

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ**  
*Математическая логика, ИТМО, М3232-М3239, осень 2024 года*

## Общие замечания

1. Одно задание оценивается в 3.5 балла. При использовании TeX или Turst для оформления задание оценивается в 4 балла. При крайне плохом оформлении оценка может быть понижена до 3 баллов.
2. Заданием (по умолчанию) считается один пункт, занумерованный цифрой или буквой. Пункты без нумерации считаются частями одного задания.
3. Курс можно условно разделить на три части (исчисления высказываний и предикатов, формальная арифметика, теория множеств). В каждой из частей можно ответить не более четырёх заданий.

## Задание №1. Знакомство с классическим исчислением высказываний.

При решении заданий вам может потребоваться теорема о дедукции (будет доказана на второй лекции):

**Теорема 1.**  $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \alpha \vdash \beta$  тогда и только тогда, когда  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \vdash \alpha \rightarrow \beta$ .

Пример использования: пусть необходимо доказать  $\vdash A \rightarrow A$  — то есть доказать существование вывода формулы  $A \rightarrow A$  (заметьте, так поставленное условие не требует этот вывод предъявлять, только доказать его существование). Тогда заметим, что последовательность из одной формулы  $A$  доказывает  $A \vdash A$ . Далее, по теореме о дедукции, отсюда следует и  $\vdash A \rightarrow A$  (то есть, существование вывода формулы  $A \rightarrow A$ , не использующего гипотезы).

Теорема будет доказана конструктивно: будет предъявлен алгоритм, перестраивающий вывод  $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \alpha \vdash \beta$  в вывод  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \vdash \alpha \rightarrow \beta$

1. Докажите:

- (a)  $\vdash (A \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- (b)  $\vdash \neg(A \& \neg A)$
- (c)  $\vdash A \& B \rightarrow B \& A$
- (d)  $\vdash A \vee B \rightarrow B \vee A$
- (e)  $A \& \neg A \vdash B$

2. Докажите:

- (a)  $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$
- (b)  $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$
- (c)  $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
- (d)  $A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$
- (e)  $\neg A, B \vdash A \rightarrow B$

3. Докажите:

- (a)  $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
- (b)  $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$  (правило контрапозиции)
- (c)  $\vdash \neg(\neg A \& \neg B) \rightarrow (A \vee B)$  (вариант I закона де Моргана)
- (d)  $\vdash A \vee B \rightarrow \neg(\neg A \& \neg B)$
- (e)  $\vdash (\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \& B)$  (II закон де Моргана)
- (f)  $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$
- (g)  $\vdash A \& B \rightarrow A \vee B$
- (h)  $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$  (закон Пирса)
- (i)  $\vdash A \vee \neg A$
- (j)  $\vdash (A \& B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow C)$

- (k)  $\vdash A \& (B \vee C) \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C)$  (*дистрибутивность*)  
 (l)  $\vdash (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \& B \rightarrow C)$   
 (m)  $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$   
 (n)  $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$

4. Даны высказывания  $\alpha$  и  $\beta$ , причём  $\vdash \alpha \rightarrow \beta$  и  $\nvdash \beta \rightarrow \alpha$ . Укажите способ построения высказывания  $\gamma$ , такого, что  $\vdash \alpha \rightarrow \gamma$  и  $\vdash \gamma \rightarrow \beta$ , причём  $\nvdash \gamma \rightarrow \alpha$  и  $\nvdash \beta \rightarrow \gamma$ .
5. Покажите, что если  $\alpha \vdash \beta$  и  $\neg\alpha \vdash \beta$ , то  $\vdash \beta$ .
6. Покажите, что классическое исчисление высказываний допускает правило Modus Tollens:

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \neg\psi}{\neg\varphi}$$

А именно, пусть дан некоторый вывод, в котором каждая формула — либо аксиома, либо получена по правилу Modus Ponens, либо имеет вид  $\delta_n \equiv \neg\varphi$ , причём ранее в доказательстве встречается  $\delta_i \equiv \neg\psi$  и  $\delta_j \equiv \varphi \rightarrow \psi$  (при этом  $\max(i, j) < n$ ). Тогда такой вывод можно перестроить в корректное доказательство в классическом исчислении высказываний.

