

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ
Математическая логика, ИТМО, М3232-М3239, осень 2024 года

Общие замечания

1. Одно задание оценивается в 3.5 балла. При использовании TeX или Turst для оформления задание оценивается в 4 балла. При крайне плохом оформлении оценка может быть понижена до 3 баллов.
2. Заданием (по умолчанию) считается один пункт, занумерованный цифрой или буквой. Пункты без нумерации считаются частями одного задания.
3. Курс можно условно разделить на три части (исчисления высказываний и предикатов, формальная арифметика, теория множеств). В каждой из частей можно ответить не более четырёх заданий.

Задание №1. Знакомство с классическим исчислением высказываний.

При решении заданий вам может потребоваться теорема о дедукции (будет доказана на второй лекции):

Теорема 1. $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\gamma_1, \dots, \gamma_n \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

Пример использования: пусть необходимо доказать $\vdash A \rightarrow A$ — то есть доказать существование вывода формулы $A \rightarrow A$ (заметьте, так поставленное условие не требует этот вывод предъявлять, только доказать его существование). Тогда заметим, что последовательность из одной формулы A доказывает $A \vdash A$. Далее, по теореме о дедукции, отсюда следует и $\vdash A \rightarrow A$ (то есть, существование вывода формулы $A \rightarrow A$, не использующего гипотезы).

Теорема будет доказана конструктивно: будет предъявлен алгоритм, перестраивающий вывод $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \alpha \vdash \beta$ в вывод $\gamma_1, \dots, \gamma_n \vdash \alpha \rightarrow \beta$

1. Докажите:

- (a) $\vdash (A \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- (b) $\vdash \neg(A \& \neg A)$
- (c) $\vdash A \& B \rightarrow B \& A$
- (d) $\vdash A \vee B \rightarrow B \vee A$
- (e) $A \& \neg A \vdash B$

2. Докажите:

- (a) $\vdash A \rightarrow \neg \neg A$
- (b) $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$
- (c) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
- (d) $A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$
- (e) $\neg A, B \vdash A \rightarrow B$

3. Докажите:

- (a) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
- (b) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ (правило контрапозиции)
- (c) $\vdash \neg(\neg A \& \neg B) \rightarrow (A \vee B)$ (вариант I закона де Моргана)
- (d) $\vdash A \vee B \rightarrow \neg(\neg A \& \neg B)$
- (e) $\vdash (\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \& B)$ (II закон де Моргана)
- (f) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$
- (g) $\vdash A \& B \rightarrow A \vee B$
- (h) $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ (закон Пирса)
- (i) $\vdash A \vee \neg A$
- (j) $\vdash (A \& B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow C)$

- (k) $\vdash A \& (B \vee C) \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C)$ (*дистрибутивность*)
- (l) $\vdash (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \& B \rightarrow C)$
- (m) $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$
- (n) $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$

4. Даны высказывания α и β , причём $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ и $\nvdash \beta \rightarrow \alpha$. Укажите способ построения высказывания γ , такого, что $\vdash \alpha \rightarrow \gamma$ и $\vdash \gamma \rightarrow \beta$, причём $\nvdash \gamma \rightarrow \alpha$ и $\nvdash \beta \rightarrow \gamma$.
5. Покажите, что если $\alpha \vdash \beta$ и $\neg\alpha \vdash \beta$, то $\vdash \beta$.
6. Покажите, что классическое исчисление высказываний допускает правило Modus Tollens:

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \neg\psi}{\neg\varphi}$$

А именно, пусть дан некоторый вывод, в котором каждая формула — либо аксиома, либо получена по правилу Modus Ponens, либо имеет вид $\delta_n \equiv \neg\varphi$, причём ранее в доказательстве встречается $\delta_i \equiv \neg\psi$ и $\delta_j \equiv \varphi \rightarrow \psi$ (при этом $\max(i, j) < n$). Тогда такой вывод можно перестроить в корректное доказательство в классическом исчислении высказываний.

В данном задании от вас требуется аккуратное изложение доказательства, видимо, использующее математическую индукцию. То есть, чётко сформулированное индукционное предположение и полные доказательства базы и перехода.

Задание №2. Теоремы об исчислении высказываний. Знакомство с интуиционистским исчислением высказываний.

1. Давайте вспомним, что импликация правоассоциативна: $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \equiv \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$. Но рассмотрим иную расстановку скобок: $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma$. Возможно ли доказать логическое следствие между этими вариантами расстановки скобок — и каково его направление? Зависит ли это от варианта исчисления (классическое/интуиционистское)?
2. Покажите, что в классическом исчислении высказываний $\Gamma \models \alpha$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha$.
3. Покажите, что в классическом исчислении высказываний $\Gamma \vdash \alpha$ влечёт $\Gamma \models \alpha$.
4. Возможно ли, что какая-то из аксиом задаётся двумя разными схемами аксиом? Опишите все возможные коллизии для какой-то одной такой пары схем аксиом. Ответ обоснуйте (да, тут потребуется доказательство по индукции).
5. Заметим, что можно вместо отрицания ввести в исчисление ложь. Рассмотрим *исчисление высказываний с ложью*. В этом языке будет отсутствовать одноместная связка (\neg), вместо неё будет присутствовать нульместная связка «ложь» (\perp), а 9 и 10 схемы аксиом будут заменены на одну схему:

$$(9_{\perp}) \quad ((\alpha \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow \alpha$$

Будем записывать доказуемость в новом исчислении как $\vdash_{\perp} \alpha$, а доказуемость в исчислении высказываний с отрицанием как $\vdash_{\neg} \beta$. Также определим операцию трансляции между языками обычного исчисления высказываний и исчисления с ложью как операции рекурсивной замены $\perp := A \& \neg A$ и $\neg\alpha := \alpha \rightarrow \perp$ (и обозначим их как $|\varphi|_{\neg}$ и $|\psi|_{\perp}$ соответственно).

Докажите:

- (a) $\vdash_{\perp} \alpha$ влечёт $\vdash_{\neg} |\alpha|_{\neg}$
 - (b) $\vdash_{\neg} \alpha$ влечёт $\vdash_{\perp} |\alpha|_{\perp}$
6. Покажите, что топологическое пространство на вещественных числах с базой $\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ совпадает с топологическим пространством \mathbb{R} из матанализа (то есть, совпадают множества открытых множеств).
 7. Покажите, что дискретная топология, антидискретная топология (открыты только \emptyset и X), топология стрелки, топология Зарисского (носитель — \mathbb{R} , открыты \emptyset , \mathbb{R} и все множества с конечным дополнением) являются топологиями.

8. Заметим, что определения стараются давать как можно более узкими: если некоторое свойство вытекает из других, то это уже не свойство из определения, а теорема. Поэтому приведите примеры $\langle X, \Omega \rangle$, нарушающие только первое, только второе и только третье условие на топологию.
9. Напомним, что замкнутое множество — такое, дополнение которого открыто. Заметим, что на \mathbb{R} ровно два множества одновременно открыты и замкнуты — \emptyset и всё пространство. Постройте другую (не евклидову) топологию на \mathbb{R} , чтобы в ней было ровно четыре множества, которые одновременно открыты и замкнуты. А возможно ли построить топологическое пространство, в котором было бы ровно три открыто-замкнутых множества?
10. Назовём минимальной базой топологии такую базу, что в ней никакое множество не может быть получено объединением семейства других множеств из базы.
- Постройте минимальную базу для дискретной топологии.
 - Существует ли минимальная база для топологии стрелки?
 - Существует ли минимальная база для топологии Зарисского (носитель — \mathbb{R} , открыты \emptyset , \mathbb{R} и все множества с конечным дополнением)?
11. Предложите пример топологического пространства, в котором пересечение произвольного семейства открытых множеств — открыто. Топологическое пространство должно иметь бесконечный носитель (чтобы задача имела содержательный смысл) и не должно иметь дискретную или антидискретную топологию (не должно быть в каком-то смысле вырожденным).
12. Наибольшим (наименьшим) значением в каком-то множестве назовём такое, которое больше (меньше) всех других элементов множества. Несложно заметить, что для отношения включения множеств далеко не всегда такое можно определить: например, на \mathbb{R}^2 не существует наибольшего круга с радиусом 1, хотя такой круг существует на $\{z \mid z \in \mathbb{R}^2, |z| \leq 1\}$.
- Внутренностью* множества A° назовём наибольшее открытое множество, содержащееся в A . Покажите, что внутренность множества всегда определена.
13. Напомним определения: *замкнутое* множество — такое, дополнение которого открыто. *Замыканием* множества \bar{A} назовём наименьшее замкнутое множество, содержащее A . Назовём *окрестностью* точки x такое открытое множество V , что $x \in V$. Будем говорить, что точка $x \in A$ *внутренняя*, если существует окрестность V , что $V \subseteq A$. Точка x — *граничная*, если любая её окрестность V пересекается как с A , так и с его дополнением.
- Покажите, что A открыто тогда и только тогда, когда все точки A — внутренние. Также покажите, что $A^\circ = \{x \mid x \in A \text{ \& } x \text{ — внутренняя точка}\}$;
 - Покажите, что A замкнуто тогда и только тогда, когда содержит все свои граничные точки. Также покажите, что $\bar{A} = \{x \mid x \text{ — внутренняя или граничная точка}\}$.
 - Верно ли, что $\bar{A} = X \setminus ((X \setminus A)^\circ)$?
 - Пусть $A \subseteq B$. Как связаны A° и B° , а также \bar{A} и \bar{B} ? Верно ли $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ и $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$?
 - Задача Куратовского.* Будем применять операции взятия внутренней и замыкания к некоторому множеству всевозможными способами. Сколько различных множеств может всего получиться? *Указание.* Покажите, что $(\bar{A}^\circ)^\circ = \bar{A}^\circ$.
14. Задача проверки высказываний на истинность в ИИВ сложнее, чем в КИВ — не существует конечного набора значений, на которых можно проверить формулу, чтобы определить её истинность (мы эту теорему докажем). Тем не менее, если формула опровергается, то она опровергается на \mathbb{R} с евклидовой топологией. Если же такого опровержения нет, то формула доказуема (то есть, ИИВ семантически полно на \mathbb{R}). Например, формула $A \vee \neg A$ опровергается при $\llbracket A \rrbracket = (0, +\infty)$, так как $\llbracket A \vee \neg A \rrbracket = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Очевидно, что любая интуиционистская тавтология общезначима и в классической логике:

