Mathematische Modelle und Methoden

Hinweis: Von den hier sechs aufgeführten Aufgaben müssen genau fünf Aufgaben bearbeitet werden. Die nicht-bearbeitete Aufgabe muss (!) von Ihnen explizit angegeben werden! Es wird nicht automatisch die am schlechtesten bearbeitete Aufgabe gestrichen, sondern Aufgabe 6, wenn Sie nichts angeben.

Aufgabe 1

Die beiden letzten Lieferungen von Büro-Material an die MATSE-AG enthielten folgende Artikel:

- Lieferung 1 (Rechnungsbetrag 50€):
  - 5 Tacker
  - 10 Umschläge
  - 50 Büroklammern
- Lieferung 2 (Rechnungsbetrag 70€):
  - 10 Tacker
  - 5 Umschläge
  - 25 Büroklammern

Für die Buchhaltung werden die einzelnen Artikelpreise benötigt, leider sind die Rechnungen abhandengekommen. Deshalb sollen Sie helfen:

a) Formulieren Sie ein passendes lineares Gleichungssystem.
b) Bestimmen Sie die Preisspannen der einzelnen Artikel. Ist ein exakter Preis anzugeben, nennen Sie diesen.
c) Wie hoch wäre eine Rechnung mit denselben Einzelpreisen für eine Lieferung mit 5 Tackern und 200 Büroklammern?
d) Es trifft eine weitere Lieferung ein, die 5 Tacker, 20 Umschläge und 200 Büroklammern enthält. Dieser liegt eine Rechnung von 80€ bei. Hat der Lieferant zwischen der zweiten und dritten Lieferung erhöht?

Aufgabe 2

Das Wasser in einem Topf wird von 100° stündlich mit 40% zur Differenz der Raumtemperatur T = 20° abgekühlt. Nach jeder vollen Stunde wird die Temperatur des Wassers gemessen. Die Temperatur-Werte können durch die Folge

$$t_{n+1} = 0.6t_n + 0.4T, n \in N, t_0 = 100°$$

approximiert werden. t_n ist dabei die Temperatur nach n Stunden.

a) Bestimmen Sie die Werte t_1 bis t_5, stellen Sie diese grafisch dar.
b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Temperatur t_n der expliziten Vorschrift $t_n=0.6^n(t_0 - T) + T$ genügt.
c) Ab welcher vollen Stunde weicht die Temperatur erstmals um weniger als 0.5° von der Raumtemperatur ab?

Aufgabe 3

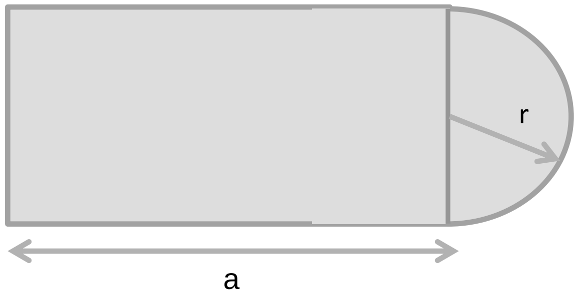
Unter den 40 Studierenden des Studiengangs Angewandte Mathematik und Informatik in Köln werden zufällig acht Studierende ausgewählt und nach ihrer Zufriedenheit befragt. Sie sollen der FH bei der Interpretation der Ergebnisse behilflich sein:

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Auswahl der Befragten? Geben Sie zur Erläuterung ein geeignetes Urnenmodell an.
b) Falls 25% aller Studierenden unzufrieden wären, wie viele der unter a) berechneten Möglichkeiten führen dazu, dass genau zwei der Studierenden sagen, nicht zufrieden zu sein und sechs Studierende sagen, sie seien zufrieden?
c) Wie hoch ist der relative Anteil der Ergebnisse, bei denen genau zwei von acht Befragten unzufrieden und die anderen sechs zufrieden sind? (siehe Teilaufgabe a) und b)).
d) Wie viele Möglichkeiten aus b) ergeben sich, wenn die wahre Anzahl der unzufriedenen Studierenden gleich neun bzw. 11 ist? Vergleichen Sie diese beiden Werte mit dem Wert aus b).
e) Wie lautet die Formel für eine beliebige Anzahl von Unzufriedenen unter den 40 Studierenden, wenn sich genau zwei der acht Befragten als Unzufrieden erkennen geben? Beachten Sie dabei, wie viele mindestens und wie viele höchstens unzufrieden sein können.

