

## Мотивационный пример про интуиционистскую логику

ВНК-интерпретация — про конструкции, построенные объекты. А пусть конструкция — тип значения, которое может быть вычислено. Тогда:

- ▶  $\alpha \& \beta$  — тип упорядоченной пары значений
- ▶  $\alpha \vee \beta$  — алгебраический тип (тип-сумма)
- ▶  $\alpha \rightarrow \beta$  — тип функций из  $\alpha$  в  $\beta$
- ▶  $\perp$  — значение, не имеющее построения.

Доказательство — значение, *обитающее* в указанном типе. Вот и давайте под доказываем:

$$\vdash 3 : \text{int}$$
$$\vdash \text{fun } x \rightarrow x+1 : \text{int} \rightarrow \text{int}$$

# Алгебраический тип (тип-сумма)

## Определение

Отмеченное (дизъюнктное) объединение:

$$A \uplus B := \{\langle x, 0 \rangle \mid x \in A\} \cup \{\langle y, 1 \rangle \mid y \in B\}$$

Значение типа  $\alpha \vee \beta$  — значение либо типа  $\alpha$ , либо типа  $\beta$ , и мы знаем, какого именно. `std::variant` в C++.

## Пример

$\alpha$  option — это  $\alpha \vee ()$

```
type 'a option = Some of 'a | None
```

```
let print_int_option v = match v with  
  Some x -> print_int x  
  | None   -> print_string "None"
```

```
let csqrt x = if x >= 0. then Some (sqrt x) else None
```

## Ложь (необитаемый тип)

Перепишем старый пример чуть иначе:

```
let csqrt x =  
  if x >= 0. then sqrt x  
    else failwith "Cannot compute square root"
```

Какой тип у `csqrt`? Рассмотрим ветки `if`

- ▶ then:  $\sqrt{x} : \text{float}$
- ▶ else: `failwith s :  $\perp$` , и поэтому `failwith s :  $\perp$   $\vdash$  failwith s : float`

Ветка `else` не возвращает результата — поэтому возвращает любой тип; «из лжи следует всё, что угодно».

## Почему мы рассматриваем интуиционистскую логику?

Краткий ответ: семантика аксиомы снятия двойного отрицания сложна и не укладывается в традиционные конструкции языков программирования.

- ▶ Рассмотрим закон снятия двойного отрицания:  $M : ((\alpha \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow \alpha$ .  
Необходима отдельная конструкция, поскольку закон не выражается через остальные аксиомы ИИВ. То есть невозможно написать программу с таким типом из рассмотренных выше примитивов (функций, значений, кортежей, алгебраических типов).
- ▶ Попробуем понять, что это за конструкция. Аргумент  $M$  — функция  $f : (\alpha \rightarrow \perp) \rightarrow \perp$ . Функция  $f$ , видимо (?), по аргументу  $g : \alpha \rightarrow \perp$  угадывает  $x : \alpha$  и выполняет вызов  $g\ x$ . Получается, выражение  $M$  должно по функции  $f$  как-то угадывать значение  $x$ ?
- ▶ Конструкции с таким типом в языках бывают. Например, закон Пирса — как тип для `call/cc` из Scheme. Но это расширение базовых языков.

# Изоморфизм Карри-Ховарда

Программа	исчисление высказываний
Выражение	доказательство
Тип выражения	высказывание
Тип функции	импликация
Упорядоченная пара	Конъюнкция
Алгебраический тип	Дизъюнкция
Необитаемый тип	Ложь

# Непрерывность

## Определение

*Функция  $f : X \rightarrow Y$  непрерывна, если прообраз любого открытого множества открыт.*

## Пример

*Функция  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  всегда непрерывна (при дискретной топологии на  $\mathbb{N}$ ), поскольку любое множество в  $\mathbb{N}$  открыто.*

# Компактность

## Определение

*Будем говорить, что множество компактно, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие*

## Пример

*Множество  $\{0, 1\}$  в дискретной топологии компактно.*

## Пример

*Интервал  $(0, 1)$  в  $\mathbb{R}$  не компактен — например, рассмотрим покрытие  $\{(\varepsilon, 1) \mid \varepsilon \in (0, 1)\}$*

# Подпространства и связные множества

## Определение

Пространство  $\langle X_1, \Omega_1 \rangle$  — подпространство пространства  $\langle X, \Omega \rangle$ , если  $X_1 \subseteq X$  и  $\Omega_1 = \{A \cap X_1 | A \in \Omega\}$ .

