Mathematische Modelle und Methoden – Lösungen

Aufgabe 1

Man kennt

$$D = \begin{pmatrix}10\\10\\20\end{pmatrix}, \mathrm{C} = \begin{pmatrix}10\\20\\20\end{pmatrix}, \mathrm{A} = \begin{pmatrix}2\\10\\12\end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix}5\\13\\15\end{pmatrix}, \mathrm{F} = \begin{pmatrix}5\\17\\17\end{pmatrix}, \mathrm{E} = \begin{pmatrix}5\\13\\17\end{pmatrix}$$

in $H = \begin{pmatrix}8\\13\\18\end{pmatrix}$ treffen sich der Abhang E_{ACD} und das Stalldach E_{EFH}.

a) .

i. $\mathrm{E_{ACD}}: \vec{\mathrm{x}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \alpha * \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \beta * \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Parameterform)

$$= \begin{pmatrix}2\\10\\12\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}10-2\\20-10\\20-12\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}10-2\\10-10\\20-12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\10\\12\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}8\\10\\8\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}8\\0\\8\end{pmatrix}$$

bzw. in Normalenform:

Bestimmung Normalenvektor $\vec{\mathrm{n}}$ von $\mathrm{E_{ACD}}$: $\vec{\mathrm{n}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} \times \overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$$= \begin{pmatrix}8\\10\\8\end{pmatrix} \mathrm{x} \begin{pmatrix}8\\0\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10*8-8*0\\8*8-\ 8*\ 8\\8*0-10*\ 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}80\\0\\-80\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \text{ (normiert)}$$

Normalenform $\mathrm{E_{ACD}}$: $(\vec{\mathrm{x}} - \begin{pmatrix}2\\10\\12\end{pmatrix}) * \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = 0$

Koordinatenform $\mathrm{E_{ACD}}$: $\mathrm{x} - \mathrm{z} = -10.$

ii. $\mathrm{E_{EFH}}: \vec{\mathrm{x}} = \overrightarrow{\mathrm{OE}} + \alpha * \overrightarrow{\mathrm{EF}} + \beta * \overrightarrow{\mathrm{EH}}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Parameterform)

$$= \begin{pmatrix}5\\13\\17\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}5-5\\17-13\\17-17\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}8-5\\13-13\\18-17\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\13\\17\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$$

b) Schnittgerade zwischen E_{ACD} und E_{EFH}

E_{EFH} ergibt

$$\mathrm{x} = 5 + 0\alpha + 3\beta$$
$$\mathrm{y} = 13 + 4\alpha + 0\beta$$
$$\mathrm{z} = 17 + 0\alpha + 1\beta$$

Setze Gleichungen in $\mathrm{E_{ACD}}$ ein:

$$(5 + 3\beta) - (17 + \beta) = -10$$
$$5 + 3\beta - 17 - \beta = -10$$
$$2\beta = 2$$
$$\beta = 1$$

β in E_{EFH} einsetzen:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\13\\17\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\13\\18\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$$

c) Normalenvektor von E_{ACD} ist $\overrightarrow{n_{ACD}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Der Winkel zur xy-Ebene kann mittels des Skalarprodukts der Normalenvektoren der beiden Ebenen bestimmt werden:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{n_{ACD}} * \overrightarrow{n_{xy}}}{|\overrightarrow{n_{ACD}}| * |\overrightarrow{n_{xy}}|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right| * \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad also\ \alpha = 45°$$

d) Letztendlich handelt es sich bei der Dachfläche nur um die Fläche eines Rechtecks, also um das Produkt zweier Vektorlängen:

$$\left|\overrightarrow{EF}\right| * \left|\overrightarrow{EH}\right| = \left|\begin{pmatrix} 5-5 \\ 17-13 \\ 17-17 \end{pmatrix}\right| * \left|\begin{pmatrix} 8-5 \\ 13-13 \\ 18-17 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| * \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = 4 * \sqrt{10} = 12{,}65m^2$$

Benötigte Kachelanzahl (ohne Verschnitt): $12 * 4 * \sqrt{10}$ = 151,79

Es werden also mindestens 152 Kacheln benötigt.

Aufgabe 2

a) Gegenereignis: Keine defekte Kachel

$p(x >= 1) = 1 – p(x=0)$

Wahrscheinlichkeit, unter n Kacheln keine defekte zu haben:

$p(x=0) = 0.95^n$

$p(x=0) < 0.06$

$0.95^n < 0.06 \Leftrightarrow n > \log_{0.95}(0.06) \Leftrightarrow n > \log(0.06) / \log(0.95) \Leftrightarrow n > 54.85 => n > 55$

b) A_i sei das Ereignis, dass Behälter i leer bleibt

die Wahrscheinlichkeit ist $p(A_i) = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$

Gesucht ist $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$

Es gilt nach der Siebformel:

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3)$

$da\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0, da\ nicht\ alle\ Behälter\ leer\ bleiben\ können.$

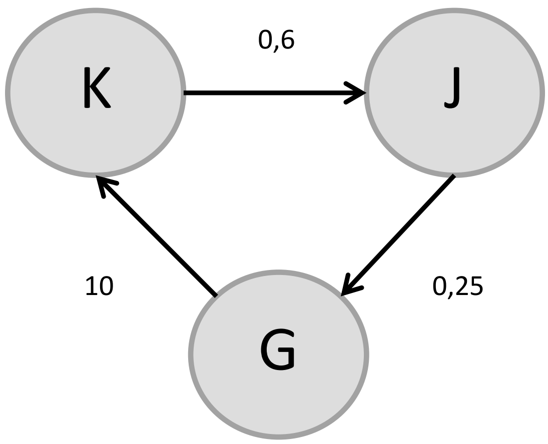
$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{81}\ (vier\ Mal\ denselben\ Behälter\ nutzen = \left(\frac{1}{3}\right)^4)$

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 3 * \frac{16}{81} - 3 * \frac{1}{81} = \frac{45}{81} = \frac{5}{9} = 0.5556$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Behälter leer bleibt, beträgt damit 55,6%.

