Исчисление предикатов

Категорические силлогизмы

- Силлогизм — «подытоживание, подсчёт, умозаключение»
- Категорический — потому, что речь идёт о категориях (в философском смысле).
- Пример:

$$\frac{\text{Каждый человек смертен} \qquad \text{Сократ есть человек}}{\text{Сократ смертен}}$$

- Восходят к Аристотелю и Теофрасту, активно развивались в средневековье.

Категорический силлогизм: вспомогательные определения

Категорический силлллогизм соединяет три термина:

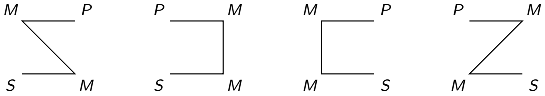
предикат (больший термин, P)
субъект (меньший термин, S)
средний термин (M).

На основании соотношений P и M, а также M и S строим соотношение P и S. Возможные соотношения:

A	Affirmato (общеутвердительное)	Матан есть раздел математики (SaP)
I	affIrmato (частноутвердительное)	Некоторые разделы математики сложны (SiP)
E	nEgo (общеотрицательное)	Никакой человек не знает всю математику
O	negO (частноотрицательное)	Некоторые разделы математики — не матан

Фигуры и модусы

Фигура 1 Фигура 2 Фигура 3 Фигура 4



Большая посылка:	M—P	P—M	M—P	P—M
Меньшая посылка:	S—M	S—M	M—S	M—S
Заключение:	S—P	S—P	S—P	S—P

Расстановка соотношений вместо «—» в фигуре — модус. Например, тут — фигура 1, aaa.

$$\frac{\text{Каждый человек смертен} \qquad \text{Сократ есть человек}}{\text{Сократ смертен}}$$

Правильные модусы

Не все модусы осмысленны. Например фигура 1, aae — нет:

$$\frac{\text{Каждый человек смертен} \qquad \text{Сократ есть человек}}{\text{Сократ не есть смертен}}$$

Все правильные модусы:

Фигура 1	Фигура 2	Фигура 3	Фигура 4
Barbara	Cesare	Darapti	Bramantip
Celarent	Camestres	Disamis	Camenes
Darii	Festino	Datisi	Dimaris
Ferio	Baroco	Felapton	Fesapo
Barbari	Cesaro	Bocardo	Fresison
Celaront	Camestros	Ferison	Camenos

Многие модусы требуют непустоты M. Например Darapti:

$$\frac{\text{Все единороги имеют рог} \qquad \text{Все единороги суть лошади}}{\text{Некоторые лошади имеют рог}}$$

Ограничения языка исчисления высказываний

$$\frac{\text{Каждый человек смертен} \qquad \text{Сократ есть человек}}{\text{Сократ смертен}}$$

Ограничения языка исчисления высказываний

$$\frac{\text{Каждый человек смертен} \qquad \text{Сократ есть человек}}{\text{Сократ смертен}}$$

Цель: увеличить формализованную часть метаязыка.

Ограничения языка исчисления высказываний

$$\frac{\text{Каждый человек смертен} \qquad \text{Сократ есть человек}}{\text{Сократ смертен}}$$

Цель: увеличить формализованную часть метаязыка.

Мы неформально знакомы с предикатами $(P : D \to V)$ и кванторами $(\forall x.H(x) \to S(x))$.

$$\frac{\forall x.H(x) \to S(x) \qquad H(\text{Сократ})}{S(\text{Сократ})}$$

Начнём с примера

$$\forall x. \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

Начнём с примера

$$\forall x. \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

1. Предметные (здесь: числовые) выражения
   1.1 Предметные переменные (x).

Начнём с примера

$$\forall x . \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

1. Предметные (здесь: числовые) выражения
   1.1 Предметные переменные (x).
   1.2 Одно- и двухместные функциональные символы «синус», «возведение в квадрат» и «сложение».

Начнём с примера

$$\forall x. \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

1. Предметные (здесь: числовые) выражения
   1.1 Предметные переменные (x).
   1.2 Одно- и двухместные функциональные символы «синус», «возведение в квадрат» и «сложение».
   1.3 Нульместные функциональные символы «ноль» (0) и «один» (1).

Начнём с примера

$$\forall x. \sin x = 0 \lor (\sin x)^2 + 1 > 1$$

1. Предметные (здесь: числовые) выражения
   1.1 Предметные переменные (x).
   1.2 Одно- и двухместные функциональные символы «синус», «возведение в квадрат» и «сложение».
   1.3 Нульместные функциональные символы «ноль» (0) и «один» (1).
2. Логические выражения
   2.1 Предикатные символы «равно» и «больше»

Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.

Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метапеременная θ.

Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метапеременная θ.
   - Предметные переменные: a, b, c, ..., метапеременные x, y.

Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метапеременная θ.
   - Предметные переменные: a, b, c, ..., метапеременные x, y.
   - Функциональные выражения: $f(\theta_1, \dots, \theta_n)$, метапеременные f, g, ...

Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метапеременная θ.
   - Предметные переменные: a, b, c, ..., метапеременные x, y.
   - Функциональные выражения: $f(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, метапеременные f, g, ...
   - Примеры: r, $q(p(x, s), r)$.

Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метапеременная θ.
   - Предметные переменные: a, b, c, $\ldots$, метапеременные x, y.
   - Функциональные выражения: $f(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, метапеременные f, g, $\ldots$
   - Примеры: r, $q(p(x, s), r)$.
3. Логические выражения: метапеременные α, β, γ, $\ldots$
   - Предикатные выражения: $P(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, метапеременная P.

Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метапеременная θ.
   - Предметные переменные: a, b, c, ..., метапеременные x, y.
   - Функциональные выражения: $f(\theta_1, \dots, \theta_n)$, метапеременные f, g, ...
   - Примеры: r, $q(p(x, s), r)$.
3. Логические выражения: метапеременные α, β, γ, ...
   - Предикатные выражения: $P(\theta_1, \dots, \theta_n)$, метапеременная P.
     Имена: A, B, C, ...

Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метапеременная θ.
   - Предметные переменные: a, b, c, ..., метапеременные x, y.
   - Функциональные выражения: $f(\theta_1, \dots, \theta_n)$, метапеременные f, g, ...
   - Примеры: r, $q(p(x, s), r)$.
3. Логические выражения: метапеременные α, β, γ, ...
   - Предикатные выражения: $P(\theta_1, \dots, \theta_n)$, метапеременная P.
     Имена: A, B, C, ...
   - Связки: $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \mathbin{\&} \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $(\neg\varphi)$.

Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метапеременная θ.
   - Предметные переменные: a, b, c, ..., метапеременные x, y.
   - Функциональные выражения: $f(\theta_1, \dots, \theta_n)$, метапеременные f, g, ...
   - Примеры: r, $q(p(x, s), r)$.
3. Логические выражения: метапеременные α, β, γ, ...
   - Предикатные выражения: $P(\theta_1, \dots, \theta_n)$, метапеременная P.
     Имена: A, B, C, ...
   - Связки: $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \,\&\, \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $(\neg\varphi)$.
   - Кванторы: $(\forall x.\varphi)$ и $(\exists x.\varphi)$.

Сокращения записи, метаязык

1. Метапеременные:
   - ψ, ϕ, π, $\ldots$ — формулы
   - P, Q, $\ldots$ — предикатные символы
   - θ, $\ldots$ — термы
   - f, g, $\ldots$ — функциональные символы
   - x, y, $\ldots$ — предметные переменные

Сокращения записи, метаязык

1. Метапеременные:
   - ψ, ϕ, π, ... — формулы
   - P, Q, ... — предикатные символы
   - θ, ... — термы
   - f, g, ... — функциональные символы
   - x, y, ... — предметные переменные
2. Скобки — как в И.В.; квантор — жадный:

$$(\forall a.\underbrace{A \vee B \vee C \rightarrow \exists b.\underbrace{D \mathbin{\&} \neg E}_{\exists b. \dots}}_{\forall a. \dots}) \mathbin{\&} F$$

Сокращения записи, метаязык

1. Метапеременные:
   - ψ, ϕ, π, … — формулы
   - P, Q, … — предикатные символы
   - θ, … — термы
   - f, g, … — функциональные символы
   - x, y, … — предметные переменные
2. Скобки — как в И.В.; квантор — жадный:

$$(\forall a.\, \underbrace{A \vee B \vee C \to \exists b.\, \underbrace{D \mathbin{\&} \neg E}_{\exists b. \ldots}}_{\forall a. \ldots}) \mathbin{\&} F$$

3. Дополнительные обозначения при необходимости:
   - $(\theta_1 = \theta_2)$ вместо $E(\theta_1, \theta_2)$
   - $(\theta_1 + \theta_2)$ вместо $p(\theta_1, \theta_2)$
   - 0 вместо z
   - …

Теория моделей: два типа значений

Напомним формулу:

$$\forall x.\, \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

Без синтаксического сахара:

$$\forall x. E(s(x), z) \ \vee \ G(p(q(s(x)), o), o)$$

Теория моделей: два типа значений

Напомним формулу:

$$\forall x. \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

Без синтаксического сахара:

$$\forall x. E(s(x), z) \ \vee \ G(p(q(s(x)), o), o)$$

1. Истинностные (логические) значения:
   1.1 предикаты (в том числе пропозициональные переменные = нульместные предикаты);

Теория моделей: два типа значений

Напомним формулу:

$$\forall x. \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

Без синтаксического сахара:

$$\forall x. E(s(x), z) \vee G(p(q(s(x)), o), o)$$

1. Истинностные (логические) значения:
   1.1 предикаты (в том числе пропозициональные переменные = нульместные предикаты);
   1.2 логические связки и кванторы.