Aufgabe 4

Sie bauen in Ihrem Garten einen kleinen Pool. Der Grundriss besteht aus einem Rechteck mit einem angeschlossenen Halbkreis. Sie müssen berücksichtigen, dass Ihr Material maximal für einen Pool mit 200m Rand reicht.

a) Stellen Sie für die Wasserfläche des Pools eine Formel in Abhängigkeit von a und r auf.
b) Stellen Sie die Länge des Beckenrandes in Abhängigkeit von den Größen a und r dar.
c) Für welche Werte von a und r wird die Wasserfläche des Pools maximal?



Aufgabe 5

Sie helfen bei dem Bau eines Bushäuschens zum Unterstellen. Dafür haben Sie die Befestigungen für die Stahlstutzen an den Punkten A(2/0), B(0/2), C(3/5) und D(4/3) im Boden verankert. Sie haben an Baumaterial noch mehrere Stahlstützen in Höhe von 3, 4, 6 und 8 Metern zur Verfügung. Mangels einer Stahlsäge müssen Sie die Stützen ungekürzt verwenden. Wie die Verwendung genauer aussehen soll, können Sie der Skizze unten entnehmen.

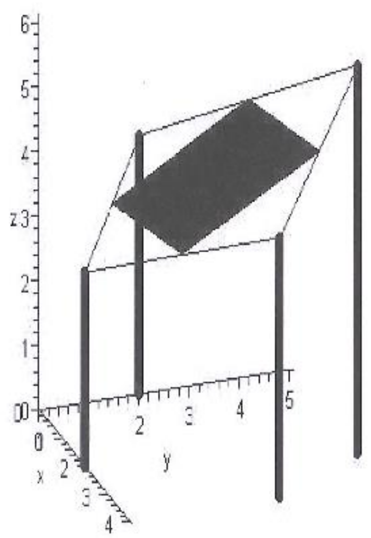
a) Warum können Sie für die Überdachung nicht einfach eine ebene Stahlplatte verwenden, die dann an allen vier Ecken der Stützen aufliegt?

Ein Architekt kommt Ihnen zur Hilfe: Er möchte die vier Spitzen der Stützen entsprechend der Skizze mit Drahtseilen starr verbinden.

b) Wie viel Meter Drahtseil benötigt er hierfür?

Anschließend sollen Sie in den Seitenmitten der Seile jeweils Befestigungen für eine aufzulegende ebene Stahlplatte montieren.

c) Geben Sie die Seitenmitten als Punkte an.
d) Kann nun eine ebene Stahlplatte benutzt werden, die an allen vier Seitenmitten aufliegt?



Aufgabe 6

Die MATSE-AG möchte elektrische Jalousien installieren, die automatisch bei Sonnenuntergang runterfahren. Sie helfen bei der Entwicklung des Steuerungsprogramms hierfür. Für das Programm sollen Sie bei der Sonnenuntergangszeit von einem periodischen Vorgang, den Sie mit einer Sinusschwingung für ein Jahr modellieren können, ausgehen.
Dabei sind folgende Punkte zu beachten:

1. Die Funktion sin(x) gibt zu einem Wert x im Bogenmaß, d.h. zwischen 0 und 2π, den Sinuswert zwischen -1 und 1 zurück. Das Minimum liegt bei sin((3/2) * π) = -1.
2. Die Sonnenuntergangszeit soll zu einem beliebigen Tag t des Jahres, der durch die Anzahl der Tage seit dem 1. Januar repräsentiert wird (der 1.1 entspricht t=1, der 31.12 entspricht t=365), berechnet werden.
3. Der früheste Sonnenuntergang ist am 347. Tag (13.12) um 16:30 Uhr.
4. Der späteste Sonnenuntergang ist im Sommer um 21:00 Uhr.
5. Das Jahr hat 365 Tage, was der Periodenlänge entspricht.

a) Skizzieren Sie eine nach den oben genannten Bedingungen verschobene und angepasste Sinuskurve in ein Koordinatensystem mit der x-Achse vom ersten bis zum 365. Tag des Jahres und der y-Achse im Bereich von 16:30 Uhr und 21:00 Uhr mit dem mittleren Wert 18:45.

b) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Sonnenuntergangszeit nach obigen Angaben auf. Die Form der Formel lautet:

$$SU(t) = a + b * \sin\left(c(t - 347) + d\right)$$

c) Berechnen Sie mit Ihrer Formel die Werte für den 1. Januar und den 1. Juli (182. Tag des Jahres). Geben Sie die Uhrzeit in Stunden und Minuten an.
Es ist

$$SA(t) = 6{,}5 + 2{,}25 * \sin\left(2\pi/365(362 - t) + \pi/2\right)$$

Berechnen Sie für den 1. Januar und den 1. Juli jeweils die Uhrzeit des Sonnenaufgangs in Stunden und Minuten sowie die Anzahl der Stunden zwischen Sonnenauf- und Sonnenuntergang.