Aufgabe 3

a)



b)

i. Matrix B ist die passende Übergangsmatrix. Ein Element in Zeile i und Spalte j gibt den Anteil an, dass von Zustand j (Ausgangszustand) in Zustand i (Zustand nach Übergang) gewechselt wird (vgl iii.).

ii. Da kein Tier in seinem Zustand verbleiben kann, sondern in den nächsten wechseln muss, sind die Elemente der Hauptdiagonalen null. Da die Spur dieser Elemente deren Summe ist, muss diese auch folglich 0 sein.

iii. a_{31} = 0 bedeutet, dass aus keinem Kitz im nächsten Schritt eine Geiß werden kann. a_{13} = 10 beschreibt die Quote der Kitze, die aus den Geißen folgt

c) Da die Übergangsmatrix den halbjährlichen Übergang beschreibt, muss man zwei Prozessschritte durchführen:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 24 \\ 1.2 \end{pmatrix}$$

d) Stabile Verteilung:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Die Berechnung des Fixvektors (Lösung des obigen LGS) führt auf den Nullvektor, also ist keine Populationsverteilung stabil.

Aufgabe 4

a) m = 50,4 v = 14,95

b)

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad v = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2}{n-1}$$

c)

$$v = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2mx_i + m^2)}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ - 2m \sum_{i=1}^{n} x_i + \ nm^2}{n-1}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2nm^2 + nm^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - nm^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}\right)^2}{n-1}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\ \right)^2}{n}}{n-1}$$

d) Vorteil: Summe der Quadrate wird eventuell nicht so groß, was Auslöschungsgefahr reduziert.
Nachteil: Man braucht mehrere Schleifen.

Aufgabe 5

a)

$$f'(t) = 80 * e^{-t} - 80 * t * e^{-t} = 80 * e^{-t}(1-t)$$

$$f''(t) = -80 * e^{-t} - 80 * e^{-t}(1-t) = -80 * e^{-t}(2-t)$$

Bestimmung des Maximums:

Notwendige Bedingung: f'(t) = 0 <=> t = 1

Hinreichende Bedingung: f"(t) != 0 => f"(t) < 0, d.h. Maximum

Nach einem Tag sind die meisten Tiere erkrankt. D. h. 29 *Tiere sind krank, da* $f(1) = $ 29,4..

b) $f'''(t) = +80 * e^{-t} + 80 * e^{-t}(2-t) = 80 * e^{-t}(3-t)$

Bestimmung der Wendestelle:

Notwendige Bedingung: f"(t) = 0 <=> t = 2

Hinreichende Bedingung: f'"(t) != 0 erfüllt.

Am zweiten Tag nimmt die Anzahl der Neuerkrankungen am stärksten ab.

Insgesamt sind 21 *Tiere erkrankt, da* $f(2) = 21,6$.

c)

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b 80 * t * e^{-t}dt = 80 * \int_a^b t * e^{-t}dt = 80 * \left\{[-e^{-t} * t] - \int_a^b -e^{-t} * 1\, dt\right\}$$

$$= 80 * \left\{[-e^{-t} * t] + \int_a^b e^{-t}dt\right\}$$

$$= 80 * \{[-e^{-t} * t] - [e^{-t}]\}$$

$$= 80 * \{-b * e^{-b} + a * e^{-a} - (e^{-b} - e^{-a})\}$$

$$= 80 * \{(-1-b)e^{-b} * (1+a)e^{-a}\}$$

$$= 80 * \left(\frac{1+a}{e^a} - \frac{1+b}{e^b}\right)$$

d)

$$\int_0^{28} 80 * t * e^{-t}dt = 80 * \left(\frac{1+0}{e^0} - \frac{1+28}{e^{28}}\right) = 80$$

Innerhalb von vier Wochen sind 80 *Tiere erkrankt*

Aufgabe 6

H ~ der Heuballen ist einwandfrei (=fressbar)

V ~ der Heuballen wurde zum Verkauf freigegeben

Dem Aufgabentext kann man entnehmen, dass

P(H) = 0.92

P(V | H) = 0.96

P(V | nicht H) = 0.04

a) Damit weiß man

   P(nicht H) = 0.08 und

   P(V) = P(V | H) * P(H) + P(V | nicht H) * P(nicht H) = 0.96 * 0.92 + 0.04 * 0.08 = 0.89

   (Formel der totalen Wahrscheinlichkeiten)

   Also werden 89% der hergestellten Heuballen verkauft.

b) Gesucht ist

   P(H | V) = P(V | H) * P(H) / P(V) = 0.96 * 0.92 / 0.89 = 0.992

   (Formel von Bayes)

   Ein für den Verkauf und die Tiere freigegebener Heuballen ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% einwandfrei.

c) Gesucht ist

   100 * P(H | nicht V)

   = 100 * P(nicht V | H) * P (H) / P(nicht V)

   = 100 * (1-P(V | H)) * P(H) / (1-P(V))

   = 100 * 0.04 * 0.92 / 0.11 = 33,45

   Unter 100 Heuballen, die den Test nicht bestehen, sind im Mittel 33 einwandfrei/doch fressbar.

   Damit lohnt also eine Nachprüfung!