Mathematische Modelle und Methoden – Lösungen

Aufgabe 1

a) Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der vier befragten Personen ein Nokia gekauft hat?
Gegenereignis: Kein Nokia unter den vier Handys.

$P(K \geq 1) = 1 - P(K = 0) = 1 - \binom{4}{0} * 0.192^0 * 0.808^4 = 1 - 0.808^4 = 0.5738 = 57{,}4\%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine von vier Personen ein Nokia gekauft hat, beträgt also 57,4%.

b) Wahrscheinlichkeit, dass genau drei von sechs Handys einem chinesischen Hersteller zuzuordnen sind?
Marktanteil chinesischer Handys: 3,9% + 2,8% + 2,2% = 8.9%

$$P(K = 3) = \binom{6}{3} * 0.089^3 * 0.911^3$$

$$= \frac{6!}{3!\,(6-3)!} * 0.089^3 * 0.911^3$$

$$= 20 * 0.089^3 * 0.911^3 = 0.0107 = 1.1\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau drei von sechs Personen ein chinesisches Handy gekauft haben, beträgt 1,1%.

c) Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei Personen von fünf Personen ein taiwanesisches Handy gekauft haben?

$$P(K \leq 2) = P(K = 0) + P(K = 1) + P(K = 2)$$

$$P(K = 0) = \binom{5}{0} * 0.02^0 * 0.98^5 = 0.9039 = 90.4\%$$

$$P(K = 1) = \binom{5}{1} * 0.02^1 * 0.98^4 = 0.0922 = 9.2\%$$

$$P(K = 2) = \binom{5}{2} * 0.02^2 * 0.98^3 = 10 * 0.02^2 * 0.98^3 = 0.0038 = 0.4\%$$

Damit ist $P(K \leq 2) = 90.4\% + 9.2\% + 0.4\% = 100\%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei von fünf Personen ein taiwanesisches Handy gekauft haben, beträgt 100%.

d) Wahrscheinlichkeit, dass alle vier Personen von vier Personen ein südkoreanisches Handy gekauft haben?
Marktanteil südkoreanischer Handys: 22,9% + 3,3% = 26.2%

$P(K = 4) = \binom{4}{4} * 0.262^4 * 0.738^0 = 0.00471 = 0{,}471\%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle vier Personen ein südkoreanisches Handy besitzen, beträgt 0.471%.

Aufgabe 2

a) Die Länge des direkten Weges lässt sich mittels Pythagoras berechnen:

$$d = \sqrt{750^2 + 250^2} = \sqrt{625000} = 790,57$$

Im Feld beträgt die Geschwindigkeit 3 km/h, damit benötigt er

$$t = \frac{790{,}57 * 3600}{3000}\, sek = 948.68\, sek = 15.81\, min$$

b) Für die Straße gilt: $t_1 = \frac{x}{6\, km/h} = \frac{3.6 * x}{6\, m/sek} = 0.6 \frac{sek}{m} * x\ [m]$

Für den Weg durch das Feld gilt:

$$t_2 = \frac{\sqrt{(750-x)^2 + 250^2}}{3\frac{km}{h}} = \frac{\sqrt{(750-x)^2 + 62500}}{3\frac{m}{s}} * 3.6$$

$$= 1.2 * \sqrt{(750-x)^2 + 62500}\ sek/m$$

Die Gesamtzeit ergibt sich aus beiden Zeiten:

$$\mathrm{t(x)} = \mathrm{t1} + \mathrm{t2} = 0.6 * \mathrm{x} + 1.2 * \sqrt{(750-x)^2 + 62500}$$

c) Extremwerte bestimmen, da schnellster Weg = Minimum

$$t'(x) = 0.6 + 1.2 * \frac{1}{2} * \frac{2 * (750-x) * (-1)}{\sqrt{(750-x)^2 + 62500}} = 0.6 - \frac{1.2 * (750-x)}{\sqrt{(750-x)^2 + 62500}}$$

$$t'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1.2 * (750-x)}{\sqrt{(750-x)^2 + 62500}} = 0.6$$

$$\Leftrightarrow 1.2 * (750-x) = 0.6 * \left(\sqrt{(750-x)^2 + 62500}\right)$$

$$\Leftrightarrow (750-x) = 0.5 * \left(\sqrt{(750-x)^2 + 62500}\right)$$

$$\Leftrightarrow (750-x)^2 = 0.25 * ((750-x)^2 + 62500)$$

$$\Leftrightarrow 0.75 * (750-x)^2 = 0.25 * 62500$$

$$\Leftrightarrow 0.75 * (750-x)^2 = 15625$$

$$\Leftrightarrow (750-x)^2 = 20833.33$$

$$\Leftrightarrow 750 - x = 144.34\ oder\ 750 - x = -144.34$$

$$\Leftrightarrow x = 605.66\ oder\ x = 894.34$$

Da der Weg mit x = 894.34 offensichtlich deutlich länger ist, wird die kürzeste Zeit mit x = 605.66 erreicht.

Dabei gilt $t_{min} = t(605.66) = 0.6 * 605.66 + 1.2 * \sqrt{20834 + 62500} = 709,81\, sek = 11{,}83\, min$

Aufgabe 3

a) Höhe = h, Breite = b

Tragfähigkeit $T(b, h) = b * h^2 * c$

b) Durchmesser = d

Nach Pythagoras gilt hier: $h^2 + b^2 = d^2 \Leftrightarrow h^2 = d^2 – b^2$

Einsetzen in T: $T(b) = c * b * (d^2 – b^2)$

c) Ableiten der Tragfähigkeit und gleich Null setzen ergibt

$T'(b) = c * d^2 – 3 * c * b^2 = 0$

$\Leftrightarrow d^2 = 3 * b^2 \Leftrightarrow b = d/\sqrt{3}$

$T''(b) = -6 * c * b < 0 \rightarrow$ Damit liegt tatsächlich ein Maximum vor.