- формула общезначима в интуиционистской логике;
- значит, истинна при всех оценках;
- значит, в частности, при всех оценках на \mathbb{R} ;
- то есть, по теореме, упомянутой выше, доказуема в ИИВ;
- а схема аксиом 10и — частный случай схемы аксиом 10.

Обратное же неверно. Определите, являются ли следующие формулы тавтологиями в КИВ и ИИВ (предложите опровержение или доказательство общезначимости/выводимости для каждого из исчислений):

- (a) $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$;
 - (b) $\neg\neg A \rightarrow A$;
 - (c) $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ (из двух утверждений одно непременно следует из другого: например, «я не люблю зиму» и «я не люблю лето»);
 - (d) $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C)$;
 - (e) $(A \rightarrow (B \vee \neg B)) \vee (\neg A \rightarrow (B \vee \neg B))$;
 - (f) $\alpha \vee \beta \vdash \neg(\neg\alpha \& \neg\beta)$ и $\neg(\neg\alpha \& \neg\beta) \vdash \alpha \vee \beta$;
 - (g) $\neg\alpha \& \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$ и $\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \& \neg\beta$;
 - (h) $\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg\alpha \vee \beta$ и $\neg\alpha \vee \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$.
15. Известно, что в КИВ все связки могут быть выражены через операцию «и-не» («или-не»). Также, они могут быть выражены друг через друга (достаточно, например, отрицания и конъюнкции). Однако, в ИИВ это не так.
- Покажите, что никакие связки не выражаются друг через друга: то есть, нет такой формулы $\varphi(A, B)$ из языка интуиционистской логики, не использующей связку \star , что $\vdash A \star B \rightarrow \varphi(A, B)$ и $\vdash \varphi(A, B) \rightarrow A \star B$. Покажите это для каждой связки в отдельности:
- (a) конъюнкция;
 - (b) дизъюнкция;
 - (c) импликация;
 - (d) отрицание.

Задание №3. Изоморфизм Карри-Ховарда. Дополнительные топологические определения. Решётки.

- Непрерывной функцией называется такая, для которой прообраз открытого множества всегда открыт. Путём на топологическом пространстве X назовём непрерывное отображение вещественного отрезка $[0, 1]$ в X . Опишите пути (то есть, опишите, какие функции могли бы являться путями):
 - (a) на \mathbb{N} (с дискретной топологией);
 - (b) в топологии Зарисского;
 - (c) на дереве (с топологией с лекции);
- Докажите, что функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна тогда и только тогда, когда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ для всех $x_0 \in \mathbb{R}$.
- Связным множеством в топологическом пространстве назовём такое, которое связно как подпространство. Линейно связным множеством назовём такое, в котором две произвольные точки могут быть соединены путём, образ которого целиком лежит в множестве.
 - (a) Покажите, что линейно связное множество всегда связно;
 - (b) Покажите, что связное не обязательно линейно связное.
- Всегда ли непрерывным образом связного пространства является другое связное (под)пространство? Докажите или опровергните.
- Как мы помним с лекции, возможно доказывать интуиционистские утверждения, воспользовавшись изоморфизмом Карри-Ховарда, то есть написав соответствующую программу на каком-нибудь статически типизированном языке программирования.

Например, на C++ так можно доказать $A \rightarrow A$:

```
A identity (A x) { return x; }
```

Докажите следующие утверждения, не пользуясь в коде тем фактом, что обычно языки программирования противоречивы (то есть, не используйте исключений, функций, не возвращающих управления, и других подобных конструкций).

- (a) $A \rightarrow B \rightarrow A$
 - (b) $A \& B \rightarrow A \vee B$
 - (c) $(A \& (B \vee C)) \rightarrow ((A \& B) \vee (A \& C))$
 - (d) $(A \rightarrow C) \& (B \rightarrow C) \& ((A \vee B) \rightarrow C)$
 - (e) $(B \vee C \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A) \& (C \rightarrow A)$
 - (f) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
 - (g) $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$
 - (h) $(A \rightarrow B) \& (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$
 - (i) Выразимые в интуиционистском исчислении высказываний аналоги правил де Моргана для импликации.
6. Рассмотрим подмножество частично упорядоченного множества, и рассмотрим следующие свойства:
- (a) наличие наибольшего элемента; (б) наличие супремума; (в) наличие единственного максимального элемента. Всего можно рассмотреть шесть утверждений ((а) влечёт (б), (а) влечёт (в), и т.п.) — про каждое определите, выполнено ли оно в общем случае, и приведите либо доказательство, либо контрпример. Задача состоит из одного пункта, для получения баллов все шесть утверждений должны быть разобраны.
7. Покажите следующие утверждения для импликативных решёток:
- (a) монотонность: пусть $a \leq b$ и $c \leq d$, тогда $a + c \leq b + d$ и $a \cdot c \leq b \cdot d$;
 - (b) законы поглощения: $a \cdot (a + b) = a$; $a + (a \cdot b) = a$;
 - (c) $a \leq b$ выполнено тогда и только тогда, когда $a \rightarrow b = 1$;
 - (d) из $a \leq b$ следует $b \rightarrow c \leq a \rightarrow c$ и $c \rightarrow a \leq c \rightarrow b$;
 - (e) из $a \leq b \rightarrow c$ следует $a \cdot b \leq c$;
 - (f) $b \leq a \rightarrow b$ и $a \rightarrow (b \rightarrow a) = 1$;
 - (g) $a \rightarrow b \leq ((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c))$;
 - (h) $a \leq b \rightarrow a \cdot b$ и $a \rightarrow (b \rightarrow (a \cdot b)) = 1$
 - (i) $a \rightarrow c \leq (b \rightarrow c) \rightarrow (a + b \rightarrow c)$
 - (j) импликативная решётка дистрибутивна: $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$
8. Докажите, основываясь на формулах предыдущих заданий, что интуиционистское исчисление высказываний корректно, если в качестве модели выбрать алгебру Гейтинга.
9. Покажите, что на конечном множестве дистрибутивная решётка всегда импликативна.
10. Постройте пример дистрибутивной, но не импликативной решётки.
11. Покажите, что в дистрибутивной решётке всегда $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$.
12. Пусть $R \subseteq A \times A$ — отношение эквивалентности (то есть транзитивное, рефлексивное и симметричное). Тогда фактор-множество $A/R := \{[x]_R \mid x \in A\}$ — множество *классов эквивалентности*, где $[x]_R = \{t \in A \mid tRx\}$.
- Покажите, что каждый элемент множества A принадлежит в точности одному классу эквивалентности. Два класса эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают.
13. Пусть $R \subseteq A \times A$ — отношение нестрогого предпорядка (транзитивное и рефлексивное). И пусть $a \approx b$, если aRb и bRa . Покажите, что
- (a) Если aRb и $a \approx a'$, $b \approx b'$, то $a'Rb'$.
 - (b) R/\approx — отношение нестрогого порядка на A/\approx в следующем смысле: $[a]_{\approx} R/\approx [b]_{\approx}$ выполнено, если aRb (корректность определения также необходимо показать).
14. Покажите, что (\leq) из определения алгебры Линденбаума — отношение нестрогого предпорядка, (\approx) — отношение эквивалентности, а $(\leq)/\approx$ — отношение нестрогого порядка.
15. Покажите, что $[\alpha]_{\mathcal{L}} + [\beta]_{\mathcal{L}} = [\alpha \vee \beta]_{\mathcal{L}}$. Зависит ли результат от выбора представителей классов эквивалентности $[\alpha]$ и $[\beta]$? Ответ также докажите.
16. Покажите, что $[\alpha \rightarrow \beta]_{\mathcal{L}}$ — псевдодополнение $[\alpha]_{\mathcal{L}}$ до $[\beta]_{\mathcal{L}}$.

