

Аксиома выбора

# Аксиома выбора

## Аксиома (выбора)

*Из любого семейства дизъюнктивных непустых множеств  $\{A_i\}$  можно выбрать непустую трансверсаль — множество  $S$ , что  $S \cap A_i = \{x_i\}$ . Иначе,  $S \in \times \{A_i\}$ .*

## Теорема (функциональный вариант аксиомы выбора)

*Пусть  $\{A_\alpha\}$  — семейство непустых множеств. Тогда существует  $f : \{A_\alpha\} \rightarrow \cup A_\alpha$ , причём  $\forall a. a \in \{A_\alpha\} \rightarrow f(a) \in a$*

## Доказательство.

Пусть  $X(A_\alpha) = \{\langle A_\alpha, a \rangle \mid a \in A_\alpha\}$ , по семейству  $\{A_\alpha\}$  рассмотрим  $\{X(A_\alpha)\}$

- ▶ непустых: если  $A_\alpha \neq \emptyset$ , то  $X(A_\alpha) \neq \emptyset$ ;
- ▶ дизъюнктивное: если  $A_\alpha \neq A_\beta$ , то  $X(A_\alpha) \cap X(A_\beta) = \emptyset$

тогда по аксиоме выбора  $\exists f. f \in \times \{X(A_\alpha)\}$ .



Обратное утверждение также легко показать.

# Аксиома выбора: альтернативные формулировки

## Теорема (Лемма Цорна)

*Если задано  $\langle M, (\preceq) \rangle$  и для всякого линейно-упорядоченного  $S \subseteq M$  выполнено  $\text{prb}_M S \neq \emptyset$ , то в  $M$  существует максимальный элемент.*

## Теорема (Теорема Цермело)

*На любом множестве можно задать полный порядок.*

## Теорема

*У любой сюръективной функции существует частичная обратная.*

## Теорема

*Аксиома выбора  $\Rightarrow$  лемма Цорна: без доказательства*

# Начальный отрезок

## Определение

Назовём (для данного раздела) упорядоченным множеством пару  $\langle S, (\prec_S) \rangle$ . Отношение порядка  $(\prec_S)$  может быть как строгим, так и нестрогим. Будем говорить, что  $\langle S, (\prec_S) \rangle$  — начальный отрезок  $\langle T, (\prec_T) \rangle$ , если:

- ▶  $S \subseteq T$ ;
- ▶ если  $a, b \in S$ , то  $a \prec_S b$  тогда и только тогда, когда  $a \prec_T b$ ;
- ▶ если  $a \in S, b \in T \setminus S$ , то  $a \prec_T b$ .

Будем обозначать это как  $\langle S, (\prec_S) \rangle \sqsubseteq \langle T, (\prec_T) \rangle$  или как  $S \sqsubseteq T$ , если порядок на множествах понятен из контекста.

## Теорема

Отношение «быть начальным отрезком» является отношением нестрогого порядка.

# Верхняя грань семейства упорядоченных множеств

## Теорема (о верхней грани)

*Если семейство упорядоченных множеств  $X$  линейно упорядочено отношением «быть начальным отрезком», то у него есть верхняя грань.*

## Доказательство.

Пусть  $M = \cup \{T \mid \langle T, (\prec) \rangle \in X\}$  и  $(\prec)_M = \cup \{(\prec) \mid \langle T, (\prec) \rangle \in X\}$ .

Покажем, что если  $\langle A, (\prec_A) \rangle \in X$ , то  $A \subseteq M$ . Рассмотрим определение:

- ▶  $A \subseteq M$  — выполнено по построению  $M$ ;
- ▶ если  $a, b \in A$ , то  $a \prec_A b$  влечёт  $a \prec_M b$  (по построению  $M$ ). Если же  $a \prec_M b$ , но  $a \not\prec_A b$ , то существует  $A'$ , что  $a, b \in A'$  и  $a \prec_{A'} b$ . Тогда  $A \not\subseteq A'$  и  $A' \not\subseteq A$ , что невозможно по линейности порядка;
- ▶ если  $a \in A$ ,  $b \in M \setminus A$ , то найдётся  $B$ , что  $b \in B$ , отчего  $a \prec_B b$  (так как  $A \subseteq B$ ) и  $a \prec_M b$  (по построению  $M$ ).

