1.) Gemischt - Vorbereitung

Aufgabe 1.1: Blech

Aus einem rechteckigen Blech mit der Kantenlänge 20 cm (siehe Skizze)soll ein oben offener Kasten mit möglichst großem Volumen hergestellt werden.

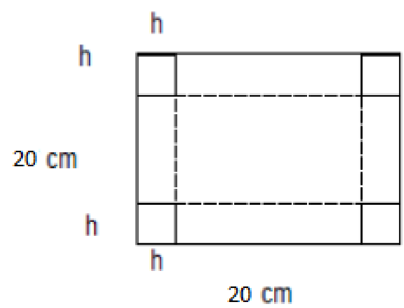
Bestimmen Sie die optimale Höhe h des zu erstellenden Kastens.

a) (5P) Erstellen Sie zunächst die Formel für das Volumen des entstehenden Behälters.

b) (10P) Bestimmen Sie den Wert von x, für den das maximale Volumen erreicht wird.

c) (2P) Bestimmen Sie das Maximalvolumen.

d) (3P) Bestimmen Sie die Masse des Behälters, wenn das Blecht 8 g/cm^3 wiegt und die Dicke des Bleches 1 mm beträgt.



Aufgabe 1.2: Labor - Druck

Bei einem Experiement hat Laborleiter Schulze die folgenden fünf exakten Werte des Drucks gemessen:

Zeitpunkt	0	1	2	3	4
Druck	0	9	12	15	24

Er möchte Nährungswerte für den Druck zu den Zeitpunkten 0,5 bzw. 3,5 haben.

a) (15P) Berechnen Sie die Druckwerte zu den zwei Zeitunkten bei

   (a) linearer Interpolation jeweils zwischen den beiden Nachbarwerten.

   (b) Interpolation durch ein Polynom. (Hinweis: Polynomgrad 4)

b) (5P) Skizzieren Sie die Interpolationskurve.

Aufgabe 1.3: Firmenlogo

Die Firma *logocreation* bietet als Dienstleistung die Erstellung von maßgeschneiderten Firmenlogos an. Für die Firma Parabol Spiegel GmbH spielen Parabeln eine wichtige Rolle, deshalb soll die Logofläche durch Parabeln begrenzt werden. Ferner muss der Schriftzug Parabol (1 cm breit und 0,5 cm hoch) in das Logo passen.

logocreation hat zwei Vorschläge erarbeitet:

Vorschlag A: Fläche zwischen den Kurven

$$f(x) = 3 - 2x^2 \ und\ g(x) = x^2$$

Vorschlag B: Fläche zwischen den Kurven

$$f(x) = 2 - 3x^2 \ und\ g(x) = -x^2$$

a) (8P) Skizzieren Sie Varianten jeweils in einem geeigneten Koordinatensystem.

b) (10P) Berechnen Sie die Flächen der alternativen Logos.

c) (2P) Beraten Sie die Firma Parabol Spiegel und wählen Sie das flächenmäßig größere der beiden vorgeschlagenen Logos aus, in das der Schriftzug hineinpasst. Benutzen Sie dabei Ihre Skizzen.

Aufgabe 1.4: Geburtstagsparadoxon

Sie und Ihr Ausbilder wetten miteinander, wie wahrscheinlich das Ereignis ist, dass in Ihrer aus 25 Studenten bestehenden Studiengruppe mindestens zwei Studies am gleichen Tag Geburtstag haben. Schaltjahre werden nicht berücksichtigt. Sie behaupten, die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Studies am gleichen Tag Geburtstag (Ereignis A) haben, betrage mindestens 50%.

a) (5P) Bestimmen Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum, d. h. geben Sie die Menge der möglichen gleichwahrscheinlichen Elementarereignisse und deren Mächtigkeit an. Gehen Sie davon aus, dass die Geburtstage gleichverteilt sind.

b) (5P) Welches ist das Gegenereignis zu A? Bestimmen Sie die Menge der Elementarereignisse des Gegenereignisses zu A!

c) (7P) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses!

d) (3P) Wie hoch ist also die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Studies am gleichen Geburtstag haben?