В данном задании от вас требуется аккуратное изложение доказательства, видимо, использующее математическую индукцию. То есть, чётко сформулированное индукционное предположение и полные доказательства базы и перехода.

## Задание №2. Теоремы об исчислении высказываний. Знакомство с интуиционистским исчислением высказываний.

1. Давайте вспомним, что импликация правоассоциативна:  $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \equiv \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ . Но рассмотрим иную расстановку скобок:  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma$ . Возможно ли доказать логическое следствие между этими вариантами расстановки скобок — и каково его направление? Зависит ли это от варианта исчисления (классическое/интуиционистское)?
2. Покажите, что в классическом исчислении высказываний  $\Gamma \models \alpha$  влечёт  $\Gamma \vdash \alpha$ .
3. Покажите, что в классическом исчислении высказываний  $\Gamma \vdash \alpha$  влечёт  $\Gamma \models \alpha$ .
4. Возможно ли, что какая-то из аксиом задаётся двумя разными схемами аксиом? Опишите все возможные коллизии для какой-то одной такой пары схем аксиом. Ответ обоснуйте (да, тут потребуется доказательство по индукции).
5. Заметим, что можно вместо отрицания ввести в исчисление ложь. Рассмотрим *исчисление высказываний с ложью*. В этом языке будет отсутствовать одноместная связка ( $\neg$ ), вместо неё будет присутствовать нульместная связка «ложь» ( $\perp$ ), а 9 и 10 схемы аксиом будут заменены на одну схему:

$$(9_{\perp}) \quad ((\alpha \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow \alpha$$

Будем записывать доказуемость в новом исчислении как  $\vdash_{\perp} \alpha$ , а доказуемость в исчислении высказываний с отрицанием как  $\vdash_{\neg} \beta$ . Также определим операцию трансляции между языками обычного исчисления высказываний и исчисления с ложью как операции рекурсивной замены  $\perp := A \& \neg A$  и  $\neg\alpha := \alpha \rightarrow \perp$  (и обозначим их как  $|\varphi|_{\neg}$  и  $|\psi|_{\perp}$  соответственно).

Докажите:

- (a)  $\vdash_{\perp} \alpha$  влечёт  $\vdash_{\neg} |\alpha|_{\neg}$   
 (b)  $\vdash_{\neg} \alpha$  влечёт  $\vdash_{\perp} |\alpha|_{\perp}$
6. Покажите, что топологическое пространство на вещественных числах с базой  $\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  совпадает с топологическим пространством  $\mathbb{R}$  из матанализа (то есть, совпадают множества открытых множеств).
7. Покажите, что дискретная топология, антидискретная топология (открыты только  $\emptyset$  и  $X$ ), топология стрелки, топология Зарисского (носитель —  $\mathbb{R}$ , открыты  $\emptyset$ ,  $\mathbb{R}$  и все множества с конечным дополнением) являются топологиями.