Тогда  $\langle M, (\prec_M) \rangle$  — требуемая верхняя грань.



## Лемма Цорна $\Rightarrow$ теорема Цермело

Пусть выполнена лемма Цорна и дано некоторое  $X$ . Покажем, что на нём можно ввести полный порядок.

- ▶ Пусть  $S = \{\langle P, (\prec) \rangle \mid P \subseteq X, (\prec) \text{ — полный порядок}\}$ . Например, для  $X = \{0, 1\}$  множество  $S = \{\langle \emptyset, \emptyset \rangle, \langle \{0\}, \emptyset \rangle, \langle \{1\}, \emptyset \rangle, \langle X, 0 \prec 1 \rangle, \langle X, 1 \prec 0 \rangle\}$
- ▶ Введём порядок на  $S$  как  $(\sqsubseteq)$ . Заметим, что это — частичный, но не линейный порядок. Например,  $\langle X, 0 \prec 1 \rangle$  несравним с  $\langle X, 1 \prec 0 \rangle$ .
- ▶ По теореме о верхней грани любое линейно-упорядоченное подмножество  $\langle T, (\sqsubseteq) \rangle$  (где  $T \subseteq S$ ) имеет верхнюю грань. Например, для  $\{\langle \emptyset, \emptyset \rangle, \langle \{0\}, \emptyset \rangle, \langle X, 0 \prec 1 \rangle\}$  это  $\langle X, 0 \prec 1 \rangle$ .
- ▶ По лемме Цорна тогда есть  $\langle R, (\sqsubseteq_R) \rangle = \max S$ . Заметим, что  $R = X$ , потому что иначе пусть  $a \in X \setminus R$ . Тогда положив  $M = \langle R \cup \{a\}, (\sqsubseteq_R) \cup \{x \prec a \mid x \in R\} \rangle$  получим, что  $M$  тоже вполне упорядоченное (и потому  $M \in S$ ), значит,  $R$  не максимальное.

Теорема Цермело  $\Rightarrow$  существование обратной  $\Rightarrow$  аксиома выбора

### Теорема

*Теорема Цермело  $\Rightarrow$  у сюръективных функций существует частичная обратная.*

### Доказательство.

Рассмотрим сюръективную  $f : A \rightarrow B$ . Рассмотрим семейство

$R_b = \{a \in A \mid f(a) = b\}$ . Построим полный порядок на каждом из  $R_b$ . Тогда  $f^{-1}(b) = \min R_b$ . □

### Теорема

*Существует частичная обратная у сюръективных функций  $\Rightarrow$  существует трансверсаль у дизъюнктивных множеств.*

### Доказательство.

Пусть дано семейство дизъюнктивных множеств  $\{A_i\}$ . Рассмотрим  $f : \cup A_i \rightarrow \{A_i\}$ , что  $f(a) = \cup \{A_i \in \{A_i\} \mid a \in A_i\}$ . Поскольку  $A_i$  дизъюнктивны,  $f(a) = A_i$  при всех  $a$ . Тогда существует  $f^{-1}(A_i) \in A_i$ . Тогда  $\{f^{-1}(A_i)\} \in \times \{A_i\}$ . □

# Зачем нужна аксиома выбора?

## Определение

*Пределом функции  $f$  в точке  $x_0$  по Коши называется такой  $y$ , что*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+. \exists \delta \in \mathbb{R}^+. \forall x. |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon$$

## Определение

*Пределом функции  $f$  в точке  $x_0$  по Гейне называется такой  $y$ , что для любой  $x_n \rightarrow x_0$  выполнено  $f(x_n) \rightarrow y$ .*



## Предел по Гейне влечёт предел по Коши

### Теорема

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$  по Гейне, то  $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x. |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon$ .

