Теорема о полноте исчисления предикатов

Общая идея доказательства

1. Надо справиться со слишком большим количеством вариантов. Модель задаётся как $\langle D, F, P, E \rangle$.

Общая идея доказательства

1. Надо справиться со слишком большим количеством вариантов. Модель задаётся как $\langle D, F, P, E \rangle$.
2. Для оценки в модели важно только какие формулы истинны. Поэтому факторизуем модели по истинности формул: модели $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ «похожи», если $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}_1} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}_2}$ при всех φ.

Общая идея доказательства

1. Надо справиться со слишком большим количеством вариантов. Модель задаётся как $\langle D, F, P, E \rangle$.
2. Для оценки в модели важно только какие формулы истинны. Поэтому факторизуем модели по истинности формул: модели $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ «похожи», если $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}_1} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}_2}$ при всех φ.
3. Поступим так:
   3.1 построим эталонное множество моделей $\mathfrak{M}$, каждая модель из него соответствует какому-то своему классу эквивалентности моделей;

Общая идея доказательства

1. Надо справиться со слишком большим количеством вариантов. Модель задаётся как $\langle D, F, P, E \rangle$.
2. Для оценки в модели важно только какие формулы истинны. Поэтому факторизуем модели по истинности формул: модели $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ «похожи», если $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}_1} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}_2}$ при всех φ.
3. Поступим так:
   3.1 построим эталонное множество моделей $\mathfrak{M}$, каждая модель из него соответствует какому-то своему классу эквивалентности моделей;
   3.2 докажем полноту $\mathfrak{M}$: если каждая $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}$ предполагает $\mathcal{M} \models \varphi$, то $\vdash \varphi$;

Общая идея доказательства

1. Надо справиться со слишком большим количеством вариантов. Модель задаётся как $\langle D, F, P, E \rangle$.
2. Для оценки в модели важно только какие формулы истинны. Поэтому факторизуем модели по истинности формул: модели $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ «похожи», если $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}_1} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}_2}$ при всех φ.
3. Поступим так:
   3.1 построим эталонное множество моделей $\mathfrak{M}$, каждая модель из него соответствует какому-то своему классу эквивалентности моделей;
   3.2 докажем полноту $\mathfrak{M}$: если каждая $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}$ предполагает $\mathcal{M} \models \varphi$, то $\vdash \varphi$;
   3.3 заметим, что если $\models \varphi$, то каждая $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}$ предполагает $\mathcal{M} \models \varphi$.

Общая идея доказательства

1. Надо справиться со слишком большим количеством вариантов. Модель задаётся как $\langle D, F, P, E \rangle$.
2. Для оценки в модели важно только какие формулы истинны. Поэтому факторизуем модели по истинности формул: модели $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ «похожи», если $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}_1} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}_2}$ при всех φ.
3. Поступим так:
   - 3.1 построим эталонное множество моделей $\mathfrak{M}$, каждая модель из него соответствует какому-то своему классу эквивалентности моделей;
   - 3.2 докажем полноту $\mathfrak{M}$: если каждая $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}$ предполагает $\mathcal{M} \models \varphi$, то $\vdash \varphi$;
   - 3.3 заметим, что если $\models \varphi$, то каждая $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}$ предполагает $\mathcal{M} \models \varphi$.
4. В ходе доказательства нас ждёт множество технических препятствий.

Непротиворечивое множество формул

Определение

Γ — *непротиворечивое множество формул, если* $\Gamma \nvdash \alpha \,\&\, \neg\alpha$ *для любого* α

Непротиворечивое множество формул

Определение

Γ — *непротиворечивое множество формул, если* $\Gamma \nvdash \alpha \,\&\, \neg\alpha$ *для любого* α

Примеры:

- непротиворечиво:
  - $\Gamma = \{A \rightarrow B \rightarrow A\}$

Непротиворечивое множество формул

Определение

Γ — *непротиворечивое множество формул, если* $\Gamma \not\vdash \alpha \,\&\, \neg\alpha$ *для любого* α

Примеры:

- непротиворечиво:
  - $\Gamma = \{A \to B \to A\}$
  - $\Gamma = \{P(x, y) \to \neg P(x, y), \forall x.\forall y.\neg P(x, y)\}$;

Непротиворечивое множество формул

Определение

Γ — *непротиворечивое множество формул, если* $\Gamma \nvdash \alpha \,\&\, \neg\alpha$ *для любого* α

Примеры:

- непротиворечиво:
  - $\Gamma = \{A \to B \to A\}$
  - $\Gamma = \{P(x,y) \to \neg P(x,y), \forall x.\forall y.\neg P(x,y)\}$;
- противоречиво:
  - $\Gamma = \{P \to \neg P, \neg P \to P\}$
    так как $P \to \neg P, \neg P \to P \ \vdash \ \neg P \,\&\, \neg\neg P$

Непротиворечивое множество формул

Определение

Γ — *непротиворечивое множество формул, если* $\Gamma \nvdash \alpha \,\&\, \neg\alpha$ *для любого* α

Примеры:

- непротиворечиво:
  - $\Gamma = \{A \to B \to A\}$
  - $\Gamma = \{P(x,y) \to \neg P(x,y), \forall x.\forall y.\neg P(x,y)\}$;
- противоречиво:
  - $\Gamma = \{P \to \neg P, \neg P \to P\}$
    так как $P \to \neg P, \neg P \to P \ \vdash \ \neg P \,\&\, \neg\neg P$
- и ещё непротиворечиво: $\Gamma = \{P(1), P(2), P(3), \dots\}$

Полное непротиворечивое множество формул

Определение

Γ — *полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул, если:*

1. Γ *содержит только замкнутые бескванторные формулы;*
2. *если* α — *некоторая замкнутая бескванторная формула, то либо* $\alpha \in \Gamma$, *либо* $\neg\alpha \in \Gamma$.

Полное непротиворечивое множество формул

Определение

Γ — *полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул, если:*

1. Γ *содержит только замкнутые бескванторные формулы;*
2. *если* α — *некоторая замкнутая бескванторная формула, то либо* $\alpha \in \Gamma$*, либо* $\neg\alpha \in \Gamma$*.*

Определение

Γ — *полное непротиворечивое множество замкнутых формул, если:*

1. Γ *содержит только замкнутые формулы;*
2. *если* α — *некоторая замкнутая формула, то либо* $\alpha \in \Gamma$*, либо* $\neg\alpha \in \Gamma$*.*

Пополнение непротиворечивого множества формул

Теорема

Пусть Γ *— непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул. Тогда, какова бы ни была замкнутая (бескванторная) формула* φ*, хотя бы* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *или* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *— непротиворечиво*

Пополнение непротиворечивого множества формул

Теорема

Пусть Γ *— непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул. Тогда, какова бы ни была замкнутая (бескванторная) формула* φ*, хотя бы* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *или* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *— непротиворечиво*

Доказательство.

Пусть это не так и найдутся такие Γ, φ и α, что

$$\begin{aligned} \Gamma, \varphi &\vdash \alpha \,\&\, \neg\alpha \\ \Gamma, \neg\varphi &\vdash \alpha \,\&\, \neg\alpha \end{aligned}$$

Пополнение непротиворечивого множества формул

Теорема

Пусть Γ *— непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул. Тогда, какова бы ни была замкнутая (бескванторная) формула* φ, *хотя бы* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *или* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *— непротиворечиво*

Доказательство.

Пусть это не так и найдутся такие Γ, φ и α, что

$$\begin{aligned} \Gamma, \varphi &\vdash \alpha \,\&\, \neg\alpha \\ \Gamma, \neg\varphi &\vdash \alpha \,\&\, \neg\alpha \end{aligned}$$

Тогда по лемме об исключении гипотезы

$$\Gamma \vdash \alpha \,\&\, \neg\alpha$$

Пополнение непротиворечивого множества формул

Теорема

Пусть Γ — непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул. Тогда, какова бы ни была замкнутая (бескванторная) формула φ, хотя бы $\Gamma \cup \{\varphi\}$ или $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ — непротиворечиво

Доказательство.

Пусть это не так и найдутся такие Γ, φ и α, что

$$\begin{aligned} \Gamma, \varphi &\vdash \alpha \,\&\, \neg\alpha \\ \Gamma, \neg\varphi &\vdash \alpha \,\&\, \neg\alpha \end{aligned}$$

Тогда по лемме об исключении гипотезы

$$\Gamma \vdash \alpha \,\&\, \neg\alpha$$

То есть Γ не является непротиворечивым. Противоречие. $\square$

Дополнение непротиворечивого множества формул до полного

Теорема

Пусть Γ *— непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул. Тогда найдётся полное непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул* Δ*, что* $\Gamma \subseteq \Delta$

Дополнение непротиворечивого множества формул до полного

Теорема

Пусть Γ *— непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул. Тогда найдётся полное непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул* Δ*, что* $\Gamma \subseteq \Delta$

Доказательство.