8. Заметим, что определения стараются давать как можно более узкими: если некоторое свойство вытекает из других, то это уже не свойство из определения, а теорема. Поэтому приведите примеры  $\langle X, \Omega \rangle$ , нарушающие только первое, только второе и только третье условие на топологию.
9. Напомним, что замкнутое множество — такое, дополнение которого открыто. Заметим, что на  $\mathbb{R}$  ровно два множества одновременно открыты и замкнуты —  $\emptyset$  и всё пространство. Постройте другую (не евклидову) топологию на  $\mathbb{R}$ , чтобы в ней было ровно четыре множества, которые одновременно открыты и замкнуты. А возможно ли построить топологическое пространство, в котором было бы ровно три открыто-замкнутых множества?
10. Назовём минимальной базой топологии такую базу, что в ней никакое множество не может быть получено объединением семейства других множеств из базы.
- Постройте минимальную базу для дискретной топологии.
  - Существует ли минимальная база для топологии стрелки?
  - Существует ли минимальная база для топологии Зарисского (носитель —  $\mathbb{R}$ , открыты  $\emptyset$ ,  $\mathbb{R}$  и все множества с конечным дополнением)?
11. Предложите пример топологического пространства, в котором пересечение произвольного семейства открытых множеств — открыто. Топологическое пространство должно иметь бесконечный носитель (чтобы задача имела содержательный смысл) и не должно иметь дискретную или антидискретную топологию (не должно быть в каком-то смысле вырожденным).
12. Наибольшим (наименьшим) значением в каком-то множестве назовём такое, которое больше (меньше) всех других элементов множества. Несложно заметить, что для отношения включения множеств далеко не всегда такое можно определить: например, на  $\mathbb{R}^2$  не существует наибольшего круга с радиусом 1, хотя такой круг существует на  $\{z \mid z \in \mathbb{R}^2, |z| \leq 1\}$ .
- Внутренностью* множества  $A^\circ$  назовём наибольшее открытое множество, содержащееся в  $A$ . Покажите, что внутренность множества всегда определена.
13. Напомним определения: *замкнутое* множество — такое, дополнение которого открыто. *Замыканием* множества  $\bar{A}$  назовём наименьшее замкнутое множество, содержащее  $A$ . Назовём *окрестностью* точки  $x$  такое открытое множество  $V$ , что  $x \in V$ . Будем говорить, что точка  $x \in A$  *внутренняя*, если существует окрестность  $V$ , что  $V \subseteq A$ . Точка  $x$  — *граничная*, если любая её окрестность  $V$  пересекается как с  $A$ , так и с его дополнением.
- Покажите, что  $A$  открыто тогда и только тогда, когда все точки  $A$  — внутренние. Также покажите, что  $A^\circ = \{x \mid x \in A \text{ \& } x \text{ — внутренняя точка}\}$ ;
    - Покажите, что  $A$  замкнуто тогда и только тогда, когда содержит все свои граничные точки. Также покажите, что  $\bar{A} = \{x \mid x \text{ — внутренняя или граничная точка}\}$ .
    - Верно ли, что  $\bar{A} = X \setminus ((X \setminus A)^\circ)$ ?
  - Пусть  $A \subseteq B$ . Как связаны  $A^\circ$  и  $B^\circ$ , а также  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$ ? Верно ли  $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$  и  $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$ ?
  - Задача Куратовского.* Будем применять операции взятия внутренней и замыкания к некоторому множеству всевозможными способами. Сколько различных множеств может всего получиться? *Указание.* Покажите, что  $(\bar{A}^\circ)^\circ = \bar{A}^\circ$ .
14. Задача проверки высказываний на истинность в ИИВ сложнее, чем в КИВ — не существует конечного набора значений, на которых можно проверить формулу, чтобы определить её истинность (мы эту теорему докажем). Тем не менее, если формула опровергается, то она опровергается на  $\mathbb{R}$  с евклидовой топологией. Если же такого опровержения нет, то формула доказуема (то есть, ИИВ семантически полно на  $\mathbb{R}$ ). Например, формула  $A \vee \neg A$  опровергается при  $\llbracket A \rrbracket = (0, +\infty)$ , так как  $\llbracket A \vee \neg A \rrbracket = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Очевидно, что любая интуиционистская тавтология общезначима и в классической логике:

- формула общезначима в интуиционистской логике;
- значит, истинна при всех оценках;
- значит, в частности, при всех оценках на  $\mathbb{R}$ ;
- то есть, по теореме, упомянутой выше, доказуема в ИИВ;
- а схема аксиом 10и — частный случай схемы аксиом 10.

Обратное же неверно. Определите, являются ли следующие формулы тавтологиями в КИВ и ИИВ (предложите опровержение или доказательство общезначимости/выводимости для каждого из исчислений):