Теория моделей: два типа значений

Напомним формулу:

$$\forall x. \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

Без синтаксического сахара:

$$\forall x. E(s(x), z) \vee G(p(q(s(x)), o), o)$$

1. Истинностные (логические) значения:
   1.1 предикаты (в том числе пропозициональные переменные = нульместные предикаты);
   1.2 логические связки и кванторы.
2. Предметные значения:
   2.1 предметные переменные;

Теория моделей: два типа значений

Напомним формулу:

$$\forall x.\, \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

Без синтаксического сахара:

$$\forall x. E(s(x), z) \vee G(p(q(s(x)), o), o)$$

1. Истинностные (логические) значения:
   1.1 предикаты (в том числе пропозициональные переменные = нульместные предикаты);
   1.2 логические связки и кванторы.
2. Предметные значения:
   2.1 предметные переменные;
   2.2 функциональные символы (в том числе константы = нульместные функциональные символы)

Оценка исчисления предикатов

Определение

Оценка — упорядоченная четвёрка $\langle D, F, P, E \rangle$*, где:*

Оценка исчисления предикатов

Определение

Оценка — упорядоченная четвёрка $\langle D, F, P, E \rangle$*, где:*

1. $D \neq \varnothing$ *— предметное множество;*

Оценка исчисления предикатов

Определение

Оценка — упорядоченная четвёрка $\langle D, F, P, E \rangle$*, где:*

1. $D \neq \varnothing$ *— предметное множество;*
2. F *— оценка для функциональных символов; пусть* f_n *—* n*-местный функциональный символ:*

$$F_{f_n} : D^n \to D$$

Оценка исчисления предикатов

Определение

Оценка — упорядоченная четвёрка $\langle D, F, P, E \rangle$, где:

1. $D \neq \varnothing$ *— предметное множество;*
2. F *— оценка для функциональных символов; пусть* f_n *—* n*-местный функциональный символ:*
$$F_{f_n} : D^n \to D$$
3. P *— оценка для предикатных символов; пусть* T_n *—* n*-местный предикатный символ:*
$$P_{T_n} : D^n \to V$$

Оценка исчисления предикатов

Определение

Оценка — упорядоченная четвёрка $\langle D, F, P, E \rangle$*, где:*

1. $D \neq \varnothing$ *— предметное множество;*
2. F *— оценка для функциональных символов; пусть* f_n *—* n*-местный функциональный символ:*
$$F_{f_n} : D^n \to D$$
3. P *— оценка для предикатных символов; пусть* T_n *—* n*-местный предикатный символ:*
$$P_{T_n} : D^n \to V \qquad V = \{И, Л\}$$

Оценка исчисления предикатов

Определение

Оценка — упорядоченная четвёрка $\langle D, F, P, E \rangle$*, где:*

1. $D \neq \varnothing$ *— предметное множество;*
2. F *— оценка для функциональных символов; пусть* f_n *—* n*-местный функциональный символ:*
$$F_{f_n} : D^n \to D$$
3. P *— оценка для предикатных символов; пусть* T_n *—* n*-местный предикатный символ:*
$$P_{T_n} : D^n \to V \qquad V = \{И, Л\}$$
4. E *— оценка для предметных переменных.*
$$E(x) \in D$$

Оценка формулы

Запись и сокращения записи подобны исчислению высказываний:

$$[\![\phi]\!] \in V, \quad [\![Q(x, f(x)) \vee R]\!]^{x:=1, f(t):=t^2, R:=\text{И}} = \text{И}$$

Оценка формулы

Запись и сокращения записи подобны исчислению высказываний:

$$[\![\phi]\!] \in V, \quad [\![Q(x, f(x)) \vee R]\!]^{x:=1, f(t):=t^2, R:=И} = И$$

1. Правила для связок $\vee$, &, $\neg$, $\rightarrow$ остаются прежние;

Оценка формулы

Запись и сокращения записи подобны исчислению высказываний:

$$[\![\phi]\!] \in V, \quad [\![Q(x, f(x)) \vee R]\!]^{x:=1, f(t):=t^2, R:=И} = И$$

1. Правила для связок $\vee$, $\&$, $\neg$, $\rightarrow$ остаются прежние;
2. $[\![f_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)]\!] = F_{f_n}([\![\theta_1]\!], [\![\theta_2]\!], \dots, [\![\theta_n]\!])$

