Daniel Weinholz IT Center, RWTH Aachen

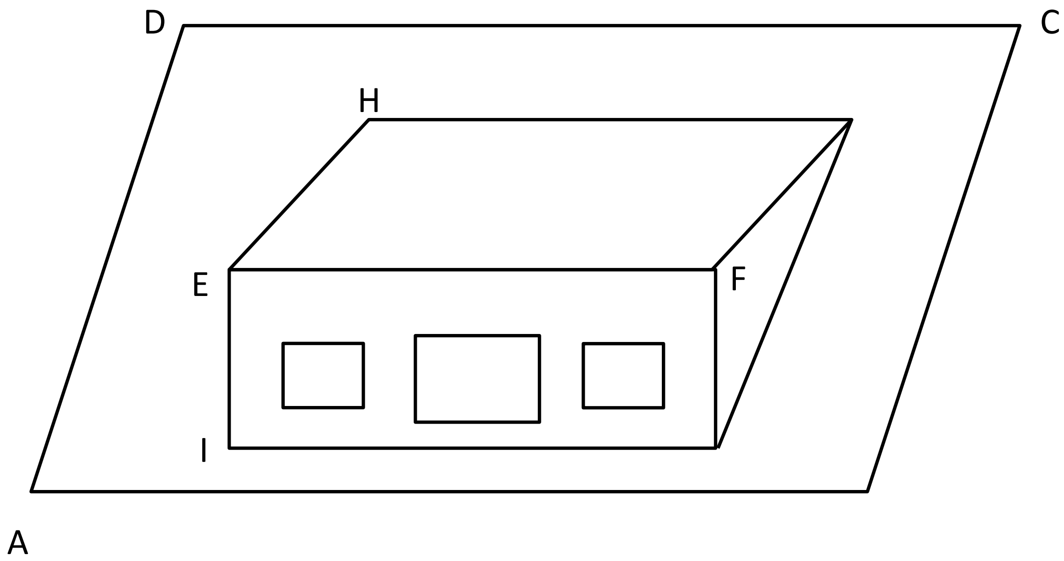
Mathematische Modelle und Methoden

Dauer: 135 Minuten

<u>Hinweis:</u> Von den hier sechs aufgeführten Aufgaben müssen genau fünf Aufgaben bearbeitet werden. Die nicht-bearbeitete Aufgabe muss (!) von Ihnen explizit angegeben werden! Es wird nicht automatisch die am schlechtesten bearbeitete Aufgabe gestrichen, sondern Aufgabe 6, wenn Sie nichts angeben.

Aufgabe 1

Im Wildpark von MATSEmania soll an dem Stalldach der Rehe eine Gaube angebaut werden.
Folgende Punkte des Daches sind bekannt: A(2,10,12), C(10,20,20), D(10,10,20)
Die Eckpunkte der Vorderseite der Gaube sind: E(5,13,17), F(5,17,17), I(5,13,15)
Am Punkt H(8,13,18) stößt die Dachfläche der Gaube auf die durch A, C und D bestimmte Dachfläche.
Alle Angaben sind in Meter gegeben.



a) Geben Sie folgende Ebenen Gleichungen inklusive Rechenweg an:
   i. die Dachfläche ACD in Normalenform
   ii. die Fläche EHF in Parameterform

b) Bestimmen Sie durch die Schnittgeradengleichung der beiden Dächer

c) Der Wildpark muss sich an die Bauvorschriften halten – diese verlangen, dass die Neigung der Dachfläche zwischen 40° und 50° liegen muss. Überprüfen Sie, ob diese Vorgabe der Neigung von der verwendeten Dachfläche ACD eingehalten wird.

d) Das Dach der angebauten Gaube benötigt eine Spezialbeschichtung, die besonders witterungsbeständig ist. Diese Beschichtung wird in Form von speziellen Kacheln angeboten, wobei für einen Quadratmeter Fläche 12 von diesen Kacheln benötigt werden. Berechnen Sie die Dachfläche EHF der Gaube und geben Sie an, wie viele Kacheln mindestens für die Beschichtung benötigt werden.

Aufgabe 2

a) Die Firma, die die Kacheln für die Spezialbeschichtung der Dächer für den Wildpark in MATSEmania produziert, hat bei der Herstellung ebendieser einen Ausschuss von 5%.
Wie viele Kacheln muss die Firma herstellen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 94% mindestens eine nicht brauchbare Kachel dabei ist?

b) Der Reh Stall verfügt über drei unterschiedliche Futtertröge, in die der Tierwärter im Laufe eines Tages viermal vollkommen willkürlich Futter hineinwirft – das Futter wird also wirklich zufällig und ohne Abhängigkeit voneinander verteilt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass einer der Behälter im Laufe eines Tages gar nicht befüllt wird mithilfe der Siebformel.