1. Занумеруем все формулы (их счётное количество): $\varphi_1, \varphi_2, \dots$

Дополнение непротиворечивого множества формул до полного

Теорема

Пусть Γ *— непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул. Тогда найдётся полное непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул* Δ*, что* $\Gamma \subseteq \Delta$

Доказательство.

1. Занумеруем все формулы (их счётное количество): $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$
2. Построим семейство множеств $\{\Gamma_i\}$:

$$\Gamma_0 = \Gamma \qquad \Gamma_{i+1} = \begin{cases} \Gamma_i \cup \{\varphi_i\}, & \text{если } \Gamma_i \cup \{\varphi_i\} \text{ непротиворечиво} \\ \Gamma_i \cup \{\neg\varphi_i\}, & \text{иначе} \end{cases}$$

Дополнение непротиворечивого множества формул до полного

Теорема

Пусть Γ *— непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул. Тогда найдётся полное непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул* Δ*, что* $\Gamma \subseteq \Delta$

Доказательство.

1. Занумеруем все формулы (их счётное количество): $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$
2. Построим семейство множеств $\{\Gamma_i\}$:

$$\Gamma_0 = \Gamma \qquad \Gamma_{i+1} = \begin{cases} \Gamma_i \cup \{\varphi_i\}, & \text{если } \Gamma_i \cup \{\varphi_i\} \text{ непротиворечиво} \\ \Gamma_i \cup \{\neg\varphi_i\}, & \text{иначе} \end{cases}$$

3. Итоговое множество

$$\Delta = \bigcup_i \Gamma_i$$

Дополнение непротиворечивого множества формул до полного

Теорема

Пусть Γ — непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул. Тогда найдётся полное непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул Δ, что $\Gamma \subseteq \Delta$

Доказательство.

1. Занумеруем все формулы (их счётное количество): $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$
2. Построим семейство множеств $\{\Gamma_i\}$:
$$\Gamma_0 = \Gamma \qquad \Gamma_{i+1} = \begin{cases} \Gamma_i \cup \{\varphi_i\}, & \text{если } \Gamma_i \cup \{\varphi_i\} \text{ непротиворечиво} \\ \Gamma_i \cup \{\neg\varphi_i\}, & \text{иначе} \end{cases}$$
3. Итоговое множество
$$\Delta = \bigcup_i \Gamma_i$$
4. Непротиворечивость Δ не следует из индукции — индукция гарантирует непротиворечивость только Γ_i при натуральном (т.е. *конечном*) i, потому...

Дополнение. . . (завершение доказательства)

4. Δ непротиворечиво:
   4.1 Пусть Δ противоречиво, то есть

$$\Delta \vdash \alpha \,\&\, \neg\alpha$$

Дополнение... (завершение доказательства)

4. Δ непротиворечиво:

   4.1 Пусть Δ противоречиво, то есть

   $$\Delta \vdash \alpha \,\&\, \neg\alpha$$

   4.2 Доказательство конечной длины и использует конечное количество гипотез $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\} \subset \Delta$, то есть

   $$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \vdash \alpha \,\&\, \neg\alpha$$

Дополнение... (завершение доказательства)

4. Δ непротиворечиво:

   4.1 Пусть Δ противоречиво, то есть
   $$\Delta \vdash \alpha \,\&\, \neg\alpha$$

   4.2 Доказательство конечной длины и использует конечное количество гипотез $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\} \subset \Delta$, то есть
   $$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \vdash \alpha \,\&\, \neg\alpha$$

   4.3 Пусть $\delta_i \in \Gamma_{d_i}$, тогда
   $$\Gamma_{d_1} \cup \Gamma_{d_2} \cup \dots \cup \Gamma_{d_n} \vdash \alpha \,\&\, \neg\alpha$$

Дополнение... (завершение доказательства)

4. Δ непротиворечиво:
   4.1 Пусть Δ противоречиво, то есть
   $$\Delta \vdash \alpha \,\&\, \neg\alpha$$
   4.2 Доказательство конечной длины и использует конечное количество гипотез $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\} \subset \Delta$, то есть
   $$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \vdash \alpha \,\&\, \neg\alpha$$
   4.3 Пусть $\delta_i \in \Gamma_{d_i}$, тогда
   $$\Gamma_{d_1} \cup \Gamma_{d_2} \cup \dots \cup \Gamma_{d_n} \vdash \alpha \,\&\, \neg\alpha$$
   4.4 Но $\Gamma_{d_1} \cup \Gamma_{d_2} \cup \dots \cup \Gamma_{d_n} = \Gamma_{\max(d_1, d_2, \dots, d_n)}$, которое непротиворечиво, и потому
   $$\Gamma_{d_1} \cup \Gamma_{d_2} \cup \dots \cup \Gamma_{d_n} \nvdash \alpha \,\&\, \neg\alpha$$

Дополнение... (завершение доказательства)

4. Δ непротиворечиво:

   4.1 Пусть Δ противоречиво, то есть

   $$\Delta \vdash \alpha \,\&\, \neg\alpha$$

   4.2 Доказательство конечной длины и использует конечное количество гипотез $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\} \subset \Delta$, то есть

   $$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \vdash \alpha \,\&\, \neg\alpha$$

   4.3 Пусть $\delta_i \in \Gamma_{d_i}$, тогда

   $$\Gamma_{d_1} \cup \Gamma_{d_2} \cup \dots \cup \Gamma_{d_n} \vdash \alpha \,\&\, \neg\alpha$$

   4.4 Но $\Gamma_{d_1} \cup \Gamma_{d_2} \cup \dots \cup \Gamma_{d_n} = \Gamma_{\max(d_1, d_2, \dots, d_n)}$, которое непротиворечиво, и потому

   $$\Gamma_{d_1} \cup \Gamma_{d_2} \cup \dots \cup \Gamma_{d_n} \not\vdash \alpha \,\&\, \neg\alpha$$

$\square$

Модель для множества формул

Определение

Моделью для множества формул F назовём такую модель $\mathcal{M}$, что при всяком $\varphi \in F$ выполнено $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}} = И$.

Модель для множества формул

Определение

Моделью для множества формул F назовём такую модель $\mathcal{M}$, что при всяком $\varphi \in F$ выполнено $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}} = И$.
Альтернативное обозначение: $\mathcal{M} \models \varphi$.

Модели для непротиворечивых множеств замкнутых бескванторных формул

Теорема

Любое непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул имеет модель.

Конструкция для модели

Определение

Пусть M — полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул. Тогда модель $\mathcal{M}$ задаётся так:

Конструкция для модели

Определение

Пусть M — полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул. Тогда модель $\mathcal{M}$ задаётся так:

1. *D — множество всевозможных предметных выражений без предметных переменных. Оно непусто (язык обычно содержит много нуль-местных функций), но если пусто — добавим туда какое-нибудь одно значение, пусть “z”.*

Конструкция для модели

Определение

Пусть M — полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул. Тогда модель $\mathcal{M}$ задаётся так:

1. *D — множество всевозможных предметных выражений без предметных переменных. Оно непусто (язык обычно содержит много нуль-местных функций), но если пусто — добавим туда какое-нибудь одно значение, пусть "z".*
2. $[\![f(\theta_1, \dots, \theta_n)]\!] = \text{“}f(\text{”} +\!\!+ [\![\theta_1]\!] +\!\!+ \text{“},\text{”} +\!\!+ \dots +\!\!+ \text{“},\text{”} +\!\!+ [\![\theta_n]\!] +\!\!+ \text{“})\text{”}$

Конструкция для модели

Определение

Пусть M — полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул. Тогда модель $\mathcal{M}$ задаётся так:

1. *D — множество всевозможных предметных выражений без предметных переменных. Оно непусто (язык обычно содержит много нуль-местных функций), но если пусто — добавим туда какое-нибудь одно значение, пусть "z".*
2. $[\![f(\theta_1, \dots, \theta_n)]\!] = \text{“}f(\text{”} + [\![\theta_1]\!] + \text{“},\text{”} + \dots + \text{“},\text{”} + [\![\theta_n]\!] + \text{“})\text{”}$
3. $[\![P(\theta_1, \dots, \theta_n)]\!] = \begin{cases} \text{И}, & \text{если } P(\theta_1, \dots, \theta_n) \in M \\ \text{Л}, & \text{иначе} \end{cases}$

Конструкция для модели

Определение

Пусть M — полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул. Тогда модель $\mathcal{M}$ задаётся так:

1. *D — множество всевозможных предметных выражений без предметных переменных. Оно непусто (язык обычно содержит много нуль-местных функций), но если пусто — добавим туда какое-нибудь одно значение, пусть "z".*
2. $[\![f(\theta_1,\dots,\theta_n)]\!] = \text{“f(”} + [\![\theta_1]\!] + \text{“,”} + \dots + \text{“,”} + [\![\theta_n]\!] + \text{“)”}$
3. $[\![P(\theta_1,\dots,\theta_n)]\!] = \begin{cases} \text{И}, & \text{если } P(\theta_1,\dots,\theta_n) \in M \\ \text{Л}, & \text{иначе} \end{cases}$
4. *Так как $D \neq \varnothing$, то найдётся $z \in D$. Тогда $[\![x]\!] = z$. Это ничему не помешает, так как формулы замкнуты.*

Доказательство корректности

Лемма

Пусть φ *— бескванторная формула, тогда* $\mathcal{M} \models \varphi$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi \in M$.