Оценка формулы

Запись и сокращения записи подобны исчислению высказываний:

$$[\![\phi]\!] \in V, \quad [\![Q(x, f(x)) \vee R]\!]^{x:=1, f(t):=t^2, R:=\text{И}} = \text{И}$$

1. Правила для связок $\vee$, $\&$, $\neg$, $\rightarrow$ остаются прежние;
2. $[\![f_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)]\!] = F_{f_n}([\![\theta_1]\!], [\![\theta_2]\!], \dots, [\![\theta_n]\!])$
3. $[\![P_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)]\!] = P_{T_n}([\![\theta_1]\!], [\![\theta_2]\!], \dots, [\![\theta_n]\!])$

Оценка формулы

Запись и сокращения записи подобны исчислению высказываний:

$$[\![\phi]\!] \in V, \quad [\![Q(x, f(x)) \vee R]\!]^{x:=1, f(t):=t^2, R:=И} = И$$

1. Правила для связок $\vee$, &, $\neg$, $\rightarrow$ остаются прежние;
2. $[\![f_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)]\!] = F_{f_n}([\![\theta_1]\!], [\![\theta_2]\!], \dots, [\![\theta_n]\!])$
3. $[\![P_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)]\!] = P_{T_n}([\![\theta_1]\!], [\![\theta_2]\!], \dots, [\![\theta_n]\!])$
4. $$[\![\forall x.\phi]\!] = \begin{cases} И, & \text{если } [\![\phi]\!]^{x:=t} = И \text{ при всех } t \in D \\ Л, & \text{если найдётся } t \in D, \text{ что } [\![\phi]\!]^{x:=t} = Л \end{cases}$$

Оценка формулы

Запись и сокращения записи подобны исчислению высказываний:

$$[\![\phi]\!] \in V, \quad [\![Q(x, f(x)) \vee R]\!]^{x:=1, f(t):=t^2, R:=\text{И}} = \text{И}$$

1. Правила для связок $\vee$, $\&$, $\neg$, $\rightarrow$ остаются прежние;
2. $[\![f_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)]\!] = F_{f_n}([\![\theta_1]\!], [\![\theta_2]\!], \dots, [\![\theta_n]\!])$
3. $[\![P_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)]\!] = P_{T_n}([\![\theta_1]\!], [\![\theta_2]\!], \dots, [\![\theta_n]\!])$
4. $$[\![\forall x.\phi]\!] = \begin{cases} \text{И}, & \text{если } [\![\phi]\!]^{x:=t} = \text{И при всех } t \in D \\ \text{Л}, & \text{если найдётся } t \in D, \text{ что } [\![\phi]\!]^{x:=t} = \text{Л} \end{cases}$$
5. $$[\![\exists x.\phi]\!] = \begin{cases} \text{И}, & \text{если найдётся } t \in D, \text{ что } [\![\phi]\!]^{x:=t} = \text{И} \\ \text{Л}, & \text{если } [\![\phi]\!]^{x:=t} = \text{Л при всех } t \in D \end{cases}$$

Пример (очевидная интерпретация)

Оценим:

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

Пример (очевидная интерпретация)

Оценим:

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

Зададим оценку:

- $D := \mathbb{N}$;
- $F_1 := 1$, $F_{(+)}$ — сложение в $\mathbb{N}$;
- $P_{(=)}$ – равенство в $\mathbb{N}$.

Пример (очевидная интерпретация)

Оценим:

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

Зададим оценку:

- $D := \mathbb{N}$;
- $F_1 := 1$, $F_{(+)}$ — сложение в $\mathbb{N}$;
- $P_{(=)}$ – равенство в $\mathbb{N}$.

Фиксируем $a \in \mathbb{N}$. Тогда:

$$[\![a + 1 = b]\!]^{b:=a} = Л$$

Пример (очевидная интерпретация)

Оценим:

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a+1=b]\!]$$

Зададим оценку:

- $D := \mathbb{N}$;
- $F_1 := 1$, $F_{(+)}$ — сложение в $\mathbb{N}$;
- $P_{(=)}$ – равенство в $\mathbb{N}$.

Фиксируем $a \in \mathbb{N}$. Тогда:

$$[\![a+1=b]\!]^{b:=a} = Л$$

поэтому при любом $a \in \mathbb{N}$:

$$[\![\exists b.\neg a+1=b]\!] = И$$

Пример (очевидная интерпретация)

Оценим:

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

Зададим оценку:

- $D := \mathbb{N}$;
- $F_1 := 1$, $F_{(+)}$ — сложение в $\mathbb{N}$;
- $P_{(=)}$ – равенство в $\mathbb{N}$.

