# Теоремы о формальной арифметике

# Consis

### Лемма

$\vdash 1 = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\vdash \alpha$ *при любом* $\alpha$.

### Определение

*Обозначим за* $\psi(x, p)$ *формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение Proof:* $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in Proof$*, если p — гёделев номер доказательства* $\xi$.

# Consis

### Лемма

$\vdash 1 = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\vdash \alpha$ *при любом* $\alpha$*.*

### Определение

*Обозначим за* $\psi(x, p)$ *формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение Proof:* $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in Proof$*, если* $p$ *— гёделев номер доказательства* $\xi$*.*
*Обозначим* $\pi(x) \equiv \exists p.\psi(x, p)$

# Consis

### Лемма

$\vdash 1 = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\vdash \alpha$ *при любом* $\alpha$*.*

### Определение

*Обозначим за* $\psi(x, p)$ *формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение Proof:* $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in Proof$*, если* $p$ *— гёделев номер доказательства* $\xi$*.*
*Обозначим* $\pi(x) \equiv \exists p.\psi(x, p)$

### Определение

*Формулой Consis назовём формулу* $\neg \pi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner})$

# Consis

### Лемма

$\vdash 1 = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\vdash \alpha$ *при любом* $\alpha$.

### Определение

*Обозначим за* $\psi(x, p)$ *формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение Proof:* $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in Proof$, *если* $p$ — *гёделев номер доказательства* $\xi$.
*Обозначим* $\pi(x) \equiv \exists p . \psi(x, p)$

### Определение

*Формулой Consis назовём формулу* $\neg \pi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner})$

Неформальный смысл: «формальная арифметика непротиворечива»

# Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

### Теорема

*Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.*

### Доказательство.

(неформально)

# Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

### Теорема

*Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.*

### Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$».

# Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

### Теорема

*Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.*

### Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$». То есть, $\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$.

# Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

### Теорема

*Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.*

### Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$». То есть, $\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$.

# Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

### Теорема

*Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.*

### Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$». То есть, $\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$, — и это можно доказать, то есть $\vdash \text{Consis} \rightarrow \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$.

# Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

### Теорема

*Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.*

### Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$». То есть, $\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$, — и это можно доказать, то есть $\vdash \text{Consis} \rightarrow \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Однако если формальная арифметика непротиворечива, то $\nvdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. $\square$

# Слишком много неформальности

Рассмотрим такой особый Consis$'$:

$$\begin{array}{l} \pi'(x) := \exists p.\psi(x, p) \ \& \ \neg\psi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner}, p) \\ \mathrm{Consis}' := \neg\pi'(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner}) \end{array}$$

Заметим:

1. Если ФА непротиворечива, то $[\![\pi'(x)]\!] = [\![\pi(x)]\!]$:
   - если $x \neq \ulcorner 1 = 0 \urcorner$ и $[\![\psi(x, p)]\!] = \text{И}$, то $[\![\psi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner}, p)]\!] = \text{Л}$
   - если $x = \ulcorner 1 = 0 \urcorner$, то $\psi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner}, p) = \text{Л}$ при любом $p$.
2. Но $\vdash \mathrm{Consis}'$.

# Условия выводимости Гильберта-Бернайса-Лёба

## Определение

*Будем говорить, что формула $\psi$, выражающая отношение Proof, формула $\pi$ и формула Consis соответствуют условиям Гильберта-Бернайса-Лёба, если следующие условия выполнены для любой формулы $\alpha$:*

1. $\vdash \alpha$ **влечет** $\vdash \pi(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner})$
2. $\vdash \pi(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}) \rightarrow \pi(\overline{\ulcorner \pi(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}) \urcorner})$
3. $\vdash \pi(\overline{\ulcorner \alpha \rightarrow \beta \urcorner}) \rightarrow \pi(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}) \rightarrow \pi(\overline{\ulcorner \beta \urcorner})$

# Невыразимость доказуемости

### Определение

$Th_{\mathcal{S}} = \{\ulcorner\alpha\urcorner \mid \vdash_{\mathcal{S}} \alpha\}$; $Tr_{\mathcal{S}} = \{\ulcorner\alpha\urcorner \mid [\![\alpha]\!]_{\mathcal{S}} = \textit{И}\}$

