# Исчисление предикатов

# Категорические силлогизмы

- Силлогизм — «подытоживание, подсчёт, умозаключение»
- Категорический — потому, что речь идёт о категориях (в философском смысле).
- Пример:

$$\frac{\text{Каждый человек смертен} \qquad \text{Сократ есть человек}}{\text{Сократ смертен}}$$

- Восходят к Аристотелю и Теофрасту, активно развивались в средневековье.

# Категорический силлогизм: вспомогательные определения

Категорический силлллогизм соединяет три термина:

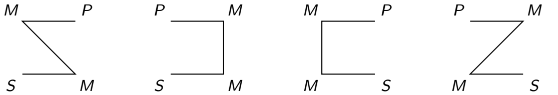
предикат (больший термин, P)
субъект (меньший термин, S)
средний термин (M).

На основании соотношений P и M, а также M и S строим соотношение P и S.
Возможные соотношения:

| | | |
|---|---|---|
| A | Affirmato (общеутвердительное) | Матан есть раздел математики (SaP) |
| I | affIrmato (частноутвердительное) | Некоторые разделы математики сложны (SiP) |
| E | nEgo (общеотрицательное) | Никакой человек не знает всю математику |
| O | negO (частноотрицательное) | Некоторые разделы математики — не матан |

# Фигуры и модусы

| | Фигура 1 | Фигура 2 | Фигура 3 | Фигура 4 |
|---|---|---|---|---|




| | Фигура 1 | Фигура 2 | Фигура 3 | Фигура 4 |
|---|---|---|---|---|
| Большая посылка: | M—P | P—M | M—P | P—M |
| Меньшая посылка: | S—M | S—M | M—S | M—S |
| Заключение: | S—P | S—P | S—P | S—P |

Расстановка соотношений вместо «—» в фигуре — модус. Например, тут — фигура 1, ааа.

$$\frac{\text{Каждый человек смертен} \qquad \text{Сократ есть человек}}{\text{Сократ смертен}}$$

# Правильные модусы

Не все модусы осмысленны. Например фигура 1, aae — нет:

$$\frac{\text{Каждый человек смертен} \qquad \text{Сократ есть человек}}{\text{Сократ не есть смертен}}$$

Все правильные модусы:

| Фигура 1 | Фигура 2 | Фигура 3 | Фигура 4 |
|---|---|---|---|
| Barbara | Cesare | Darapti | Bramantip |
| Celarent | Camestres | Disamis | Camenes |
| Darii | Festino | Datisi | Dimaris |
| Ferio | Baroco | Felapton | Fesapo |
| Barbari | Cesaro | Bocardo | Fresison |
| Celaront | Camestros | Ferison | Camenos |

Многие модусы требуют непустоты M. Например Darapti:

$$\frac{\text{Все единороги имеют рог} \qquad \text{Все единороги суть лошади}}{\text{Некоторые лошади имеют рог}}$$

# Ограничения языка исчисления высказываний

$$\frac{\text{Каждый человек смертен} \qquad \text{Сократ есть человек}}{\text{Сократ смертен}}$$

# Ограничения языка исчисления высказываний

$$\frac{\text{Каждый человек смертен} \qquad \text{Сократ есть человек}}{\text{Сократ смертен}}$$

Цель: увеличить формализованную часть метаязыка.

# Ограничения языка исчисления высказываний

$$\frac{\text{Каждый человек смертен} \qquad \text{Сократ есть человек}}{\text{Сократ смертен}}$$

Цель: увеличить формализованную часть метаязыка.

Мы неформально знакомы с предикатами $(P : D \to V)$ и кванторами $(\forall x.H(x) \to S(x))$.

$$\frac{\forall x.H(x) \to S(x) \qquad H(\text{Сократ})}{S(\text{Сократ})}$$

# Начнём с примера

$$\forall x. \sin x = 0 \lor (\sin x)^2 + 1 > 1$$

# Начнём с примера

$$\forall x.\sin x = 0 \lor (\sin x)^2 + 1 > 1$$

1. Предметные (здесь: числовые) выражения
   1.1 Предметные переменные ($x$).

# Начнём с примера

$$\forall x. \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

1. Предметные (здесь: числовые) выражения
   1.1 Предметные переменные ($x$).
   1.2 Одно- и двухместные функциональные символы «синус», «возведение в квадрат» и «сложение».

# Начнём с примера

$$\forall x. \sin x = 0 \lor (\sin x)^2 + 1 > 1$$

1. Предметные (здесь: числовые) выражения
   1.1 Предметные переменные ($x$).
   1.2 Одно- и двухместные функциональные символы «синус», «возведение в квадрат» и «сложение».
   1.3 Нульместные функциональные символы «ноль» ($0$) и «один» ($1$).

# Начнём с примера

$$\forall x.\sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

1. Предметные (здесь: числовые) выражения
   1.1 Предметные переменные ($x$).
   1.2 Одно- и двухместные функциональные символы «синус», «возведение в квадрат» и «сложение».
   1.3 Нульместные функциональные символы «ноль» ($0$) и «один» ($1$).
2. Логические выражения
   2.1 Предикатные символы «равно» и «больше»

# Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.

# Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метапеременная $\theta$.

# Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метапеременная $\theta$.
   - Предметные переменные: $a$, $b$, $c$, ..., метапеременные $x$, $y$.

# Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метапеременная $\theta$.
    - Предметные переменные: $a$, $b$, $c$, …, метапеременные $x$, $y$.
    - Функциональные выражения: $f(\theta_1, \dots, \theta_n)$, метапеременные $f$, $g$, …

# Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метапеременная $\theta$.
   - Предметные переменные: $a$, $b$, $c$, ..., метапеременные $x$, $y$.
   - Функциональные выражения: $f(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, метапеременные $f$, $g$, ...
   - Примеры: $r$, $q(p(x, s), r)$.

# Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метапеременная $\theta$.
   - Предметные переменные: $a$, $b$, $c$, ..., метапеременные $x$, $y$.
   - Функциональные выражения: $f(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, метапеременные $f$, $g$, ...
   - Примеры: $r$, $q(p(x, s), r)$.
3. Логические выражения: метапеременные $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ...
   - Предикатные выражения: $P(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, метапеременная $P$.

# Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метапеременная $\theta$.
   - Предметные переменные: $a$, $b$, $c$, ..., метапеременные $x$, $y$.
   - Функциональные выражения: $f(\theta_1, \dots, \theta_n)$, метапеременные $f$, $g$, ...
   - Примеры: $r$, $q(p(x, s), r)$.
3. Логические выражения: метапеременные $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ...
   - Предикатные выражения: $P(\theta_1, \dots, \theta_n)$, метапеременная $P$.
     Имена: $A$, $B$, $C$, ...

# Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метапеременная $\theta$.
   - Предметные переменные: $a$, $b$, $c$, …, метапеременные $x$, $y$.
   - Функциональные выражения: $f(\theta_1, \dots, \theta_n)$, метапеременные $f$, $g$, …
   - Примеры: $r$, $q(p(x, s), r)$.
3. Логические выражения: метапеременные $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, …
   - Предикатные выражения: $P(\theta_1, \dots, \theta_n)$, метапеременная $P$.
     Имена: $A$, $B$, $C$, …
   - Связки: $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \,\&\, \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $(\neg\varphi)$.

# Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метапеременная $\theta$.
    - Предметные переменные: $a$, $b$, $c$, $\ldots$, метапеременные $x$, $y$.
    - Функциональные выражения: $f(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, метапеременные $f$, $g$, $\ldots$
    - Примеры: $r$, $q(p(x, s), r)$.
3. Логические выражения: метапеременные $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\ldots$
    - Предикатные выражения: $P(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, метапеременная $P$.
      Имена: $A$, $B$, $C$, $\ldots$
    - Связки: $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \,\&\, \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\neg\varphi)$.
    - Кванторы: $(\forall x.\varphi)$ и $(\exists x.\varphi)$.

# Сокращения записи, метаязык

1. Метапеременные:
   - $\psi$, $\phi$, $\pi$, ... — формулы
   - $P$, $Q$, ... — предикатные символы
   - $\theta$, ... — термы
   - $f$, $g$, ... — функциональные символы
   - $x$, $y$, ... — предметные переменные

# Сокращения записи, метаязык

1. Метапеременные:
   - $\psi$, $\phi$, $\pi$, $\dots$ — формулы
   - $P$, $Q$, $\dots$ — предикатные символы
   - $\theta$, $\dots$ — термы
   - $f$, $g$, $\dots$ — функциональные символы
   - $x$, $y$, $\dots$ — предметные переменные
2. Скобки — как в И.В.; квантор — жадный:

$$(\forall a.\ \underbrace{A \vee B \vee C \to \exists b.\ \underbrace{D \mathbin{\&} \neg E}_{\exists b\dots}}_{\forall a\dots}) \mathbin{\&} F$$

# Сокращения записи, метаязык

1. Метапеременные:
   - $\psi$, $\phi$, $\pi$, …— формулы
   - $P$, $Q$, …— предикатные символы
   - $\theta$, …— термы
   - $f$, $g$, …— функциональные символы
   - $x$, $y$, …— предметные переменные
2. Скобки — как в И.В.; квантор — жадный:

$$(\forall a.\ \underbrace{A \vee B \vee C \rightarrow \exists b.\ \underbrace{D\ \&\ \neg E}_{\exists b \ldots}}_{\forall a \ldots})\ \&\ F$$

3. Дополнительные обозначения при необходимости:
   - $(\theta_1 = \theta_2)$ вместо $E(\theta_1, \theta_2)$
   - $(\theta_1 + \theta_2)$ вместо $p(\theta_1, \theta_2)$
   - $0$ вместо $z$
   - …

# Теория моделей: два типа значений

Напомним формулу:

$$\forall x.\, \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

Без синтаксического сахара:

$$\forall x. E(s(x), z) \ \vee \ G(p(q(s(x)), o), o)$$

# Теория моделей: два типа значений

Напомним формулу:

$$\forall x.\, \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

Без синтаксического сахара:

$$\forall x. E(s(x), z) \ \vee \ G(p(q(s(x)), o), o)$$

1. Истинностные (логические) значения:
   1.1 предикаты (в том числе пропозициональные переменные = нульместные предикаты);

# Теория моделей: два типа значений

Напомним формулу:

$$\forall x. \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

Без синтаксического сахара:

$$\forall x. E(s(x), z) \vee G(p(q(s(x)), o), o)$$

1. Истинностные (логические) значения:
   1.1 предикаты (в том числе пропозициональные переменные = нульместные предикаты);
   1.2 логические связки и кванторы.