Доказательство корректности

Лемма

Пусть φ — бескванторная формула, тогда $\mathcal{M} \models \varphi$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in M$.

Доказательство (индукция по длине формулы φ).

1. База. φ — предикат. Требуемое очевидно по определению $\mathcal{M}$.

Доказательство корректности

Лемма

Пусть φ — бескванторная формула, тогда $\mathcal{M} \models \varphi$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in M$.

Доказательство (индукция по длине формулы φ).

1. База. φ — предикат. Требуемое очевидно по определению $\mathcal{M}$.
2. Переход. Пусть $\varphi = \alpha \star \beta$ (или $\varphi = \neg\alpha$), причём $\mathcal{M} \models \alpha$ ($\mathcal{M} \models \beta$) тогда и только тогда, когда $\alpha \in M$ ($\beta \in M$).

Доказательство корректности

Лемма

Пусть φ — бескванторная формула, тогда $\mathcal{M} \models \varphi$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in M$.

Доказательство (индукция по длине формулы φ).

1. База. φ — предикат. Требуемое очевидно по определению $\mathcal{M}$.
2. Переход. Пусть $\varphi = \alpha \star \beta$ (или $\varphi = \neg\alpha$), причём $\mathcal{M} \models \alpha$ ($\mathcal{M} \models \beta$) тогда и только тогда, когда $\alpha \in M$ ($\beta \in M$).
   Тогда покажем требуемое для каждой связки в отдельности. А именно, для каждой связки покажем два утверждения:
   2.1 если $\mathcal{M} \models \alpha \star \beta$, то $\alpha \star \beta \in M$.
   2.2 если $\mathcal{M} \not\models \alpha \star \beta$, то $\alpha \star \beta \notin M$.

$\square$

Доказательство утверждений для связок

Если $\varphi = \alpha \to \beta$ и для любой формулы ζ, более короткой, чем φ, выполнено $\mathcal{M} \models \zeta$ тогда и только тогда, когда $\zeta \in M$, тогда:

1. если $\mathcal{M} \models \alpha \to \beta$, то $\alpha \to \beta \in M$;
2. если $\mathcal{M} \not\models \alpha \to \beta$, то $\alpha \to \beta \notin M$.

Доказательство (разбором случаев).

Доказательство утверждений для связок

Если $\varphi = \alpha \rightarrow \beta$ и для любой формулы ζ, более короткой, чем φ, выполнено $\mathcal{M} \models \zeta$ тогда и только тогда, когда $\zeta \in M$, тогда:

1. если $\mathcal{M} \models \alpha \rightarrow \beta$, то $\alpha \rightarrow \beta \in M$;
2. если $\mathcal{M} \not\models \alpha \rightarrow \beta$, то $\alpha \rightarrow \beta \notin M$.

Доказательство (разбором случаев).

1. $\mathcal{M} \models \alpha \rightarrow \beta$: $[\![\alpha]\!] =$ Л.

Доказательство утверждений для связок

Если $\varphi = \alpha \to \beta$ и для любой формулы ζ, более короткой, чем φ, выполнено $\mathcal{M} \models \zeta$ тогда и только тогда, когда $\zeta \in M$, тогда:

1. если $\mathcal{M} \models \alpha \to \beta$, то $\alpha \to \beta \in M$;
2. если $\mathcal{M} \not\models \alpha \to \beta$, то $\alpha \to \beta \notin M$.

Доказательство (разбором случаев).

1. $\mathcal{M} \models \alpha \to \beta$: $[\![\alpha]\!] =$ Л. Тогда по предположению $\alpha \notin M$, потому по полноте $\neg\alpha \in M$.

Доказательство утверждений для связок

Если $\varphi = \alpha \to \beta$ и для любой формулы ζ, более короткой, чем φ, выполнено $\mathcal{M} \models \zeta$ тогда и только тогда, когда $\zeta \in M$, тогда:

1. если $\mathcal{M} \models \alpha \to \beta$, то $\alpha \to \beta \in M$;
2. если $\mathcal{M} \not\models \alpha \to \beta$, то $\alpha \to \beta \notin M$.

Доказательство (разбором случаев).

1. $\mathcal{M} \models \alpha \to \beta$: $[\![\alpha]\!] =$ Л. Тогда по предположению $\alpha \notin M$, потому по полноте $\neg\alpha \in M$. И, поскольку в ИВ $\neg\alpha \vdash \alpha \to \beta$, то $M \vdash \alpha \to \beta$.

Доказательство утверждений для связок

Если $\varphi = \alpha \to \beta$ и для любой формулы ζ, более короткой, чем φ, выполнено $\mathcal{M} \models \zeta$ тогда и только тогда, когда $\zeta \in M$, тогда:

1. если $\mathcal{M} \models \alpha \to \beta$, то $\alpha \to \beta \in M$;
2. если $\mathcal{M} \not\models \alpha \to \beta$, то $\alpha \to \beta \notin M$.

Доказательство (разбором случаев).

1. $\mathcal{M} \models \alpha \to \beta$: $[\![\alpha]\!] = $ Л. Тогда по предположению $\alpha \notin M$, потому по полноте $\neg\alpha \in M$. И, поскольку в ИВ $\neg\alpha \vdash \alpha \to \beta$, то $M \vdash \alpha \to \beta$. Значит, $\alpha \to \beta \in M$, иначе по полноте $\neg(\alpha \to \beta) \in M$, что делает M противоречивым.

Доказательство утверждений для связок

Если $\varphi = \alpha \to \beta$ и для любой формулы ζ, более короткой, чем φ, выполнено $\mathcal{M} \models \zeta$ тогда и только тогда, когда $\zeta \in M$, тогда:

1. если $\mathcal{M} \models \alpha \to \beta$, то $\alpha \to \beta \in M$;
2. если $\mathcal{M} \not\models \alpha \to \beta$, то $\alpha \to \beta \notin M$.

Доказательство (разбором случаев).

1. $\mathcal{M} \models \alpha \to \beta$: $[\![\alpha]\!] =$ Л. Тогда по предположению $\alpha \notin M$, потому по полноте $\neg\alpha \in M$. И, поскольку в ИВ $\neg\alpha \vdash \alpha \to \beta$, то $M \vdash \alpha \to \beta$. Значит, $\alpha \to \beta \in M$, иначе по полноте $\neg(\alpha \to \beta) \in M$, что делает M противоречивым.
2. $\mathcal{M} \models \alpha \to \beta$: $[\![\alpha]\!] =$ И и $[\![\beta]\!] =$ И. Рассуждая аналогично, используя $\alpha, \beta \vdash \alpha \to \beta$, приходим к $\alpha \to \beta \in M$.

Доказательство утверждений для связок

Если $\varphi = \alpha \rightarrow \beta$ и для любой формулы ζ, более короткой, чем φ, выполнено $\mathcal{M} \models \zeta$ тогда и только тогда, когда $\zeta \in M$, тогда:

1. если $\mathcal{M} \models \alpha \rightarrow \beta$, то $\alpha \rightarrow \beta \in M$;
2. если $\mathcal{M} \not\models \alpha \rightarrow \beta$, то $\alpha \rightarrow \beta \notin M$.

Доказательство (разбором случаев).