Für die Höhe ergibt sich damit $h = \sqrt{d^2 - b^2} = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} * d$

Für den konkreten Durchmesser d = 40cm erhält man damit eine Breite von $40cm/\sqrt{3}$ = 23.09cm und eine Höhe von $\sqrt{\frac{2}{3}} * 40$cm= 32.66cm

d) Auch hier hilft Pythagoras weiter: Im Endeffekt sind die Strecken |AC| und |AD| gesucht. Es gilt

$|AE|^2 + |EC|^2 = |AC|^2$ und $|EM|^2 + |EC|^2 = |CM|^2$, also $|EC|^2 = |CM|^2 - |EM|^2$

Es gilt ebenfalls |AE| = d/3, |EM| = d/6, |MC| = d/2

und damit $|AC|^2 =(d/3)^2 + (d/2)^2 – (d/6)^2 = d^2/9 + d^2/4 + d^2/36 = d^2/3$

So erhält man also auch Breite = $|AC| = d/\sqrt{3}$

Aufgabe 4

a) Die Ebene kann dargestellt werden durch

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} \; mit \; 0 \leq \alpha, \beta \leq 1$$

Der Punkt B liegt in der Ebene wegen

$$\begin{pmatrix} -80 \\ 60 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix}$$

b) Der Flächeninhalt ergibt sich aus dem Betrag des Kreuzproduktes aus A und C, also

$$F = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 3600 \\ 0 \\ 4800 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3600 * 3600 + 4800 * 4800} = 6000$$

c) Die bebaubare Fläche eines Hanggrundstücks ist die Projektionsfläche in die x-y-Ebene mit den Eckpunkten

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -80 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Fläche wie in b) berechnet ist gleich 4800.

d) Der Richtungsvektor liegt parallel zur Ebene, da

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{5}{60} \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Ein Vektor senkrecht zur Ebene mit Länge 1 (Normaleneinheitsvektor) ist $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Aus der Hesse'schen Normalform ergibt sich der konstante Abstand zwischen der Geraden und der Ebene zu

$$d = \left| \left\langle \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -20 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} \right\rangle \right| = 20$$

Der minimale Abstand zwischen Gerade und Mittelpunkt M(-40/30/30) und der Geraden ist ebenfalls gleich 20, denn

$$\left| \left\langle \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -20 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -40 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} \right\rangle \right| = \left| \left\langle \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \right\rangle \right| = 20$$

Aufgabe 5

a)

$$S_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 0.58333333$$
$$S_5 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = 0.78333333$$

b) Durch die alternierende Reihe wechseln das Vorzeichen und der absolute Wert fällt. Damit liegt der wahre Wert jeweils zwischen zwei Näherungen, also 0.5833333 < ln(2) < 0.78333333

c) Eines der Rechengesetze des ln besagt, das ln(a/b) = ln(a) – ln(b) gilt, also gilt hier ln(1/2) = ln(1) – ln(2) = 0 – ln(2) und damit ln(2) = -ln(1/2)

d) Setze x=-1/2 in die Taylorreihe ein und berechne neu:

$$S_4 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{24} - \frac{1}{64} = -0.68229166$$
$$S_5 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{24} - \frac{1}{64} - \frac{1}{160} = -0.68854167$$

ln(2) = -ln(1/2)=0.6822917

e) Da die Glieder nur noch negativ sind, muss damit ln(1/2) < -0.68… und somit ln(2) > 0.68854167 gelten.

f)

$$a_0 = 0$$
$$a_1 = \frac{2}{3} = 0.66666667$$
$$a_2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{81} = 0.69135802$$
$$a_3 = \frac{2}{3} + \frac{2}{81} + 2/1215 = 0.69300411$$

g) Der dritte Näherungswert aus f) ist auf drei Dezimalstellen genau, da ln(2) – a_3 = 0.000143

Aufgabe 6

a)

$$W(X = 30) = \binom{420}{30} * 0.05^{30} * 0.95^{420-30}$$

b) X ist die Zufallsvariable für die Anzahl der defekten Notebooks in der Stichprobe vom Umfang 420. Es liegt eine Binomialverteilung vor mit den Parametern n = 420 und p = 0.05

c) Erwartungswert μ = 420 * 0.05 = 21

d) Faustformel: Varianz = n * p * q > 9
Hier gilt ja p = 0.05, q = 0.95, n = 420, sodass 420 * 0.05 * 0.95 = 19.95 > 9 ist. Damit darf man die Approximation nutzen.

e) Für die Standardabweichung gilt $\sigma = \sqrt{420 * 0.05 * 0.95} \approx 4.4665$
Die Wahrscheinlichkeit, 30 defekte Notebooks zu haben ist W(X = 30). Dies wird lokal durch den Wert der Dichte der Normalverteilung mit Erwartungswert 21 und Standardabweichung 4.4665 angenähert, also

$$\frac{1}{4.4665 * \sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2*\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma * \sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(30-21)^2}{2*4.4665^2}} = 0.01173$$

Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, unter 420 geprüften Notebooks 30 defekte Notebooks zu finden, 1.17%.