Hinweise:

$$25! = 1,551 \cdot 10^{25}$$
$$340! = 5,101 \cdot 10^{714}$$
$$365! = 2,510 \cdot 10^{778}$$
$$365^{25} = 1,141 \cdot 10^{64}$$

Aufgabe 1.5: Regenrückhaltebecken

Ihr Ingenieurbüro hat den Auftrag, ein Rückhaltebecken zu planen, mit dem die Wassermenge eines Beckens im Unterlauf begrenzt werden soll. Das Becken soll 20m lang werden und einen trapezförmigen Querschnitt mit Sohle von 2m Breite haben; es soll oben 6m breit sein. Das Becken ist maximal 2 Meter tief. Das Becken hat kein Gefälle, es liegt waagerecht. Der Zulauf zum Becken befindet sich oben, der Ablauf unten.

a) (5P) Berechnen Sie das Gesamtfassungsvermögen des Beckens.

Bei einer Wasserführung von $10m^3$ pro Stunde fließt der Bach durch das Becken, ohne sich zu stauen, da der Abfluss auf $10m^3$ pro Stunde beschränkt ist. Fließen mehr als $10m^3$ pro Stunde in das Becken hinein, staut sich das überschüssige Wasser im Becken.

b) (5P) Wie lange würde es nach einem Wolkenbruch dauern, bis das Becken gefüllt ist, wenn der Bach dann konstant $30m^3$ pro Stunde im Oberlauf führt? Gehen Sie zur Vereinfachung von einem Beginn des Wolkenbruches von einem leeren Becken aus.

c) (5P) Berechnen Sie zum einem beliebigen Pegelstand h das Restfüllvermögen und die Zeit bis zum Überlauf unter den Bedingungen aus b), da dies für die Feuerwehr in einer Tabelle festgehalten werden soll.

d) (5P) Bei welchem Pegelstand ist das Becken halbvoll (Volumen)?

Aufgabe 1.6: Verschlüsselung

Sie möchten einem Freund eine kurze verschlüsselte Nachricht übermitteln. Die Verschlüsselung soll auf folgende sehr einfache Methode berechnet werden:

- Nummerieren Sie den gesamten benutzten Zeichensatz durch, so dass jedem Buchstaben ein eindeutiger Zahlenwert zugeordnet wird.
- Teilen Sie die Nachricht dann in Dreierblöcke (Zahlen durch Kommata getrennt) und führen Sie folgende 3 Operationen jeweils mit den 3 Zahlenwerten, die die Zeichen jetzt besitzen, für jeden Dreierblock durch, so dass sich wiederum Dreierblöcke ergeben:

  1) Die erste Codezahl ist die Summe der 3 Zahlen.
  2) Die zweite Codezahl ergibt sich aus der Summe der ersten und der letzten Zahl und dem Zweifachen der zweiten Zahl.
  3) Die dritte Codezahl ergibt sich aus der Summe der ersten und der zweiten Zahl und dem Dreifachen der dritten Zahl.

Die codierten Dreierblöcke übermitteln Sie.

Beispiel für eine Codierung: Der Text "WIR"wird in die Zahlen 23, 9, 18 überführt. Das führt zu den 3 Codezahlen 50, 59, 86 als Verschlüsselung, die dann übermittelt werden.

a) Warum ist es möglich, bei Kenntnis der Verschlüsselungsmethode derart verschlüsselte Nachrichten eindeutig zu entschlüsseln? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

b) Wie lautet die Formel für die Entschlüsselung von jeweils drei Zeichen?

Man hat festgestellt, dass die Entschlüsselung leicht zu finden ist, wenn man die Verschlüsselungsmethode kennt. Daher erweitert man das Verfahren von Dreier-auf Viererblöcke folgendermaßen:

- Bei den ersten drei Codezahlen wird die vierte Zahl hinzuaddiert.
- Außerdem bildet man als vierte Codezahl die Summe der ersten drei Zahlen und dem Vierfachen der vierten Zahl.

Begründen Sie kurz, ob

c) auch diese Verschlüsselung eindeutig zu entschlüsseln ist.

d) das entsprechende Verfahren auch für beliebig lange Blöcke eindeutig ist.