1. $\mathcal{M} \models \alpha \rightarrow \beta$: $[\![\alpha]\!] =$ Л. Тогда по предположению $\alpha \notin M$, потому по полноте $\neg\alpha \in M$. И, поскольку в ИВ $\neg\alpha \vdash \alpha \rightarrow \beta$, то $M \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Значит, $\alpha \rightarrow \beta \in M$, иначе по полноте $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \in M$, что делает M противоречивым.
2. $\mathcal{M} \models \alpha \rightarrow \beta$: $[\![\alpha]\!] =$ И и $[\![\beta]\!] =$ И. Рассуждая аналогично, используя $\alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$, приходим к $\alpha \rightarrow \beta \in M$.
3. $\mathcal{M} \not\models \alpha \rightarrow \beta$. Тогда $[\![\alpha]\!] =$ И, $[\![\beta]\!] =$ Л,

Доказательство утверждений для связок

Если $\varphi = \alpha \to \beta$ и для любой формулы ζ, более короткой, чем φ, выполнено $\mathcal{M} \models \zeta$ тогда и только тогда, когда $\zeta \in M$, тогда:

1. если $\mathcal{M} \models \alpha \to \beta$, то $\alpha \to \beta \in M$;
2. если $\mathcal{M} \not\models \alpha \to \beta$, то $\alpha \to \beta \notin M$.

Доказательство (разбором случаев).

1. $\mathcal{M} \models \alpha \to \beta$: $[\![\alpha]\!] = Л$. Тогда по предположению $\alpha \notin M$, потому по полноте $\neg\alpha \in M$. И, поскольку в ИВ $\neg\alpha \vdash \alpha \to \beta$, то $M \vdash \alpha \to \beta$. Значит, $\alpha \to \beta \in M$, иначе по полноте $\neg(\alpha \to \beta) \in M$, что делает M противоречивым.
2. $\mathcal{M} \models \alpha \to \beta$: $[\![\alpha]\!] = И$ и $[\![\beta]\!] = И$. Рассуждая аналогично, используя $\alpha, \beta \vdash \alpha \to \beta$, приходим к $\alpha \to \beta \in M$.
3. $\mathcal{M} \not\models \alpha \to \beta$. Тогда $[\![\alpha]\!] = И$, $[\![\beta]\!] = Л$, то есть $\alpha \in M$ и $\neg\beta \in M$.

Доказательство утверждений для связок

Если $\varphi = \alpha \to \beta$ и для любой формулы ζ, более короткой, чем φ, выполнено $\mathcal{M} \models \zeta$ тогда и только тогда, когда $\zeta \in M$, тогда:

1. если $\mathcal{M} \models \alpha \to \beta$, то $\alpha \to \beta \in M$;
2. если $\mathcal{M} \not\models \alpha \to \beta$, то $\alpha \to \beta \notin M$.

Доказательство (разбором случаев).

1. $\mathcal{M} \models \alpha \to \beta$: $[\![\alpha]\!] =$ Л. Тогда по предположению $\alpha \notin M$, потому по полноте $\neg\alpha \in M$. И, поскольку в ИВ $\neg\alpha \vdash \alpha \to \beta$, то $M \vdash \alpha \to \beta$. Значит, $\alpha \to \beta \in M$, иначе по полноте $\neg(\alpha \to \beta) \in M$, что делает M противоречивым.
2. $\mathcal{M} \models \alpha \to \beta$: $[\![\alpha]\!] =$ И и $[\![\beta]\!] =$ И. Рассуждая аналогично, используя $\alpha, \beta \vdash \alpha \to \beta$, приходим к $\alpha \to \beta \in M$.
3. $\mathcal{M} \not\models \alpha \to \beta$. Тогда $[\![\alpha]\!] =$ И, $[\![\beta]\!] =$ Л, то есть $\alpha \in M$ и $\neg\beta \in M$. Также, $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \to \beta)$, отсюда $M \vdash \neg(\alpha \to \beta)$.

Доказательство утверждений для связок

Если $\varphi = \alpha \to \beta$ и для любой формулы ζ, более короткой, чем φ, выполнено $\mathcal{M} \models \zeta$ тогда и только тогда, когда $\zeta \in M$, тогда:

1. если $\mathcal{M} \models \alpha \to \beta$, то $\alpha \to \beta \in M$;
2. если $\mathcal{M} \not\models \alpha \to \beta$, то $\alpha \to \beta \notin M$.

Доказательство (разбором случаев).

1. $\mathcal{M} \models \alpha \to \beta$: $[\![\alpha]\!] =$ Л. Тогда по предположению $\alpha \notin M$, потому по полноте $\neg\alpha \in M$. И, поскольку в ИВ $\neg\alpha \vdash \alpha \to \beta$, то $M \vdash \alpha \to \beta$. Значит, $\alpha \to \beta \in M$, иначе по полноте $\neg(\alpha \to \beta) \in M$, что делает M противоречивым.
2. $\mathcal{M} \models \alpha \to \beta$: $[\![\alpha]\!] =$ И и $[\![\beta]\!] =$ И. Рассуждая аналогично, используя $\alpha, \beta \vdash \alpha \to \beta$, приходим к $\alpha \to \beta \in M$.
3. $\mathcal{M} \not\models \alpha \to \beta$. Тогда $[\![\alpha]\!] =$ И, $[\![\beta]\!] =$ Л, то есть $\alpha \in M$ и $\neg\beta \in M$. Также, $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \to \beta)$, отсюда $M \vdash \neg(\alpha \to \beta)$. Предположим, что $\alpha \to \beta \in M$, то $M \vdash \alpha \to \beta$ — отсюда $\alpha \to \beta \notin M$.

$\square$

Доказательство теоремы о существовании модели

Доказательство.

Пусть M — непротиворечивое множество замкнутых бесскванторных формул.

Доказательство теоремы о существовании модели

Доказательство.

Пусть M — непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул.
По теореме о пополнении существует M' — полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул, что $M \subseteq M'$.

Доказательство теоремы о существовании модели

Доказательство.

Пусть M — непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул.
По теореме о пополнении существует M' — полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул, что $M \subseteq M'$.
По лемме M' имеет модель, эта модель подойдёт для M. $\square$

Формулировка и схема доказательства теоремы Гёделя о полноте

Теорема (Гёделя о полноте исчисления предикатов)

Если M — непротиворечивое множество замкнутых формул, то оно имеет модель.

Схема доказательства.

Формулы с кванторами

Бескванторные

$$\begin{tikzcd} M \arrow[dr, "\text{сохраняет непротиворечивость}"] & & & \mathcal{M} \\ & M^{\text{Б}} \arrow[r, "\text{теорема о существовании модели}"'] & \mathcal{M} \arrow[ur, "\text{тоже модель}"'] & \end{tikzcd}$$

□

Поверхностные кванторы (предварённая форма)

Определение

Формула φ имеет поверхностные кванторы (находится в предварённой форме), если соответствует грамматике

$$\varphi ::= \forall x.\varphi \mid \exists x.\varphi \mid \tau$$

где τ — формула без кванторов

Поверхностные кванторы (предварённая форма)

Определение

Формула φ имеет поверхностные кванторы (находится в предварённой форме), если соответствует грамматике

$$\varphi ::= \forall x.\varphi \mid \exists x.\varphi \mid \tau$$

где τ — формула без кванторов

Теорема

Для любой замкнутой формулы ψ найдётся такая формула φ с поверхностными кванторами, что $\vdash \psi \to \varphi$ и $\vdash \varphi \to \psi$

Доказательство.

Индукция по структуре, применение теорем о перемещении кванторов. $\square$

Построение M^*

- Пусть M — полное непротиворечивое множество замкнутых формул с поверхностными кванторами (очевидно, счётное).

Построение M^*

- Пусть M — полное непротиворечивое множество замкнутых формул с поверхностными кванторами (очевидно, счётное). Построим семейство непротиворечивых множеств замкнутых формул M_k.

Построение M^*

- Пусть M — полное непротиворечивое множество замкнутых формул с поверхностными кванторами (очевидно, счётное). Построим семейство непротиворечивых множеств замкнутых формул M_k.
- Пусть d_i^k — семейство *свежих* констант, в M не встречающихся.

Построение M^*

- Пусть M — полное непротиворечивое множество замкнутых формул с поверхностными кванторами (очевидно, счётное). Построим семейство непротиворечивых множеств замкнутых формул M_k.
- Пусть d_i^k — семейство *свежих* констант, в M не встречающихся.
- Индуктивно построим M_k:
  - База: $M_0 = M$

Построение M^*

- Пусть M — полное непротиворечивое множество замкнутых формул с поверхностными кванторами (очевидно, счётное). Построим семейство непротиворечивых множеств замкнутых формул M_k.
- Пусть d_i^k — семейство *свежих* констант, в M не встречающихся.
- Индуктивно построим M_k:
  - База: $M_0 = M$
  - Переход: положим $M_{k+1} = M_k \cup S$, где множество S получается перебором всех формул $\varphi_i \in M_k$.