# Теория моделей: два типа значений

Напомним формулу:

$$\forall x. \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

Без синтаксического сахара:

$$\forall x. E(s(x), z) \vee G(p(q(s(x)), o), o)$$

1. Истинностные (логические) значения:
   1.1 предикаты (в том числе пропозициональные переменные = нульместные предикаты);
   1.2 логические связки и кванторы.
2. Предметные значения:
   2.1 предметные переменные;

# Теория моделей: два типа значений

Напомним формулу:

$$\forall x.\, \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

Без синтаксического сахара:

$$\forall x. E(s(x), z) \vee G(p(q(s(x)), o), o)$$

1. Истинностные (логические) значения:
   1.1 предикаты (в том числе пропозициональные переменные = нульместные предикаты);
   1.2 логические связки и кванторы.
2. Предметные значения:
   2.1 предметные переменные;
   2.2 функциональные символы (в том числе константы = нульместные функциональные символы)

# Оценка исчисления предикатов

## Определение

*Оценка — упорядоченная четвёрка* $\langle D, F, P, E \rangle$, *где:*

# Оценка исчисления предикатов

## Определение

*Оценка — упорядоченная четвёрка* $\langle D, F, P, E \rangle$, *где:*

1. $D$ *— предметное множество;*

# Оценка исчисления предикатов

## Определение

*Оценка — упорядоченная четвёрка* $\langle D, F, P, E \rangle$, *где:*

1. $D$ *— предметное множество;*
2. $F$ *— оценка для функциональных символов; пусть* $f_n$ *—* $n$*-местный функциональный символ:*

$$F_{f_n} : D^n \to D$$

# Оценка исчисления предикатов

## Определение

*Оценка — упорядоченная четвёрка* $\langle D, F, P, E \rangle$, *где:*

1. $D$ *— предметное множество;*
2. $F$ *— оценка для функциональных символов; пусть* $f_n$ *—* $n$*-местный функциональный символ:*
$$F_{f_n} : D^n \to D$$
3. $P$ *— оценка для предикатных символов; пусть* $T_n$ *—* $n$*-местный предикатный символ:*
$$P_{T_n} : D^n \to V$$

# Оценка исчисления предикатов

## Определение

*Оценка — упорядоченная четвёрка* $\langle D, F, P, E \rangle$, *где:*

1. $D$ *— предметное множество;*
2. $F$ *— оценка для функциональных символов; пусть* $f_n$ *—* $n$*-местный функциональный символ:*
$$F_{f_n} : D^n \to D$$
3. $P$ *— оценка для предикатных символов; пусть* $T_n$ *—* $n$*-местный предикатный символ:*
$$P_{T_n} : D^n \to V \qquad\qquad V = \{И, Л\}$$

# Оценка исчисления предикатов

## Определение

*Оценка — упорядоченная четвёрка* $\langle D, F, P, E\rangle$*, где:*

1. $D$ *— предметное множество;*
2. $F$ *— оценка для функциональных символов; пусть* $f_n$ *—* $n$*-местный функциональный символ:*
$$F_{f_n} : D^n \to D$$
3. $P$ *— оценка для предикатных символов; пусть* $T_n$ *—* $n$*-местный предикатный символ:*
$$P_{T_n} : D^n \to V \qquad\qquad V = \{И, Л\}$$
4. $E$ *— оценка для предметных переменных.*
$$E(x) \in D$$

# Оценка формулы

Запись и сокращения записи подобны исчислению высказываний:

$$[\![\phi]\!] \in V, \quad [\![Q(x, f(x)) \vee R]\!]^{x:=1, f(t):=t^2, R:=\text{И}} = \text{И}$$

# Оценка формулы

Запись и сокращения записи подобны исчислению высказываний:

$$[\![\phi]\!] \in V, \quad [\![Q(x, f(x)) \vee R]\!]^{x:=1, f(t):=t^2, R:=\text{И}} = \text{И}$$

1. Правила для связок $\vee$, &, $\neg$, $\rightarrow$ остаются прежние;

# Оценка формулы

Запись и сокращения записи подобны исчислению высказываний:

$$[\![\phi]\!] \in V, \quad [\![Q(x, f(x)) \vee R]\!]^{x:=1, f(t):=t^2, R:=И} = И$$

1. Правила для связок $\vee$, &, $\neg$, $\rightarrow$ остаются прежние;
2. $[\![f_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)]\!] = F_{f_n}([\![\theta_1]\!], [\![\theta_2]\!], \dots, [\![\theta_n]\!])$

