t^2, R:=\text{И}} = \text{И}$$

1. Правила для связок $\vee$, $\&$, $\neg$, $\rightarrow$ остаются прежние;
2. $[\![f_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)]\!] = F_{f_n}([\![\theta_1]\!], [\![\theta_2]\!], \dots, [\![\theta_n]\!])$
3. $[\![P_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)]\!] = P_{T_n}([\![\theta_1]\!], [\![\theta_2]\!], \dots, [\![\theta_n]\!])$
4. $$[\![\forall x.\phi]\!] = \begin{cases} \text{И}, & \text{если } [\![\phi]\!]^{x:=t} = \text{И при всех } t \in D \\ \text{Л}, & \text{если найдётся } t \in D, \text{ что } [\![\phi]\!]^{x:=t} = \text{Л} \end{cases}$$
5. $$[\![\exists x.\phi]\!] = \begin{cases} \text{И}, & \text{если найдётся } t \in D, \text{ что } [\![\phi]\!]^{x:=t} = \text{И} \\ \text{Л}, & \text{если } [\![\phi]\!]^{x:=t} = \text{Л при всех } t \in D \end{cases}$$

Пример (очевидная интерпретация)

Оценим:

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

Пример (очевидная интерпретация)

Оценим:

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

Зададим оценку:

- $D := \mathbb{N}$;
- $F_1 := 1$, $F_{(+)}$ — сложение в $\mathbb{N}$;
- $P_{(=)}$ – равенство в $\mathbb{N}$.

Пример (очевидная интерпретация)

Оценим:

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

Зададим оценку:

- $D := \mathbb{N}$;
- $F_1 := 1$, $F_{(+)}$ — сложение в $\mathbb{N}$;
- $P_{(=)}$ – равенство в $\mathbb{N}$.

Фиксируем $a \in \mathbb{N}$. Тогда:

$$[\![a + 1 = b]\!]^{b:=a} = \text{Л}$$

Пример (очевидная интерпретация)

Оценим:

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a+1=b]\!]$$

Зададим оценку:

- $D := \mathbb{N}$;
- $F_1 := 1$, $F_{(+)}$ — сложение в $\mathbb{N}$;
- $P_{(=)}$ – равенство в $\mathbb{N}$.

Фиксируем $a \in \mathbb{N}$. Тогда:

$$[\![a+1=b]\!]^{b:=a} = Л$$

поэтому при любом $a \in \mathbb{N}$:

$$[\![\exists b.\neg a+1=b]\!] = И$$

Пример (очевидная интерпретация)

Оценим:

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

Зададим оценку:

- $D := \mathbb{N}$;
- $F_1 := 1$, $F_{(+)}$ — сложение в $\mathbb{N}$;
- $P_{(=)}$ – равенство в $\mathbb{N}$.

Фиксируем $a \in \mathbb{N}$. Тогда:

$$[\![a + 1 = b]\!]^{b:=a} = Л$$

поэтому при любом $a \in \mathbb{N}$:

$$[\![\exists b.\neg a + 1 = b]\!] = И$$

Итого:

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!] = И$$

Пример (странная интерпретация)

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

Пример (странная интерпретация)

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

Зададим интерпретацию:

- $D := \{\square\}$;
- $F_{(1)} := \square$, $F_{(+)}(a, b) := \square$;
- $P_{(=)}(a, b) :=$ И.

Пример (странная интерпретация)

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a+1=b]\!]$$

Зададим интерпретацию:

- $D := \{\square\}$;
- $F_{(1)} := \square$, $F_{(+)}(a,b) := \square$;
- $P_{(=)}(a,b) := И$.

Тогда:

$$[\![a+1=b]\!]^{a:=\square,b:=\square} = И$$

Пример (странная интерпретация)

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

Зададим интерпретацию:

- $D := \{\square\}$;
- $F_{(1)} := \square$, $F_{(+)}(a, b) := \square$;
- $P_{(=)}(a, b) :=$ И.

Тогда:

$$[\![a + 1 = b]\!]^{a \in D, b \in D} = \text{И}$$

Пример (странная интерпретация)

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

Зададим интерпретацию:

- $D := \{\square\}$;
- $F_{(1)} := \square$, $F_{(+)}(a, b) := \square$;
- $P_{(=)}(a, b) :=$ И.