### Доказательство.

Пусть не так:  $\exists \varepsilon > 0. \forall \delta > 0. \exists x_\delta. |x_\delta - x_0| < \delta \ \& \ |f(x_\delta) - y| \geq \varepsilon$ . Фиксируем  $\varepsilon$  и возьмём  $\delta_n = \frac{1}{n}$  и  $p_n = x_{\delta_n}$ .  $p_n \rightarrow x_0$ , так как  $|x_{\frac{1}{n}} - x_0| < \frac{1}{n}$ , по определению предела по Гейне  $f(p_n) \rightarrow y$ , но по предположению  $\forall n \in \mathbb{N}. |f(p_n) - y| \geq \varepsilon$ . □

## Предел по Гейне влечёт предел по Коши

### Теорема

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$  по Гейне, то  $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x. |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon$ .

### Доказательство.

Пусть не так:  $\exists \varepsilon > 0. \forall \delta > 0. \exists x_\delta. |x_\delta - x_0| < \delta \ \& \ |f(x_\delta) - y| \geq \varepsilon$ . Фиксируем  $\varepsilon$  и возьмём  $\delta_n = \frac{1}{n}$  и  $p_n = x_{\delta_n}$ .  $p_n \rightarrow x_0$ , так как  $|x_{\frac{1}{n}} - x_0| < \frac{1}{n}$ , по определению предела по Гейне  $f(p_n) \rightarrow y$ , но по предположению  $\forall n \in \mathbb{N}. |f(p_n) - y| \geq \varepsilon$ . □

### Пояснение

Для применения предела по Гейне нужна  $p_n$ : то есть  $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

## Предел по Гейне влечёт предел по Коши

### Теорема

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$  по Гейне, то  $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x. |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon$ .

### Доказательство.

Пусть не так:  $\exists \varepsilon > 0. \forall \delta > 0. \exists x_\delta. |x_\delta - x_0| < \delta \ \& \ |f(x_\delta) - y| \geq \varepsilon$ . Фиксируем  $\varepsilon$  и возьмём  $\delta_n = \frac{1}{n}$  и  $p_n = x_{\delta_n}$ .  $p_n \rightarrow x_0$ , так как  $|x_{\frac{1}{n}} - x_0| < \frac{1}{n}$ , по определению предела по Гейне  $f(p_n) \rightarrow y$ , но по предположению  $\forall n \in \mathbb{N}. |f(p_n) - y| \geq \varepsilon$ . □

### Пояснение

Для применения предела по Гейне нужна  $p_n$ : то есть  $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

... Фиксируем  $\varepsilon$  и рассмотрим  $X_\delta = \{x \mid |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - y| \geq \varepsilon\}$ . Отрицание предела по Коши означает, что  $X_\delta \neq \emptyset$  при любом  $\delta > 0$ .

## Предел по Гейне влечёт предел по Коши

### Теорема

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$  по Гейне, то  $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x. |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon$ .

### Доказательство.

Пусть не так:  $\exists \varepsilon > 0. \forall \delta > 0. \exists x_\delta. |x_\delta - x_0| < \delta \ \& \ |f(x_\delta) - y| \geq \varepsilon$ . Фиксируем  $\varepsilon$  и возьмём  $\delta_n = \frac{1}{n}$  и  $p_n = x_{\delta_n}$ .  $p_n \rightarrow x_0$ , так как  $|x_{\frac{1}{n}} - x_0| < \frac{1}{n}$ , по определению предела по Гейне  $f(p_n) \rightarrow y$ , но по предположению  $\forall n \in \mathbb{N}. |f(p_n) - y| \geq \varepsilon$ . □

### Пояснение

Для применения предела по Гейне нужна  $p_n$ : то есть  $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

... Фиксируем  $\varepsilon$  и рассмотрим  $X_\delta = \{x \mid |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - y| \geq \varepsilon\}$ . Отрицание предела по Коши означает, что  $X_\delta \neq \emptyset$  при любом  $\delta > 0$ .