- (a)  $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ ;
  - (b)  $\neg\neg A \rightarrow A$ ;
  - (c)  $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$  (из двух утверждений одно непременно следует из другого: например, «я не люблю зиму» и «я не люблю лето»);
  - (d)  $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C)$ ;
  - (e)  $(A \rightarrow (B \vee \neg B)) \vee (\neg A \rightarrow (B \vee \neg B))$ ;
  - (f)  $\alpha \vee \beta \vdash \neg(\neg\alpha \& \neg\beta)$  и  $\neg(\neg\alpha \& \neg\beta) \vdash \alpha \vee \beta$ ;
  - (g)  $\neg\alpha \& \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$  и  $\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \& \neg\beta$ ;
  - (h)  $\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg\alpha \vee \beta$  и  $\neg\alpha \vee \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$ .
15. Известно, что в КИВ все связки могут быть выражены через операцию «и-не» («или-не»). Также, они могут быть выражены друг через друга (достаточно, например, отрицания и конъюнкции). Однако, в ИИВ это не так.
- Покажите, что никакие связки не выражаются друг через друга: то есть, нет такой формулы  $\varphi(A, B)$  из языка интуиционистской логики, не использующей связку  $\star$ , что  $\vdash A \star B \rightarrow \varphi(A, B)$  и  $\vdash \varphi(A, B) \rightarrow A \star B$ . Покажите это для каждой связки в отдельности:
- (a) конъюнкция;
  - (b) дизъюнкция;
  - (c) импликация;
  - (d) отрицание.

### Задание №3. Изоморфизм Карри-Ховарда. Дополнительные топологические определения. Решётки.

- Непрерывной функцией называется такая, для которой прообраз открытого множества всегда открыт. Путём на топологическом пространстве  $X$  назовём непрерывное отображение вещественного отрезка  $[0, 1]$  в  $X$ . Опишите пути (то есть, опишите, какие функции могли бы являться путями):
  - (a) на  $\mathbb{N}$  (с дискретной топологией);
  - (b) в топологии Зарисского;
  - (c) на дереве (с топологией с лекции);
- Докажите, что функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна тогда и только тогда, когда  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  для всех  $x_0 \in \mathbb{R}$ .
- Связным множеством в топологическом пространстве назовём такое, которое связно как подпространство. Линейно связным множеством назовём такое, в котором две произвольные точки могут быть соединены путём, образ которого целиком лежит в множестве.
  - (a) Покажите, что линейно связное множество всегда связно;
  - (b) Покажите, что связное не обязательно линейно связное.
- Всегда ли непрерывным образом связного пространства является другое связное (под)пространство? Докажите или опровергните.
- Как мы помним с лекции, возможно доказывать интуиционистские утверждения, воспользовавшись изоморфизмом Карри-Ховарда, то есть написав соответствующую программу на каком-нибудь статически типизированном языке программирования.

Например, на C++ так можно доказать  $A \rightarrow A$ :

```
A identity (A x) { return x; }
```

Докажите следующие утверждения, не пользуясь в коде тем фактом, что обычно языки программирования противоречивы (то есть, не используйте исключений, функций, не возвращающих управления, и других подобных конструкций).