# Оценка формулы

Запись и сокращения записи подобны исчислению высказываний:

$$[\![\phi]\!] \in V, \quad [\![Q(x, f(x)) \vee R]\!]^{x:=1, f(t):=t^2, R:=\text{И}} = \text{И}$$

1. Правила для связок $\vee$, $\&$, $\neg$, $\rightarrow$ остаются прежние;
2. $[\![f_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)]\!] = F_{f_n}([\![\theta_1]\!], [\![\theta_2]\!], \dots, [\![\theta_n]\!])$
3. $[\![P_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)]\!] = P_{T_n}([\![\theta_1]\!], [\![\theta_2]\!], \dots, [\![\theta_n]\!])$

# Оценка формулы

Запись и сокращения записи подобны исчислению высказываний:

$$[\![\phi]\!] \in V, \quad [\![Q(x, f(x)) \vee R]\!]^{x:=1, f(t):=t^2, R:=\text{И}} = \text{И}$$

1. Правила для связок $\vee$, &, $\neg$, $\rightarrow$ остаются прежние;
2. $[\![f_n(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)]\!] = F_{f_n}([\![\theta_1]\!], [\![\theta_2]\!], \ldots, [\![\theta_n]\!])$
3. $[\![P_n(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)]\!] = P_{T_n}([\![\theta_1]\!], [\![\theta_2]\!], \ldots, [\![\theta_n]\!])$
4. $$[\![\forall x.\phi]\!] = \begin{cases} \text{И}, & \text{если } [\![\phi]\!]^{x:=t} = \text{И при всех } t \in D \\ \text{Л}, & \text{если найдётся } t \in D, \text{ что } [\![\phi]\!]^{x:=t} = \text{Л} \end{cases}$$

# Оценка формулы

Запись и сокращения записи подобны исчислению высказываний:

$$[\![\phi]\!] \in V, \quad [\![Q(x, f(x)) \vee R]\!]^{x:=1, f(t):=t^2, R:=\text{И}} = \text{И}$$

1. Правила для связок $\vee$, $\&$, $\neg$, $\rightarrow$ остаются прежние;
2. $[\![f_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)]\!] = F_{f_n}([\![\theta_1]\!], [\![\theta_2]\!], \dots, [\![\theta_n]\!])$
3. $[\![P_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)]\!] = P_{T_n}([\![\theta_1]\!], [\![\theta_2]\!], \dots, [\![\theta_n]\!])$
4. $$[\![\forall x.\phi]\!] = \begin{cases} \text{И}, & \text{если } [\![\phi]\!]^{x:=t} = \text{И при всех } t \in D \\ \text{Л}, & \text{если найдётся } t \in D, \text{ что } [\![\phi]\!]^{x:=t} = \text{Л} \end{cases}$$
5. $$[\![\exists x.\phi]\!] = \begin{cases} \text{И}, & \text{если найдётся } t \in D, \text{ что } [\![\phi]\!]^{x:=t} = \text{И} \\ \text{Л}, & \text{если } [\![\phi]\!]^{x:=t} = \text{Л при всех } t \in D \end{cases}$$

# Пример (очевидная интерпретация)

Оценим:

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

# Пример (очевидная интерпретация)

Оценим:

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

Зададим оценку:

- $D := \mathbb{N}$;
- $F_1 := 1$, $F_{(+)}$ — сложение в $\mathbb{N}$;
- $P_{(=)}$ – равенство в $\mathbb{N}$.

## Пример (очевидная интерпретация)

Оценим:

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

Зададим оценку:

- $D := \mathbb{N}$;
- $F_1 := 1$, $F_{(+)}$ — сложение в $\mathbb{N}$;
- $P_{(=)}$ – равенство в $\mathbb{N}$.

Фиксируем $a \in \mathbb{N}$. Тогда:

$$[\![a + 1 = b]\!]^{b:=a} = Л$$

# Пример (очевидная интерпретация)

Оценим:

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

Зададим оценку:

- $D := \mathbb{N}$;
- $F_1 := 1$, $F_{(+)}$ — сложение в $\mathbb{N}$;
- $P_{(=)}$ – равенство в $\mathbb{N}$.

Фиксируем $a \in \mathbb{N}$. Тогда:

$$[\![a + 1 = b]\!]^{b:=a} = \text{Л}$$

поэтому при любом $a \in \mathbb{N}$:

$$[\![\exists b.\neg a + 1 = b]\!] = \text{И}$$

# Пример (очевидная интерпретация)

Оценим:

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

Зададим оценку:

- $D := \mathbb{N}$;
- $F_1 := 1$, $F_{(+)}$ — сложение в $\mathbb{N}$;
- $P_{(=)}$ – равенство в $\mathbb{N}$.

Фиксируем $a \in \mathbb{N}$. Тогда:

$$[\![a + 1 = b]\!]^{b:=a} = Л$$

поэтому при любом $a \in \mathbb{N}$:

$$[\![\exists b.\neg a + 1 = b]\!] = И$$

Итого:

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!] = И$$

# Пример (странная интерпретация)

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

# Пример (странная интерпретация)

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

Зададим интерпретацию:

- $D := \{\square\}$;
- $F_{(1)} := \square$, $F_{(+)}(a, b) := \square$;
- $P_{(=)}(a, b) :=$ И.