Построение M^*

- Пусть M — полное непротиворечивое множество замкнутых формул с поверхностными кванторами (очевидно, счётное). Построим семейство непротиворечивых множеств замкнутых формул M_k.
- Пусть d_i^k — семейство *свежих* констант, в M не встречающихся.
- Индуктивно построим M_k:
  - База: $M_0 = M$
  - Переход: положим $M_{k+1} = M_k \cup S$, где множество S получается перебором всех формул $\varphi_i \in M_k$.
    1. φ_i — формула без кванторов, пропустим;

Построение M^*

- Пусть M — полное непротиворечивое множество замкнутых формул с поверхностными кванторами (очевидно, счётное). Построим семейство непротиворечивых множеств замкнутых формул M_k.
- Пусть d_i^k — семейство *свежих* констант, в M не встречающихся.
- Индуктивно построим M_k:
  - База: $M_0 = M$
  - Переход: положим $M_{k+1} = M_k \cup S$, где множество S получается перебором всех формул $\varphi_i \in M_k$.
    1. φ_i — формула без кванторов, пропустим;
    2. $\varphi_i = \forall x.\psi$ — добавим к S все формулы вида $\psi[x := \theta]$, где θ — всевозможные замкнутые термы, использующие символы из M_k;

Построение M^*

- Пусть M — полное непротиворечивое множество замкнутых формул с поверхностными кванторами (очевидно, счётное). Построим семейство непротиворечивых множеств замкнутых формул M_k.
- Пусть d_i^k — семейство *свежих* констант, в M не встречающихся.
- Индуктивно построим M_k:
  - База: $M_0 = M$
  - Переход: положим $M_{k+1} = M_k \cup S$, где множество S получается перебором всех формул $\varphi_i \in M_k$.
    1. φ_i — формула без кванторов, пропустим;
    2. $\varphi_i = \forall x.\psi$ — добавим к S все формулы вида $\psi[x := \theta]$, где θ — всевозможные замкнутые термы, использующие символы из M_k;
    3. $\varphi_i = \exists x.\psi$ — добавим к S формулу $\psi[x := d_i^{k+1}]$, где d_i^{k+1} — некоторая свежая, ранее не использовавшаяся в M_k, константа.

Построение M^*

- Пусть M — полное непротиворечивое множество замкнутых формул с поверхностными кванторами (очевидно, счётное). Построим семейство непротиворечивых множеств замкнутых формул M_k.
- Пусть d_i^k — семейство *свежих* констант, в M не встречающихся.
- Индуктивно построим M_k:
  - База: $M_0 = M$
  - Переход: положим $M_{k+1} = M_k \cup S$, где множество S получается перебором всех формул $\varphi_i \in M_k$.
    1. φ_i — формула без кванторов, пропустим;
    2. $\varphi_i = \forall x.\psi$ — добавим к S все формулы вида $\psi[x := \theta]$, где θ — всевозможные замкнутые термы, использующие символы из M_k;
    3. $\varphi_i = \exists x.\psi$ — добавим к S формулу $\psi[x := d_i^{k+1}]$, где d_i^{k+1} — некоторая свежая, ранее не использовавшаяся в M_k, константа.

Непротиворечивость M_k

Лемма

Если M непротиворечиво, то каждое множество из M_k — непротиворечиво

Доказательство.

Доказательство по индукции, база очевидна ($M_0 = M$).

Непротиворечивость M_k

Лемма

Если M непротиворечиво, то каждое множество из M_k — непротиворечиво

Доказательство.

Доказательство по индукции, база очевидна ($M_0 = M$). Переход:

- пусть M_k непротиворечиво, но M_{k+1} — противоречиво: $M_k, M_{k+1} \setminus M_k \vdash A \,\&\, \neg A$.

Непротиворечивость M_k

Лемма

Если M непротиворечиво, то каждое множество из M_k — непротиворечиво

Доказательство.

Доказательство по индукции, база очевидна ($M_0 = M$). Переход:

- пусть M_k непротиворечиво, но M_{k+1} — противоречиво: $M_k, M_{k+1} \setminus M_k \vdash A \,\&\, \neg A$.
- Тогда (т.к. доказательство конечной длины): $M_k, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \vdash A \,\&\, \neg A$, где $\gamma_i \in M_{k+1} \setminus M_k$.

Непротиворечивость M_k

Лемма

Если M непротиворечиво, то каждое множество из M_k — непротиворечиво

Доказательство.

Доказательство по индукции, база очевидна ($M_0 = M$). Переход:

- пусть M_k непротиворечиво, но M_{k+1} — противоречиво: $M_k, M_{k+1} \setminus M_k \vdash A \,\&\, \neg A$.
- Тогда (т.к. доказательство конечной длины): $M_k, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \vdash A \,\&\, \neg A$, где $\gamma_i \in M_{k+1} \setminus M_k$.
- По теореме о дедукции: $M_k \vdash \gamma_1 \to \gamma_2 \to \dots \to \gamma_n \to A \,\&\, \neg A$.

Непротиворечивость M_k

Лемма

Если M непротиворечиво, то каждое множество из M_k — непротиворечиво

Доказательство.

Доказательство по индукции, база очевидна ($M_0 = M$). Переход:

- пусть M_k непротиворечиво, но M_{k+1} — противоречиво: $M_k, M_{k+1} \setminus M_k \vdash A \mathbin{\&} \neg A$.
- Тогда (т.к. доказательство конечной длины): $M_k, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \vdash A \mathbin{\&} \neg A$, где $\gamma_i \in M_{k+1} \setminus M_k$.
- По теореме о дедукции: $M_k \vdash \gamma_1 \to \gamma_2 \to \dots \to \gamma_n \to A \mathbin{\&} \neg A$.
- Научимся выкидывать первую посылку: $M_k \vdash \gamma_2 \to \dots \to \gamma_n \to A \mathbin{\&} \neg A$.

Непротиворечивость M_k

Лемма

Если M непротиворечиво, то каждое множество из M_k — непротиворечиво

Доказательство.

Доказательство по индукции, база очевидна ($M_0 = M$). Переход:

- пусть M_k непротиворечиво, но M_{k+1} — противоречиво: $M_k, M_{k+1} \setminus M_k \vdash A \,\&\, \neg A$.
- Тогда (т.к. доказательство конечной длины): $M_k, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \vdash A \,\&\, \neg A$, где $\gamma_i \in M_{k+1} \setminus M_k$.
- По теореме о дедукции: $M_k \vdash \gamma_1 \to \gamma_2 \to \dots \to \gamma_n \to A \,\&\, \neg A$.
- Научимся выкидывать первую посылку: $M_k \vdash \gamma_2 \to \dots \to \gamma_n \to A \,\&\, \neg A$.
- И по индукции придём к противоречию: $M_k \vdash A \,\&\, \neg A$.

$\square$

Устранение посылки

Лемма

Если $M_k \vdash \gamma \to W$ *и* $\gamma \in M_{k+1} \setminus M_k$, *то* $M_k \vdash W$.

Доказательство.

Покажем, как дополнить доказательство до $M_k \vdash W$, в зависимости от происхождения γ:

Устранение посылки

Лемма

Если $M_k \vdash \gamma \to W$ *и* $\gamma \in M_{k+1} \setminus M_k$, *то* $M_k \vdash W$.

Доказательство.

Покажем, как дополнить доказательство до $M_k \vdash W$, в зависимости от происхождения γ:

- Случай $\forall x.\varphi$: $\gamma = \varphi[x := \theta]$.

Устранение посылки

Лемма

Если $M_k \vdash \gamma \to W$ *и* $\gamma \in M_{k+1} \setminus M_k$, *то* $M_k \vdash W$.

Доказательство.

Покажем, как дополнить доказательство до $M_k \vdash W$, в зависимости от происхождения γ:

- Случай $\forall x.\varphi$: $\gamma = \varphi[x := \theta]$. Допишем в конец доказательства:

  $\forall x.\varphi$ (гипотеза)

Устранение посылки

Лемма

Если $M_k \vdash \gamma \to W$ *и* $\gamma \in M_{k+1} \setminus M_k$*, то* $M_k \vdash W$*.*

Доказательство.