Тогда:

$$[\![a + 1 = b]\!]^{a \in D, b \in D} = \text{И}$$

Итого:

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!] = \text{Л}$$

Общезначимость

Определение

Формула исчисления предикатов общезначима, если истинна при любой оценке:

$$\models \phi$$

Общезначимость

Определение

Формула исчисления предикатов общезначима, если истинна при любой оценке:

$$\models \phi$$

То есть истинна при любых D, F, P и E.

Пример: общезначимая формула

Теорема

$$[\![\forall x. Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x))]\!] = И$$

Доказательство.

Фиксируем D, F, P, E.

Пример: общезначимая формула

Теорема

$$[\![\forall x. Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x))]\!] = И$$

Доказательство.

Фиксируем D, F, P, E. Пусть $x \in D$.

Пример: общезначимая формула

Теорема

$$[\![\forall x.Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x))]\!] = И$$

Доказательство.

Фиксируем D, F, P, E. Пусть $x \in D$. Обозначим $P_Q(F_f(E_x))$ за t.

Пример: общезначимая формула

Теорема

$$[\![\forall x.Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x))]\!] = И$$

Доказательство.

Фиксируем D, F, P, E. Пусть $x \in D$. Обозначим $P_Q(F_f(E_x))$ за t. Ясно, что $t \in V$. Разберём случаи.

- Если $t =$ И, то $[\![Q(f(x))]\!]^{Q(f(x)):=t} =$ И, потому $[\![Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x))]\!]^{Q(f(x)):=t} = И$
- Если $t =$ Л, то $[\![\neg Q(f(x))]\!]^{Q(f(x)):=t} =$ И, потому всё равно $[\![Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x))]\!]^{Q(f(x)):=t} = И$

$\square$

Свободные вхождения

Определение

Вхождение подформулы в формулу — это позиция первого символа этой подформулы в формуле.

$$\text{Вхождения } x \text{ в формулу:} \quad (\forall x.A(x) \vee \exists x.B(x)) \vee C(x)$$

Определение

Рассмотрим формулу $\forall x.\psi$ (или $\exists x.\psi$). Здесь переменная x связана в ψ. Все вхождения переменной x в ψ — связанные.

Определение

Вхождение x в ψ свободное, если не находится в области действия никакого квантора по x. Переменная входит свободно в ψ, если имеет хотя бы одно свободное вхождение. $FV(\psi), FV(\Gamma)$ — множества свободных переменных в ψ, в Γ

Пример

$\exists y.(\forall x.P(x)) \vee P(x) \vee Q(y)$

Подстановка, свобода для подстановки

$$\psi[x := \theta] := \begin{cases} \psi, & \psi \equiv y, y \not\equiv x \\ \psi, & \psi \equiv \forall x.\pi \text{ или } \psi \equiv \exists x.\pi \\ \pi[x := \theta] \star \rho[x := \theta], & \psi \equiv \pi \star \rho \\ \theta, & \psi \equiv x \\ \forall y.\pi[x := \theta], & \psi \equiv \forall y.\pi \text{ и } y \not\equiv x \\ \exists y.\pi[x := \theta], & \psi \equiv \exists y.\pi \text{ и } y \not\equiv x \end{cases}$$

Определение

Терм θ свободен для подстановки вместо x в ψ ($\psi[x := \theta]$), если ни одно свободное вхождение переменных в θ не станет связанным после подстановки.

Свобода есть	Свободы нет
$(\forall x.P(y))[y := z]$	$(\forall x.P(y))[y := x]$
$(\forall y.\forall x.P(x))[x := y]$	$(\forall y.\forall x.P(t))[t := y]$

Теория доказательств

Рассмотрим язык исчисления предикатов. Возьмём все схемы аксиом классического исчисления высказываний и добавим ещё две схемы аксиом (здесь везде θ свободен для подстановки вместо x в φ):

11. $(\forall x.\varphi) \to \varphi[x := \theta]$
12. $\varphi[x := \theta] \to \exists x.\varphi$

Добавим ещё два правила вывода (здесь везде x не входит свободно в φ):

$$\frac{\varphi \to \psi}{\varphi \to \forall x.\psi} \text{ Правило для } \forall$$

$$\frac{\psi \to \varphi}{(\exists x.\psi) \to \varphi} \text{ Правило для } \exists$$

Определение

Доказуемость, выводимость, полнота, корректность — аналогично исчислению высказываний.