# Пример (странная интерпретация)

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

Зададим интерпретацию:

- $D := \{\Box\}$;
- $F_{(1)} := \Box$, $F_{(+)}(a, b) := \Box$;
- $P_{(=)}(a, b) :=$ И.

Тогда:

$$[\![a + 1 = b]\!]^{a:=\Box, b:=\Box} = \text{И}$$

# Пример (странная интерпретация)

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

Зададим интерпретацию:

- $D := \{\square\}$;
- $F_{(1)} := \square$, $F_{(+)}(a, b) := \square$;
- $P_{(=)}(a, b) :=$ И.

Тогда:

$$[\![a + 1 = b]\!]^{a \in D, b \in D} = \text{И}$$

# Пример (странная интерпретация)

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

Зададим интерпретацию:

- $D := \{\square\}$;
- $F_{(1)} := \square$, $F_{(+)}(a, b) := \square$;
- $P_{(=)}(a, b) :=$ И.

Тогда:

$$[\![a + 1 = b]\!]^{a \in D, b \in D} = \text{И}$$

Итого:

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!] = \text{Л}$$

# Общезначимость

## Определение

*Формула исчисления предикатов общезначима, если истинна при любой оценке:*

$$\models \phi$$

# Общезначимость

## Определение

*Формула исчисления предикатов общезначима, если истинна при любой оценке:*

$$\models \phi$$

То есть истинна при любых $D$, $F$, $P$ и $E$.

# Пример: общезначимая формула

### Теорема

$$[\![\forall x. Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x))]\!] = \textit{И}$$

### Доказательство.

Фиксируем $D$, $F$, $P$, $E$.

# Пример: общезначимая формула

## Теорема

$$[\![\forall x. Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x))]\!] = \text{И}$$

## Доказательство.

Фиксируем $D$, $F$, $P$, $E$. Пусть $x \in D$.

# Пример: общезначимая формула

## Теорема

$$[\![\forall x.Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x))]\!] = И$$

## Доказательство.

Фиксируем $D$, $F$, $P$, $E$. Пусть $x \in D$. Обозначим $P_Q(F_f(E_x))$ за $t$.

# Пример: общезначимая формула

**Теорема**

$$[\![\forall x. Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x))]\!] = И$$

**Доказательство.**

Фиксируем $D$, $F$, $P$, $E$. Пусть $x \in D$. Обозначим $P_Q(F_f(E_x))$ за $t$. Ясно, что $t \in V$. Разберём случаи.

- Если $t =$ И, то $[\![Q(f(x))]\!]^{Q(f(x)):=t} =$ И, потому $[\![Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x))]\!]^{Q(f(x)):=t} = И$
- Если $t =$ Л, то $[\![\neg Q(f(x))]\!]^{Q(f(x)):=t} =$ И, потому всё равно $[\![Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x))]\!]^{Q(f(x)):=t} = И$

$\square$

# Свободные вхождения

## Определение

*Вхождение подформулы в формулу — это позиция первого символа этой подформулы в формуле.*

$$\text{Вхождения } x \text{ в формулу:} \quad (\forall x.A(x) \vee \exists x.B(x)) \vee C(x)$$

## Определение

*Рассмотрим формулу $\forall x.\psi$ (или $\exists x.\psi$). Здесь переменная $x$ связана в $\psi$. Все вхождения переменной $x$ в $\psi$ — связанные.*

## Определение

*Вхождение $x$ в $\psi$ свободное, если не находится в области действия никакого квантора по $x$. Переменная входит свободно в $\psi$, если имеет хотя бы одно свободное вхождение. $FV(\psi), FV(\Gamma)$ — множества свободных переменных в $\psi$, в $\Gamma$*

## Пример

$\exists y.(\forall x.P(x)) \vee P(x) \vee Q(y)$

# Подстановка, свобода для подстановки

$$\psi[x := \theta] := \begin{cases} \psi, & \psi \equiv y, y \not\equiv x \\ \psi, & \psi \equiv \forall x.\pi \text{ или } \psi \equiv \exists x.\pi \\ \pi[x := \theta] \star \rho[x := \theta], & \psi \equiv \pi \star \rho \\ \theta, & \psi \equiv x \\ \forall y.\pi[x := \theta], & \psi \equiv \forall y.\pi \text{ и } y \not\equiv x \\ \exists y.\pi[x := \theta], & \psi \equiv \exists y.\pi \text{ и } y \not\equiv x \end{cases}$$

## Определение

*Терм $\theta$ свободен для подстановки вместо $x$ в $\psi$ ($\psi[x := \theta]$), если ни одно свободное вхождение переменных в $\theta$ не станет связанным после подстановки.*

| Свобода есть | Свободы нет |
|---|---|
| $(\forall x.P(y))[y := z]$ | $(\forall x.P(y))[y := x]$ |
| $(\forall y.\forall x.P(x))[x := y]$ | $(\forall y.\forall x.P(t))[t := y]$ |