## Пример

$[0, 1]$  с евклидовой топологией на отрезке — подпространство  $\mathbb{R}$ .  $[0, 0.5)$  открыто в  $[0, 1]$ , так как  $[0, 0.5) = (-0.5, 0.5) \cap [0, 1]$ .

## Определение

Пространство  $\langle X, \Omega \rangle$  связно, если нет  $A, B \in \Omega$ , что  $A \cup B = X$ ,  $A \cap B = \emptyset$  и  $A, B \neq \emptyset$ .

## Пример

Пространство  $(0, 1] \cup [2, 3)$  в  $\mathbb{R}$  несвязно: возьмём  $A = (0, 1]$  и  $B = [2, 3)$ .

Дискретное топологическое пространство  $\langle X, \mathcal{P}(X) \rangle$  несвязно при  $|X| > 1$ : пусть  $a \in X$ , тогда  $A = \{a\}$  и  $B = X \setminus A$ .



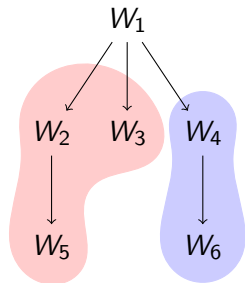
# Топология на деревьях

## Определение

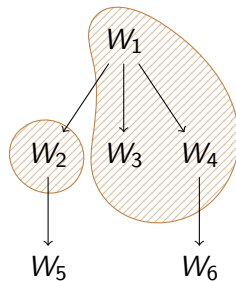
Пусть некоторый лес задан конечным множеством вершин  $V$  и отношением  $(\preceq)$ , связывающим предков и потомков ( $a \preceq b$ , если  $b$  — потомок  $a$ ). Тогда подмножество его вершин  $X \subseteq V$  назовём открытым, если из  $a \in X$  и  $a \preceq b$  следует, что  $b \in X$ .

## Пример

Открыты



Не открыты



# Связность деревьев

## Лемма

*Лес связан (является одним деревом) тогда и только тогда, когда соответствующее ему топологическое пространство связно.*

## Доказательство.

1. Лес связан: пусть не так и найдутся открытые непустые  $A, B$ , что  $A \cup B = V$  и  $A \cap B = \emptyset$ . Пусть  $v \in V$  — корень дерева и пусть  $v \in A$  (для определённости). Тогда  $A = \{x \mid v \preceq x\}$  и  $B = \emptyset$ .
2. Пусть лес топологически связан, но есть несколько разных корней  $v_1, v_2, \dots, v_k$ . Возьмём  $A_i = \{x \mid v_i \preceq x\}$ . Тогда все  $A_i$  открыты, непусты, дизъюнкты и  $V = \cup A_i$ .



Пишем скобки или нет?

Вы как пишете:  $\sin x$  или  $\sin(x)$ ?

## Пишем скобки или нет?

Вы как пишете:  $\sin x$  или  $\sin(x)$ ?

```
int main () {  
    return sizeof 0;  
}
```

## Пишем скобки или нет?

Вы как пишете:  $\sin x$  или  $\sin(x)$ ?

```
int main () {  
    return sizeof 0;  
}
```

Соглашение о записи:

$$\text{sizeof } \emptyset = \text{sizeof}(\emptyset) = 0$$

но:

$$\text{sizeof}\{\emptyset\} = \text{sizeof}(\{\emptyset\}) = 1$$

# Минимальные и максимальные элементы

## Определение

Множество нижних граней  $X \subseteq \mathcal{U}$ :  $\text{lwb}_{\mathcal{U}} X = \{y \in \mathcal{U} \mid y \preceq x \text{ при всех } x \in X\}$ .

Множество верхних граней  $X \subseteq \mathcal{U}$ :  $\text{upb}_{\mathcal{U}} X = \{y \in \mathcal{U} \mid x \preceq y \text{ при всех } x \in X\}$ .

