Maximum-Likelihood-Schätzmetode

$\prod$ abarbeiten

Θ gesucht, $x_1, \dots, x_n$ gegeben von $F_\Theta(t)$

1\. aufstellen:
$$L(\Theta) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \ln(\underbrace{P_\Theta}_{\text{Wahrscheinlichkeitsfunktion}}(X_i = x_i)) & : \text{falls diskrete Verteilung} \\ \sum_{i=1}^{n} \ln(\underbrace{f_\Theta}_{\text{Dichtefunktion}}(x_i)) & : \text{falls stetige Verteilung} \end{cases} \qquad \ell(\Theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} P_\Theta(X_i = x_i) \\ \prod_{i=1}^{n} f_\Theta(x_i) \end{cases}$$

2\. $L(\Theta) / \ell(\Theta)$ maximieren $(L'(\Theta) = 0)$

Erwartungstreuer Schätzer T für $\Theta \overset{\text{wenn}}{\Longrightarrow} E(T) = \Theta$

Grenzen einsetzen!

Substitution

$x = 2u \quad \frac{dx}{du} = (2u)' \Rightarrow dx = 2\,du$

$u = x^2 \quad \frac{du}{dx} = (x^2)' \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}\,du$

$f(x) \geq 0$

$\int f(x) \doteq 1$

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, dx$$

Hypothesentest

1. Wähle die zu testende Hypothese

1.S i) $H_0: \mu_{(1)} \leq \mu_0$ gegen $H_1: \mu_{(1)} > \mu_0$

1.S ii) $H_0: \mu_{(1)} \geq \mu_0$ gegen $H_1: \mu_{(1)} < \mu_0$

2.S iii) $H_0: \mu_{(1)} = \mu_0$ gegen $H_1: \mu_{(1)} \neq \mu_0$

$X_1, \dots, X_n$ unabhängig & identisch verteilt $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad Y \sim N(\mu_0, \sigma^2)$ Varianz gleich!

Gauß-Test σ bekannt

T-Test μ, σ^2 unbekannt

Zweistichproben t-Test σ^2 unbekannt

2. Lege das Signifikanzniveau α fest

$$s_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2}$$

3. Berechne Teststatistik $Z = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma}$ $\quad T = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{s_n}$ $\quad T = \sqrt{\frac{NM}{N+M}} \cdot \frac{\bar{X}_N - \bar{Y}_M}{s}$

$$s = \sqrt{\frac{1}{N+M-2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X}_N)^2 + \sum_{i=1}^{M} (Y_i - \bar{Y}_M)^2 \right)}$$

4. Lehne H_0 ab, falls

$$Z \begin{cases} > q_{1-\alpha} \\ < q_\alpha \\ < q_{\frac{\alpha}{2}} \text{ oder } > q_{1-\frac{\alpha}{2}} \end{cases} \quad T \begin{cases} > t_{n-1,1-\alpha} \\ < t_{n-1,\alpha} \\ < t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \text{ oder } > t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \end{cases} \quad T \begin{cases} > t_{N+M-2,1-\alpha} \\ < t_{N+M-2,\alpha} \\ < t_{N+M-2,\frac{\alpha}{2}} \text{ oder } > t_{N+M-2,1-\frac{\alpha}{2}} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{im Fall i)} \\ \text{im Fall ii)} \\ \text{im Fall iii)} \end{matrix}$$

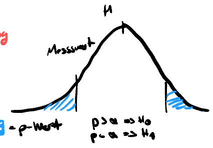
Ansonsten wird H_0 beibehalten

zweiseitig!!

P-Wert

$n \geq 30 \Rightarrow \underset{\text{einfacher}}{\Phi} = t$-Verteilung

minimales Signifikanzniveau für das gerade noch H_1 wäre



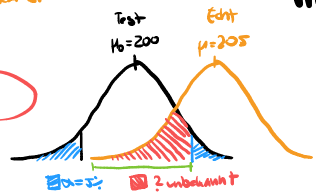
$$P_{H_0}(\underset{\text{Stichprobe}}{S}) = P(X \leq \bar{X}_S)$$

$Z \sim N(0,1)$ ($n \geq 30$!!!)

$$P\Big(Z \leq \underbrace{\sqrt{n}\, \frac{\bar{x} - \mu \text{ of } H_0}{s}}_{\Phi}\Big)$$

	"keine Änderung" H_0	"was zu beweisen ist" H_1
"H_0 wahr"	✓	Fehler 2. Art
"H_1 wahr"	1. Art	✓

maximal α



Hypothesentest

Beweis immer H_1!!!