Aufgabe 1.7: Zufriedenheit

Die MATSE GmbH wählt aus dem Kundenstamm von 40 Kunden 8 nach dem Zufallsprinzip aus, um sie in einem Interview nach der Zufriedenheit mit den Leistungen der MATSE GmbH zu befragen.
Sie sollen der Geschäftsführung bei der Interpretation der Ergebnisse helfen.

a) (4P) Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Auswahl der 8 Befragten?
Erläutern Sie Ihr Ergebnis durch Angabe der zugrunde liegenden kombinatorischen Grundaufgabe (Urnenmodel).

Hinweis: Erst kürzen, dann mit dem Taschenrechner die Zahl ausrechnen!

b) (5P) Angenommen 10 der 40 Personen wären unzufrieden. Wie viele der unter a) berechneten Möglichkeiten führen dazu, dass genau 2 angeben nicht zufrieden zu sein und 6 angeben, zufrieden zu sein?
(Ergebnis erläutern und ausrechnen!)

c) (2P) Wie hoch ist also der relative Anteil der Ergebnisse, bei denen genau 2 von 8 Befragten unzufrieden und die 6 anderen zufrieden sind?
(Siehe Teilaufgaben a) und b))

d) Welche Werte ergeben sich für die Möglichkeiten aus b), wenn die wahre Anzahl der Unzufriedenen unter den 40 Befragten gleich

   (a) (2P) 9
   (b) (2P) 11 ist?
   (c) (1P) Vergleichen Sie diese beiden Zahlen mit dem Ergebnis aus b).

e) (4P) Wie lautet die allgemeine Formel aus d) für eine beliebige Anzahl von Unzufriedenen unter den 40 Kunden, wenn sich genau 2 der 8 Befragten als unzufrieden öuten"?
Beachten Sie dabei, wie viele mindestens und wie viele höchstens unzufrieden sein können.

Aufgabe 1.8: Pflanzenwachstum

Sie arbeiten an einem Programm, das ein Modell für das Pflanzenwachstum berechnen soll. Ein wesentlicher Faktor ist dabei die Tageslänge, also die Zeit zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang. Sie ändert sich von Tag zu Tag.

Als ersten Ansatz hat Ihr Chef vorgeschlagen, sehr stark vereinfacht bei der Sonnenuntergangszeit von einem periodischen Vorgang auszugehen, den Sie mit einer Sinus-Schwingung für ein Jahr modellieren sollen.

Hinweis: In Wirklichkeit ist die Sache wesentlich komplizierter!
Die folgenden Annahmen gelten für einen fiktiven Ort und sind nicht wirklichkeitsnah.
Sie beziehen sich einheitlich auf Winterzeit.

Welche Formel für die Uhrzeit des Sonnenuntergangs am Tag t müssen Sie jetzt programmieren, wenn Sie folgendes beachten:

- Die Funktion *sin(x)* auf Ihrem Rechner gibt zu einem Wert x im Bogenmas - also x zwischen 0 und 2 π - den Sinuswert zwischen -1 und 1 zuruck. (Insbesondere liegt das Minimum bei $\sin(3/2\pi) =$ -1.)
- Die Sonnenuntergangszeit soll zu einem beliebigen Tag des Jahres t, der durch die Anzahl der Tage seit dem 1. Januar repräsentiert wird (also 1.1. entspricht t = 1 und 31.12. entspricht t = 365), berechnet werden.
- Der früheste Sonnenuntergang ist am 347. Tag, das ist der 13. Dezember, und zwar um 16:30 Uhr.
- Die späteste Sonnenuntergangszeit im Sommer ist um 21:00 Uhr.
- Das Jahr hat 365 Tage, die Periodenlänge ist also gleich 365.

a) (8P) Skizzieren Sie eine geeignet verschobene und angepasste Sinusschwingung in ein Koordinatensystem mit der x-Achse vom ersten bis 365. Tag des Jahres und der y-Achse im Bereich von 16:30 und 21:00 Uhr mit dem mittleren Wert 18:45 Uhr, die angenähert die Sonnenuntergangszeit mit obigen einfachen Randbedingungen beschreibt.

b) (8P) Stellen Sie eine Formel für die Sonnenuntergangszeit SU(t) etwa in der Form

$$SU(t) = a + b \cdot sin\left(c \cdot (t - 347) + d\right) \text{ für } t = 1 \ldots 365$$

auf, die obige Bedingungen erfüllt.

c) (2P) Berechnen Sie mit Ihrer Formel die Werte für den 1. Januar (t = 1) und für den 1. Juli (t = 182) eines Jahres. Geben Sie die Uhrzeit in Stunden und Minuten an.

d) (2P) Es ist $SA(t) = 6,5 + 2,25 \cdot sin(\frac{2\pi}{365} \cdot (362 - t) + \frac{\pi}{2})$. Berechnen Sie fur den 1. Januar und den 1. Juli jeweils die Uhrzeit des Sonnenaufgangs in Stunden und Minuten sowie die Anzahl der Stunden zwischen Sonnenauf- und -untergang.