## Определение

минимальный ( $t \in X$ ): нет меньшего      при всех  $y \in X$ ,  $y \preceq t$  влечёт  $y = t$

максимальный ( $t \in X$ ): нет большего      при всех  $y \in X$ ,  $t \preceq y$  влечёт  $y = t$

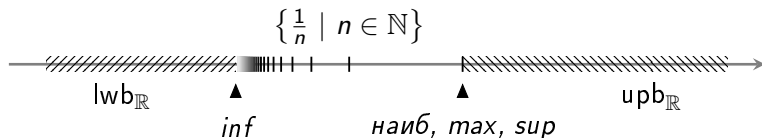
наименьший ( $t \in X$ ): меньше всех      при всех  $y \in X$  выполнено  $t \preceq y$

наибольший ( $t \in X$ ): больше всех      при всех  $y \in X$  выполнено  $y \preceq t$

инфимум: наибольшая нижняя грань       $\inf_{\mathcal{U}} X = \text{наиб}(\text{lwb}_{\mathcal{U}} X)$

супремум: наименьшая верхняя грань       $\sup_{\mathcal{U}} X = \text{наим}(\text{upb}_{\mathcal{U}} X)$

## Пример



## Пример: делимость

На  $\mathbb{N}$  положим  $a \preceq b$ , если  $b \div a$ .

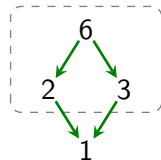
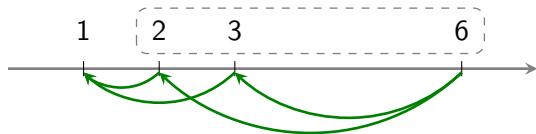
### Пример

Множество  $\{2, 3, 6\}$

Минимальные: 2, 3       $2 \div x$  влечёт  $x = 1$  или  $x = 2$ , то же про 3

Наименьший: отсутствует       $2 \nmid 3$  и  $3 \nmid 2$

Инфимум: 1       $1 \preceq x$  при всех  $x \in \mathbb{N}$



## Пример: делимость

На  $\mathbb{N}$  положим  $a \preceq b$ , если  $b \div a$ .

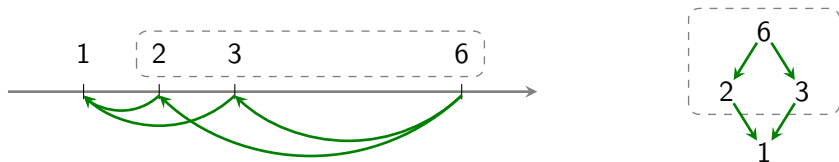
### Пример

Множество  $\{2, 3, 6\}$

Минимальные:  $2, 3$        $2 \div x$  влечёт  $x = 1$  или  $x = 2$ , то же про  $3$

Наименьший: отсутствует       $2 \nmid 3$  и  $3 \nmid 2$

Инфимум:  $1$        $1 \preceq x$  при всех  $x \in \mathbb{N}$



### Пример

Рассмотрим  $X = \{1; 1.4; 1.41; 1.414; 1.4142; \dots\}$  — множество десятичных приближений  $\sqrt{2}$ ,  $\preceq = \leq$ . Тогда  $\text{urb}_{\mathbb{Q}} X$  состоит из рациональных чисел, больших  $\sqrt{2}$ . При этом  $\sqrt{2} \notin \text{urb}_{\mathbb{Q}} X$ , а значит  $\sup_{\mathbb{Q}} X$  не определён.



## Пример: внутренность множества

### Определение (внутренность множества)

Рассмотрим  $\langle X, \Omega \rangle$  и возьмём  $(\subseteq)$  как отношение частичного порядка на  $\mathcal{P}(X)$ . Тогда  $A^\circ := \inf_{\Omega}(\{A\})$ .

### Теорема

$A^\circ$  определена для любого  $A$ .

### Доказательство.

Пусть  $V = \text{lwb}_{\Omega}\{A\} = \{Q \in \Omega \mid Q \subseteq A\}$ . Тогда  $\inf_{\Omega}\{A\} = \bigcup V$ .

Напомним,  $\inf_{\mathcal{U}} T = \text{наиб}(\text{lwb}_{\mathcal{U}} T)$ .