Ablehnung H_0 = Annahme H_1 mit Restrisiko α

Nicht Ablehnung H_0 = H_0 nicht bewiesen, Fehler 2. Art meist nicht bekannt

Fehler 2. Art

wenn H_0 nicht abgelehnt wird, obwohl H_1 richtig ist

$H_0: \mu_0 = 1000 \quad H_1: \mu_0 \neq 1000$

H_1 berechnen:

1\. H_0 Annahmebereich bestimmen $\bar{X}_n$: $\left[\mu_0 \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ zweiseitig

t-Test $\frac{\sigma^2}{\sqrt{n}} = \frac{s^2}{\sqrt{n}}$ sonst gleich

2\. β Fehler 2. Art $= P_{\mu_1}(\bar{X}_n \text{ in Annahmebereich})$

$\bar{X} \sim (\mu_1, \frac{\sigma^2}{n})$ standardisieren

"echt" muss gegeben sein

$\beta = P(\bar{X} \leq \bar{x}_{krit} \mid \mu_1)$

$\alpha = P(\bar{X} > \bar{x}_{krit} \mid \mu_0)$

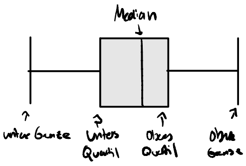
$$Z_{unten} = \frac{[\text{untere Grenze}] - \mu_1}{\sigma / n}$$

$$Z_{oben} = \frac{[\text{obere Grenze}] - \mu_1}{\sigma / n}$$

$$\beta = \Phi(Z_{oben}) - \Phi(Z_{unten})$$

Beschreibende Statistik

- Histogramm (Density)
- Stamm-/Blattdarstellung



Lagemaße

Stichprobe $x_1, \dots, x_n$

$\bar{x}$ · Arithmetisches Mittel (Mittelwert, Durchschnitt): $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i)$

Med · Empirischer Median (Zentralwert): 1. sortieren 2. $x_{0,5} := \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})} & : n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}\left(x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}\right) & : n \text{ gerade} \end{cases}$

- Gesamtlänge (z.B. Fahrtlänge) minimal
- robust gegen Ausreißer

· Empirisches p-Quantil: $x_p := \begin{cases} x_{(\lceil n \cdot p + 1 \rceil)} & , n \cdot p \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}\left(x_{(n \cdot p)} + x_{(n \cdot p + 1)}\right) & , n \cdot p \in \mathbb{N} \end{cases}$

$[y] := \max(k \in \mathbb{Z}, k \leq z)$ $\quad [1{,}2] = 1, \quad [-0{,}1] = -1$

· α-getrimmtes Mittel: $\bar{x}_{t,\alpha} := \frac{1}{n-2k} \sum_{i=k+1}^{n-k} x_{(i)}$

$\alpha \in (0, \frac{1}{2}) \quad k = [n \cdot \alpha]$ $\quad \alpha = 0 \Rightarrow$ arithmetisches Mittel

· Modalwert · Wert mit größter Häufigkeit: x_{mod}

Streuungsmaße

keine Änderung bei Verschiebung

· Empirische Varianz (Stichprobenvarianz) $s^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2$

empirische Standardabweichung $\sqrt{s^2}$ $\quad$ diskrete Varianz $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2$

· Mittlere absolute Abweichung: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|$

· Stichprobenspannweite $x_n - x_1 = \max x_j - \min x_j$

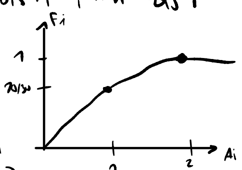
· Quartilsabstand: $x_{0,75} - x_{0,25}$

· Median-Abweichung: empirischer Median von $|x_1 - x_{0,5}|, \dots, |x_n - x_{0,5}|$

Klassierte Daten

i	A_i	h_i	r_i	h_i/b_i	F_i (Kumuliert)
0	[0,10)	20	20/30	10	20/30
1	[10,20)	10	10/30	10	1

$\frac{h_i}{b_i}$ = Höhe



$$\bar{x} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} h_i \cdot a_i = \sum_{i=1}^{k} r_i \cdot a_i$$