- (a)  $A \rightarrow B \rightarrow A$
  - (b)  $A \& B \rightarrow A \vee B$
  - (c)  $(A \& (B \vee C)) \rightarrow ((A \& B) \vee (A \& C))$
  - (d)  $(A \rightarrow C) \& (B \rightarrow C) \& (A \vee B) \rightarrow C$
  - (e)  $(B \vee C \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A) \& (C \rightarrow A)$
  - (f)  $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
  - (g)  $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$
  - (h)  $(A \rightarrow B) \& (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$
  - (i) Выразимые в интуиционистском исчислении высказываний аналоги правил де Моргана для импликации.
6. Рассмотрим подмножество частично упорядоченного множества, и рассмотрим следующие свойства:
- (a) наличие наибольшего элемента; (б) наличие супремума; (в) наличие единственного максимального элемента. Всего можно рассмотреть шесть утверждений ((а) влечёт (б), (а) влечёт (в), и т.п.) — про каждое определите, выполнено ли оно в общем случае, и приведите либо доказательство, либо контрпример. Задача состоит из одного пункта, для получения баллов все шесть утверждений должны быть разобраны.
7. Покажите следующие утверждения для импликативных решёток:
- (a) монотонность: пусть  $a \leq b$  и  $c \leq d$ , тогда  $a + c \leq b + d$  и  $a \cdot c \leq b \cdot d$ ;
  - (b) законы поглощения:  $a \cdot (a + b) = a$ ;  $a + (a \cdot b) = a$ ;
  - (c)  $a \leq b$  выполнено тогда и только тогда, когда  $a \rightarrow b = 1$ ;
  - (d) из  $a \leq b$  следует  $b \rightarrow c \leq a \rightarrow c$  и  $c \rightarrow a \leq c \rightarrow b$ ;
  - (e) из  $a \leq b \rightarrow c$  следует  $a \cdot b \leq c$ ;
  - (f)  $b \leq a \rightarrow b$  и  $a \rightarrow (b \rightarrow a) = 1$ ;
  - (g)  $a \rightarrow b \leq ((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c))$ ;
  - (h)  $a \leq b \rightarrow a \cdot b$  и  $a \rightarrow (b \rightarrow (a \cdot b)) = 1$
  - (i)  $a \rightarrow c \leq (b \rightarrow c) \rightarrow (a + b \rightarrow c)$
  - (j) импликативная решётка дистрибутивна:  $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$
8. Докажите, основываясь на формулах предыдущих заданий, что интуиционистское исчисление высказываний корректно, если в качестве модели выбрать алгебру Гейтинга.
9. Покажите, что на конечном множестве дистрибутивная решётка всегда импликативна.
10. Постройте пример дистрибутивной, но не импликативной решётки.
11. Покажите, что в дистрибутивной решётке всегда  $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ .
12. Пусть  $R \subseteq A \times A$  — отношение эквивалентности (то есть транзитивное, рефлексивное и симметричное). Тогда фактор-множество  $A/R := \{[x]_R \mid x \in A\}$  — множество *классов эквивалентности*, где  $[x]_R = \{t \in A \mid tRx\}$ .
- Покажите, что каждый элемент множества  $A$  принадлежит в точности одному классу эквивалентности. Два класса эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают.
13. Пусть  $R \subseteq A \times A$  — отношение нестрогого предпорядка (транзитивное и рефлексивное). И пусть  $a \approx b$ , если  $aRb$  и  $bRa$ . Покажите, что
- (a) Если  $aRb$  и  $a \approx a'$ ,  $b \approx b'$ , то  $a'Rb'$ .
  - (b)  $R/\approx$  — отношение нестрогого порядка на  $A/\approx$  в следующем смысле:  $[a]_\approx R/\approx [b]_\approx$  выполнено, если  $aRb$  (корректность определения также необходимо показать).
14. Покажите, что  $(\leq)$  из определения алгебры Линденбаума — отношение нестрогого предпорядка,  $(\approx)$  — отношение эквивалентности, а  $(\leq)/\approx$  — отношение нестрогого порядка.
15. Покажите, что  $[\alpha]_{\mathcal{L}} + [\beta]_{\mathcal{L}} = [\alpha \vee \beta]_{\mathcal{L}}$ . Зависит ли результат от выбора представителей классов эквивалентности  $[\alpha]$  и  $[\beta]$ ? Ответ также докажите.
16. Покажите, что  $[\alpha \rightarrow \beta]_{\mathcal{L}}$  — псевдодополнение  $[\alpha]_{\mathcal{L}}$  до  $[\beta]_{\mathcal{L}}$ .

## Задание №4. Модели для ИИВ

В этих задачах вводится ранжирование задач по сложности. Простые задачи будут оцениваться в 3.5 балла, как раньше, а сложные задачи в 5.5 баллов. Сложные задачи отмечены звёздочкой.

1. Определение: противоречивая теория — такая, в которой доказуема любая формула. Покажите, что для КИВ (а равно и для ИИВ) определение имеет следующие эквивалентные формулировки:

- доказуема любая формула исчисления;
- $\vdash \alpha \ \& \ \neg\alpha$  при некотором  $\alpha$ ;
- $\vdash A \ \& \ \neg A$ ;
- для некоторой формулы  $\alpha$  имеет место  $\vdash \alpha$  и  $\vdash \neg\alpha$ .

Также покажите, что КИВ непротиворечиво (расшифруйте слово «очевидно» с первого слайда четвёртой лекции).

2. Опровергните формулы с помощью какой-нибудь модели Крипке:

- (a)  $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ ;
- (b)  $(A \rightarrow B) \rightarrow \neg A \vee B$ ;
- (c)  $(A \rightarrow (B \vee \neg B)) \vee (\neg A \rightarrow (B \vee \neg B))$ .