Покажем, как дополнить доказательство до $M_k \vdash W$, в зависимости от происхождения γ:

- Случай $\forall x.\varphi$: $\gamma = \varphi[x := \theta]$. Допишем в конец доказательства:

$\forall x.\varphi$	(гипотеза)
$(\forall x.\varphi) \to (\varphi[x := \theta])$	(сх. акс. 11)

Устранение посылки

Лемма

Если $M_k \vdash \gamma \to W$ *и* $\gamma \in M_{k+1} \setminus M_k$, *то* $M_k \vdash W$.

Доказательство.

Покажем, как дополнить доказательство до $M_k \vdash W$, в зависимости от происхождения γ:

- Случай $\forall x.\varphi$: $\gamma = \varphi[x := \theta]$. Допишем в конец доказательства:

$\forall x.\varphi$	(гипотеза)
$(\forall x.\varphi) \to (\varphi[x := \theta])$	(сх. акс. 11)
γ	(M.P.)

Устранение посылки

Лемма

Если $M_k \vdash \gamma \to W$ *и* $\gamma \in M_{k+1} \setminus M_k$, *то* $M_k \vdash W$.

Доказательство.

Покажем, как дополнить доказательство до $M_k \vdash W$, в зависимости от происхождения γ:

- Случай $\forall x.\varphi$: $\gamma = \varphi[x := \theta]$. Допишем в конец доказательства:

$\forall x.\varphi$	(гипотеза)
$(\forall x.\varphi) \to (\varphi[x := \theta])$	(сх. акс. 11)
γ	(M.P.)
W	(M.P.)

$\square$

Случай $\exists x.\varphi$

- $\gamma = \varphi[x := d_i^{k+1}]$

Случай $\exists x.\varphi$

- $\gamma = \varphi[x := d_i^{k+1}]$
- Перестроим доказательство $M_k \vdash \gamma \to W$: заменим во всём доказательстве d_i^{k+1} на y. Коллизий нет: под квантором d_i^{k+1} не стоит, переменной не является.

Случай $\exists x.\varphi$

- $\gamma = \varphi[x := d_i^{k+1}]$
- Перестроим доказательство $M_k \vdash \gamma \to W$: заменим во всём доказательстве d_i^{k+1} на y. Коллизий нет: под квантором d_i^{k+1} не стоит, переменной не является.
- Получим доказательство $M_k \vdash \gamma[d_i^{k+1} := y] \to W$ и дополним его:

  $\varphi[x := y] \to W \qquad\qquad \varphi[x := d_i^{k+1}][d_i^{k+1} := y]$

Случай $\exists x.\varphi$

- $\gamma = \varphi[x := d_i^{k+1}]$
- Перестроим доказательство $M_k \vdash \gamma \to W$: заменим во всём доказательстве d_i^{k+1} на y. Коллизий нет: под квантором d_i^{k+1} не стоит, переменной не является.
- Получим доказательство $M_k \vdash \gamma[d_i^{k+1} := y] \to W$ и дополним его:

$\varphi[x := y] \to W$	$\varphi[x := d_i^{k+1}][d_i^{k+1} := y]$
$(\exists y.\varphi[x := y]) \to W$	y не входит в W

Случай $\exists x.\varphi$

- $\gamma = \varphi[x := d_i^{k+1}]$
- Перестроим доказательство $M_k \vdash \gamma \to W$: заменим во всём доказательстве d_i^{k+1} на y. Коллизий нет: под квантором d_i^{k+1} не стоит, переменной не является.
- Получим доказательство $M_k \vdash \gamma[d_i^{k+1} := y] \to W$ и дополним его:

$\varphi[x := y] \to W$	$\varphi[x := d_i^{k+1}][d_i^{k+1} := y]$
$(\exists y.\varphi[x := y]) \to W$	y не входит в W
$(\exists x.\varphi) \to (\exists y.\varphi[x := y])$	доказуемо (упражнение)

Случай $\exists x.\varphi$

- $\gamma = \varphi[x := d_i^{k+1}]$
- Перестроим доказательство $M_k \vdash \gamma \to W$: заменим во всём доказательстве d_i^{k+1} на y. Коллизий нет: под квантором d_i^{k+1} не стоит, переменной не является.
- Получим доказательство $M_k \vdash \gamma[d_i^{k+1} := y] \to W$ и дополним его:

$\varphi[x := y] \to W$	$\varphi[x := d_i^{k+1}][d_i^{k+1} := y]$
$(\exists y.\varphi[x := y]) \to W$	y не входит в W
$(\exists x.\varphi) \to (\exists y.\varphi[x := y])$	доказуемо (упражнение)
$\dots$	
$(\exists x.\varphi) \to W$	доказуемо как $(\alpha \to \beta) \to (\beta \to \gamma) \vdash \alpha \to \gamma$

Случай $\exists x.\varphi$

- $\gamma = \varphi[x := d_i^{k+1}]$
- Перестроим доказательство $M_k \vdash \gamma \to W$: заменим во всём доказательстве d_i^{k+1} на y. Коллизий нет: под квантором d_i^{k+1} не стоит, переменной не является.
- Получим доказательство $M_k \vdash \gamma[d_i^{k+1} := y] \to W$ и дополним его:

$\varphi[x := y] \to W$	$\varphi[x := d_i^{k+1}][d_i^{k+1} := y]$
$(\exists y.\varphi[x := y]) \to W$	y не входит в W
$(\exists x.\varphi) \to (\exists y.\varphi[x := y])$	доказуемо (упражнение)
$\dots$	
$(\exists x.\varphi) \to W$	доказуемо как $(\alpha \to \beta) \to (\beta \to \gamma) \vdash \alpha \to \gamma$
$\exists x.\varphi$	гипотеза

Случай $\exists x.\varphi$

- $\gamma = \varphi[x := d_i^{k+1}]$
- Перестроим доказательство $M_k \vdash \gamma \rightarrow W$: заменим во всём доказательстве d_i^{k+1} на y. Коллизий нет: под квантором d_i^{k+1} не стоит, переменной не является.
- Получим доказательство $M_k \vdash \gamma[d_i^{k+1} := y] \rightarrow W$ и дополним его:

$\varphi[x := y] \rightarrow W$	$\varphi[x := d_i^{k+1}][d_i^{k+1} := y]$
$(\exists y.\varphi[x := y]) \rightarrow W$	y не входит в W
$(\exists x.\varphi) \rightarrow (\exists y.\varphi[x := y])$	доказуемо (упражнение)
...	
$(\exists x.\varphi) \rightarrow W$	доказуемо как $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \vdash \alpha \rightarrow \gamma$
$\exists x.\varphi$	гипотеза
W	

$\square$

Построение $M^{Б}$

Определение

$M^* = \bigcup_k M_k$

Построение $M^{Б}$

Определение

$M^* = \bigcup_k M_k$

Теорема

M^* непротиворечиво.

Построение $M^{Б}$

Определение

$M^* = \bigcup_k M_k$

Теорема

M^* *непротиворечиво.*

Доказательство.

От противного: доказательство противоречия конечной длины, гипотезы лежат в максимальном M_k, тогда M_k противоречив.

Построение $M^{Б}$

Определение

$M^* = \bigcup_k M_k$

Теорема

M^* непротиворечиво.

Доказательство.

От противного: доказательство противоречия конечной длины, гипотезы лежат в максимальном M_k, тогда M_k противоречив. $\square$

Определение

$M^{Б}$ — множество всех бескванторных формул из M^*.

Построение $M^{Б}$

Определение

$M^* = \bigcup_k M_k$

Теорема

M^* непротиворечиво.

Доказательство.

От противного: доказательство противоречия конечной длины, гипотезы лежат в максимальном M_k, тогда M_k противоречив. $\square$

Определение

$M^{Б}$ — множество всех бескванторных формул из M^*.

Построение $M^{Б}$

Определение

$M^* = \bigcup_k M_k$

Теорема

M^* непротиворечиво.

Доказательство.

От противного: доказательство противоречия конечной длины, гипотезы лежат в максимальном M_k, тогда M_k противоречив. $\square$

Определение

$M^{Б}$ — множество всех бескванторных формул из M^*.

По непротиворечивому множеству M можем построить $M^{Б}$ и для него построить модель $\mathcal{M}$. Покажем, что эта модель годится для M^* (и для M, так как $M \subset M^*$).

Модель для M^*

Лемма

$\mathcal{M}$ есть модель для M^*.

Модель для M^*

Лемма

$\mathcal{M}$ есть модель для M^*.

Доказательство.

Покажем, что при $\varphi \in M^*$ выполнено $\mathcal{M} \models \varphi$. Докажем индукцией по количеству кванторов в φ.