... То есть, по семейству  $Q := \{X_1, X_{\frac{1}{2}}, X_{\frac{1}{4}}, \dots\}$  по аксиоме выбора построим  $q: Q \rightarrow \cup Q$ , что  $q(X_{\frac{1}{n}}) \in X_{\frac{1}{n}}$ . Далее, взяв композицию  $p_n := q(X_{\delta_n})$ , получаем  $p_n \rightarrow x_0$ , что  $\forall n \in \mathbb{N}. |f(p_n) - y| \geq \varepsilon$ .

## Предел по Коши влечёт предел по Гейне

### Теорема

Пусть  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$  и дана  $x_n \rightarrow x_0$ . Тогда  $f(x_n) \rightarrow y$ .

### Доказательство.

Фиксируем  $\varepsilon > 0$ .

- ▶  $\exists \delta > 0. \exists N \in \mathbb{N}. (\forall x. |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon) \ \& \ (\forall n \in \mathbb{N}. n > N \rightarrow |x_n - x_0| < \delta)$
- ▶  $(\forall x. |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon) \rightarrow (|x_n - x_0| < \delta \rightarrow |f(x_n) - y| < \varepsilon)$  (сх. 11).
- ▶  $\exists \delta > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n \in \mathbb{N}. n > N \rightarrow |f(x_n) - y| < \varepsilon$ .
- ▶ Поскольку  $\delta$  не используется в формуле,  $\exists \delta > 0$  можно устранить.
- ▶ Отсюда  $\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \in \mathbb{N}. n > N \rightarrow |f(x_n) - y| < \varepsilon$



## Предел по Коши влечёт предел по Гейне

### Теорема

Пусть  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$  и дана  $x_n \rightarrow x_0$ . Тогда  $f(x_n) \rightarrow y$ .

### Доказательство.

Фиксируем  $\varepsilon > 0$ .

- ▶  $\exists \delta > 0. \exists N \in \mathbb{N}. (\forall x. |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon) \ \& \ (\forall n \in \mathbb{N}. n > N \rightarrow |x_n - x_0| < \delta)$
- ▶  $(\forall x. |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon) \rightarrow (|x_n - x_0| < \delta \rightarrow |f(x_n) - y| < \varepsilon)$  (сх. 11).
- ▶  $\exists \delta > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n \in \mathbb{N}. n > N \rightarrow |f(x_n) - y| < \varepsilon$ .
- ▶ Поскольку  $\delta$  не используется в формуле,  $\exists \delta > 0$  можно устранить.
- ▶ Отсюда  $\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \in \mathbb{N}. n > N \rightarrow |f(x_n) - y| < \varepsilon$



Почему здесь не потребовалась аксиома выбора? Потому что нам нужен единственный  $\delta$ , а для него — единственный  $N$

# Равенство и функции

## Пример

Пусть  $A_0 = \{0, 1, 3, 5\}$  и  $A_1 = \{3, 5, 1, 0, 0, 5, 3\}$ . Верно ли, что  $A_0 = A_1$ ?

# Равенство и функции

## Пример

Пусть  $A_0 = \{0, 1, 3, 5\}$  и  $A_1 = \{3, 5, 1, 0, 0, 5, 3\}$ . Верно ли, что  $A_0 = A_1$ ?

Да, так как  $\forall x. x \in \{0, 1, 3, 5\} \leftrightarrow x \in \{3, 5, 1, 0, 0, 5, 3\}$ .



# Равенство и функции

## Пример

Пусть  $A_0 = \{0, 1, 3, 5\}$  и  $A_1 = \{3, 5, 1, 0, 0, 5, 3\}$ . Верно ли, что  $A_0 = A_1$ ?  
Да, так как  $\forall x. x \in \{0, 1, 3, 5\} \leftrightarrow x \in \{3, 5, 1, 0, 0, 5, 3\}$ .

## Теорема (конгруэнтность)

Если  $f : A \rightarrow B$ , также  $a, b \in A$  и  $a = b$ , то  $f(a) = f(b)$ .

## Доказательство.

Пусть  $F \subseteq A \times B$  — график функции  $f$ .