Задание №4. Модели для ИИВ

В этих задачах вводится ранжирование задач по сложности. Простые задачи будут оцениваться в 3.5 балла, как раньше, а сложные задачи в 5.5 баллов. Сложные задачи отмечены звёздочкой.

1. Определение: противоречивая теория — такая, в которой доказуема любая формула. Покажите, что для КИВ (а равно и для ИИВ) определение имеет следующие эквивалентные формулировки:

- доказуема любая формула исчисления;
- $\vdash \alpha \ \& \ \neg\alpha$ при некотором α ;
- $\vdash A \ \& \ \neg A$;
- для некоторой формулы α имеет место $\vdash \alpha$ и $\vdash \neg\alpha$.

Также покажите, что КИВ непротиворечиво (расшифруйте слово «очевидно» с первого слайда четвёртой лекции).

2. Опровергните формулы с помощью какой-нибудь модели Крипке:

- (a) $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$;
- (b) $(A \rightarrow B) \rightarrow \neg A \vee B$;
- (c) $(A \rightarrow (B \vee \neg B)) \vee (\neg A \rightarrow (B \vee \neg B))$.

3. Покажите, что любая модель Крипке обладает свойством: для любых W_i, W_j, α , если $W_i \leq W_j$ и $W_i \Vdash \alpha$, то $W_j \Vdash \alpha$.

4. Несколько задач на упрощение структуры миров моделей Крипке.

- (a) Покажите, что формула опровергается моделью Крипке тогда и только тогда, когда она опровергается древовидной моделью Крипке.
- (b) (*) Верно ли, что если формула опровергается некоторой конечной древовидной моделью Крипке (причём у каждой вершины не больше двух сыновей), то эту древовидную модель можно достроить до полного бинарного дерева, с сохранением свойства опровержимости?
- (c) (*) Верно ли, что если некоторая модель Крипке опровергает некоторую формулу, то добавление любого мира к модели в качестве потомка к любому из узлов оставит опровержение в силе?

5. Покажите, что модель Крипке \mathcal{M} из одного узла эквивалентна классической модели. То есть, по каждой такой модели можно найти эквивалентную ей классическую модель \mathcal{T} , что $\models_{\mathcal{M}} \alpha$ тогда и только тогда, когда $\models_{\mathcal{T}} \alpha$. Напомним, что для задания классической модели необходимо указать значения всех пропозициональных переменных. Сохранится ли это свойство для модели, заданной на лесе несвязных узлов?

6. (*) Покажите, что формула опровергается моделью Крипке тогда и только тогда, когда она опровергается конечной моделью Крипке.

7. Постройте опровержимую в ИИВ формулу, которая не может быть опровергнута моделью Крипке (ответ требуется доказать):

- (a) (*) глубины 0 или 1;
- (b) (*) глубины $n \in \mathbb{N}$ и меньше.

8. Давайте разберёмся во взаимоотношениях различных формулировок закона исключённого третьего и подобных законов. Для этого определим *минимальное* исчисление высказываний как ИИВ без 10 схемы аксиом. Заметим, что переход от $\vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ при всех α к $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ уже был ранее доказан (закон Пирса следует из закона снятия двойного отрицания).

Давайте продолжим строить кольцо:



для чего покажите, что в минимальном исчислении:

- (a) Если $\vdash ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ при всех α и β , то $\vdash \alpha \vee \neg \alpha$ (закон исключённого третьего следует из закона Пирса).
- (b) Если $\vdash \alpha \rightarrow \neg \alpha \rightarrow \beta$ («из лжи следует, что угодно», он же *принцип взрыва*) и $\vdash \alpha \vee \neg \alpha$ при всех α и β , то $\vdash \neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$.
- (c) (*) Из закона Пирса не следует закон снятия двойного отрицания и из закона исключённого третьего не следует закон Пирса.
- (d) (*) Закон Пирса и принцип взрыва независимы (невозможно доказать один из другого).

Задание №5. Исчисление предикатов

1. (Приводится по учебнику Ивлева Ю.В. «Логика», 2006 год) Определите состав, фигуру, модус силлогизма и проверьте его. Формализуйте утверждение в исчислении предикатов (пусть это будет вывод из посылок вида $\alpha, \beta \vdash \gamma$).
 - (a) Некоторые учащиеся являются троечниками. Все студенты — учащиеся. Следовательно, некоторые студенты — троечники.
 - (b) Каждый капитан корабля обладает громким голосом. Каждый оперный певец обладает громким голосом. Следовательно, некоторые капитаны кораблей являются оперными певцами.
 - (c) Все рыбы дышат жабрами. Некоторые дышащие жабрами живут в море. Следовательно, среди обитателей моря имеются рыбы.
2. (Приводится по учебнику Ивлева Ю.В. «Логика», 2006 год) Осуществите, если это возможно, правильный вывод из следующих посылок по одной из фигур силлогизма. Формализуйте утверждение в исчислении предикатов.
 - (a) Все ученые занимаются умственным трудом. Некоторые ученые не являются городскими жителями.
 - (b) Некоторые верующие не имеют высшего образования. Все католики — верующие.
3. Формализуйте какой-нибудь силлогизм с «плохим» модусом (требующий условие непустоты среднего термина) в исчислении предикатов. Докажите силлогизм с условием непустоты в исчислении предикатов — и постройте контрпример к силлогизму без условия непустоты среднего термина (постройте надлежащую модель).
4. Постройте по силлогизму из двух разных модусов (сильного и слабого). Формализуйте их и постройте доказательство в исчислении предикатов, что из сильного силлогизма следует слабый (то есть заключение силлогизма сильного модуса влечёт заключение силлогизма слабого модуса при условии, что в силлогизмах совпадают предикат, субъект и средний термин; потребуется подобрать правильную пару силлогизмов). Возможно, вам тут также потребуется условие непустоты — в таком случае приведите контрпример при его отсутствии.
5. Докажите (или опровергните) следующие формулы в исчислении предикатов:
 - (a) $(\forall x.\phi) \rightarrow (\forall y.\phi[x := y])$, если есть свобода для подстановки y вместо x в ϕ и y не входит свободно в ϕ .
 - (b) $(\forall x.\phi) \rightarrow (\exists x.\phi)$ и $(\forall x.\forall x.\phi) \rightarrow (\forall x.\phi)$
 - (c) $(\forall x.\phi) \rightarrow (\neg \exists x.\neg \phi)$ и $(\exists x.\neg \phi) \rightarrow (\neg \forall x.\phi)$
 - (d) $(\forall x.\alpha \vee \beta) \rightarrow (\neg \exists x.\neg \alpha) \ \& \ (\neg \exists x.\neg \beta)$
 - (e) $((\forall x.\alpha) \vee (\forall y.\beta)) \rightarrow \forall x.\forall y.\alpha \vee \beta$. Какие условия надо наложить на переменные и формулы? Приведите контрпримеры, поясняющие необходимость условий.
 - (f) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \forall x.(\alpha \rightarrow \beta)$. Возможно, нужно наложить какие-то условия на переменные и формулы? Приведите контрпримеры, поясняющие необходимость условий (если условия требуются).
 - (g) $(\alpha \rightarrow \forall x.\beta) \rightarrow (\forall x.\alpha \rightarrow \beta)$ при условии, что x не входит свободно в α .
6. Опровергните формулы $\phi \rightarrow \forall x.\phi$ и $(\exists x.\phi) \rightarrow (\forall x.\phi)$
7. Докажите или опровергните (каждую формулу в отдельности): $(\forall x.\exists y.\phi) \rightarrow (\exists y.\forall x.\phi)$ и $(\exists x.\forall y.\phi) \rightarrow (\forall y.\exists x.\phi)$;
8. Докажите или опровергните (каждую формулу в отдельности): $(\forall x.\exists y.\phi) \rightarrow (\exists x.\forall y.\phi)$ и $(\exists x.\forall y.\phi) \rightarrow (\forall x.\exists y.\phi)$

Задание №6. Теорема о полноте И.П.

1. Докажите теорему Гливенко: в КИВ/ИИВ, если $\vdash_K \varphi$, то $\vdash_{\text{И}} \neg\neg\varphi$. А также покажите *Следствие*: ИИВ противоречиво тогда и только тогда, когда противоречиво КИВ.
2. Докажите, что теорема Гливенко неверна в интуиционистском исчислении предикатов.