### Лемма

*Пусть* $D(\ulcorner\alpha\urcorner) = \ulcorner\alpha(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner})\urcorner$ *для любой формулы* $\alpha(x)$*. Тогда* $D$ *представима в формальной арифметике.*

### Теорема

*Если расширение Ф.А.* $\mathcal{S}$ *непротиворечиво и* $D$ *представима в нём, то* $Th_{\mathcal{S}}$ *невыразимо в* $\mathcal{S}$

### Доказательство.

Пусть $\delta(a, p)$ представляет $D$, и пусть $\sigma(x)$ выражает множество $\mathrm{Th}_{\mathcal{S}}$ (рассматриваемое как одноместное отношение).
Пусть $\alpha(x) := \forall p.\delta(x, p) \rightarrow \neg\sigma(p)$. Верно ли, что $\ulcorner\alpha\urcorner \in \mathrm{Th}$? $\square$

# Неразрешимость формальной арифметики

## Теорема

*Если формальная арифметика непротиворечива, то формальная арифметика неразрешима*

## Доказательство.

Пусть формальная арифметика разрешима. Значит, есть рекурсивная функция $f(x)$: $f(x) = 1$ тогда и только тогда, когда $x \in \mathrm{Th}_{\text{Ф.А.}}$. То есть, $\mathrm{Th}_{\text{Ф.А.}}$ выразимо в формальной арифметике.
По теореме о невыразимости доказуемости, $\mathrm{Th}_{\text{Ф.А.}}$ невыразимо в формальной арифметике. Противоречие. $\square$

# Теорема Тарского

## Теорема (Тарского о невыразимости истины)

*Не существует формулы $\varphi(x)$, что $[\![\varphi(x)]\!] = И$ (в стандартной интерпретации) тогда и только тогда, когда $x \in Tr_{ФА}$.*

## Доказательство.

Пусть теория $\mathcal{S}$ — формальная арифметика + аксиомы: все истинные в стандартной интерпретации формулы. Очевидно, что $\mathrm{Th}_{\mathcal{S}} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{S}} = \mathrm{Tr}_{\text{ФА}}$. То есть $\mathrm{Tr}_{\text{ФА}}$ невыразимо в $\mathcal{S}$.

Пусть $\varphi$ таково, что $[\![\varphi(x)]\!] = \text{И}$ при $x \in \mathrm{Tr}$. Тогда $\vdash \varphi(x)$, если $x \in \mathrm{Tr}$ и $\vdash \neg\varphi(x)$, если $x \notin \mathrm{Tr}$.

Тогда Tr выразимо в $\mathcal{S}$. Противоречие. $\square$

# Теорема Тарского

### Теорема (Тарского о невыразимости истины)

*Не существует формулы $\varphi(x)$, что $[\![\varphi(x)]\!] = И$ (в стандартной интерпретации) тогда и только тогда, когда $x \in Tr_{ΦA}$.*

### Доказательство.

Пусть теория $\mathcal{S}$ — формальная арифметика + аксиомы: все истинные в стандартной интерпретации формулы. Очевидно, что $\mathrm{Th}_{\mathcal{S}} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{S}} = \mathrm{Tr}_{\Phi\mathrm{A}}$. То есть $\mathrm{Tr}_{\Phi\mathrm{A}}$ невыразимо в $\mathcal{S}$.

Пусть $\varphi$ таково, что $[\![\varphi(x)]\!] = \text{И}$ при $x \in \mathrm{Tr}$. Тогда $\vdash \varphi(x)$, если $x \in \mathrm{Tr}$ и $\vdash \neg\varphi(x)$, если $x \notin \mathrm{Tr}$.

Тогда Tr выразимо в $\mathcal{S}$. Противоречие. □

Однако, если взять $D = \mathbb{R}$, истина становится выразима (алгоритм Тарского).

Положительные результаты про исчисления.

# Что можно сделать для разрешимости исчисления предикатов?

- По теореме о полноте можем рассматривать $(\models)$ вместо $(\vdash)$. Напомним: $\models \alpha$, если для всех $M = \langle D, F, P, E \rangle$ выполнено $M \models \alpha$.