# Теория доказательств

Рассмотрим язык исчисления предикатов. Возьмём все схемы аксиом классического исчисления высказываний и добавим ещё две схемы аксиом (здесь везде $\theta$ свободен для подстановки вместо $x$ в $\varphi$):

11. $(\forall x.\varphi) \to \varphi[x := \theta]$
12. $\varphi[x := \theta] \to \exists x.\varphi$

Добавим ещё два правила вывода (здесь везде $x$ не входит свободно в $\varphi$):

$$\frac{\varphi \to \psi}{\varphi \to \forall x.\psi} \text{ Правило для } \forall$$

$$\frac{\psi \to \varphi}{(\exists x.\psi) \to \varphi} \text{ Правило для } \exists$$

## Определение

*Доказуемость, выводимость, полнота, корректность — аналогично исчислению высказываний.*

# Важность ограничений на схемы аксиом и правила вывода

- Рассмотрим формулу $(\forall x.\exists y.\neg x = y) \to ((\exists y.\neg x = y)[x := y])$

# Важность ограничений на схемы аксиом и правила вывода

- Рассмотрим формулу $(\forall x.\exists y.\neg x = y) \rightarrow ((\exists y.\neg x = y)[x := y])$
- Соответствует 11 схеме

$$(\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta] \qquad \varphi \equiv \exists y.\neg x = y \qquad \theta \equiv y$$

# Важность ограничений на схемы аксиом и правила вывода

- Рассмотрим формулу $(\forall x.\exists y.\neg x = y) \to ((\exists y.\neg x = y)[x := y])$
- Соответствует 11 схеме

$$(\forall x.\varphi) \to \varphi[x := \theta] \qquad \varphi \equiv \exists y.\neg x = y \qquad \theta \equiv y$$

- Но нарушается свобода для подстановки

$$(\exists y.\neg x = y)[x := y] \equiv (\exists y.\neg y = y)$$

# Важность ограничений на схемы аксиом и правила вывода

- Рассмотрим формулу $(\forall x.\exists y.\neg x = y) \rightarrow ((\exists y.\neg x = y)[x := y])$
- Соответствует 11 схеме

$$(\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta] \qquad \varphi \equiv \exists y.\neg x = y \qquad \theta \equiv y$$

- Но нарушается свобода для подстановки

$$(\exists y.\neg x = y)[x := y] \equiv (\exists y.\neg y = y)$$

- Пусть $D = \mathbb{N}$ и $(=)$ есть равенство на $\mathbb{N}$. Тогда

$$[\![\exists y.\neg x = y]\!] = И \qquad [\![(\exists y.\neg x = y)[x := y]]\!] = Л$$

# Важность ограничений на схемы аксиом и правила вывода

- Рассмотрим формулу $(\forall x.\exists y.\neg x = y) \rightarrow ((\exists y.\neg x = y)[x := y])$
- Соответствует 11 схеме

$$(\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta] \qquad \varphi \equiv \exists y.\neg x = y \qquad \theta \equiv y$$

- Но нарушается свобода для подстановки

$$(\exists y.\neg x = y)[x := y] \equiv (\exists y.\neg y = y)$$

- Пусть $D = \mathbb{N}$ и $(=)$ есть равенство на $\mathbb{N}$. Тогда

$$[\![\exists y.\neg x = y]\!] = \text{И} \qquad [\![(\exists y.\neg x = y)[x := y]]\!] = \text{Л}$$

- $\not\models (\forall x.\exists y.\neg x = y) \rightarrow ((\exists y.\neg x = y)[x := y])$

# Теорема о дедукции для исчисления предикатов

### Теорема

*Если* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$*, то* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$*. Если* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из* $\alpha$*, то* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$*.*

### Доказательство.

$(\Rightarrow)$ — как в КИВ

# Теорема о дедукции для исчисления предикатов

## Теорема

*Если* $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$*, то* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$*. Если* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из* $\alpha$*, то* $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$*.*

## Доказательство.

$(\Rightarrow)$ — как в КИВ $(\Leftarrow)$ — та же схема, два новых случая.

# Теорема о дедукции для исчисления предикатов

## Теорема

*Если* $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, *то* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$. *Если* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из* $\alpha$, *то* $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

## Доказательство.

($\Rightarrow$) — как в КИВ ($\Leftarrow$) — та же схема, два новых случая.
Перестроим: $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \equiv \beta$ в $\alpha \rightarrow \delta_1, \alpha \rightarrow \delta_2, \dots, \alpha \rightarrow \delta_n$.
Дополним: обоснуем $\alpha \rightarrow \delta_n$, если предыдущие уже обоснованы.