Anzahl Klassen, Klassenmitte

$$s^2 \approx \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{k} (a_j - \bar{x})^2 \cdot h_j$$

$A_j = [a_j, a_{j+1})$

$$x_p = a_j + \frac{p - F_{j-1}}{\underbrace{F_j - F_{j-1}}_{r_j}} (a_{j+1} - a_j)$$

Konfidenzintervalle

Schätzung für Gesamtbestand mit $(1-\alpha)$ W'keit

$q :=$ Quantil von Φ, $Z \sim N(0,1)$

	ges.	geg.	Formel
Zweiseitiges	μ	σ^2	$[T_1, T_2] = \left[\bar{x}_n \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$
Einseitig abgegrenzt links / rechts	μ	σ^2	$[-\infty, T] = \left[-\infty, \bar{x}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot q_{1-\alpha}\right]$ $[T, \infty] = \left[\bar{x}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot q_{1-\alpha}, \infty\right]$
	σ^2	$\cancel{\mu}$	$[T_1, T_2] = \left[\frac{(n-1) \cdot s_n^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1) \cdot s_n^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right]$
	σ^2	μ_0	$[T_1, T_2] = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2}{\chi^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2}{\chi^2_{n,\frac{\alpha}{2}}}\right]$
Zweiseitiges	μ	$\cancel{\sigma^2}$	$[T_1, T_2] = \left[\bar{x}_n \pm \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$
Einseitig abgegrenzt oben / unten	μ	$\cancel{\sigma^2}$	$[-\infty, T] = \left[-\infty, \bar{x}_n + \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha}\right]$ $[T, +\infty] = \left[\bar{x}_n - \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha}, +\infty\right]$

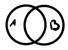
falls σ^2 unbekannt $t_{n-1,x}$ statt q_x

Kombinatorik

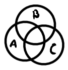
betrachtung ztl Reihenfolge / Wiederholung	$\vdots\vdots\vdots$ 1 2 3 4 5 6	~~1 2 3 4 5 6~~
↺	Per(mW)^n_k n^k	kom(mW)^n_k $\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$
~~↺~~	Per(oW)^n_k $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ $\frac{n!}{(n-k)!}$	kom(oW)^n_k $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Siebformel

$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$



$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)$



$-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)$

$+P(A\cap B\cap C)$

	disjunkt	nicht disjunkt
unabh.	$P(A\cap B)=0$ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$	$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)$
abhän.	$P(A\cap B)=0$ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$	$P(A\cap B)=P_B(A)\cdot P(B)=P_A(B)\cdot P(A)$ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Bedingte W'keit $P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P_A(B)\cdot P(A)}{P(B)}$

A & B stoch unab. $\Rightarrow P_B(A) = P_{\bar B}(A)$ & $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

Totale W'keit $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)\cdot P(A_i)$

Bayes $P_B(A_i) = \frac{P(A_i\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)\cdot P_{A_i}(B)}{\sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)\cdot P(A_i)}$

Erwartungswert

$E(X) = \sum x_i \cdot P(X=x_i)$

$EX^2 = \sum (x_i)^2 \cdot P(X=x_i)$

$E(X\cdot Y) = \sum x_i\cdot y_i \cdot P(X=x_i, Y=y_i)$

- $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$
- $E(a\cdot X) = a\cdot E(X)$
- $E(1_A) = P(A)$
- $X\le Y \Rightarrow E(X)\le E(Y)$ ($X(\omega)\le Y(\omega)\ \forall\omega\in\Omega$)
- $E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$
- $E(2\cdot X_1 + 3\cdot X_2 + 1) = 2EX_1 + 3EX_2 + 1$

$Z = aX + bY \quad X\sim\mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1^2) \quad Y\sim\mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$

$E(Z) = E\left(\sum_{i=1}^{a} X_i + \sum_{i=1}^{b} Y_i\right) = aEX + bEY$

$Var(Z) = Var(\ ''\ ) = a\cdot Var(X) + b\cdot Var(Y)$

Varianz

$V(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_j - E(X))^2\cdot P(X=x_j)$

$= E((X-EX)^2)$

$\overset{*}{=} E(X^2) - (EX)^2$

- $V(X) = E(X-a)^2 - (EX-a)^2;\ a\in\mathbb{R}$
- $V(X) = \min_{a\in\mathbb{R}} E(X-a)^2$
- $V(a\cdot X+b) = a^2\cdot V(X);\ a,b\in\mathbb{R}$
- $V(X)\ge 0$