Фиксируем $a \in \mathbb{N}$. Тогда:

$$[\![a + 1 = b]\!]^{b:=a} = Л$$

поэтому при любом $a \in \mathbb{N}$:

$$[\![\exists b.\neg a + 1 = b]\!] = И$$

Итого:

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!] = И$$

Пример (странная интерпретация)

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

Пример (странная интерпретация)

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

Зададим интерпретацию:

- $D := \{\square\}$;
- $F_{(1)} := \square$, $F_{(+)}(a, b) := \square$;
- $P_{(=)}(a, b) :=$ И.

Пример (странная интерпретация)

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

Зададим интерпретацию:

- $D := \{\square\}$;
- $F_{(1)} := \square$, $F_{(+)}(a, b) := \square$;
- $P_{(=)}(a, b) :=$ И.

Тогда:

$$[\![a + 1 = b]\!]^{a:=\square, b:=\square} = \text{И}$$

Пример (странная интерпретация)

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

Зададим интерпретацию:

- $D := \{\square\}$;
- $F_{(1)} := \square$, $F_{(+)}(a, b) := \square$;
- $P_{(=)}(a, b) :=$ И.

Тогда:

$$[\![a + 1 = b]\!]^{a \in D, b \in D} = \text{И}$$

Пример (странная интерпретация)

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

Зададим интерпретацию:

- $D := \{\Box\}$;
- $F_{(1)} := \Box$, $F_{(+)}(a, b) := \Box$;
- $P_{(=)}(a, b) :=$ И.

Тогда:

$$[\![a + 1 = b]\!]^{a \in D, b \in D} = \text{И}$$

Итого:

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!] = \text{Л}$$

Общезначимость

Определение

Формула исчисления предикатов общезначима, если истинна при любой оценке:

$$\models \phi$$

Общезначимость

Определение

Формула исчисления предикатов общезначима, если истинна при любой оценке:

$$\models \phi$$

То есть истинна при любых D, F, P и E.

Пример: общезначимая формула

Теорема

$$[\![\forall x. Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x))]\!] = И$$

Доказательство.

Фиксируем D, F, P, E.

Пример: общезначимая формула

Теорема

$$[\![\forall x. Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x))]\!] = И$$

Доказательство.

Фиксируем D, F, P, E. Пусть $x \in D$.

Пример: общезначимая формула

Теорема

$$[\![\forall x.Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x))]\!] = И$$

Доказательство.

Фиксируем D, F, P, E. Пусть $x \in D$. Обозначим $P_Q(F_f(E_x))$ за t.

Пример: общезначимая формула

Теорема

$$[\![\forall x. Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x))]\!] = \textit{И}$$

Доказательство.

Фиксируем D, F, P, E. Пусть $x \in D$. Обозначим $P_Q(F_f(E_x))$ за t. Ясно, что $t \in V$. Разберём случаи.

- Если $t = \text{И}$, то $[\![Q(f(x))]\!]^{Q(f(x)):=t} = \text{И}$, потому $[\![Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x))]\!]^{Q(f(x)):=t} = \textit{И}$
- Если $t = \text{Л}$, то $[\![\neg Q(f(x))]\!]^{Q(f(x)):=t} = \text{И}$, потому всё равно $[\![Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x))]\!]^{Q(f(x)):=t} = \textit{И}$

$\square$

Свободные вхождения

Определение

Вхождение подформулы в формулу — это позиция первого символа этой подформулы в формуле.

$$\text{Вхождения } x \text{ в формулу:} \quad (\forall x.A(x) \vee \exists x.B(x)) \vee C(x)$$

Определение

Рассмотрим формулу $\forall x.\psi$ *(или* $\exists x.\psi$*). Здесь переменная* x *связана в* ψ*. Все вхождения переменной* x *в* ψ *— связанные.*

Определение

Вхождение x *в* ψ *свободное, если не находится в области действия никакого квантора по* x*. Переменная входит свободно в* ψ*, если имеет хотя бы одно свободное вхождение.* $FV(\psi), FV(\Gamma)$ *— множества свободных переменных в* ψ*, в* Γ

Пример

$\exists y.(\forall x.P(x)) \vee P(x) \vee Q(y)$

Подстановка, свобода для подстановки

$$\psi[x := \theta] := \begin{cases} \psi, & \psi \equiv y, y \not\equiv x \\ \psi, & \psi \equiv \forall x.\pi \text{ или } \psi \equiv \exists x.\pi \\ \pi[x := \theta] \star \rho[x := \theta], & \psi \equiv \pi \star \rho \\ \theta, & \psi \equiv x \\ \forall y.\pi[x := \theta], & \psi \equiv \forall y.\pi \text{ и } y \not\equiv x \\ \exists y.\pi[x := \theta], & \psi \equiv \exists y.\pi \text{ и } y \not\equiv x \end{cases}$$

Определение

Терм θ свободен для подстановки вместо x в ψ ($\psi[x := \theta]$), если ни одно свободное вхождение переменных в θ не станет связанным после подстановки.