Указание: возможно, вам поможет следующая модель для ИИП. Докажите, что это модель ИИП, если вы пойдёте по этому пути. Пусть $\langle X, \Omega \rangle$ — некоторое топологическое пространство и $V = \Omega$ (как и в исчислении высказываний), пропозициональные связки определим аналогично топологической интерпретации И.И.В., оценки же кванторов сделать такими:

$$\llbracket \forall x.\varphi \rrbracket = \left(\bigcap_{v \in D} \llbracket \varphi \rrbracket^{x:=v} \right)^\circ, \quad \llbracket \exists x.\varphi \rrbracket = \bigcup_{v \in D} \llbracket \varphi \rrbracket^{x:=v}$$

3. Для построения аналога теоремы Гливенко определим операцию $(\cdot)_{\text{Ку}}$:

$$(\varphi \star \psi)_{\text{Ку}} = \varphi_{\text{Ку}} \star \psi_{\text{Ку}}, \quad (\forall x.\varphi)_{\text{Ку}} = \forall x.\neg\neg\varphi_{\text{Ку}}, \quad (\exists x.\varphi)_{\text{Ку}} = \exists x.\varphi_{\text{Ку}}$$

Тогда *преобразованием Куроды* формулы φ назовём $\neg\neg(\varphi_{\text{Ку}})$. Покажите, что $\vdash_K \alpha$ тогда и только тогда, когда $\vdash_{\text{И}} \neg\neg(\alpha_{\text{Ку}})$.

4. Пусть задано какое-то семейство термов без свободных переменных T и одноместный предикатный символ P . Покажите, что семейство $\Gamma = \{P(\theta) \mid \theta \in T\}$ непротиворечиво (семейство всех формул подобного вида). Скажем, пример с лекции непротиворечив: $\Gamma = \{P(1), P(2), P(3), \dots\}$
5. Пусть M — полное непротиворечивое множество формул и \mathcal{M} — построенная в соответствии с теоремой о полноте исчисления предикатов оценка для M . Мы ожидаем, что \mathcal{M} будет моделью для M , для чего было необходимо доказать несколько утверждений. Восполните некоторые пробелы в том доказательстве. А именно, если φ — некоторая формула и для любой формулы ζ , более короткой, чем φ , выполнено $\mathcal{M} \models \zeta$ тогда и только тогда, когда $\zeta \in M$, тогда покажите:
 - (а) если $\varphi \equiv \alpha \vee \beta$, $\mathcal{M} \models \alpha \vee \beta$, то $\alpha \vee \beta \in M$; и если $\mathcal{M} \not\models \alpha \vee \beta$, то $\alpha \vee \beta \notin M$;
 - (б) если $\varphi \equiv \neg\alpha$, $\mathcal{M} \models \neg\alpha$, то $\neg\alpha \in M$; и если $\mathcal{M} \not\models \neg\alpha$, то $\neg\alpha \notin M$.
6. Обозначим за $\sigma \leftrightarrow \zeta$ две импликации: $(\sigma \rightarrow \zeta) \& (\zeta \rightarrow \sigma)$. Докажите, что $(\exists x.\varphi) \leftrightarrow ((\exists y.\varphi)[x := y])$. Какие условия надо наложить на φ , чтобы доказательства имели место? Постройте контрпримеры к ситуациям, когда условия не выполнены.
7. Попробуем наметить доказательство теоремы о переносе кванторов:

- (а) Например, внесём квантор внутрь для конъюнкции: $(\forall x.\alpha \& \beta) \rightarrow (\forall x.\alpha) \& (\forall x.\beta)$. Какие условия надо наложить на формулы α и β (при наложении условия предложите надлежащий контрпример)?
- (б) И теперь вынесем квантор наружу — например, для импликации: $(\forall x.\alpha) \rightarrow (\forall y.\beta)$. Как правильно вынести левый квантор, $\forall x.\forall y.\alpha \rightarrow \beta$ или $\exists x.\forall y.\alpha \rightarrow \beta$? Постройте вывод для правильного варианта, постройте контрпример для неправильного. Какие условия надо наложить на формулы α и β (при наложении условия предложите надлежащий контрпример)?
- (с) Научимся преобразовывать выражение по частям: например, если $\alpha \rightarrow \beta$, то $(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$ и $(\forall x.\alpha) \rightarrow (\forall x.\beta)$ (какие условия надо наложить на формулы α и β ?).
- (д) Докажите, что для любого выражения φ найдётся эквивалентное ему выражение с поверхностными кванторами ψ . В доказательстве можно ссылаться на предыдущие пункты и на другие аналогичные утверждения (например, для других связок). В полном доказательстве $\vdash \varphi \rightarrow \psi$, известном автору, используется 38 подобных вспомогательных утверждений.

Задание №7. Неразрешимость ИП, аксиоматика Пеано, формальная арифметика.

1. Покажите, что исчисление предикатов неполно в моделях ограниченной конечной мощности. А именно, пусть дана модель $\mathcal{M} = \langle D, F, T, E \rangle$. Назовём мощностью модели мощность её предметного множества: $|\mathcal{M}| = |D|$. Покажите, что для любой конечной мощности модели $n \in \mathbb{N}$ найдётся такая формула α , что при $|\mathcal{M}| \leq n$ выполнено $\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{M}} = \text{И}$, но $\not\models \alpha$.

2. Напишите следующие программы для машины Тьюринга и продемонстрируйте их работу с помощью какого-нибудь эмулятора:

- (а) сортирующую строку в алфавите $\{0, 1\}$ (например, из 01110111 программа должна сделать 00111111); в этом и в последующих заданиях в алфавит внешних символов при необходимости можно добавлять дополнительные символы;
- (б) прибавляющую 1 к числу в двоичной системе (например, из 1011 программа должна сделать 1100);
- (с) в строке в алфавите $\{0, 1, 2\}$ сокращающую все «постоянные» подстроки до одного символа: машина должна превратить 1022220101111 в 1020101;
- (д) допускающую правильные скобочные записи (например, $(())$ должно допускаться, а $)() ($ — отвергаться);
- (е) допускающую строки вида $a^n b^n c^n$ в алфавите $\{a, b, c\}$ (например, строка $aabbcc$ должна допускаться, а $abbbcc$ — отвергаться);
- (ф) допускающую только строки, состоящие из констант и импликаций (алфавит $\{0, 1, \rightarrow, (,)\}$), содержащие истинные логические выражения; например, выражение $((0 \rightarrow 1) \rightarrow 0) \rightarrow 0$ машина должна допустить, а выражение $((1 \rightarrow 1) \rightarrow 0)$ — отвергнуть. Можно считать, что выражение написано в корректном синтаксисе (все скобки корректно расставлены, никаких скобок не пропущено).

3. Пусть дано число $k \in \mathbb{N}$. Известно, что если $0 \leq k < 2^n$, то возможно закодировать k с помощью n цифр 0 и 1. А как закодировать число, если мы не знаем верхней границы n ? Какую лучшую асимптотику длины кодировки относительно $\log_2 k$ вы можете предложить? Кодировка должна использовать только символы 0 и 1, также код должен быть префиксным (ни один код не является префиксом другого).

4. Рассмотрим аксиоматику Пеано. Пусть

$$a^b = \begin{cases} 1, & b = 0 \\ a^c \cdot a, & b = c' \end{cases}$$

Докажите, что:

- (а) $a \cdot b = b \cdot a$
- (б) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
- (с) $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$
- (д) $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$
- (е) $(a + b) + c = a + (b + c)$

5. Определим отношение «меньше или равно» так: $0 \leq a$ и $a' \leq b'$, если $a \leq b$. Докажите, что:

- (а) $x \leq x + y$;
- (б) $x \leq x \cdot y$ (укажите, когда это так — в остальных случаях приведите контрпримеры);
- (с) Если $a \leq b$ и $m \leq n$, то $a \cdot m \leq b \cdot n$;
- (д) $x \leq y$ тогда и только тогда, когда существует n , что $x + n = y$;
- (е) Будем говорить, что a делится на b с остатком, если существуют такие p и q , что $a = b \cdot p + q$ и $0 \leq q < b$. Покажите, что p и q всегда существуют и единственны, если $b > 0$.

6. Определим «ограниченное вычитание»:

$$a \dot{-} b = \begin{cases} 0, & a = 0 \\ a, & b = 0 \\ p \dot{-} q, & a = p', b = q' \end{cases}$$

Докажите, что:

- (а) $a + b \dot{-} b = a$;
- (б) $(a \dot{-} b) \cdot c = a \cdot c \dot{-} b \cdot c$;
- (с) $a \dot{-} b \leq a + b$;
- (д) $a \dot{-} b = 0$ тогда и только тогда, когда $a \leq b$.