По определению функции,  $\forall x. \forall y_1. \forall y_2. \langle x, y_1 \rangle \in F \ \& \ \langle x, y_2 \rangle \in F \rightarrow y_1 = y_2$ .

Также, если  $f(a) = y_1$ ,  $f(b) = y_2$ , то  $\langle a, y_1 \rangle \in F$  и  $\langle b, y_2 \rangle \in F$ .

Тогда:  $\langle a, y_1 \rangle = \langle b, y_1 \rangle = \langle b, y_2 \rangle = \langle a, y_2 \rangle$ , то есть  $f(a) = y_2 = f(b)$ .



# Теорема Диаконеску

## Теорема

Если рассмотреть ИИП с ZFC, то для любого  $P$  выполнено  $\vdash P \vee \neg P$ .

## Доказательство.

Рассмотрим  $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ ,  $A_0 = \{x \in \mathcal{B} | x = 0 \vee P\}$  и  $A_1 = \{x \in \mathcal{B} | x = 1 \vee P\}$ .

$\{A_0, A_1\}$  — непустое семейство непустых множеств, и по акс. выбора существует  $f : \{A_0, A_1\} \rightarrow \cup A_i$ , что  $f(A_i) \in A_i$ . (Если  $P$ , то  $A_0 = A_1$  и  $\{A_0, A_1\} = \{A_0\}$ ).

$$\vdash f(A_0) \in A_0 \ \& \ f(A_1) \in A_1$$

а.выбора:  $f(A_i) \in A_i$

$$\vdash f(A_0) \in \mathcal{B} \ \& \ (f(A_0) = 0 \vee P) \ \& \ f(A_1) \in \mathcal{B} \ \& \ (f(A_1) = 1 \vee P)$$

а.выделения

$$\vdash (f(A_0) = 0 \ \& \ f(A_1) = 1) \vee P$$

Удал. (&) + дистр.

$$\vdash P \vee f(A_0) \neq f(A_1)$$

$0 \neq 1$  и транз.

# Теорема Диаконеску

## Теорема

Если рассмотреть ИИП с ZFC, то для любого  $P$  выполнено  $\vdash P \vee \neg P$ .

## Доказательство.

Рассмотрим  $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ ,  $A_0 = \{x \in \mathcal{B} \mid x = 0 \vee P\}$  и  $A_1 = \{x \in \mathcal{B} \mid x = 1 \vee P\}$ .

$\{A_0, A_1\}$  — непустое семейство непустых множеств, и по акс. выбора существует  $f : \{A_0, A_1\} \rightarrow \cup A_i$ , что  $f(A_i) \in A_i$ . (Если  $P$ , то  $A_0 = A_1$  и  $\{A_0, A_1\} = \{B\}$ ).

$$\vdash f(A_0) \in A_0 \ \& \ f(A_1) \in A_1$$

а.выбора:  $f(A_i) \in A_i$

$$\vdash f(A_0) \in \mathcal{B} \ \& \ (f(A_0) = 0 \vee P) \ \& \ f(A_1) \in \mathcal{B} \ \& \ (f(A_1) = 1 \vee P)$$

а.выделения

$$\vdash (f(A_0) = 0 \ \& \ f(A_1) = 1) \vee P$$

Удал. (&) + дистр.

$$\vdash P \vee f(A_0) \neq f(A_1)$$

$0 \neq 1$  и транз.

$$\vdash P \rightarrow A_0 = A_1$$

Определение  $A_i$

$$\vdash A_0 = A_1 \rightarrow f(A_0) = f(A_1)$$

Конгруэнтность

$$\vdash f(A_0) \neq f(A_1) \rightarrow \neg P$$

Контрапозиция

$$\vdash P \vee \neg P$$

Подставили



# Слабые варианты аксиомы выбора

## Теорема (конечного выбора)

Если  $X_1 \neq \emptyset, \dots, X_n \neq \emptyset$ ,  $X_i \cap X_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ , то  $\times\{X_1, \dots, X_n\} \neq \emptyset$ .