Свобода есть	Свободы нет
$(\forall x.P(y))[y := z]$	$(\forall x.P(y))[y := x]$
$(\forall y.\forall x.P(x))[x := y]$	$(\forall y.\forall x.P(t))[t := y]$

Теория доказательств

Рассмотрим язык исчисления предикатов. Возьмём все схемы аксиом классического исчисления высказываний и добавим ещё две схемы аксиом (здесь везде θ свободен для подстановки вместо x в φ):

11. $(\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta]$
12. $\varphi[x := \theta] \rightarrow \exists x.\varphi$

Добавим ещё два правила вывода (здесь везде x не входит свободно в φ):

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \forall x.\psi} \text{ Правило для } \forall$$

$$\frac{\psi \rightarrow \varphi}{(\exists x.\psi) \rightarrow \varphi} \text{ Правило для } \exists$$

Определение

Доказуемость, выводимость, полнота, корректность — аналогично исчислению высказываний.

Важность ограничений на схемы аксиом и правила вывода

- Рассмотрим формулу $(\forall x.\exists y.\neg x = y) \to ((\exists y.\neg x = y)[x := y])$

Важность ограничений на схемы аксиом и правила вывода

- Рассмотрим формулу $(\forall x.\exists y.\neg x = y) \rightarrow ((\exists y.\neg x = y)[x := y])$
- Соответствует 11 схеме

$$(\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta] \qquad \varphi \equiv \exists y.\neg x = y \qquad \theta \equiv y$$

Важность ограничений на схемы аксиом и правила вывода

- Рассмотрим формулу $(\forall x.\exists y.\neg x = y) \to ((\exists y.\neg x = y)[x := y])$
- Соответствует 11 схеме

$$(\forall x.\varphi) \to \varphi[x := \theta] \qquad \varphi \equiv \exists y.\neg x = y \qquad \theta \equiv y$$

- Но нарушается свобода для подстановки

$$(\exists y.\neg x = y)[x := {\color{red}y}] \equiv (\exists {\color{red}y}.\neg {\color{red}y} = y)$$

Важность ограничений на схемы аксиом и правила вывода

- Рассмотрим формулу $(\forall x.\exists y.\neg x = y) \rightarrow ((\exists y.\neg x = y)[x := y])$
- Соответствует 11 схеме

$$(\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta] \qquad \varphi \equiv \exists y.\neg x = y \qquad \theta \equiv y$$

- Но нарушается свобода для подстановки

$$(\exists y.\neg x = y)[x := {\color{red}y}] \equiv (\exists {\color{red}y}.\neg {\color{red}y} = y)$$

- Пусть $D = \mathbb{N}$ и $(=)$ есть равенство на $\mathbb{N}$. Тогда

$$[\![\exists y.\neg x = y]\!] = \text{И} \qquad [\![(\exists y.\neg x = y)[x := y]]\!] = \text{Л}$$

Важность ограничений на схемы аксиом и правила вывода

- Рассмотрим формулу $(\forall x.\exists y.\neg x = y) \to ((\exists y.\neg x = y)[x := y])$
- Соответствует 11 схеме

$$(\forall x.\varphi) \to \varphi[x := \theta] \qquad \varphi \equiv \exists y.\neg x = y \qquad \theta \equiv y$$

- Но нарушается свобода для подстановки

$$(\exists y.\neg x = y)[x := y] \equiv (\exists y.\neg y = y)$$

- Пусть $D = \mathbb{N}$ и $(=)$ есть равенство на $\mathbb{N}$. Тогда

$$[\![\exists y.\neg x = y]\!] = И \qquad [\![(\exists y.\neg x = y)[x := y]]\!] = Л$$

- $\not\models (\forall x.\exists y.\neg x = y) \to ((\exists y.\neg x = y)[x := y])$

Теорема о дедукции для исчисления предикатов

Теорема

Если $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, *то* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$. *Если* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из* α, *то* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ — как в КИВ

Теорема о дедукции для исчисления предикатов

Теорема

Если $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, *то* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$. *Если* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из* α, *то* $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

Доказательство.

($\Rightarrow$) — как в КИВ ($\Leftarrow$) — та же схема, два новых случая.

Теорема о дедукции для исчисления предикатов

Теорема

Если $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, *то* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$. *Если* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из* α, *то* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

Доказательство.

($\Rightarrow$) — как в КИВ ($\Leftarrow$) — та же схема, два новых случая.
Перестроим: $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \equiv \beta$ в $\alpha \to \delta_1, \alpha \to \delta_2, \ldots, \alpha \to \delta_n$.
Дополним: обоснуем $\alpha \to \delta_n$, если предыдущие уже обоснованы.