7. Обозначим за \bar{n} представление числа n в формальной арифметике:

$$\bar{n} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ (\bar{k})', & n = k + 1 \end{cases}$$

Например, $\bar{5} = 0''''$. Докажите в формальной арифметике:

- (a) $\vdash \bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{6}$;
- (b) $\vdash \forall a. \forall b. a = b \rightarrow b = a$;
- (c) $\vdash \forall a. a \cdot 0 = 0 \cdot a$;
- (d) $\vdash \forall a. a \cdot \bar{2} = a + a$;
- (e) $\vdash \forall p. (\exists q. q' = p) \vee p = 0$ (единственность нуля);
- (f) $\vdash p \cdot q = 0 \rightarrow p = 0 \vee q = 0$ (отсутствие делителей нуля);

Задание №8. Арифметизация логики.

1. Покажите, что модус Darapti выполнен в формализации категорических силлогизмов Лейбница.
2. Покажите, что модус Cesaro выполнен в формализации категорических силлогизмов Лейбница.
3. Будем говорить, что k -местное отношение R выразимо в формальной арифметике, если существует формула формальной арифметики ρ со свободными переменными x_1, \dots, x_k , что:

- для всех $\langle a_1, \dots, a_k \rangle \in R$ выполнено $\vdash \rho[x_1 := \bar{a}_1] \dots [x_k := \bar{a}_k]$ (доказуема формула ρ с подставленными значениями a_1, \dots, a_k вместо свободных переменных x_1, \dots, x_k);
- для всех $\langle a_1, \dots, a_k \rangle \notin R$ выполнено $\vdash \neg \rho[x_1 := \bar{a}_1] \dots [x_k := \bar{a}_k]$.

Выразите в формальной арифметике (укажите формулу ρ и докажите требуемые свойства про неё):

- (a) «пустое» отношение $R = \emptyset$ (никакие два числа не состоят в отношении);
 - (b) двуместное отношение «хотя бы один из аргументов равен 0».
 - (c) одноместное отношение «аргумент меньше 3».
4. С использованием эмулятора рекурсивных функций (применённый на лекции синтаксис подсказывает использование библиотеки на C++, но вы можете выбрать любой другой способ эмуляции), покажите, что следующие функции примитивно-рекурсивны. Ваше решение должно быть продемонстрировано в работе на простых примерах. Возможно, при реализации сложных функций вам потребуется для ускорения работы заменить базовые функции на «нативные» (например, умножение, реализованное через примитивы, заменить на встроенную операцию) — это можно делать при условии, что для них у вас есть эквивалентная примитивно-рекурсивная реализация.
 - (a) умножение и ограниченное вычитание;
 - (b) целочисленное деление и остаток от деления;
 - (c) вычисление n -го простого числа (напомним теорему Бертрана-Чебышёва: для любого натурального $n \geq 2$ найдётся простое число между n и $2n$);
 - (d) частичный логарифм $\text{PLOG}_n(k) = \max\{p \mid k : n^p\}$ (например, $\text{PLOG}_2(96) = 5$);
 - (e) вычисление длины списка в гёделевой нумерации (например, $\text{LEN}(3796875000) = \text{LEN}(2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^9) = 3$);
 - (f) выделение подсписка из списка (например, $\text{SUBLIST}(2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^5, 2, 2) = 2^4 \cdot 3^5$);
 - (g) склейка двух списков в гёделевой нумерации (например, $\text{APPEND}(2^3 \cdot 3^5, 2^7 \cdot 3^6) = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^7 \cdot 7^6$).
 5. Дадим следующее определение общерекурсивным функциям (отличается от того, что было на лекции): рассмотрим термы языка формальной арифметики (без арифметических операций) и назовём выражение вида $\theta_1 = \theta'_1$ уравнением. Будем говорить, что из системы уравнений E выводится уравнение $\theta_k = \theta'_k$, если оно будет получено путём применения следующих правил:
 - в любом уравнении системы можно заменить все вхождения какой-то одной переменной x на какой-то литерал \bar{n} ;

- если в систему входит уравнение вида $f(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}) = \overline{m}$, то в любом уравнении системы можно заменить его левую часть на правую;
- в любом уравнении можно поменять левую и правую часть равенства местами.

Функция f называется общерекурсивной, если существует конечная система уравнений E , что при фиксированных n_1, \dots, n_k из неё может быть выведено $f(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}) = \overline{m}$ для единственного m .

Например,

$$\begin{cases} f(x, 0) = x \\ f(x, y') = f(x, y)' \end{cases}$$

задаёт $f(x, y) = x + y$

Определите следующие функции в общерекурсивных функциях:

- умножение, деление;
 - проверку числа на простоту;
 - функцию Аккермана.
- Покажите, что если функция общерекурсивна в смысле прошлого пункта, то она является эффективно вычислимой (предложите любую реализацию, на любом языке, сводящемся к абстрактному алгоритму).
 - Пусть n -местное отношение R выразимо в формальной арифметике. Покажите, что тогда его характеристическая функция C_R представима в формальной арифметике:

$$C_R(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \in R \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Покажите, что в определении представимости пункт $\vdash \neg\varphi(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y})$ при $f(x_1, \dots, x_n) \neq y$ не является обязательным и может быть доказан из остальных пунктов определения представимой функции.
- Покажите, что функция $f(x) = x + 2$ представима в формальной арифметике (в ответе также требуется привести все пропущенные на лекции выводы в формальной арифметике).

Задание №9. Теоремы о неполноте арифметики.

- Покажите, что омега-непротиворечивая теория непротиворечива.
- Пусть $\zeta_\varphi(x) := \forall z. \sigma(x, x, z) \rightarrow \varphi(z)$, где формула $\sigma(p, q, r)$ представляет функцию $\text{SUBST}(p, q)$, заменяющую в формуле с гёделевым номером p все свободные переменные x_1 на формулу q . Тогда покажите, что формулу $\alpha_\varphi := \zeta_\varphi(\ulcorner \zeta_\varphi \urcorner)$ можно взять в качестве формулы α в лемме об автоссылках: $\vdash \varphi(\ulcorner \alpha_\varphi \urcorner) \leftrightarrow \alpha_\varphi$.
- Покажите, что если в некоторой корректной теории \mathcal{S} , имеющей модель M , ввести дополнительную аксиому α , причём $\llbracket \alpha \rrbracket_M = \text{И}$, то тогда получившаяся теория не станет противоречивой и будет иметь ту же модель M и те же оценки для формул, что и исходная.
- Покажите, что вопрос о принадлежности формулы $\alpha(x) = \forall p. \delta(x, p) \rightarrow \neg\sigma(p)$ в доказательстве теоремы о невыразимости доказуемости к множеству $\text{Th}_{\mathcal{S}}$ ведёт к противоречию.
- Покажите, что формула $D(x)$ из доказательства теоремы о невыразимости доказуемости является представимой в формальной арифметике.
- Рассмотрим определение предела последовательности:

$$\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n \in \mathbb{N}. n > N \rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$$

Раскройте все нелогические предикатные и функциональные символы, переведите эту формулу на язык исчисления предикатов, постройте эквивалентную формулу с поверхностными кванторами, проведите её сколемизацию и постройте эквивалентную систему дизъюнктов.

- Рассмотрим формулы $\forall n. P(n) \rightarrow Q(n)$ и $\forall n. P(n) \rightarrow P(f(n)) \vee P(g(n))$, здесь P и Q — некоторые предикатные символы. Постройте для каждой из них эрбранов универсум и система основных примеров.

8. Принципом Дирихле («pigeonhole principle») называется утверждение о том, что нельзя разместить n кроликов в m ящиках (при $m < n$) так, чтобы каждый кролик находился бы в ящике один.

Пусть пропозициональные переменные $P_{i,j}$, где $i \in \overline{1, n}$ и $j \in \overline{1, m}$ соответствуют утверждениям вида «кролик i находится в ящике j ». Формализуйте в исчислении высказываний условие «каждый кролик находится в отдельном ящике в одиночестве», понимаемое как условие на переменные $P_{i,j}$, постройте соответствующее выражение в КНФ.

Какова будет его система основных примеров? Покажите, что система основных примеров формулы противоречива при $m < n$.

Задание №10. Метод резолюций.

- На выбранном вами языке (кроме C, C++, Pascal) напишите программу, печатающую свой текст. Программа не должна использовать внешний мир (на чтение): например, использовать специальные команды печати своего текста, рефлексии, работу с файлами и т.п.
- На лекции мы приводили способ проверки доказуемости $\gamma_1, \dots, \gamma_n \vdash \alpha$, а именно, строили систему дизъюнктов $\{SNF(\gamma_1), \dots, SNF(\gamma_n), SNF(\neg\alpha)\}$ и проверяли её противоречивость (здесь $SNF(\varphi)$ — сколемизация формулы φ и приведение её к КНФ). Обоснуйте данный способ.
- Мы доказывали теорему Эрбрана, проводя следующее схематическое рассуждение:

- дано — система основных примеров \mathcal{E}_S , построенная по системе дизъюнктов S , противоречива;
- значит, эта система не имеет модели;
- значит, по теореме Гёделя о компактности, у \mathcal{E}_S есть конечное противоречивое подмножество.