  $V(X) = 0 \Leftrightarrow P(X=a)=1$; für $1\ a\in\mathbb{R}$
- $V(X) = V(-X)$
- $V(X+Y) = V(X)+V(Y)+2\cdot Cov(X,Y)$
- $V(X_1+\ldots+X_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n} Cov(X_i,X_j)$

$X\sim\mathcal{N}$ • $Y = 4X \quad Var(Y) = Var\left(\sum_{i=1}^4 X_i\right) = 4\cdot Var(X)$ ← Summe unabhä. Zufallsvariablen

Kovarianz

$Cov(X,Y) = E[(X-EX)(Y-EY)]$

$\overset{*}{=} E(X\cdot Y) - EX\cdot EY$

- $C(X,Y) = C(Y,X)\ ,\ C(X,X) = V(X)$
- $C(X+a, Y+b) = C(X,Y)$
- X,Y stoch unab. $\Rightarrow C(X,Y) = 0$
- $C\left(\sum_{i=1}^n a_i\cdot X_i, \sum_{j=1}^m b_j\cdot Y_j\right) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m a_i\cdot b_j\cdot C(X_i,Y_j)$
- $C(a+b\cdot X, Y) = b\cdot C(X,Y)$

Korrelation

$r(X,Y) := \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)\cdot V(Y)}}$

$r(X,Y) = 0 \Leftrightarrow$ unkorreliert

Stoch. unabhä.

$F(x;y) = F(x)\cdot F(y)$

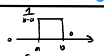
$\Rightarrow E(X\cdot Y) = E(X)\cdot E(Y)$

$Cov(X,Y) = 0$

$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

Gleichverteilung $X\sim\mathcal{U}(a,b)$

$f(x) = \begin{cases}\frac{1}{b-a} & x\in[a,b]\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$



$F(x) = P(X\le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases}0 & x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 1 & x>b\end{cases}$

$E(X) = \frac{b+a}{2}$

$Var(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$

Binomial $X\sim Bin(n,p)$ $\quad f(x) = P(X=x) = \binom{n}{x}\cdot p^x\cdot q^{n-x};\ x\in[0,n]$

n: Anzahl unab. Versuche p: W'keit für A

$EX:\ \mu = np$

$V(X):\ \sigma^2 = np(1-p)$

Poisson $X\sim Poi(\lambda)$ $\quad \lambda := n\cdot p \quad f(x) = P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

λ: ∅ Fehlerzahl pro Einheit

$EX = V(X) = \lambda$

Approx $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2=\mu)$

$\mu>9$ (mit Stetigkeitskorr.)

Hypergeometrisch $X\sim H(N,M,n)$ $\quad f(x) = \frac{\binom{M}{x}\cdot\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

N: Gesamtzahl M: Elem. mit Eigenschaft n: Stichprobenum.

$EX:\ \mu = n\cdot\frac{M}{N} \quad p = \frac{M}{N}$

$V(X):\ \sigma^2 = \mu\cdot\left(1-\frac{M}{N}\right)\cdot\frac{N-n}{N-1} = n\cdot\frac{M(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$

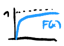
Approx $Bin(n, \frac{M}{N})$ $n<0{,}05N$

---

spontanität !

Exponentiell $X\sim Exp(\lambda)\ \lambda>0$

$f(x) = \begin{cases}\lambda\cdot e^{-\lambda x} & ,x>0\\ 0 & ,\text{sonst}\end{cases}$

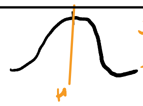


$F(x) = P(X\le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases}1-e^{-\lambda x} & ,x>0\\ 0 & ,x\le 0\end{cases}$

$E(X) = \frac{1}{\lambda};\ Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Spontanität $P(X\ge x+t\mid X\ge t) = P(X\ge x);\ t,x>0$

Normalverteilung $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$



symmetrisch (μ)

$f(\mu) = \max = \frac{1}{\sigma}\cdot\sqrt{2\pi}$

$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}dt$

$E(X) = \mu \quad Var(X) = \sigma^2$

Standardisierung $Z\sim\mathcal{N}(0,1)$

$\Phi(-t) = 1-\Phi(t) \quad P(X\le S_n) = P\left(Z\le\frac{S_n-E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}\right) = \Phi\left(\frac{S_n-\mu}{\sigma}\right)$