Теорема о дедукции для исчисления предикатов

Теорема

Если $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$*, то* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$*. Если* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из* α*, то* $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$*.*

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ — как в КИВ $(\Leftarrow)$ — та же схема, два новых случая.
Перестроим: $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \equiv \beta$ в $\alpha \rightarrow \delta_1, \alpha \rightarrow \delta_2, \dots, \alpha \rightarrow \delta_n$.
Дополним: обоснуем $\alpha \rightarrow \delta_n$, если предыдущие уже обоснованы.
Два новых похожих случая: правила для $\forall$ и $\exists$. Рассмотрим $\forall$.
Доказываем (n) $\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \forall x.\varphi$ (правило для $\forall$), значит, доказано (k) $\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$.

Теорема о дедукции для исчисления предикатов

Теорема

Если $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$*, то* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$*. Если* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из* α*, то* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$*.*

Доказательство.

($\Rightarrow$) — как в КИВ ($\Leftarrow$) — та же схема, два новых случая.
Перестроим: $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \equiv \beta$ в $\alpha \to \delta_1, \alpha \to \delta_2, \dots, \alpha \to \delta_n$.
Дополним: обоснуем $\alpha \to \delta_n$, если предыдущие уже обоснованы.
Два новых похожих случая: правила для $\forall$ и $\exists$. Рассмотрим $\forall$.
Доказываем (n) $\alpha \to \psi \to \forall x.\varphi$ (правило для $\forall$), значит, доказано (k) $\alpha \to \psi \to \varphi$.

$(n-0.9)\dots(n-0.8)$	$(\alpha \to \psi \to \varphi) \to (\alpha \,\&\, \psi) \to \varphi$	Т. о полноте КИВ
$(n-0.6)$	$(\alpha \,\&\, \psi) \to \varphi$	M.P. $k, n-0.8$

Теорема о дедукции для исчисления предикатов

Теорема

Если $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, *то* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$. *Если* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из* α, *то* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ — как в КИВ $(\Leftarrow)$ — та же схема, два новых случая.
Перестроим: $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \equiv \beta$ в $\alpha \to \delta_1, \alpha \to \delta_2, \dots, \alpha \to \delta_n$.
Дополним: обоснуем $\alpha \to \delta_n$, если предыдущие уже обоснованы.
Два новых похожих случая: правила для $\forall$ и $\exists$. Рассмотрим $\forall$.
Доказываем (n) $\alpha \to \psi \to \forall x.\varphi$ (правило для $\forall$), значит, доказано (k) $\alpha \to \psi \to \varphi$.

$(n-0.9)\dots(n-0.8)$	$(\alpha \to \psi \to \varphi) \to (\alpha \mathbin{\&} \psi) \to \varphi$	Т. о полноте КИВ
$(n-0.6)$	$(\alpha \mathbin{\&} \psi) \to \varphi$	M.P. $k, n-0.8$
$(n-0.4)$	$(\alpha \mathbin{\&} \psi) \to \forall x.\varphi$	Правило для $\forall$, $n-0.6$

Теорема о дедукции для исчисления предикатов

Теорема

Если $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, *то* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$. *Если* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из* α, *то* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ — как в КИВ $(\Leftarrow)$ — та же схема, два новых случая.
Перестроим: $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \equiv \beta$ в $\alpha \to \delta_1, \alpha \to \delta_2, \dots, \alpha \to \delta_n$.
Дополним: обоснуем $\alpha \to \delta_n$, если предыдущие уже обоснованы.
Два новых похожих случая: правила для $\forall$ и $\exists$. Рассмотрим $\forall$.
Доказываем (n) $\alpha \to \psi \to \forall x.\varphi$ (правило для $\forall$), значит, доказано (k) $\alpha \to \psi \to \varphi$.

$(n-0.9)\dots(n-0.8)$	$(\alpha \to \psi \to \varphi) \to (\alpha \mathbin{\&} \psi) \to \varphi$	Т. о полноте КИВ
$(n-0.6)$	$(\alpha \mathbin{\&} \psi) \to \varphi$	M.P. $k, n-0.8$
$(n-0.4)$	$(\alpha \mathbin{\&} \psi) \to \forall x.\varphi$	Правило для $\forall$, $n-0.6$
$(n-0.3)\dots(n-0.2)$	$((\alpha \mathbin{\&} \psi) \to \forall x.\varphi) \to (\alpha \to \psi \to \forall x.\varphi)$	Т. о полноте КИВ
(n)	$\alpha \to \psi \to \forall x.\varphi$	M.P. $n-0.4$, $n-0.2$

$\square$

Следование

Определение

$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \models \alpha$, *если* α *выполнено всегда, когда выполнено* $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$.