Aufgabe 1.9: Düngermenge

In einer Messreihe Ihres Instituts sind folgende Messwerte für Düngermenge x (in Gramm) und Wachstum y (in cm) von Tomatenpflanzen ermittelt worden:

$$A(2|1,5)\ B(3|2,5)\ C(5|4)\ D(6|4)$$

Es wird ein linearer Zusammenhang vermutet.

a) (6P) Bestimmen Sie mittels der Methode der kleinsten Quadrate eine Ausgleichsgerade bzw. Regressionsgerade $y = mx + b$, welche die Messpunkte möglichst gut approximiert.

b) (1P) Welche Größe wird bei dieser Berechnung minimiert?

c) (5P) Berechnen Sie für jeden x-Wert die Abweichung zwischen dem gemessenen und dem theoretischen y-Wert sowie die Summe der Quadrate der Abweichungen.

d) (5P) Bestimmen Sie auch die Ausgleichsgerade, die sich beim umgekehrten Ansatz $x = ay + b$ ergibt.

e) (1P) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Ausgleichsgeraden (gleich Schwerpunkt).

f) (2P) Skizzieren Sie die Messdaten und die beiden Ausgleichsgeraden.

Aufgabe 1.10: Pyramide

Die MATSE AG möchte mit einem spektakulären Bauwerk ihre Zukunftsfähigkeit und das Innovationsvermögen unterstreichen. Daher hat der Chef seine Vorstellungen mathematisch zugrunde gelegt:

Eine Pyramide mit dreieckiger Grundseite soll gebaut werden. Sie ist gegeben durch die drei Eckpunkte $P0 = (0, 0, 0)$, $P1 = (15, 0, 0)$, $P2 = (9, 18, 0)$ und die Spitze $P3 = (6, 9, 18)$, wobei die Zahlenwerte in Metern (m) gemessen sind.

a) (4P) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Grundfläche.

b) (4P) Bestimmen Sie die parameterfreie Ebenengleichung der Seitenfläche durch die Punkte P1, P2 und P3.

c) (4P) Bestimmen Sie den Neigungswinkel zwischen der Grundfläche und der Seitenfläche aus Teil b).

d) (4P) Bestimmen Sie die drei Parametergleichungen der Kanten der Pyramide, die von den Punkten P0, P1, P2 zur Spitze P3 laufen.

e) (4P) Es soll in die Pyramide eine Zwischendecke in 6 m Höhe eingezogen werden. Berechnen Sie den Flächeninhalt der 1. Etage.

Aufgabe 1.11: Programm

Sie sollen als Mitarbeiter/-in eines Universitätsinstituts in einem „alten“ Programm Laufzeitverbesserungen vornehmen. Dabei haben Sie die folgenden Zeilen im Code gefunden, die Sie analysieren und dann optimieren wollen:

```
a = 0;
fak = 1;
input n;
for(i = 1; i < n + 1 ; i++){
  fak = fak * (i+1);
  a = a + i / fak;
}
```

a) (5P) Geben Sie in einer Tabelle die Werte von fak und a nach der Ausführung des Codes für $n = 1, 2, 3, 4$ und 5 an.

b) (5P) Geben Sie die explizite Summenformel für a in Abhängigkeit von n an.
Hinweis: Brüche bei a nicht kürzen!

c) (8P) Ersetzen Sie die Summenformel von a durch einen einfachen geschlossenen Ausdruck.
Hinweis: setzen Sie den Zähler „$i = (i + 1) - 1$“ und drücken Sie den Bruch als Differenz zweier Brüche aus, so können Sie die Summe durch einen einfachen Ausdruck ersetzten.

d) (2P) Was ergibt sich näherungsweise für große n?