Важность ограничений на схемы аксиом и правила вывода

- Рассмотрим формулу $(\forall x.\exists y.\neg x = y) \to ((\exists y.\neg x = y)[x := y])$

Важность ограничений на схемы аксиом и правила вывода

- Рассмотрим формулу $(\forall x.\exists y.\neg x = y) \rightarrow ((\exists y.\neg x = y)[x := y])$
- Соответствует 11 схеме

$$(\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta] \qquad \varphi \equiv \exists y.\neg x = y \qquad \theta \equiv y$$

Важность ограничений на схемы аксиом и правила вывода

- Рассмотрим формулу $(\forall x.\exists y.\neg x = y) \to ((\exists y.\neg x = y)[x := y])$
- Соответствует 11 схеме

$$(\forall x.\varphi) \to \varphi[x := \theta] \qquad \varphi \equiv \exists y.\neg x = y \qquad \theta \equiv y$$

- Но нарушается свобода для подстановки

$$(\exists y.\neg x = y)[x := {\color{red}y}] \equiv (\exists {\color{red}y}.\neg {\color{red}y} = y)$$

Важность ограничений на схемы аксиом и правила вывода

- Рассмотрим формулу $(\forall x.\exists y.\neg x = y) \rightarrow ((\exists y.\neg x = y)[x := y])$
- Соответствует 11 схеме

$$(\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta] \qquad \varphi \equiv \exists y.\neg x = y \qquad \theta \equiv y$$

- Но нарушается свобода для подстановки

$$(\exists y.\neg x = y)[x := y] \equiv (\exists y.\neg y = y)$$

- Пусть $D = \mathbb{N}$ и $(=)$ есть равенство на $\mathbb{N}$. Тогда

$$[\![\exists y.\neg x = y]\!] = И \qquad [\![(\exists y.\neg x = y)[x := y]]\!] = Л$$

Важность ограничений на схемы аксиом и правила вывода

- Рассмотрим формулу $(\forall x.\exists y.\neg x = y) \rightarrow ((\exists y.\neg x = y)[x := y])$
- Соответствует 11 схеме

$$(\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta] \qquad \varphi \equiv \exists y.\neg x = y \qquad \theta \equiv y$$

- Но нарушается свобода для подстановки

$$(\exists y.\neg x = y)[x := y] \equiv (\exists y.\neg y = y)$$

- Пусть $D = \mathbb{N}$ и $(=)$ есть равенство на $\mathbb{N}$. Тогда

$$[\![\exists y.\neg x = y]\!] = И \qquad [\![(\exists y.\neg x = y)[x := y]]\!] = Л$$

- $\not\models (\forall x.\exists y.\neg x = y) \rightarrow ((\exists y.\neg x = y)[x := y])$

Теорема о дедукции для исчисления предикатов

Теорема

Если $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, *то* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$. *Если* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из* α, *то* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ — как в КИВ

Теорема о дедукции для исчисления предикатов

Теорема

Если $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, *то* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$. *Если* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из* α, *то* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ — как в КИВ $(\Leftarrow)$ — та же схема, два новых случая.

Теорема о дедукции для исчисления предикатов

Теорема

Если $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$*, то* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$*. Если* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из* α*, то* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$*.*

Доказательство.

($\Rightarrow$) — как в КИВ ($\Leftarrow$) — та же схема, два новых случая.
Перестроим: $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \equiv \beta$ в $\alpha \to \delta_1, \alpha \to \delta_2, \ldots, \alpha \to \delta_n$.
Дополним: обоснуем $\alpha \to \delta_n$, если предыдущие уже обоснованы.

Теорема о дедукции для исчисления предикатов

Теорема

Если $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, *то* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$. *Если* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из* α, *то* $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

Доказательство.

($\Rightarrow$) — как в КИВ ($\Leftarrow$) — та же схема, два новых случая.
Перестроим: $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \equiv \beta$ в $\alpha \rightarrow \delta_1, \alpha \rightarrow \delta_2, \dots, \alpha \rightarrow \delta_n$.
Дополним: обоснуем $\alpha \rightarrow \delta_n$, если предыдущие уже обоснованы.
Два новых похожих случая: правила для $\forall$ и $\exists$. Рассмотрим $\forall$.
Доказываем (n) $\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \forall x.\varphi$ (правило для $\forall$), значит, доказано (k) $\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$.