1. Покажем принадлежность:  $\bigcup V \subseteq A$  и  $\bigcup V \in \Omega$  как объединение открытых.
2. Покажем, что все из  $V$  меньше или равны: пусть  $X \in V$ , то есть  $V = \{X, \dots\}$ , тогда  $X \subseteq X \cup \dots$ , тогда  $X \subseteq \bigcup V$



# Решётка

## Определение

Решёткой называется упорядоченная пара:  $\langle X, (\preceq) \rangle$ , где  $X$  — некоторое множество, а  $(\preceq)$  — частичный порядок на  $X$ , такой, что для любых  $a, b \in X$  определены  $a + b = \sup\{a, b\}$  и  $a \cdot b = \inf\{a, b\}$ .

То есть,  $a + b$  — наименьший элемент  $c$ , что  $a \preceq c$  и  $b \preceq c$ .

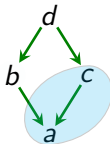
## Пример

$\langle \Omega, (\subseteq) \rangle$  — решётка.  $\langle \mathbb{N} \setminus \{1\}, (:) \rangle$  — не решётка.

## Псевдодополнение

Псевдодополнением  $a \rightarrow b$  называется наибольший из  $\{x \mid a \cdot x \preceq b\}$ .

Пример



$$a \cdot b = a$$

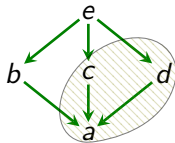
$$b \cdot b = b$$

$$c \cdot b = a$$

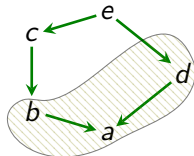
$$d \cdot b = b$$

Здесь  $b \rightarrow c = \text{наиб}\{x \mid b \cdot x \preceq c\} = \text{наиб}\{a, c\} = c$

Пример (нет псевдодополнения: диамант и пентагон)



$$b \rightarrow c = \text{наиб}\{a, c, d\}$$



$$c \rightarrow b = \text{наиб}\{a, b, d\}$$

# Особые решётки

## Определение

*Дистрибутивной решёткой называется такая, что для любых  $a, b, c$  выполнено  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ .*

## Определение

*Импликативная решётка — такая, в которой для любых элементов есть псевдодополнение.*

## Лемма

*Любая импликативная решётка — дистрибутивна.*

# Ноль и один

## Определение

$0$  — наименьший элемент решётки, а  $1$  — наибольший элемент решётки

## Лемма

В любой импликативной решётке  $\langle X, (\preceq) \rangle$  есть  $1$

## Доказательство.

Рассмотрим  $a \rightarrow a$ , тогда  $a \rightarrow a = \text{наиб}\{c \mid a \cdot c \preceq a\} = \text{наиб}X = 1$ . □

## Определение

Импликативная решётка с  $0$  — псевдобулева алгебра (алгебра Гейтинга). В такой решётке определено  $\sim a := a \rightarrow 0$

## Определение

Булева алгебра — псевдобулева алгебра, в которой  $a + \sim a = 1$  для всех  $a$ .

## Булева алгебра является булевой алгеброй в смысле решёток

### Доказательство.

Символы булевой алгебры:  $(\&), (\vee), (\neg), \text{Л}, \text{И}$ .

Символы решёток:  $(+), (\cdot), (\rightarrow), (\sim), 0, 1$

Упорядочивание:  $\text{Л} \leq \text{И}$ .

1.  $a \& b = \min(a, b)$ ,  $a \vee b = \max(a, b)$  (анализ таблицы истинности), отсюда  $a \cdot b = a \& b$  и  $a + b = a \vee b$ .

2.  $a \rightarrow b = \neg a \vee b$ , так как:

$$a \rightarrow b = \text{наиб}\{c \mid c \& a \leq b\} = \begin{cases} \neg a, & b = \text{Л} \\ \text{И}, & b = \text{И} \end{cases}$$

3.  $0 = \min\{\text{И}, \text{Л}\} = \text{Л}$ ,  $1 = \max\{\text{И}, \text{Л}\} = \text{И}$ ,  $\sim a = a \rightarrow 0 = \neg a \vee \text{Л} = \neg a$ .

Заметим, что  $a + \sim a = a \vee \neg a = \text{И}$ .

Итого: булева алгебра — импликативная решётка с 0 и с  $a + \sim a = 1$ .



# Множества и топологии как решётки

## Лемма

$\langle \mathcal{P}(X), (\subseteq) \rangle$  — булева алгебра.

## Доказательство.

$a \rightarrow b = \text{наиб}\{c \subseteq X \mid a \cap c \subseteq b\}$ . Т.е. наибольшее, не содержащее точек из  $a \setminus b$ .