Заметим, что теорема Гёделя о компактности (равно как и её контрапозиция) не может быть здесь непосредственно применена. Укажите отличия и восполните пробелы в схематическом рассуждении.

- Постройте универсум Эрбрана для аксиомы индукции при $\varphi := \exists y.P(x, y)$:

$$(\exists y.P(0, y)) \ \& \ (\forall x.(\exists y.P(x, y)) \rightarrow \exists y.P(x', y)) \rightarrow \exists y.P(x, y)$$

Напомним, что универсум Эрбрана строится для формулы в КНФ после сколемизации.

- Рассмотрим множество дизъюнктов исчисления высказываний S . Обозначим шаг применения правила резолюции всеми возможными способами к дизъюнктам множества S как операцию $\mathcal{R}(S)$. Положим $S_0 = S$, $S_{n+1} = S_n \cup \mathcal{R}(S_n)$ и $S' = \cup S_i$.
 - Покажите, что S' противоречиво (то есть для любой интерпретации M найдутся значения для свободных переменных d_1, \dots, d_k и дизъюнкт $\delta \in S'$, что $M \models \delta[x_1 := d_1, \dots, x_k := d_k]$) тогда и только тогда, когда S противоречиво.
 - Покажите, что для формул исчисления высказываний S' конечно при конечном S .
 - Покажите, что если S противоречиво, то в S' обязательно найдутся дизъюнкты с явным противоречием (β и $\neg\beta$).
- Покажите, что если $J = \{\delta_1, \neg\delta_2\}$ и δ_1 явно противоречит $\neg\delta_2$ при некоторой подстановке свободных переменных (то есть, $\sigma(\delta_1) = \sigma(\delta_2)$), то J также противоречива.
- В данном задании будет необходимо проверить выводимость утверждений в исчислении предикатов с помощью метода резолюций. Продемонстрируем метод на простом примере. Докажем $(\forall x.P(x)) \rightarrow P(0)$.

- Возьмём отрицание: $\neg((\forall x.P(x)) \vee P(0))$, то есть $\neg\forall x.P(x) \vee P(0)$, то есть $\forall x.P(x) \ \& \ \neg P(0)$
- Проведём сколемизацию и переведём в КНФ: $\{P(x), \neg P(0)\}$ при свободной переменной x (по которой имеется неявный квантор всеобщности).
- Применяем правило резолюции:

$$\frac{P(x) \quad \neg P(0)}{\square} \pi = \mathcal{U}[P(x'), P(0)]$$

- Получили пустой дизъюнкт (то есть явное противоречие), формула доказана.

Убедитесь с помощью метода резолюций, что:

- (a) $(\exists x.P(x)) \rightarrow (\exists y.P(y))$
- (b) $(\exists x.\forall y.P(x, y)) \rightarrow (\forall y.\exists x.P(x, y))$
- (c) $(\forall x.P(x') \rightarrow P(x)) \& P(0''') \rightarrow P(0)$
- (d) $(\forall x.P(x, y) \rightarrow P(f(x), y)) \& (\forall y.P(x, y) \rightarrow P(x, g(y))) \& P(a, b) \rightarrow P(f(f(f(a))), g(g(b)))$

8. Формализуйте следующие утверждения и покажите с помощью метода резолюций:

- (a) Категорический силлогизм «Barbara»
- (b) Категорический силлогизм «Camenes»
- (c) Слабый силлогизм, без дополнительного условия непустоты (такой вывод получится некорректным). Как поведёт себя метод резолюции для такого силлогизма? Также добавьте условие непустоты и примените метод резолюции.

9. Примените метод резолюции к доказательству принципа Дирихле для $n = 4$ и $m = 3$ (см. предыдущее домашнее задание).

10. В правиле резолюции к ответу применяются унифицирующая подстановка π и подстановки σ_1 и σ_2 , заменяющие переменные в дизъюнктах на свежие. Покажите, что эти подстановки важны. А именно, предложите непротиворечивый набор дизъюнктов, из которого можно вывести противоречие методом резолюции, если в правиле резолюции не применять π к результату. Правило, иллюстрирующее проблему:

$$\frac{\varphi \vee \beta_1 \quad \neg\beta_2 \vee \psi}{\varphi \vee \psi} \pi = \mathcal{U}[\beta_1, \beta_2]$$

11. Покажите, что семейство S непротиворечиво тогда и только тогда, когда S с добавленным применением правила резолюции для исчисления предикатов также непротиворечиво.

12. Можно ли проверить аксиому индукции с помощью метода резолюций? То есть, закончится ли процесс применения правила резолюций к отрицанию аксиомы получением противоречия?

Задание №11. Лямбда-исчисление

Для проверки и демонстрации заданий используйте какой-нибудь эмулятор лямбда-исчисления, например LCI: <https://www.chatzi.org/lci/>

1. Определите следующие функции в лямбда-исчислении. В качестве подсказки заметим, что у задач на чёрчевские нумералы есть отдалённое сходство с задачами на примитивно-рекурсивные функции: все функции, предложенные в упражнениях, могут быть реализованы с помощью фиксированного количества циклов `for` (то есть, при помощи указания надлежащих функций `f` в аргументах чёрчевских нумералов). Также напоминаем, что в лямбда-исчислении несложно выражаются упорядоченные пары и значения алгебраических типов.

- (a) «Исключающее ИЛИ» на 3 аргумента, а также «Мажоритарный элемент», проверяющий, что большинство входных аргументов — истина: $M(a_1, a_2, a_3) = \text{И}$, если $|\{i \mid i = \overline{1 \dots 3}, a_i = \text{И}\}| \geq 2$.
- (b) `IsZero`, возвращающую истину, если аргумент равен 0, `IsEven`: возвращает истину, если аргумент чётен.
- (c) `Div3`: делит нумерал на 3 с округлением вверх, `Fib`: вычисляет соответствующее число Фибоначчи.
- (d) Вычисление квадратного корня числа (округление вниз).
- (e) Ограниченное вычитание и сравнение двух нумералов.
- (f) Деление с остатком для чёрчевских нумералов (возвращает упорядоченную пару).

2. Найдите нормальную форму для следующих выражений (а также докажите, почему она именно такова):

- (a) $\bar{2} \bar{2}$ и $\bar{2} \bar{2} \bar{2}$
- (b) $\bar{m} \bar{n}$

3. На лекции был приведён комбинатор неподвижной точки $Y := \lambda f.(\lambda x.f (x x)) (\lambda x.f (x x))$, обладающий свойством $Y P =_{\beta} P (Y P)$ для любого терма P . С его помощью оказывается возможным реализовывать рекурсию.

Например, зададим функцию, возводящую 2 в соответствующую степень:

$$P := \lambda f.\lambda x.(IsZero x) 1 ((f (Dec x)) \cdot 2)$$

Сравните это с кодом на Си:

```
unsigned f (unsigned x) { return x == 0 ? 1 : f (x-1) * 2; }
```

Тогда, вызванная как $Y P x$, эта функция вычислит 2^x . Например, $Y P 1 =_{\beta}$

$$\begin{aligned} &=_{\beta} P (Y P) 1 = (\lambda f.\lambda x.(IsZero x) 1 ((f (Dec x)) \cdot 2)) (Y P) 1 \\ &=_{\beta} (IsZero 1) 1 ((Y P (Dec 1)) \cdot 2)) =_{\beta} (Y P 0) \cdot 2 \\ &=_{\beta} (P (Y P) 0) \cdot 2 \\ &=_{\beta} (IsZero 0) 1 ((Y P (Dec 0)) \cdot 2)) \cdot 2 \\ &=_{\beta} 1 \cdot 2 =_{\beta} 2 \end{aligned}$$

С помощью Y -комбинатора реализуйте:

- (a) Вычисление k -го простого числа.
 - (b) Частичный логарифм.
 - (c) Предложите три других комбинатора неподвижной точки (других — то есть, не бета-эквивалентных Y и между собой).
4. Напомним, что список может быть задан с помощью алгебраического типа с двумя конструкторами, `Nil` и `Cons` (см. доказательство неразрешимости исчисления предикатов). С учётом этого знания, и с учётом представления алгебраических типов, приведённого на лекции, реализуйте следующие конструкции:
- (a) Функцию, вычисляющую длину списка.
 - (b) Функцию высшего порядка `map2` — последовательно применяет функцию к головам двух списков, возвращая список результатов: `map2 (*) [1;3] [2;4]` вернёт `[2;12]`.
 - (c) Функцию `rev`, возвращающую перевёрнутый список. Например, `rev[1, 3, 5] = [5, 3, 1]`.
5. Напомним определение:

$$\begin{aligned} S &:= \lambda x.\lambda y.\lambda z.x z (y z) \\ K &:= \lambda x.\lambda y.x \\ I &:= \lambda x.x \end{aligned}$$

Известна теорема о том, что для любого комбинатора X можно найти выражение P (состоящее только из скобок, пробелов и комбинаторов S и K), что $X =_{\beta} P$. Будем говорить, что комбинатор P *выражает* комбинатор X в базисе SK .