3. Покажите, что любая модель Крипке обладает свойством: для любых  $W_i, W_j, \alpha$ , если  $W_i \leq W_j$  и  $W_i \Vdash \alpha$ , то  $W_j \Vdash \alpha$ .

4. Несколько задач на упрощение структуры миров моделей Крипке.

- (a) Покажите, что формула опровергается моделью Крипке тогда и только тогда, когда она опровергается древовидной моделью Крипке.
- (b) (\*) Верно ли, что если формула опровергается некоторой конечной древовидной моделью Крипке (причём у каждой вершины не больше двух сыновей), то эту древовидную модель можно достроить до полного бинарного дерева, с сохранением свойства опровержимости?
- (c) (\*) Верно ли, что если некоторая модель Крипке опровергает некоторую формулу, то добавление любого мира к модели в качестве потомка к любому из узлов оставит опровержение в силе?

5. Покажите, что модель Крипке  $\mathcal{M}$  из одного узла эквивалентна классической модели. То есть, по каждой такой модели можно найти эквивалентную ей классическую модель  $\mathcal{T}$ , что  $\models_{\mathcal{M}} \alpha$  тогда и только тогда, когда  $\models_{\mathcal{T}} \alpha$ . Напомним, что для задания классической модели необходимо указать значения всех пропозициональных переменных. Сохранится ли это свойство для модели, заданной на лесе несвязных узлов?

6. (\*) Покажите, что формула опровергается моделью Крипке тогда и только тогда, когда она опровергается конечной моделью Крипке.

7. Постройте опровержимую в ИИВ формулу, которая не может быть опровергнута моделью Крипке (ответ требуется доказать):

- (a) (\*) глубины 0 или 1;
- (b) (\*) глубины  $n \in \mathbb{N}$  и меньше.

8. Давайте разберёмся во взаимоотношениях различных формулировок закона исключённого третьего и подобных законов. Для этого определим *минимальное* исчисление высказываний как ИИВ без 10 схемы аксиом. Заметим, что переход от  $\vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$  при всех  $\alpha$  к  $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$  уже был ранее доказан (закон Пирса следует из закона снятия двойного отрицания).

Давайте продолжим строить кольцо:



для чего покажите, что в минимальном исчислении:

- (a) Если  $\vdash ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$  при всех  $\alpha$  и  $\beta$ , то  $\vdash \alpha \vee \neg \alpha$  (закон исключённого третьего следует из закона Пирса).
- (b) Если  $\vdash \alpha \rightarrow \neg \alpha \rightarrow \beta$  («из лжи следует, что угодно», он же *принцип взрыва*) и  $\vdash \alpha \vee \neg \alpha$  при всех  $\alpha$  и  $\beta$ , то  $\vdash \neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$ .
- (c) (\*) Из закона Пирса не следует закон снятия двойного отрицания и из закона исключённого третьего не следует закон Пирса.
- (d) (\*) Закон Пирса и принцип взрыва независимы (невозможно доказать один из другого).