Т.е.  $X \setminus (a \setminus b)$ . То есть  $(X \setminus a) \cup b$ .

$$a + \sim a = a \cup (X \setminus a) \cup \emptyset = X$$



## Лемма

$\langle \Omega, (\subseteq) \rangle$  — псевдобулева алгебра.

## Доказательство.

$a \rightarrow b = \text{наиб}\{c \in \Omega \mid a \cap c \subseteq b\}$ . Т.е. наибольшее открытое, не содержащее точек из  $a \setminus b$ . То есть,  $(X \setminus (a \setminus b))^\circ$ . То есть,  $((X \setminus a) \cup b)^\circ$ .



# Решётки и исчисление высказываний

## Определение

Пусть некоторое исчисление высказываний оценивается значениями из некоторой решётки. Назовём оценку согласованной с исчислением, если  $\llbracket \alpha \& \beta \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket \cdot \llbracket \beta \rrbracket$ ,  $\llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket + \llbracket \beta \rrbracket$ ,  $\llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket \rightarrow \llbracket \beta \rrbracket$ ,  $\llbracket \neg \alpha \rrbracket = \sim \llbracket \alpha \rrbracket$ ,  $\llbracket A \& \neg A \rrbracket = 0$ ,  $\llbracket A \rightarrow A \rrbracket = 1$ .

## Теорема

Любая псевдобулева алгебра, являющаяся согласованной оценкой интуиционистского исчисления высказываний, является его корректной моделью: если  $\vdash \alpha$ , то  $\llbracket \alpha \rrbracket = 1$ .

## Теорема

Любая булева алгебра, являющаяся согласованной оценкой классического исчисления высказываний, является его корректной моделью: если  $\vdash \alpha$ , то  $\llbracket \alpha \rrbracket = 1$ .



# Алгебра Линденбаума

## Определение

Определим предпорядок на высказываниях:  $\alpha \preceq \beta := \alpha \vdash \beta$  в интуиционистском исчислении высказываний. Также  $\alpha \approx \beta$ , если  $\alpha \preceq \beta$  и  $\beta \preceq \alpha$ .

## Определение

Пусть  $L$  — множество всех высказываний. Тогда алгебра Линденбаума  $\mathcal{L} = L/\approx$ .

## Теорема

$\mathcal{L}$  — псевдобулева алгебра.

## Схема доказательства.

Надо показать, что  $(\preceq)$  есть отношение порядка на  $\mathcal{L}$ , что  $[\alpha \vee \beta]_{\mathcal{L}} = [\alpha]_{\mathcal{L}} + [\beta]_{\mathcal{L}}$ ,  $[\alpha \& \beta]_{\mathcal{L}} = [\alpha]_{\mathcal{L}} \cdot [\beta]_{\mathcal{L}}$ , импликация есть псевдодополнение,  $[A \& \neg A]_{\mathcal{L}} = 0$ ,  $[\alpha]_{\mathcal{L}} \rightarrow 0 = [\neg \alpha]_{\mathcal{L}}$ . □

# Полнота псевдобулевых алгебр

## Теорема

*Пусть  $\llbracket \alpha \rrbracket = [\alpha]_{\mathcal{L}}$ . Такая оценка интуиционистского исчисления высказываний алгеброй Линденбаума является согласованной.*

## Теорема

*Интуиционистское исчисление высказываний полно в псевдобулевых алгебрах: если  $\models \alpha$  во всех псевдобулевых алгебрах, то  $\vdash \alpha$ .*

## Доказательство.

Возьмём в качестве модели исчисления алгебру Линденбаума:  $\llbracket \alpha \rrbracket = [\alpha]_{\mathcal{L}}$ . Пусть  $\models \alpha$ . Тогда  $\llbracket \alpha \rrbracket = 1$  во всех псевдобулевых алгебрах, в том числе и  $\llbracket \alpha \rrbracket = 1_{\mathcal{L}}$ . То есть  $[\alpha]_{\mathcal{L}} = [A \rightarrow A]_{\mathcal{L}}$ . То есть  $A \rightarrow A \approx \alpha$ . Значит, в частности,  $A \rightarrow A \vdash \alpha$ . Значит,  $\vdash \alpha$ .