# Что можно сделать для разрешимости исчисления предикатов?

- По теореме о полноте можем рассматривать ($\models$) вместо ($\vdash$). Напомним: $\models \alpha$, если для всех $M = \langle D, F, P, E \rangle$ выполнено $M \models \alpha$.
- Что мешает:
  1. слишком сложные формулы — кванторы по бесконечным множествам;
  2. слишком больше разнообразие $D$, включая несчётные;
  3. даже $D = \mathbb{N}$ в формальной арифметике представляет проблему.

# Что можно сделать для разрешимости исчисления предикатов?

- По теореме о полноте можем рассматривать ($\models$) вместо ($\vdash$). Напомним: $\models \alpha$, если для всех $M = \langle D, F, P, E\rangle$ выполнено $M \models \alpha$.
- Что мешает:
  1. слишком сложные формулы — кванторы по бесконечным множествам;
  2. слишком больше разнообразие $D$, включая несчётные;
  3. даже $D = \mathbb{N}$ в формальной арифметике представляет проблему.
- Будем последовательно бороться:
  1. упростим формулу (борьба с кванторами);
  2. заменим произвольное $D$ на какое-то рекурсивно-перечислимое множество, устроенное некоторым фиксированным образом (борьба с разнообразием $D$);
  3. устроим правильный перебор, позволяющий быстро находить решения, если они есть (борьба с бесконечностью $D$).

# Шаги рассуждения

1. Упростим формулу — поверхностные кванторы всеобщности, сколемизация.
2. Заменяем $D$.
3. Правильный перебор

## Упрощаем формулу $\alpha$. Сколемизация

1. Предварённая форма (поверхностные кванторы) — *для примера* возьмём чередующиеся:
$$\beta := \forall x_1.\exists x_2.\forall x_3.\exists x_4 \dots \forall x_{n-1}.\exists x_n.\varphi$$
2. Убрать кванторы существования: заменим $x_{2k}$ функциями Сколема $e_{2k}(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1})$. Получим:
$$\gamma := \forall x_1.\forall x_3 \dots \forall x_{n-1}.\varphi[x_2 := e_2(x_1), x_4 := e_4(x_1, x_3), \dots, x_n := e_n(x_1, x_3, \dots, x_{n-1})]$$
3. ДНФ ($c$ конъюнктов, в каждом $d(c)$ дизъюнктов):
$$\delta := \forall x_1.\forall x_3 \dots \forall x_{n-1}. \bigwedge_c \left( \bigvee_{i=\overline{1,d(c)}} (\neg)P_i(\theta_i) \right)$$
4. Исходная задача: проверка $\vdash \alpha$. Это эквивалентно $\vdash \beta$. Эквивалентно $\models \beta$. Эквивалентно выполнимости $\delta$ при всех $D$ (найдутся $e_i$, что $[\![\delta]\!] = \text{И}$).

# Шаги рассуждения

1. Упростим формулу — поверхностные кванторы всеобщности, сколемизация.
2. Заменяем $D$.
3. Правильный перебор

# Эрбранов универсум.

## Определение

*$H_0(\varphi)$ — все константы в формуле $\varphi$ (либо особая константа $a$, если констант в $\varphi$ нет)*
*$H_{k+1}(\varphi)$ — $H_k(\varphi)$ и все функции от значений $H_k(\varphi)$ (как строки)*
*$H = \cup H_n(\varphi)$ — основные термы.*

## Пример

$P(a) \vee Q(f(b))$:
$H_0 = \{a, b\}$
$H_1 = \{a, b, f(a), f(b)\}$
$H_2 = \{a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b))\}$
$\dots$
$H = \{f^{(n)}(x) \mid n \in \mathbb{N}_0, x \in \{a, b\}\}$

# Выполнимость не теряется. Заменяем $D$ на $H$

### Теорема

*Формула выполнима тогда и только тогда, когда она выполнима на Эрбрановом универсуме.*

### Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $M \models \forall \overline{x}.\varphi$. Тогда построим отображение eval : $H \to M$ (смысл названия вдохновлён языками программирования: eval(“$f(f(b))$“) перейдёт в $f(f(b))$, где $f$ и $b$ — из $M$).
Предикатам дадим согласованную оценку:
$P_H(t_1, \dots, t_n) = P_M(eval(t_1), \dots, eval(t_n))$. Очевидно, любая формула сохранит своё значение, кванторы всеобщности по меньшему множеству также останутся истинными.
($\Leftarrow$) Очевидно. $\square$