Теорема

Если $\Gamma \vdash \alpha$ *и в доказательстве не используются кванторы по свободным переменным из* Γ, *то* $\Gamma \models \alpha$

Важность дополнительного условия в теореме о корректности

Пример

Покажем, что $\Gamma \models \alpha$ *ведёт себя неестественно, если в* α *используются кванторы по переменным, входящим свободно в* Γ.

Важность дополнительного условия в теореме о корректности

Пример

Покажем, что $\Gamma \models \alpha$ *ведёт себя неестественно, если в* α *используются кванторы по переменным, входящим свободно в* Γ.
Легко показать, что $P(x) \vdash \forall x.P(x)$.

Важность дополнительного условия в теореме о корректности

Пример

Покажем, что $\Gamma \models \alpha$ *ведёт себя неестественно, если в* α *используются кванторы по переменным, входящим свободно в* Γ*.*

Легко показать, что $P(x) \vdash \forall x.P(x)$*.*

(1)	$P(x)$	*Гипотеза*
(2)	$P(x) \to (A \to A \to A) \to P(x)$	*Сх. акс. 1*
(3)	$(A \to A \to A) \to P(x)$	*M.P. 1, 2*
(4)	$(A \to A \to A) \to \forall x.P(x)$	*Правило для* $\forall$*, 3*
(5)	$(A \to A \to A)$	*Сх. акс. 1*
(6)	$\forall x.P(x)$	*M.P. 5, 4*

Важность дополнительного условия в теореме о корректности

Пример

Покажем, что $\Gamma \models \alpha$ *ведёт себя неестественно, если в* α *используются кванторы по переменным, входящим свободно в* Γ.

Легко показать, что $P(x) \vdash \forall x.P(x)$.

(1)	$P(x)$	*Гипотеза*
(2)	$P(x) \rightarrow (A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow P(x)$	*Сх. акс. 1*
(3)	$(A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow P(x)$	*M.P. 1, 2*
(4)	$(A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow \forall x.P(x)$	*Правило для* $\forall$, *3*
(5)	$(A \rightarrow A \rightarrow A)$	*Сх. акс. 1*
(6)	$\forall x.P(x)$	*M.P. 5, 4*

Пусть $D = \mathbb{Z}$ *и* $P(x) = x > 0$. *Тогда не будет выполнено* $P(x) \models \forall x.P(x)$.

Корректность

Теорема

Если θ свободен для подстановки вместо x в φ, то $[\![\varphi]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = [\![\varphi[x := \theta]]\!]$

Доказательство (индукция по структуре φ).

- База: φ не имеет кванторов. Очевидно.
- Переход: пусть справедливо для ψ. Покажем для $\varphi = \forall y.\psi$.
  - $x = y$ либо $x \notin FV(\psi)$. Тогда: $[\![\forall y.\psi]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = [\![\forall y.\psi]\!] = [\![(\forall y.\psi)[x := \theta]]\!]$
  - $x \neq y$. Тогда: $[\![\forall y.\psi]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = [\![\psi]\!]^{y\in D; x:=[\![\theta]\!]} = \dots$

    Свобода для подстановки: $y \notin \theta$.

    $$\dots = [\![\psi]\!]^{x:=[\![\theta]\!]; y\in D} = \dots$$

    Индукционное предположение.

    $$\dots = [\![\psi[x := \theta]]\!]^{y\in D} = [\![\forall y.(\psi[x := \theta])]\!] = \dots$$

    Но $\forall y.(\psi[x := \theta]) \equiv (\forall y.\psi)[x := \theta]$ (как текст). Отсюда:

    $$\dots = [\![(\forall y.\psi)[x := \theta]]\!]$$

$\square$

Корректность

Теорема

Если $\Gamma \vdash \alpha$ *и в доказательстве не используются кванторы по свободным переменным из* $FV(\Gamma)$*, то* $\Gamma \models \alpha$

Доказательство.

Фиксируем D, F, P. Индукция по длине доказательства α: при любом E выполнено $\Gamma \models \alpha$ при длине доказательства n, покажем для $n+1$.

- Схемы аксиом (1)..(10), правило M.P.: аналогично И.В.
- Схемы (11) и (12), например, схема $(\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta]$:

$$[\![(\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta]]\!] = [\![((\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi)[x := \theta]]\!] = [\![((\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = \text{И}$$

- Правила для кванторов: например, введение $\forall$:
  Пусть $[\![\psi \rightarrow \varphi]\!] = \text{И}$. Причём $x \notin FV(\Gamma)$ и $x \notin FV(\psi)$. То есть, при любом x выполнено $[\![\psi \rightarrow \varphi]\!]^{x:=x} = \text{И}$. Тогда $[\![\psi \rightarrow (\forall x.\varphi)]\!] = \text{И}$.

$\square$