Aufgabe 3

Die Population der Rehe wird vom Wildpark genau beobachtet – unterschieden wird zwischen Kitze im ersten Lebensjahr (K), Jährlingen im zweiten Lebensjahr (J) und Geißen ab dem dritten Lebensjahr (G). Frühere Untersuchungen ergaben, dass nur 6 von 10 Kitzen zu Jährlingen werden und später von 80 Jährlingen 20 zu Geißen werden. Die Geißen sterben nach dem Wurf der Kitze, wobei durchschnittlich eine Geiß einmalig 10 Kitze gebärt (Zwecks Vereinfachung nutzt man hier ein Modell, in dem alle Tiere ab drei Jahre weiblich sind und die Übergänge in einem halbjährlichen Rhythmus stattfinden).

a) Veranschaulichen Sie obigen Prozess anhand eines Graphen mit Knoten und Kanten.

b) Gegeben sind folgende drei Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 \\ 0 & 0{,}6 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   i. Welche dieser drei Matrizen ist die zu obigem Prozess passende Übergangsmatrix? Geben Sie eine begründete Antwort.

   ii. Warum ist die Spur der Übergangsmatrix, d.h. die Summe der Diagonalelemente, immer 0?

   iii. Erklären Sie den Wert an der Stelle (3,1) und an der Stelle (1,3) der Übergangsmatrix im Sachzusammenhang.

c) Sie starten in einem neuen Gehege mit einer komplett neuen Population mit 8 Kitzen, 4 Jährlingen und 4 Geißen. Welche Anzahl von Kitzen, Jährlingen und Geißen befinden sich nach einem Jahr im Wildpark?

d) Die Wildpark-Leitung wünscht sich eine stabile Rehpopulation. Beweisen Sie rechnerisch, dass dies mit dem oben beschriebenen Prozess nicht möglich ist.

Aufgabe 4

Ihnen liegt ein Programm des Wildparks vor, das die empirische Varianz der in einem Feld x[n] gespeicherten Werte x_1 bis x_n berechnet. In diesem werden zwei for-schleifen verwendet, i und n sind ganzzahlig, m und v sind Fließkommazahlen.

```
…
v = 0.0;
m = 0.0;
for (i=1; i <= n; i++){
        m += x[i];
}
m = m/n;
for (i=1; i <= n; i++){
        v += (x[i] – m)^2 ;
}
v /= (n-1);
…
```

a) Bestimmen Sie die Varianz folgender Stichprobe, die angibt, wie viel Kilogramm Futtermittel die Rehe pro Monat gefressen haben.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
56	48	53	49	51	44	52

b) Geben Sie die berechneten Werte m und v als Summenformel an.

c) Beweisen Sie, dass v alternativ auch mittels

$$v = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2}{n}}{n-1}$$

bestimmt werden kann.

d) Nennen Sie je einen Vor- und Nachteil der Berechnung aus b) im Vergleich zur Berechnung aus c).

Aufgabe 5

Im Wildpark geht ein Virus um, an dem einige Tiere erkranken. In Abhängigkeit von der Zeit t (Angabe in Tagen) seit der Erkrankung des ersten Tieres kann die aktuell erkrankte Anzahl an Tieren (Angabe in Stück pro Tag) durch die Funktion f(t) mit $f(t) = 80 * t * e^{-t}$ bestimmt werden. t gibt also an, wie viele Tage seit der Erkrankung des ersten Tiers im Wildpark bereits vergangen sind

a) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem die an Anzahl der erkrankten Tiere maximal wird. Geben Sie ebenfalls die Anzahl der erkrankten Tiere an diesem Tag an.

b) Berechnen Sie den Tag, an dem die Anzahl der Neuerkrankungen am stärksten abnimmt. Bestimmen Sie ebenfalls, wie viele Tiere an diesem Tag krank sind.

c) Wenden Sie die partielle Integration auf

$$\int_a^b f(t) = \int_a^b 80 * t * e^{-t} dt$$

an.

d) Bestimmen Sie die gesamte Anzahl an Tieren, die innerhalb von vier Wochen nach der ersten Erkrankung erkrankt sind.

Aufgabe 6

Die Zoowärter müssen die Heuballen, die als Futter für die Rehe bestimmt sind, immer vor Ausgabe kontrollieren, da sich immer wieder mal nicht-fressbare Bestandteile in diesen wiederfinden lassen. Der Heuballenproduzent führt zwar vor dem Verkauf selber eine Kontrolle durch, doch diese ist nicht ohne Fehler.
Jahrelange Beobachtungen zeigen, dass 92% der produzierten Heuballen komplett fressbar sind. Von den fressbaren Heuballen werden nur 96% verkauft, von den eigentlich nicht fressbaren Ballen gelangen irrtümlich 4% in den Verkauf.

a) Wie groß ist der Anteil der verkauften Heuballen an der Gesamtproduktion?

Ein verkaufter Heuballen wird rein zufällig ausgewählt:

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann ein Reh diesen Ballen ohne Bedenken fressen?

c) Findet man unter den Heuballen, die nicht zum Verkauf frei gegeben wurden, mehr als 25% doch fressbare Heuballen, lohnt eine exakte Nachprüfung. Wie viele Heuballen werden im Mittel unter 100 nicht verkauften Heuballen doch eigentlich verkauf bar sein? Lohnt sich somit eine Nachprüfung?