## Задание №5. Исчисление предикатов

1. (Приводится по учебнику Ивлева Ю.В. «Логика», 2006 год) Определите состав, фигуру, модус силлогизма и проверьте его. Формализуйте утверждение в исчислении предикатов (пусть это будет вывод из посылок вида  $\alpha, \beta \vdash \gamma$ ).
  - (a) Некоторые учащиеся являются троечниками. Все студенты — учащиеся. Следовательно, некоторые студенты — троечники.
  - (b) Каждый капитан корабля обладает громким голосом. Каждый оперный певец обладает громким голосом. Следовательно, некоторые капитаны кораблей являются оперными певцами.
  - (c) Все рыбы дышат жабрами. Некоторые дышащие жабрами живут в море. Следовательно, среди обитателей моря имеются рыбы.
2. (Приводится по учебнику Ивлева Ю.В. «Логика», 2006 год) Осуществите, если это возможно, правильный вывод из следующих посылок по одной из фигур силлогизма. Формализуйте утверждение в исчислении предикатов.
  - (a) Все ученые занимаются умственным трудом. Некоторые ученые не являются городскими жителями.
  - (b) Некоторые верующие не имеют высшего образования. Все католики — верующие.
3. Формализуйте какой-нибудь силлогизм с «плохим» модусом (требующий условие непустоты среднего термина) в исчислении предикатов. Докажите силлогизм с условием непустоты в исчислении предикатов — и постройте контрпример к силлогизму без условия непустоты среднего термина (постройте надлежащую модель).
4. Постройте по силлогизму из двух разных модусов (сильного и слабого). Формализуйте их и постройте доказательство в исчислении предикатов, что из сильного силлогизма следует слабый (то есть заключение силлогизма сильного модуса влечёт заключение силлогизма слабого модуса при условии, что в силлогизмах совпадают предикат, субъект и средний термин; потребуется подобрать правильную пару силлогизмов). Возможно, вам тут также потребуется условие непустоты — в таком случае приведите контрпример при его отсутствии.
5. Докажите (или опровергните) следующие формулы в исчислении предикатов:
  - (a)  $(\forall x.\phi) \rightarrow (\forall y.\phi[x := y])$ , если есть свобода для подстановки  $y$  вместо  $x$  в  $\phi$  и  $y$  не входит свободно в  $\phi$ .
  - (b)  $(\forall x.\phi) \rightarrow (\exists x.\phi)$  и  $(\forall x.\forall x.\phi) \rightarrow (\forall x.\phi)$
  - (c)  $(\forall x.\phi) \rightarrow (\neg \exists x.\neg \phi)$  и  $(\exists x.\neg \phi) \rightarrow (\neg \forall x.\phi)$
  - (d)  $(\forall x.\alpha \vee \beta) \rightarrow (\neg \exists x.\neg \alpha) \ \& \ (\neg \exists x.\neg \beta)$
  - (e)  $((\forall x.\alpha) \vee (\forall y.\beta)) \rightarrow \forall x.\forall y.\alpha \vee \beta$ . Какие условия надо наложить на переменные и формулы? Приведите контрпримеры, поясняющие необходимость условий.
  - (f)  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \forall x.(\alpha \rightarrow \beta)$ . Возможно, нужно наложить какие-то условия на переменные и формулы? Приведите контрпримеры, поясняющие необходимость условий (если условия требуются).
  - (g)  $(\alpha \rightarrow \forall x.\beta) \rightarrow (\forall x.\alpha \rightarrow \beta)$  при условии, что  $x$  не входит свободно в  $\alpha$ .
6. Опровергните формулы  $\phi \rightarrow \forall x.\phi$  и  $(\exists x.\phi) \rightarrow (\forall x.\phi)$
7. Докажите или опровергните (каждую формулу в отдельности):  $(\forall x.\exists y.\phi) \rightarrow (\exists y.\forall x.\phi)$  и  $(\exists x.\forall y.\phi) \rightarrow (\forall y.\exists x.\phi)$ ;
8. Докажите или опровергните (каждую формулу в отдельности):  $(\forall x.\exists y.\phi) \rightarrow (\exists x.\forall y.\phi)$  и  $(\exists x.\forall y.\phi) \rightarrow (\forall x.\exists y.\phi)$

## Задание №6. Теорема о полноте И.П.

1. Докажите теорему Гливенко: в КИВ/ИИВ, если  $\vdash_K \varphi$ , то  $\vdash_I \neg\neg\varphi$ . А также покажите *Следствие*: ИИВ противоречиво тогда и только тогда, когда противоречиво КИВ.

2. Докажите, что теорема Гливенко не верна в интуиционистском исчислении предикатов.

*Указание:* возможно, вам поможет следующая модель для ИИП. Докажите, что это модель ИИП, если вы пойдёте по этому пути. Пусть  $\langle X, \Omega \rangle$  — некоторое топологическое пространство и  $V = \Omega$  (как и в исчислении высказываний), пропозициональные связки определим аналогично топологической интерпретации И.И.В., оценки же кванторов сделать такими:

$$\llbracket \forall x.\varphi \rrbracket = \left( \bigcap_{v \in D} \llbracket \varphi \rrbracket^{x:=v} \right)^\circ, \quad \llbracket \exists x.\varphi \rrbracket = \bigcup_{v \in D} \llbracket \varphi \rrbracket^{x:=v}$$

3. Для построения аналога теоремы Гливенко определим операцию  $(\cdot)_{Ku}$ :

$$(\varphi \star \psi)_{Ku} = \varphi_{Ku} \star \psi_{Ku}, \quad (\forall x.\varphi)_{Ku} = \forall x.\neg\neg\varphi_{Ku}, \quad (\exists x.\varphi)_{Ku} = \exists x.\varphi_{Ku}$$

Тогда *преобразованием Куроды* формулы  $\varphi$  назовём  $\neg\neg(\varphi_{Ku})$ . Покажите, что  $\vdash_K \alpha$  тогда и только тогда, когда  $\vdash_I \neg\neg(\alpha_{Ku})$ .