---

erwartungstreue Schätzer Varianz

$(\cancel{\mu})\ \hat s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i-\bar x_n)^2$

$(\mu)\ \tilde s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2$

Achtung Stetigkeitskorrektur ⚠

wenn $S_n\sim Bin(n,p)$ nicht reele Zahlen abdeckt

$P(k\le S_n\le e) = \Phi\left(\frac{e-E(S_n)+\frac{1}{2}}{\sqrt{Var(S_n)}}\right) - \Phi\left(\frac{k-n\cdot p-\frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}\right)$ (Moivre-Laplace p was) $\xrightarrow{\text{sonst}}$ $= \Phi\left(\frac{e-E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}}\right) - \Phi\left(\frac{k-n\cdot\mu}{\sigma\cdot\sqrt{n}}\right)$ (Levy)

$Var(\bar S_n) = \frac{\sigma^2}{n}$ (n: Stichprobe; σ^2: pro Element / Grundgesamtheit)

Approximation durch ...

Poisson ↑ groß n ↓ klein p

$n\cdot p\le 10$ & $n\ge 100$

$\approx Poi(n\cdot p)$

Normal

$n\cdot p(1-p) > 9$

$\approx\mathcal{N}(np, np(1-p))$

$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cdot f(x)\,dx$

	diskret	stetig
$f(x)$	$\begin{cases}p_i & x=x_i\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$	{stetige Funktion}
Normierung	$\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \overset{!}{=} 1$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \overset{!}{=} 1$
$F(x)$	$P(X\le x) = \sum_{x_i\le x} f(x_i)$	$P(X\le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$
$P(a\le X\le b)$	$F(b)-F(a)$	$\overset{!}{=}\int_a^b f(x)\,dx$
$E(X)=\mu$	$\sum_i x_i P(X=x_i)$	$\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx$
$Var(X)=\sigma^2$	$\sum_i (x_i-\mu)^2\cdot P(X=x_i)$	$\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,dx = E(X-EX)^2$
$f(x,y)$	$\begin{cases}p_{ik} & x=x_i;\ y=y_k\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}\ \ge 0$	{stetige Funktion} ≥ 0
Normierung	$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_i,y_k) \overset{!}{=} 1$	$\int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy \overset{!}{=} 1$
$F(x)$	$P(X\le x) = \sum_{x_i\le x} f(x_i)$	$P(X\le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$
Randw. X	$f_1(x)\begin{cases}p_i & x=x_i,\ i=1,\ldots,m\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$	$f_1(x) = \int_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$
Randw. Y	$f_2(y)\begin{cases}p_i & y=y_i,\ i=1,\ldots,n\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$	$f_2(y) = \int_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$
$E(g(x,y))$	$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} g(x_i;y_j) P(X=x_i, Y=y_j)$	$\int_{-\infty}^{\infty}$

Marginalvert. X $\quad P(X=x) = \sum_y P(X=x, Y=y)$

Tschebyscheff

$P(|X-\mu|\ge\varepsilon)\le\sigma^2\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}$

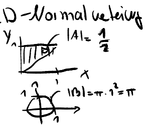
für $\bar X_n$ $\quad P(|\bar X_n-\mu|\ge\varepsilon)\le\frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}$

ZGW

Summen von ZV: $S_n = \sum_{i=1}^n X_i \Rightarrow E(S_n) = n\cdot\mu \quad Var(S_n) = n\cdot\sigma^2$

arithm. Mittel: $\bar X_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \Rightarrow E(\bar X_n) = \mu \quad Var(\bar X_n) = \frac{1}{n}\sigma^2$

2D-Normalverteilung $h(x,y) = \frac{1}{2\pi}\cdot\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)$



$|A| = \frac{1}{2}$ $\quad h(x,y) = \begin{cases}2 & 0\le x\le y\le 1\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$

$|B| = \pi\cdot 1^2 = \pi$ $\quad h(x,y) = \begin{cases}\frac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$

Gemeinsame Verteilung X und Y ⇒ **Marginalvert.**

$P(X\le x) = P(X\le x, -\infty<Y<\infty) = \int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t,y)\,dy\right)dt =: \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

Dichte X: $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t,y)\,dy$

Dichte Y: $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,t)\,dx$