Модель для M^*

Лемма

$\mathcal{M}$ есть модель для M^*.

Доказательство.

Покажем, что при $\varphi \in M^*$ выполнено $\mathcal{M} \models \varphi$. Докажем индукцией по количеству кванторов в φ.

- База: φ без кванторов. Тогда $\varphi \in M^{\text{Б}}$, отсюда $\mathcal{M} \models \varphi$ по построению $\mathcal{M}$.

Модель для M^*

Лемма

$\mathcal{M}$ есть модель для M^*.

Доказательство.

Покажем, что при $\varphi \in M^*$ выполнено $\mathcal{M} \models \varphi$. Докажем индукцией по количеству кванторов в φ.

- База: φ без кванторов. Тогда $\varphi \in M^{\text{Б}}$, отсюда $\mathcal{M} \models \varphi$ по построению $\mathcal{M}$.
- Переход: пусть утверждение выполнено для всех формул с n кванторами. Покажем, что это выполнено и для $n + 1$ кванторов.

Модель для M^*

Лемма

$\mathcal{M}$ есть модель для M^*.

Доказательство.

Покажем, что при $\varphi \in M^*$ выполнено $\mathcal{M} \models \varphi$. Докажем индукцией по количеству кванторов в φ.

- База: φ без кванторов. Тогда $\varphi \in M^{Б}$, отсюда $\mathcal{M} \models \varphi$ по построению $\mathcal{M}$.
- Переход: пусть утверждение выполнено для всех формул с n кванторами. Покажем, что это выполнено и для $n+1$ кванторов.
  - Рассмотрим $\varphi = \exists x.\psi$, случай квантор всеобщности — аналогично.

Модель для M^*

Лемма

$\mathcal{M}$ есть модель для M^*.

Доказательство.

Покажем, что при $\varphi \in M^*$ выполнено $\mathcal{M} \models \varphi$. Докажем индукцией по количеству кванторов в φ.

- База: φ без кванторов. Тогда $\varphi \in M^{Б}$, отсюда $\mathcal{M} \models \varphi$ по построению $\mathcal{M}$.
- Переход: пусть утверждение выполнено для всех формул с n кванторами. Покажем, что это выполнено и для $n+1$ кванторов.
  - Рассмотрим $\varphi = \exists x.\psi$, случай квантор всеобщности — аналогично.
  - Раз $\exists x.\psi \in M^*$, то существует k, что $\exists x.\psi \in M_k$.

Модель для M^*

Лемма

$\mathcal{M}$ есть модель для M^*.

Доказательство.

Покажем, что при $\varphi \in M^*$ выполнено $\mathcal{M} \models \varphi$. Докажем индукцией по количеству кванторов в φ.

- База: φ без кванторов. Тогда $\varphi \in M^{Б}$, отсюда $\mathcal{M} \models \varphi$ по построению $\mathcal{M}$.
- Переход: пусть утверждение выполнено для всех формул с n кванторами. Покажем, что это выполнено и для $n+1$ кванторов.
  - Рассмотрим $\varphi = \exists x.\psi$, случай квантор всеобщности — аналогично.
  - Раз $\exists x.\psi \in M^*$, то существует k, что $\exists x.\psi \in M_k$.
  - Значит, $\psi[x := d_i^{k+1}] \in M_{k+1}$.

Модель для M^*

Лемма

$\mathcal{M}$ есть модель для M^*.

Доказательство.

Покажем, что при $\varphi \in M^*$ выполнено $\mathcal{M} \models \varphi$. Докажем индукцией по количеству кванторов в φ.

- База: φ без кванторов. Тогда $\varphi \in M^{Б}$, отсюда $\mathcal{M} \models \varphi$ по построению $\mathcal{M}$.
- Переход: пусть утверждение выполнено для всех формул с n кванторами. Покажем, что это выполнено и для $n + 1$ кванторов.
  - Рассмотрим $\varphi = \exists x.\psi$, случай квантор всеобщности — аналогично.
  - Раз $\exists x.\psi \in M^*$, то существует k, что $\exists x.\psi \in M_k$.
  - Значит, $\psi[x := d_i^{k+1}] \in M_{k+1}$.
  - По индукционному предположению, $\mathcal{M} \models \psi[x := d_i^{k+1}]$ — в формуле n кванторов.

Модель для M^*

Лемма

$\mathcal{M}$ есть модель для M^*.

Доказательство.

Покажем, что при $\varphi \in M^*$ выполнено $\mathcal{M} \models \varphi$. Докажем индукцией по количеству кванторов в φ.

- База: φ без кванторов. Тогда $\varphi \in M^{Б}$, отсюда $\mathcal{M} \models \varphi$ по построению $\mathcal{M}$.
- Переход: пусть утверждение выполнено для всех формул с n кванторами. Покажем, что это выполнено и для $n+1$ кванторов.
  - Рассмотрим $\varphi = \exists x.\psi$, случай квантор всеобщности — аналогично.
  - Раз $\exists x.\psi \in M^*$, то существует k, что $\exists x.\psi \in M_k$.
  - Значит, $\psi[x := d_i^{k+1}] \in M_{k+1}$.
  - По индукционному предположению, $\mathcal{M} \models \psi[x := d_i^{k+1}]$ — в формуле n кванторов.
  - Но тогда $[\![\psi]\!]^{x:=[\![d_i^{k+1}]\!]} = И$.

Модель для M^*

Лемма

$\mathcal{M}$ есть модель для M^*.

Доказательство.

Показем, что при $\varphi \in M^*$ выполнено $\mathcal{M} \models \varphi$. Докажем индукцией по количеству кванторов в φ.

- База: φ без кванторов. Тогда $\varphi \in M^{Б}$, отсюда $\mathcal{M} \models \varphi$ по построению $\mathcal{M}$.
- Переход: пусть утверждение выполнено для всех формул с n кванторами. Покажем, что это выполнено и для $n+1$ кванторов.
  - Рассмотрим $\varphi = \exists x.\psi$, случай квантор всеобщности — аналогично.
  - Раз $\exists x.\psi \in M^*$, то существует k, что $\exists x.\psi \in M_k$.
  - Значит, $\psi[x := d_i^{k+1}] \in M_{k+1}$.
  - По индукционному предположению, $\mathcal{M} \models \psi[x := d_i^{k+1}]$ — в формуле n кванторов.
  - Но тогда $[\![\psi]\!]^{x:=[\![d_i^{k+1}]\!]} = И$.
  - Отсюда $\mathcal{M} \models \exists x.\psi$.

$\square$

Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов

Теорема (Гёделя о полноте исчисления предикатов)

Если M — замкнутое непротиворечивое множество формул, то оно имеет модель.

Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов

Теорема (Гёделя о полноте исчисления предикатов)

Если M — замкнутое непротиворечивое множество формул, то оно имеет модель.

Доказательство.

- Построим по M множество формул с поверхностными кванторами M'.

Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов

Теорема (Гёделя о полноте исчисления предикатов)

Если M — замкнутое непротиворечивое множество формул, то оно имеет модель.

Доказательство.

- Построим по M множество формул с поверхностными кванторами M'.
- По M' построим непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул $M^{Б}$ ($M^{Б} \subseteq M^*$, теорема о непротиворечивости M^*).

Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов

Теорема (Гёделя о полноте исчисления предикатов)

Если M — замкнутое непротиворечивое множество формул, то оно имеет модель.

Доказательство.

- Построим по M множество формул с поверхностными кванторами M'.
- По M' построим непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул $M^Б$ ($M^Б \subseteq M^*$, теорема о непротиворечивости M^*).
- Дополним его до полного, построим для него модель $\mathcal{M}$ (теорема о существовании модели).

Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов

Теорема (Гёделя о полноте исчисления предикатов)

Если M — замкнутое непротиворечивое множество формул, то оно имеет модель.

Доказательство.

- Построим по M множество формул с поверхностными кванторами M'.
- По M' построим непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул $M^{\text{Б}}$ ($M^{\text{Б}} \subseteq M^*$, теорема о непротиворечивости M^*).
- Дополним его до полного, построим для него модель $\mathcal{M}$ (теорема о существовании модели).
- $\mathcal{M}$ будет моделью и для M' ($M' \subseteq M^*$, лемма о модели для M^*), и, очевидно, для M.

$\square$

Полнота исчисления предикатов

Следствие (из теоремы Гёделя о полноте)

Исчисление предикатов полно.

Доказательство.

- Пусть это не так, и существует формула φ, что $\models \varphi$, но $\nvdash \varphi$.

Полнота исчисления предикатов

Следствие (из теоремы Гёделя о полноте)

Исчисление предикатов полно.