Выразите в базисе SK :

- (a) $\lambda x.x x, \Omega$
 - (b) F, \bar{I}
 - (c) $\lambda x.\lambda y.\lambda z.y$
6. По аналогии с импликативным фрагментом ИИВ, мы можем рассмотреть полное просто типизированное лямбда-исчисление, в котором добавить конструкции для упорядоченной пары (конъюнкции), алгебраического типа (дизъюнкции) и необитаемого типа (лжи).

Правила для конъюнкции:

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma \vdash A : \alpha \quad \Gamma \vdash B : \beta}{\Gamma \vdash \langle A, B \rangle : \alpha \& \beta} \text{ Конструктор пары} \\ &\frac{\Gamma \vdash P : \alpha \& \beta}{\Gamma \vdash \pi_L P : \alpha} \text{ Левая проекция} \quad \frac{\Gamma \vdash P : \alpha \& \beta}{\Gamma \vdash \pi_R P : \beta} \text{ Правая проекция} \end{aligned}$$

Правила для дизъюнкции:

$$\frac{\Gamma \vdash A : \alpha}{\Gamma \vdash \text{In}_L A : \alpha \vee \beta} \text{ Левая инъекция} \quad \frac{\Gamma \vdash B : \beta}{\Gamma \vdash \text{In}_R B : \alpha \vee \beta} \text{ Правая инъекция}$$

$$\frac{\Gamma \vdash L : \alpha \rightarrow \gamma \quad \Gamma \vdash R : \beta \rightarrow \gamma \quad \Gamma \vdash D : \alpha \vee \beta}{\Gamma \vdash \text{Case } L R D : \gamma} \text{ Сопоставление с образцом}$$

Правило для лжи:

$$\frac{\Gamma \vdash E : \perp}{\Gamma \vdash \text{absurd } E : \alpha}$$

Постройте натуральный вывод для следующих утверждений, а также постройте соответствующее в смысле изоморфизма Карри-Ховарда лямбда-выражение (и докажите его тип):

- (a) Карринг: $(\alpha \& \beta \rightarrow \gamma) \leftrightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma)$
- (b) $(\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma) \leftrightarrow (\alpha \rightarrow \gamma) \& (\beta \rightarrow \gamma)$
- (c) $((\alpha \rightarrow \perp) \vee \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

7. Покажите, что в отличие от бета-редуцируемости, для бета-редукции не выполнена теорема Чёрча-Россера (рефлексивность и транзитивность отношения для теоремы существенна). А именно, существует такое лямбда-выражение T , что $T \rightarrow_\beta A$, $T \rightarrow_\beta B$, $A \neq B$, но нет S , что $A \rightarrow_\beta S$ и $B \rightarrow_\beta S$.

8. Рассмотрим комбинаторы Y и $\Omega := (\lambda x.x x) (\lambda x.x x)$.

- (a) Покажите, что если $\vdash A : \alpha$, то любое подвыражение A также имеет тип.
- (b) Покажите, что Y и Ω не имеют типа в просто-типизированном лямбда-исчислении.
- (c) Выразите их в языке Хаскель (Окамль). Каковы их типы?

9. Пусть фиксирован тип чёрчевского нумерала, это $(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$. Найдите выражения и их тип в просто-типизированном лямбда-исчислении (и докажите наличие этого типа) для следующих выражений.

Возможно, вам в этом поможет язык Хаскель: определим на языке Хаскель следующую функцию: `show_church n = show (n (+1) 0)`. Легко заметить, что `show_church (\f -> \x -> f (f x))` вернёт 2. Как вы думаете, какой у выражения `(\f -> \x -> f (f x))` тип?

- (a) Инкремент чёрчевского нумерала — то есть, докажите, что $\vdash \lambda n.\lambda f.\lambda x.n f (f x) : \eta \rightarrow \eta$, где $\eta = (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$.
- (b) Сложение двух чёрчевских нумералов;
- (c) Умножение двух чёрчевских нумералов (не каждая реализация умножения подойдёт).

10. Напомним, что в одном выражении может быть более одного бета-редекса. Назовём порядок редукции *нормальным*, если всегда вычисляется тот бета-редекс, первый символ которого стоит левее всего в строке. *Аппликативным* порядком назовём такой, при котором вычисляется самый левый из наиболее вложенных редексов. Например, в выражении

$$(\lambda x.x) ((\lambda n.\lambda f.\lambda x.n f (f x)) \lambda f.\lambda x.x)$$

точками подчёркнут редекс для нормального порядка, а прерывистой линией — для аппликативного.

Интуитивно в нормальном порядке сперва вычисляется тело функции, а параметры вычисляются потом, по мере надобности. Аппликативный же порядок предполагает обязательное вычисление параметров перед вычислением самой функции.

Известна теорема о том, что если у выражения в принципе существует нормальная форма, то она может быть получена путём применения нормального порядка редукции.

Обычно в языках программирования применяется аппликативный порядок редукции, однако, в (практически) любом языке конструкция `if` вычисляется с помощью нормального порядка, поскольку условный оператор вычисляет только одну из веток (`then` или `else`).

Предложите лямбда-выражение, количество редукций которого до нормальной формы различается более чем в n раз при применении нормального и аппликативного порядков (по заданному заранее n).

Задание №12. Теория множеств.

1. Задайте полный порядок на \mathbb{Z} и на \mathbb{Q} . Стандартный порядок на вещественных числах не является полным, хотя некоторые его подмножества этим порядком вполне упорядочиваются (натуральные числа). Вполне ли упорядочены вещественные корни квадратных уравнений с натуральными коэффициентами (как подмножество \mathbb{R})?
2. Является ли порядок на алгебре Линденбаума полным? Если нет, то какие подмножества алгебры Линденбаума являются вполне упорядоченными?
3. Пусть заданы списки (в любом языке программирования) $L(\alpha)$, хранящие значения типа α . Для решения задания задайте библиотеку с функциями, являющимися аналогами конструктивных аксиом теории множеств:
 - `empty` : $L(\alpha)$, строит пустой список.
 - `pair` : $(\alpha, \alpha) \rightarrow L(\alpha)$, формирует список из двух своих аргументов.
 - `flatten` : $L(L(\alpha)) \rightarrow L(\alpha)$, соединяет все списки внутри списка в один.
 - `powerset` : $L(\alpha) \rightarrow L(L(\alpha))$, делает из списка список всех возможных подсписков.
 - `filter` : $(\alpha \rightarrow \text{bool}) \rightarrow L(\alpha) \rightarrow L(\alpha)$, выделяет из списка все элементы, соответствующие условию.

Далее, для каждого из заданий предложите доказательство существования указанных множеств в аксиоматике Цермело-Френкеля и реализацию этого доказательства с использованием библиотеки:

- (a) пересечение всех элементов множества $(\bigcap a)$;
 - (b) $a \setminus b$ (разность множеств) и $a \triangle b$ (симметрическую разность множеств);
 - (c) $a \oplus b$ (дизъюнктивное объединение множеств: $\{\langle x, 0 \rangle \mid x \in a\} \cup \{\langle x, 1 \rangle \mid x \in b\}$);
 - (d) $a \times b$ (декартово произведение множеств: $\{\langle p, q \rangle \mid p \in a, q \in b\}$);
 - (e) $\times a$ (прямое произведение дизъюнктивного множества a).
4. Определим упорядоченную пару $\langle a, b \rangle := \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Покажите, что $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$ тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.
 5. Восполним пробелы в доказательстве существования ω :
 - (a) Определите формулу $\varphi(x)$ для свойства « x — конечный ординал». Укажите замкнутый вид для формулы, задающей ординал ω .
 - (b) Покажите, что ω — действительно ординал.
 6. Давайте докажем некоторые свойства ординалов.
 - (a) Предъявите примеры (i) транзитивного, но не вполне упорядоченного отношением \in множества и (ii) вполне упорядоченного, но не транзитивного множества (задание не делится на пункты). Покажите, что ваши примеры — действительно множества в смысле аксиоматики ZF.
 - (b) Покажите, что если x — ординал, то x' — тоже ординал.
 - (c) Верно ли, что если x' — ординал, то x — тоже ординал?
 - (d) Покажите, что любой непустой ординал содержит пустое множество.
 - (e) Покажите, что если $x \in p$ и p — ординал, то либо $x' = p$, либо $x' \in p$.
 - (f) Покажите, что если x и y — конечные ординалы, то $x = y$, $x \in y$ или $y \in x$ (не используйте аксиому выбора и следующую из неё аналогичную теорему с лекции).
 7. Покажите, что аксиома фундирования запрещает существование такого множества x , что $x \in x$.
 8. Покажите, что на множестве ω выполняется аксиоматика Пеано (полная формализация рассуждений не требуется, но из изложения должно быть понятно, как эту формализацию в рамках теории первого порядка получить):
 - (a) $\forall x. x \in \omega \rightarrow \neg x' = \emptyset$
 - (b) $\forall x. \forall y. x \in \omega \ \& \ y \in \omega \rightarrow x' = y' \rightarrow x = y$
 - (c) (указание к следующему пункту) покажите, что если $\vdash \forall x. \neg \phi(x) \rightarrow A \ \& \ \neg A$, то $\vdash \forall x. \phi(x)$.