# Теорема о дедукции для исчисления предикатов

## Теорема

*Если* $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, *то* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$. *Если* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из* $\alpha$, *то* $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

## Доказательство.

($\Rightarrow$) — как в КИВ ($\Leftarrow$) — та же схема, два новых случая.
Перестроим: $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \equiv \beta$ в $\alpha \rightarrow \delta_1, \alpha \rightarrow \delta_2, \dots, \alpha \rightarrow \delta_n$.
Дополним: обоснуем $\alpha \rightarrow \delta_n$, если предыдущие уже обоснованы.
Два новых похожих случая: правила для $\forall$ и $\exists$. Рассмотрим $\forall$.
Доказываем ($n$) $\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \forall x.\varphi$ (правило для $\forall$), значит, доказано ($k$) $\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$.

# Теорема о дедукции для исчисления предикатов

## Теорема

*Если* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$*, то* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$*. Если* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из* $\alpha$*, то* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$*.*

## Доказательство.

($\Rightarrow$) — как в КИВ ($\Leftarrow$) — та же схема, два новых случая.
Перестроим: $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \equiv \beta$ в $\alpha \to \delta_1, \alpha \to \delta_2, \ldots, \alpha \to \delta_n$.
Дополним: обоснуем $\alpha \to \delta_n$, если предыдущие уже обоснованы.
Два новых похожих случая: правила для $\forall$ и $\exists$. Рассмотрим $\forall$.
Доказываем $(n)$ $\alpha \to \psi \to \forall x.\varphi$ (правило для $\forall$), значит, доказано $(k)$ $\alpha \to \psi \to \varphi$.

| | | |
|---|---|---|
| $(n-0.9)\ldots(n-0.8)$ | $(\alpha \to \psi \to \varphi) \to (\alpha \mathbin{\&} \psi) \to \varphi$ | Т. о полноте КИВ |
| $(n-0.6)$ | $(\alpha \mathbin{\&} \psi) \to \varphi$ | M.P. $k, n-0.8$ |

# Теорема о дедукции для исчисления предикатов

## Теорема

*Если* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, *то* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$. *Если* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из* $\alpha$, *то* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

## Доказательство.

($\Rightarrow$) — как в КИВ ($\Leftarrow$) — та же схема, два новых случая.
Перестроим: $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \equiv \beta$ в $\alpha \to \delta_1, \alpha \to \delta_2, \dots, \alpha \to \delta_n$.
Дополним: обоснуем $\alpha \to \delta_n$, если предыдущие уже обоснованы.
Два новых похожих случая: правила для $\forall$ и $\exists$. Рассмотрим $\forall$.
Доказываем $(n)$ $\alpha \to \psi \to \forall x.\varphi$ (правило для $\forall$), значит, доказано $(k)$ $\alpha \to \psi \to \varphi$.

| | | |
|---|---|---|
| $(n-0.9)\dots(n-0.8)$ | $(\alpha \to \psi \to \varphi) \to (\alpha \,\&\, \psi) \to \varphi$ | Т. о полноте КИВ |
| $(n-0.6)$ | $(\alpha \,\&\, \psi) \to \varphi$ | M.P. $k, n-0.8$ |
| $(n-0.4)$ | $(\alpha \,\&\, \psi) \to \forall x.\varphi$ | Правило для $\forall$, $n-0.6$ |

# Теорема о дедукции для исчисления предикатов

## Теорема

*Если* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$*, то* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$*. Если* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из* $\alpha$*, то* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$*.*

## Доказательство.

($\Rightarrow$) — как в КИВ ($\Leftarrow$) — та же схема, два новых случая.

Перестроим: $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \equiv \beta$ в $\alpha \to \delta_1, \alpha \to \delta_2, \ldots, \alpha \to \delta_n$.

Дополним: обоснуем $\alpha \to \delta_n$, если предыдущие уже обоснованы.

Два новых похожих случая: правила для $\forall$ и $\exists$. Рассмотрим $\forall$.

Доказываем $(n)$ $\alpha \to \psi \to \forall x.\varphi$ (правило для $\forall$), значит, доказано $(k)$ $\alpha \to \psi \to \varphi$.

| | | |
|---|---|---|
| $(n-0.9)\ldots(n-0.8)$ | $(\alpha \to \psi \to \varphi) \to (\alpha \,\&\, \psi) \to \varphi$ | Т. о полноте КИВ |
| $(n-0.6)$ | $(\alpha \,\&\, \psi) \to \varphi$ | M.P. $k, n-0.8$ |
| $(n-0.4)$ | $(\alpha \,\&\, \psi) \to \forall x.\varphi$ | Правило для $\forall$, $n-0.6$ |
| $(n-0.3)\ldots(n-0.2)$ | $((\alpha \,\&\, \psi) \to \forall x.\varphi) \to (\alpha \to \psi \to \forall x.\varphi)$ | Т. о полноте КИВ |
| $(n)$ | $\alpha \to \psi \to \forall x.\varphi$ | M.P. $n-0.4$, $n-0.2$ |

$\square$

# Следование

## Определение

$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \models \alpha$, *если* $\alpha$ *выполнено всегда, когда выполнено* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$.