Теорема о дедукции для исчисления предикатов

Теорема

Если $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, *то* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$. *Если* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из* α, *то* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ — как в КИВ $(\Leftarrow)$ — та же схема, два новых случая.
Перестроим: $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \equiv \beta$ в $\alpha \to \delta_1, \alpha \to \delta_2, \dots, \alpha \to \delta_n$.
Дополним: обоснуем $\alpha \to \delta_n$, если предыдущие уже обоснованы.
Два новых похожих случая: правила для $\forall$ и $\exists$. Рассмотрим $\forall$.
Доказываем (n) $\alpha \to \psi \to \forall x.\varphi$ (правило для $\forall$), значит, доказано (k) $\alpha \to \psi \to \varphi$.

$(n-0.9)\dots(n-0.8)$	$(\alpha \to \psi \to \varphi) \to (\alpha \,\&\, \psi) \to \varphi$	Т. о полноте КИВ
$(n-0.6)$	$(\alpha \,\&\, \psi) \to \varphi$	M.P. $k, n-0.8$

Теорема о дедукции для исчисления предикатов

Теорема

Если $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$*, то* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$*. Если* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из* α*, то* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$*.*

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ — как в КИВ $(\Leftarrow)$ — та же схема, два новых случая.
Перестроим: $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \equiv \beta$ в $\alpha \to \delta_1, \alpha \to \delta_2, \dots, \alpha \to \delta_n$.
Дополним: обоснуем $\alpha \to \delta_n$, если предыдущие уже обоснованы.
Два новых похожих случая: правила для $\forall$ и $\exists$. Рассмотрим $\forall$.
Доказываем (n) $\alpha \to \psi \to \forall x.\varphi$ (правило для $\forall$), значит, доказано (k) $\alpha \to \psi \to \varphi$.

$(n - 0.9) \dots (n - 0.8)$	$(\alpha \to \psi \to \varphi) \to (\alpha \,\&\, \psi) \to \varphi$	Т. о полноте КИВ
$(n - 0.6)$	$(\alpha \,\&\, \psi) \to \varphi$	M.P. $k, n - 0.8$
$(n - 0.4)$	$(\alpha \,\&\, \psi) \to \forall x.\varphi$	Правило для $\forall$, $n - 0.6$

Теорема о дедукции для исчисления предикатов

Теорема

Если $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, *то* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$. *Если* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из* α, *то* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

Доказательство.

($\Rightarrow$) — как в КИВ ($\Leftarrow$) — та же схема, два новых случая.
Перестроим: $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \equiv \beta$ в $\alpha \to \delta_1, \alpha \to \delta_2, \dots, \alpha \to \delta_n$.
Дополним: обоснуем $\alpha \to \delta_n$, если предыдущие уже обоснованы.
Два новых похожих случая: правила для $\forall$ и $\exists$. Рассмотрим $\forall$.
Доказываем (n) $\alpha \to \psi \to \forall x.\varphi$ (правило для $\forall$), значит, доказано (k) $\alpha \to \psi \to \varphi$.

$(n-0.9)\dots(n-0.8)$	$(\alpha \to \psi \to \varphi) \to (\alpha \mathbin{\&} \psi) \to \varphi$	Т. о полноте КИВ
$(n-0.6)$	$(\alpha \mathbin{\&} \psi) \to \varphi$	M.P. $k, n-0.8$
$(n-0.4)$	$(\alpha \mathbin{\&} \psi) \to \forall x.\varphi$	Правило для $\forall$, $n-0.6$
$(n-0.3)\dots(n-0.2)$	$((\alpha \mathbin{\&} \psi) \to \forall x.\varphi) \to (\alpha \to \psi \to \forall x.\varphi)$	Т. о полноте КИВ
(n)	$\alpha \to \psi \to \forall x.\varphi$	M.P. $n-0.4$, $n-0.2$

$\square$

Следование

Определение

$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \models \alpha$, *если* α *выполнено всегда, когда выполнено* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$.