### Доказательство.

► База:  $n = 1$ . Тогда  $\exists x_1. x_1 \in X_1$ , поэтому  $\exists x_1. \{x_1\} \in \times\{X_1\}$ .

► Переход:

$$\exists v. v \in \times\{X_{1,n}\} \rightarrow \exists x_{n+1}. x_{n+1} \in X_{n+1} \rightarrow v \cup \{x_{n+1}\} \in \times(X_{1,n} \cup \{X_{n+1}\})$$



## Аксиома (счётного выбора)

*Для счётного семейства непустых множеств существует функция, каждому из которых сопоставляющая один из своих элементов*

## Аксиома (зависимого выбора)

*если  $\forall x \in E. \exists y \in E. xRy$ , то существует последовательность  $x_n : \forall n. x_n R x_{n+1}$*

# Теорема Диаконеску и конечный выбор

Заметим, что семейство  $\{A_0, A_1\}$  из теоремы Диаконеску в ИИП не является конечным (равно как и бесконечным).

## Определение

*Конечное множество — равномощное некоторому конечному кардинальному числу.*

- ▶ Какова мощность семейства?
- ▶ 1, если  $P$ , и 2, если  $\neg P$ .
- ▶ Но поскольку  $P \vee \neg P$  не выполнено в ИИП, мы не можем доказать, что мощность семейства 1 или 2.
- ▶ Поэтому мы не можем воспользоваться теоремой конечного выбора.

# Наследственные фундированные множества

## Определение

*Наследственным свойством множества назовём такое свойство, которым обладает как само множество, так и все его подмножества.*

## Определение

*Фундированным множеством назовём такое, которое не пересекается хотя бы с одним своим элементом.*

## Определение

*Аксиома фундирования. В каждом непустом множестве найдется элемент, не пересекающийся с исходным множеством.*

$$\forall x. x \neq \emptyset \vee \exists y. y \in x \ \& \ \forall z. z \in x \rightarrow z \not\subseteq y$$

Иными словами, в каждом множестве есть элемент, минимальный по отношению  $(\in)$ .

# Каковы возможные модели для теории множеств?

## Определение

Универсум фон Неймана  $V$  — все наследственные фундированные множества.

При наличии аксиомы фундирования можно показать, что  $V = \bigcup_a V_a$ , где:

$$V_a = \begin{cases} \emptyset, & a = 0 \\ \mathcal{P}(V_b), & a = b' \\ \bigcup_{b < a} (V_b), & a \text{ — предельный} \end{cases}$$

## Определение

Конструктивный универсум  $L = \bigcup_a L_a$ , где:

$$L_a = \begin{cases} \emptyset, & a = 0 \\ \{\{x \in L_b \mid \varphi(x, t_1, \dots, t_k)\} \mid \varphi \text{ — формула}, t_i \in L_b\}, & a = b' \\ \bigcup_{b < a} (L_b), & a \text{ — пред.} \end{cases}$$

# Усиление аксиомы выбора

## Определение

*Аксиома конструктивности:  $V = L$ , то есть допустимы только те фундированные множества, которые задаются формулами.*

## Теорема

*Аксиома выбора и континуум-гипотеза следуют из аксиомы конструктивности*  
Для некоторых теорий аксиома слишком сильна.



## Заключительный обзор

Конструктивность теории — насколько легко строить сложные объекты в ней:

1. Неконструктивные теории допускают доказательства чистого существования произвольных по сложности объектов.
2. Конструктивные теории: требуют процесс построения (желательно конечный или хотя бы счётный), состоящий из интуитивно понятных шагов.

Аксиома выбора и её рассмотренные варианты влияют на её конструктивность:

1. КИП + ЦФ + Акс. выбора: менее конструктивна. Например, возможно показать существование разбиения шара на 5 частей, из которых можно составить два шара, равных исходному (теорема Банаха-Тарского).  
Интуитивно нарушается аддитивность объёма (формального парадокса нет).
2. КИП + ЦФ
3. ИИП + ЦФ: более конструктивна. Она проще формализуется с помощью компьютера, но мат. анализ в ней сложнее и довольно сильно отличается от классического.