## Теорема

*Если* $\Gamma \vdash \alpha$ *и в доказательстве не используются кванторы по свободным переменным из* $\Gamma$, *то* $\Gamma \models \alpha$

# Важность дополнительного условия в теореме о корректности

## Пример

*Покажем, что* $\Gamma \models \alpha$ *ведёт себя неестественно, если в* $\alpha$ *используются кванторы по переменным, входящим свободно в* $\Gamma$*.*

# Важность дополнительного условия в теореме о корректности

### Пример

*Покажем, что* $\Gamma \models \alpha$ *ведёт себя неестественно, если в* $\alpha$ *используются кванторы по переменным, входящим свободно в* $\Gamma$*.*
*Легко показать, что* $P(x) \vdash \forall x.P(x)$*.*

# Важность дополнительного условия в теореме о корректности

## Пример

*Покажем, что* $\Gamma \models \alpha$ *ведёт себя неестественно, если в* $\alpha$ *используются кванторы по переменным, входящим свободно в* $\Gamma$.

*Легко показать, что* $P(x) \vdash \forall x.P(x)$.

| | | |
|---|---|---|
| *(1)* | $P(x)$ | *Гипотеза* |
| *(2)* | $P(x) \to (A \to A \to A) \to P(x)$ | *Сх. акс. 1* |
| *(3)* | $(A \to A \to A) \to P(x)$ | *М.Р. 1, 2* |
| *(4)* | $(A \to A \to A) \to \forall x.P(x)$ | *Правило для* $\forall$*, 3* |
| *(5)* | $(A \to A \to A)$ | *Сх. акс. 1* |
| *(6)* | $\forall x.P(x)$ | *М.Р. 5, 4* |

# Важность дополнительного условия в теореме о корректности

## Пример

*Покажем, что* $\Gamma \models \alpha$ *ведёт себя неестественно, если в* $\alpha$ *используются кванторы по переменным, входящим свободно в* $\Gamma$.

*Легко показать, что* $P(x) \vdash \forall x.P(x)$.

| | | |
|---|---|---|
| *(1)* | $P(x)$ | *Гипотеза* |
| *(2)* | $P(x) \to (A \to A \to A) \to P(x)$ | *Сх. акс. 1* |
| *(3)* | $(A \to A \to A) \to P(x)$ | *M.P. 1, 2* |
| *(4)* | $(A \to A \to A) \to \forall x.P(x)$ | *Правило для* $\forall$*, 3* |
| *(5)* | $(A \to A \to A)$ | *Сх. акс. 1* |
| *(6)* | $\forall x.P(x)$ | *M.P. 5, 4* |

*Пусть* $D = \mathbb{Z}$ *и* $P(x) = x > 0$. *Тогда не будет выполнено* $P(x) \models \forall x.P(x)$.

# Корректность

### Теорема

*Если $\theta$ свободен для подстановки вместо $x$ в $\varphi$, то* $[\![\varphi]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = [\![\varphi[x := \theta]]\!]$

### Доказательство (индукция по структуре $\varphi$).

- База: $\varphi$ не имеет кванторов. Очевидно.
- Переход: пусть справедливо для $\psi$. Покажем для $\varphi = \forall y.\psi$.
  - $x = y$ либо $x \notin FV(\psi)$. Тогда: $[\![\forall y.\psi]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = [\![\forall y.\psi]\!] = [\![(\forall y.\psi)[x := \theta]]\!]$
  - $x \neq y$. Тогда: $[\![\forall y.\psi]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = [\![\psi]\!]^{y\in D;x:=[\![\theta]\!]} = \dots$

    Свобода для подстановки: $y \notin \theta$.

    $$\dots = [\![\psi]\!]^{x:=[\![\theta]\!];y\in D} = \dots$$

    Индукционное предположение.

    $$\dots = [\![\psi[x := \theta]]\!]^{y\in D} = [\![\forall y.(\psi[x := \theta])]\!] = \dots$$

    Но $\forall y.(\psi[x := \theta]) \equiv (\forall y.\psi)[x := \theta]$ (как текст). Отсюда:

    $$\dots = [\![(\forall y.\psi)[x := \theta]]\!]$$

$\square$

# Корректность

## Теорема

*Если* $\Gamma \vdash \alpha$ *и в доказательстве не используются кванторы по свободным переменным из* $FV(\Gamma)$, *то* $\Gamma \models \alpha$

## Доказательство.

Фиксируем $D, F, P$. Индукция по длине доказательства $\alpha$: при любом $E$ выполнено $\Gamma \models \alpha$ при длине доказательства $n$, покажем для $n+1$.

- Схемы аксиом (1)..(10), правило М.Р.: аналогично И.В.
- Схемы (11) и (12), например, схема $(\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta]$:

$$[\![(\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta]]\!] = [\![((\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi)[x := \theta]]\!] = [\![((\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = \text{И}$$

- Правила для кванторов: например, введение $\forall$:
  Пусть $[\![\psi \rightarrow \varphi]\!] = \text{И}$. Причём $x \notin FV(\Gamma)$ и $x \notin FV(\psi)$. То есть, при любом $\mathcal{x}$ выполнено $[\![\psi \rightarrow \varphi]\!]^{x:=\mathcal{x}} = \text{И}$. Тогда $[\![\psi \rightarrow (\forall x.\varphi)]\!] = \text{И}$.

$\square$