Теорема

Если $\Gamma \vdash \alpha$ *и в доказательстве не используются кванторы по свободным переменным из* Γ*, то* $\Gamma \models \alpha$

Важность дополнительного условия в теореме о корректности

Пример

Покажем, что $\Gamma \models \alpha$ *ведёт себя неестественно, если в* α *используются кванторы по переменным, входящим свободно в* Γ*.*

Важность дополнительного условия в теореме о корректности

Пример

Покажем, что $\Gamma \models \alpha$ *ведёт себя неестественно, если в* α *используются кванторы по переменным, входящим свободно в* Γ*.*
Легко показать, что $P(x) \vdash \forall x.P(x)$*.*

Важность дополнительного условия в теореме о корректности

Пример

Покажем, что $\Gamma \models \alpha$ *ведёт себя неестественно, если в* α *используются кванторы по переменным, входящим свободно в* Γ*.*

Легко показать, что $P(x) \vdash \forall x.P(x)$*.*

(1)	$P(x)$	*Гипотеза*
(2)	$P(x) \rightarrow (A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow P(x)$	*Сх. акс. 1*
(3)	$(A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow P(x)$	*M.P. 1, 2*
(4)	$(A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow \forall x.P(x)$	*Правило для* $\forall$*, 3*
(5)	$(A \rightarrow A \rightarrow A)$	*Сх. акс. 1*
(6)	$\forall x.P(x)$	*M.P. 5, 4*

Важность дополнительного условия в теореме о корректности

Пример

Покажем, что $\Gamma \models \alpha$ *ведёт себя неестественно, если в* α *используются кванторы по переменным, входящим свободно в* Γ.

Легко показать, что $P(x) \vdash \forall x.P(x)$.

(1)	$P(x)$	*Гипотеза*
(2)	$P(x) \rightarrow (A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow P(x)$	*Сх. акс. 1*
(3)	$(A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow P(x)$	*M.P. 1, 2*
(4)	$(A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow \forall x.P(x)$	*Правило для* $\forall$, *3*
(5)	$(A \rightarrow A \rightarrow A)$	*Сх. акс. 1*
(6)	$\forall x.P(x)$	*M.P. 5, 4*

Пусть $D = \mathbb{Z}$ *и* $P(x) = x > 0$. *Тогда не будет выполнено* $P(x) \models \forall x.P(x)$.

Корректность

Теорема

Если θ свободен для подстановки вместо x в φ, то $[\![\varphi]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = [\![\varphi[x := \theta]]\!]$

Доказательство (индукция по структуре φ).

- База: φ не имеет кванторов. Очевидно.
- Переход: пусть справедливо для ψ. Покажем для $\varphi = \forall y.\psi$.
  - $x = y$ либо $x \notin FV(\psi)$. Тогда: $[\![\forall y.\psi]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = [\![\forall y.\psi]\!] = [\![(\forall y.\psi)[x := \theta]]\!]$
  - $x \neq y$. Тогда: $[\![\forall y.\psi]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = [\![\psi]\!]^{y\in D;x:=[\![\theta]\!]} = \dots$

    Свобода для подстановки: $y \notin \theta$.

    $$\dots = [\![\psi]\!]^{x:=[\![\theta]\!];y\in D} = \dots$$

    Индукционное предположение.

    $$\dots = [\![\psi[x := \theta]]\!]^{y\in D} = [\![\forall y.(\psi[x := \theta])]\!] = \dots$$

    Но $\forall y.(\psi[x := \theta]) \equiv (\forall y.\psi)[x := \theta]$ (как текст). Отсюда:

    $$\dots = [\![(\forall y.\psi)[x := \theta]]\!]$$

$\square$

Корректность

Теорема

Если $\Gamma \vdash \alpha$ *и в доказательстве не используются кванторы по свободным переменным из* $FV(\Gamma)$, *то* $\Gamma \models \alpha$

Доказательство.

Фиксируем D, F, P. Индукция по длине доказательства α: при любом E выполнено $\Gamma \models \alpha$ при длине доказательства n, покажем для $n+1$.

- Схемы аксиом (1)..(10), правило М.Р.: аналогично И.В.
- Схемы (11) и (12), например, схема $(\forall x.\varphi) \to \varphi[x := \theta]$:

$$[\![(\forall x.\varphi) \to \varphi[x := \theta]]\!] = [\![((\forall x.\varphi) \to \varphi)[x := \theta]]\!] = [\![((\forall x.\varphi) \to \varphi]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = \text{И}$$

- Правила для кванторов: например, введение $\forall$:
  Пусть $[\![\psi \to \varphi]\!] = \text{И}$. Причём $x \notin FV(\Gamma)$ и $x \notin FV(\psi)$. То есть, при любом x выполнено $[\![\psi \to \varphi]\!]^{x:=x} = \text{И}$. Тогда $[\![\psi \to (\forall x.\varphi)]\!] = \text{И}$.

$\square$