4. Пусть задано какое-то семейство термов без свободных переменных  $T$  и одноместный предикатный символ  $P$ . Покажите, что семейство  $\Gamma = \{P(\theta) \mid \theta \in T\}$  непротиворечиво (семейство всех формул подобного вида). Скажем, пример с лекции непротиворечив:  $\Gamma = \{P(1), P(2), P(3), \dots\}$

5. Пусть  $M$  — непротиворечивое множество формул и  $\mathcal{M}$  — построенная в соответствии с теоремой о полноте исчисления предикатов оценка для  $M$ . Мы ожидаем, что  $\mathcal{M}$  будет моделью для  $M$ , для чего было необходимо доказать несколько утверждений. Восполните некоторые пробелы в том доказательстве. А именно, если  $\varphi$  — некоторая формула и для любой формулы  $\zeta$ , более короткой, чем  $\varphi$ , выполнено  $\mathcal{M} \models \zeta$  тогда и только тогда, когда  $\zeta \in M$ , тогда покажите:

- (a) если  $\varphi \equiv \alpha \vee \beta$ ,  $\mathcal{M} \models \alpha \vee \beta$ , то  $\alpha \vee \beta \in M$ ; и если  $\mathcal{M} \models \alpha \vee \beta$ , то  $\alpha \vee \beta \notin M$ ;
- (b) если  $\varphi \equiv \neg\alpha$ ,  $\mathcal{M} \models \neg\alpha$ , то  $\neg\alpha \in M$ ; и если  $\mathcal{M} \models \neg\alpha$ , то  $\neg\alpha \notin M$ .

6. Обозначим за  $\sigma \leftrightarrow \zeta$  две импликации:  $(\sigma \rightarrow \zeta) \& (\zeta \rightarrow \sigma)$ . Докажите, что  $(\exists x.\varphi) \leftrightarrow ((\exists y.\varphi)[x := y])$ . Какие условия надо наложить на  $\varphi$ , чтобы доказательства имели место? Постройте контрпримеры к ситуациям, когда условия не выполнены.

7. Попробуем наметить доказательство теоремы о переносе кванторов:

- (a) Например, внесём квантор внутрь для конъюнкции:  $(\forall x.\alpha \& \beta) \rightarrow (\forall x.\alpha) \& (\forall x.\beta)$ . Какие условия надо наложить на формулы  $\alpha$  и  $\beta$  (при наложении условия предложите надлежащий контрпример)?
- (b) И теперь вынесем квантор наружу — например, для импликации:  $(\forall x.\alpha) \rightarrow (\forall y.\beta)$ . Как правильно вынести левый квантор,  $\forall x.\forall y.\alpha \rightarrow \beta$  или  $\exists x.\forall y.\alpha \rightarrow \beta$ ? Постройте вывод для правильного варианта, постройте контрпример для неправильного. Какие условия надо наложить на формулы  $\alpha$  и  $\beta$  (при наложении условия предложите надлежащий контрпример)?
- (c) Научимся преобразовывать выражение по частям: например, если  $\alpha \rightarrow \beta$ , то  $(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$  и  $(\forall x.\alpha) \rightarrow (\forall x.\beta)$  (какие условия надо наложить на формулы  $\alpha$  и  $\beta$ ?).
- (d) Докажите, что для любого выражения  $\varphi$  найдётся эквивалентное ему выражение без поверхностных кванторов  $\psi$ . В доказательстве можно ссылаться на предыдущие пункты и на другие аналогичные утверждения (например, для других связок). В полном доказательстве  $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ , известном автору, используется 38 подобных вспомогательных утверждений.