Доказательство.

- Пусть это не так, и существует формула φ, что $\models \varphi$, но $\nvdash \varphi$.
- Тогда рассмотрим $M = \{\neg\varphi\}$.

Полнота исчисления предикатов

Следствие (из теоремы Гёделя о полноте)

Исчисление предикатов полно.

Доказательство.

- Пусть это не так, и существует формула φ, что $\models \varphi$, но $\nvdash \varphi$.
- Тогда рассмотрим $M = \{\neg\varphi\}$.
- M непротиворечиво: если $\neg\varphi \vdash A \,\&\, \neg A$, то $\vdash \varphi$ (упражнение).

Полнота исчисления предикатов

Следствие (из теоремы Гёделя о полноте)

Исчисление предикатов полно.

Доказательство.

- Пусть это не так, и существует формула φ, что $\models \varphi$, но $\nvdash \varphi$.
- Тогда рассмотрим $M = \{\neg\varphi\}$.
- M непротиворечиво: если $\neg\varphi \vdash A \,\&\, \neg A$, то $\vdash \varphi$ (упражнение).
- Значит, у M есть модель $\mathcal{M}$, и $\mathcal{M} \models \neg\varphi$.

Полнота исчисления предикатов

Следствие (из теоремы Гёделя о полноте)

Исчисление предикатов полно.

Доказательство.

- Пусть это не так, и существует формула φ, что $\models \varphi$, но $\nvdash \varphi$.
- Тогда рассмотрим $M = \{\neg\varphi\}$.
- M непротиворечиво: если $\neg\varphi \vdash A \,\&\, \neg A$, то $\vdash \varphi$ (упражнение).
- Значит, у M есть модель $\mathcal{M}$, и $\mathcal{M} \models \neg\varphi$.
- Значит, $[\![\neg\varphi]\!] = \text{И}$, поэтому $[\![\varphi]\!] = \text{Л}$, поэтому $\not\models \varphi$. Противоречие.

$\square$

Непротиворечивость исчисления предикатов

Теорема

Если у множества формул M есть модель $\mathcal{M}$, оно непротиворечиво.

Непротиворечивость исчисления предикатов

Теорема

Если у множества формул M есть модель $\mathcal{M}$, оно непротиворечиво.

Доказательство.

Пусть противоречиво: $M \vdash A \,\&\, \neg A$, в доказательстве использованы гипотезы $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$.

Непротиворечивость исчисления предикатов

Теорема

Если у множества формул M есть модель $\mathcal{M}$, оно непротиворечиво.

Доказательство.

Пусть противоречиво: $M \vdash A \,\&\, \neg A$, в доказательстве использованы гипотезы $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$. Тогда $\vdash \delta_1 \rightarrow \delta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \delta_n \rightarrow A \,\&\, \neg A$, то есть $[\![\delta_1 \rightarrow \delta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \delta_n \rightarrow A \,\&\, \neg A]\!] = \text{И}$ (корректность).

Непротиворечивость исчисления предикатов

Теорема

Если у множества формул M есть модель $\mathcal{M}$, оно непротиворечиво.

Доказательство.

Пусть противоречиво: $M \vdash A \,\&\, \neg A$, в доказательстве использованы гипотезы $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$. Тогда $\vdash \delta_1 \rightarrow \delta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \delta_n \rightarrow A \,\&\, \neg A$, то есть $[\![\delta_1 \rightarrow \delta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \delta_n \rightarrow A \,\&\, \neg A]\!] = И$ (корректность). Поскольку все $[\![\delta_i]\!]_{\mathcal{M}} = И$, то и $[\![A \,\&\, \neg A]\!]_{\mathcal{M}} = И$ (анализ таблицы истинности импликации).

Непротиворечивость исчисления предикатов

Теорема

Если у множества формул M есть модель $\mathcal{M}$, оно непротиворечиво.

Доказательство.

Пусть противоречиво: $M \vdash A \,\&\, \neg A$, в доказательстве использованы гипотезы $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$. Тогда $\vdash \delta_1 \to \delta_2 \to \cdots \to \delta_n \to A \,\&\, \neg A$, то есть $[\![\delta_1 \to \delta_2 \to \cdots \to \delta_n \to A \,\&\, \neg A]\!] = \text{И}$ (корректность). Поскольку все $[\![\delta_i]\!]_{\mathcal{M}} = \text{И}$, то и $[\![A \,\&\, \neg A]\!]_{\mathcal{M}} = \text{И}$ (анализ таблицы истинности импликации). Однако $[\![A \,\&\, \neg A]\!] = \text{Л}$. Противоречие. □

Непротиворечивость исчисления предикатов

Теорема

Если у множества формул M есть модель $\mathcal{M}$, оно непротиворечиво.

Доказательство.

Пусть противоречиво: $M \vdash A \,\&\, \neg A$, в доказательстве использованы гипотезы $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$. Тогда $\vdash \delta_1 \to \delta_2 \to \dots \to \delta_n \to A \,\&\, \neg A$, то есть $[\![\delta_1 \to \delta_2 \to \dots \to \delta_n \to A \,\&\, \neg A]\!] =$ И (корректность). Поскольку все $[\![\delta_i]\!]_{\mathcal{M}} =$ И, то и $[\![A \,\&\, \neg A]\!]_{\mathcal{M}} =$ И (анализ таблицы истинности импликации). Однако $[\![A \,\&\, \neg A]\!] =$ Л. Противоречие. $\square$

Следствие

Исчисление предикатов непротиворечиво

Непротиворечивость исчисления предикатов

Теорема

Если у множества формул M есть модель $\mathcal{M}$, оно непротиворечиво.

Доказательство.

Пусть противоречиво: $M \vdash A \mathbin{\&} \neg A$, в доказательстве использованы гипотезы $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$. Тогда $\vdash \delta_1 \to \delta_2 \to \dots \to \delta_n \to A \mathbin{\&} \neg A$, то есть $[\![\delta_1 \to \delta_2 \to \dots \to \delta_n \to A \mathbin{\&} \neg A]\!] =$ И (корректность). Поскольку все $[\![\delta_i]\!]_{\mathcal{M}} =$ И, то и $[\![A \mathbin{\&} \neg A]\!]_{\mathcal{M}} =$ И (анализ таблицы истинности импликации). Однако $[\![A \mathbin{\&} \neg A]\!] =$ Л. Противоречие. $\square$

Следствие

Исчисление предикатов непротиворечиво

Доказательство.

Рассмотрим $M = \varnothing$ и любую классическую модель. $\square$

Непротиворечивость исчисления предикатов

Теорема

Если у множества формул M есть модель $\mathcal{M}$, оно непротиворечиво.

Доказательство.

Пусть противоречиво: $M \vdash A \,\&\, \neg A$, в доказательстве использованы гипотезы $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$. Тогда $\vdash \delta_1 \rightarrow \delta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \delta_n \rightarrow A \,\&\, \neg A$, то есть $[\![\delta_1 \rightarrow \delta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \delta_n \rightarrow A \,\&\, \neg A]\!] =$ И (корректность). Поскольку все $[\![\delta_i]\!]_{\mathcal{M}} =$ И, то и $[\![A \,\&\, \neg A]\!]_{\mathcal{M}} =$ И (анализ таблицы истинности импликации). Однако $[\![A \,\&\, \neg A]\!] =$ Л. Противоречие. □

Следствие

Исчисление предикатов непротиворечиво

Доказательство.

Рассмотрим $M = \varnothing$ и любую классическую модель. □

Доказательства опираются на непротиворечивость метатеории.

Теорема Гёделя о компактности

Теорема

Если Γ — некоторое семейство бескванторных формул, то Γ имеет модель тогда и только тогда, когда любое его конечное подмножество имеет модель.

Доказательство.

($\Leftarrow$): очевидно

($\Rightarrow$): пусть каждое конечное подмножество имеет модель. Тогда Γ непротиворечиво:

Иначе, для любой σ выполнено $\Gamma \vdash \sigma$. В частности, для $\gamma \in \Gamma$ выполнено $\Gamma \vdash \neg\gamma$. Доказательство имеет конечную длину, и использует конечное количество формул $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$. Тогда рассмотрим $\Sigma = \{\gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, и модель $\mathcal{S}$ для неё. Тогда:

1. $\models_S \gamma$ (определение модели)
2. $\models_S \neg\gamma$ (теорема о корректности: $\Sigma \vdash \neg\gamma$, значит $\Sigma \models \neg\gamma$ в любой модели)

Значит, Γ имеет модель (вспомогательная теорема к теореме Гёделя о полноте). $\square$