- (d) Если $\phi(\emptyset)$ и $\forall x.x \in \omega \rightarrow \phi(x) \rightarrow \phi(x')$, то $\forall x.x \in \omega \rightarrow \phi(x)$.
9. Проверьте следующие равенства (докажите или опровергните):
- (a) $\omega \cdot \bar{2} = \bar{2} \cdot \omega$
 - (b) $\omega \cdot \bar{2} = \omega + \omega$
 - (c) $(\omega + \bar{1})^{\bar{2}} = \omega^{\bar{2}} + \bar{2} \cdot \omega + \bar{1}$
 - (d) $\omega^\omega = (\omega^{\bar{2}})^\omega$
 - (e) $\omega^{\omega + \bar{1}} = \omega^\omega + \bar{1}$
 - (f) Имеет ли место ассоциативность сложения и/или умножения?
10. Верно ли, что $1^\omega = \omega$ и/или $\omega^1 = \omega$?
11. Рассмотрим все конечные двоичные деревья без значений в вершинах и узлах, и зададим лексикографический порядок на них: листья друг другу равны, лист всегда меньше узла, узлы упорядочены лексикографически своими потомками (сравниваем левых сыновей, если равны — то правых). Является ли это полным порядком, если да, то какое порядковое число соответствует этому упорядочению?
12. Зачёт за пункт ставится, если одновременно решены два подпункта: (i) Покажите, что множество ω^ω имеет счётную мощность (здесь: имеется биекция на ω , возможно, не сохраняющая порядок). (ii) Определим $\uparrow k$ (башню из омег) так:

$$\uparrow k = \begin{cases} \omega, & k = 1 \\ \omega^{\uparrow n}, & k = n' \end{cases}$$

Скажем, $\uparrow 3 = \omega^{(\omega^\omega)}$. Будет ли счётным ординал $\text{crb} \{ \uparrow k \mid k \in \omega \}$?

13. На лекции было приведено два различных определения для сложения и умножения ординалов. Покажите, что эти определения эквивалентны.
- (a) Покажите, что $\text{crb } X = \bigcup X$ — ординал, если каждый элемент X — ординал. Не забывайте, что рассуждение по индукции по числу элементов в X не подойдёт.
 - (b) Пусть a и b — ординалы. Покажите, что порядковое число для $a \uplus b$ эквивалентно $a + b$.
 - (c) Пусть a и b — ординалы. Покажите, что порядковое число для $a \times b$ эквивалентно $a \cdot b$.

Задание №13. Мощность множеств.

1. Рассмотрим следующую теорию первого порядка и её модель \mathcal{M} при $D = \mathbb{R}$. В ней мы зададим один нелогический двуместный предикатный символ B и константу 0. Никаких нелогических аксиом мы не задаём. Модель \mathcal{M} имеет $D = \mathbb{R}$. Название B — от выражения «Because I can!», поскольку в \mathcal{M} только $B(\pi, e)$ истинно, а при других параметрах предикат ложен. Значение 0 задано естественно: $\llbracket 0 \rrbracket_{\mathcal{M}} = 0$. Заметим, что $\models_{\mathcal{M}} \exists p. \exists q. B(p, q)$. Примените к этой теории теорему Лёвенгейма-Сколема, опишите, какие множества D_n будут построены, и покажите, какая счётная модель получится.
2. Покажите следующее (обозначим за $\mathcal{F}(p, q)$ множество функций из p в q):
- (a) $|a| = 0$ тогда и только тогда, когда $a = \emptyset$;
 - (b) если $|a| \leq |b|$, то $|\mathcal{F}(g, a)| \leq |\mathcal{F}(g, b)|$;
 - (c) если $|a| \leq |b|$ и $\bar{0} < |g|$, то $|\mathcal{F}(a, g)| \leq |\mathcal{F}(b, g)|$;
 - (d) $|\mathcal{F}(\bar{0}, a)| = \bar{1}$, $|\mathcal{F}(a, \bar{1})| = \bar{1}$; если $|a| > 0$, то $|\mathcal{F}(a, \bar{0})| = \bar{0}$;
 - (e) если $|a| \geq \aleph_0$ и $0 < |n| < \aleph_0$, то $|\mathcal{F}(n, a)| = a$.
3. Покажите эквивалентность следующих определений конечного множества (задание (k) предполагает доказательство импликации $(k) \rightarrow (k')$; возможно, некоторые из переходов потребуют аксиому выбора):
- (a) a конечно, если каждое непустое семейство подмножеств a имеет максимальный по включению элемент. Например, при $a = \{0, 1, 2\}$ в семействе подмножеств $\{\emptyset, \{0, 1\}, \{1, 2\}\}$ элементы $\{0, 1\}$ и $\{1, 2\}$ — максимальны.

- (b) a конечно, если $\mathcal{P}(a)$ не равномощно своему собственному подмножеству (собственное подмножество — подмножество, не совпадающее с множеством).
- (c) a конечно, если оно не равномощно своему собственному подмножеству.
- (d) a конечно, если $|a| = \emptyset$ или $|a| \cdot \bar{2} > |a|$.
- (e) a конечно, если $|a| = \emptyset$ или $|a| = \bar{1}$ или $|a|^2 > |a|$.
- (f) a конечно, если $|a| < \aleph_0$.
4. Покажите, что представимая функция $f : a \rightarrow b$ биективна (т.е. инъективна и сюръективна) тогда и только тогда, когда $\forall y. \exists! x. \phi(x, y)$. Здесь за $\phi(x, y)$ мы обозначаем формулу, представляющую функцию f в теории множеств, по аналогии с формальной арифметикой.
5. Покажите в ZFC, что если a и b — непустые множества, то существует функция из a в b (однако функция не обязана быть инъективной или сюръективной).
6. Фильтром \mathcal{F} назовём структуру на элементах некоторой решётки $\langle L, (\leq) \rangle$ со следующими свойствами:
- $0 \notin \mathcal{F}$;
 - если $a, b \in \mathcal{F}$, то $a \cdot b \in \mathcal{F}$;
 - если $a \in \mathcal{F}$, $a \leq b$, $b \in L$, то $b \in \mathcal{F}$.
- Фильтр назовём главным для $x \in L$, если $\mathcal{F} = \{a \in L \mid x \leq a\}$. Фильтр \mathcal{F}' назовём собственным подфильтром \mathcal{F} , если $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$. Фильтр назовём ультрафильтром, если он не является собственным подфильтром никакого фильтра на L .
- (a) Покажите, что главный фильтр для $x \in L$ является ультрафильтром.
- (b) Покажите, что множество дополнений конечных множеств до бесконечного образует фильтр (в качестве отношения порядка рассмотрим отношение включения). Является ли этот фильтр ультрафильтром?
- (c) Покажите, что для ультрафильтра F на булевой алгебре L и $x \in L$ выполнено $x \in F$ или $\sim x \in F$. Также покажите, что полное непротиворечивое множество формул образует ультрафильтр.
- (d) Покажите, что у любого фильтра есть содержащий его ультрафильтр (вам потребуется лемма Цорна для доказательства этого факта).
7. Покажите, что у любых двух множеств A и B их мощности сравнимы ($|A| \leq |B|$ или $|B| \leq |A|$). Для доказательства вам потребуется один из вариантов аксиомы выбора.
8. Покажите, что мощность множества всех непрерывных функций $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — \beth_1 .
9. Покажите, что мощность множества всех функций $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — также \beth_1 .
10. Пусть $a \in \mathbb{R}$, причём $0 < a < 1$. Пусть $r(a)$ — множество его десятичных записей (бесконечная последовательность цифр от 0 до 9). Например, $(5, 0, 0, \dots) \in r(0.5)$ и $(4, 9, 9, \dots) \in r(0.5)$. Покажите, что:
- для любой последовательности цифр x_n найдётся число a , что $(x_0, x_1, x_2, \dots) \in r(a)$.
 - какое бы ни было число a , если $(x_0, x_1, x_2, \dots) \in r(a)$ и $(y_0, y_1, y_2, \dots) \in r(a)$, то $x_i = y_i$, либо $x_i, y_i \in \{0, 9\}$.
11. Покажите, что если $|T| \geq \aleph_0$, то $||T| \times |T|| = |T \times T| = |T|$.