Ana1 Formelsammlung

Lukas Keller

Reihen

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konv $:\overset{\not\Rightarrow}{\underset{\Leftarrow}{=}}$ absolute konv

Gegenbsp. Harmonische Reihe

Konvergenz:

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$; $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert
- $e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergiert für $x \in \mathbb{R}$
- harmonische: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ divergent
- geometrische: $\sum_{n=0}^{\infty} q^k$ $|q| \geq 1$ div ; $|q| < 1$ konv gegen $\frac{1}{1-q}$
- Leibnitz: für a_n fallende Nullfolg mit $a_n > 0$
  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konvergiert

- $b_k \geq a_k \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ (fast immer)
- Majoranten: $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konv $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv
- Minoranten: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ div $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ div

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^c} \begin{Bmatrix} \text{konv} & c>1 \\ \text{div} & c \leq 1 \end{Bmatrix}$

Quotienten- / Wurzelkriterium (unabhängig von a_n!)

- $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ $r \begin{Bmatrix} <1 \\ >1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \begin{Bmatrix} \text{konv} \\ \text{div} \end{Bmatrix}$

mit Entwicklungspunkt: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

$\begin{Bmatrix} \text{konvergiert absolut} \\ \text{divergiert} \end{Bmatrix}$ für $\begin{Bmatrix} |x-x_0| < r \\ |x-x_0| > r \end{Bmatrix}$

$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \Big/ \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

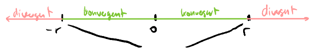
- Cauchy-Konvergenzkriterium: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ konv

Grenzwerte

- $s_n = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)\cdot k} \overset{\text{Partialbruchzerlegung}}{=} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \overset{\text{Teleskopsummen}}{=} \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k-1}\right] - \left[\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}\right] = 1 - \frac{1}{k}$
- $\sum_{k=1}^{\infty} (a)^{k-1} (b)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (a \cdot b)^{k-1} \cdot (b)^1 = b \sum_{k=0}^{\infty} (ab)^k$
- geometrische Reihe: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 + q^1 + q^2 + q^3 + \ldots$
- alternierende Reihe: $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$

Potenzreihen

Jede Potenzreihe hat ein eindeutig bestimmbares r



Randpunkte müssen gesondert geprüft werden

$k = \min_{k^* \in \mathbb{R}} \{ k^* \text{ ist obere Schranke von } A \}$

$=: \sup(A)$ Supremum

$k = \max_{k^* \in \mathbb{R}} \{ k^* \text{ ist untere Schranke von } A \}$

$:= \inf(A)$ Infimum

:)

Ableitungen

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\text{arccot})' = \frac{-1}{1+x^2}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\sinh x)' = \cosh x$

$(\cosh x)' = \sinh x$

$\left(\frac{a}{x}\right)' = -\frac{a}{x^2}$

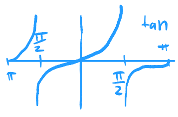
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

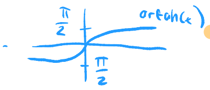
$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{-1}{2x^{3/2}}$

$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ $x > 0$

$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \cos x \cdot \sin x)$

$\int a^2 \, dx = \frac{1}{2+1} a^{2+1}$





$(x \cdot \ln(x) - x)' = \ln x$

$\ln|\sin(x)| = \int \cot(x) \, dx$

$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{\sin^2(\arccos(x))} = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}$
$= \sqrt{1-x^2}$

Ableitungsregeln

u, v diff'bar

Summenregel: $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$

Faktorregel: $(c \cdot v(x))' = c \cdot v'(x)$, $c \in \mathbb{R}$

Produktregel: $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Quotientenregel: $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \left(\frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}\right)$, $v(x) \neq 0$

Kettenregel: $[u(v(x))]' = v'(x) \cdot u'(v(x))$

Ableitung Umkehrfunktion: $y = f(x)$; $x = f^{-1}(y)$

$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Vollständige Induktion

Die Behauptung A_n ist für alle $n \geq m$ gültig wenn

IA: A_m ist richtig

IV: Es gelte A_n für ein festes aber beliebigen $n \geq m$

IB: Dann gilt auch A_{n+1}.

IS: ...

wichtige Betrags(un-)gleichungen

$x, y \in \mathbb{R}$

(1) $|x| \geq x$ und $|x| \geq -x$

(2) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(3) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ für $y \neq 0$

(4) $|x+y| \leq |x| + |y|$ Dreiecksungleichung

(5) $|x-y|$ Abstand x, y

wichtige Grenzwerte

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = 0$ für $a > 0$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für $a > 0$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ für $|q| < 1$

Rechenregeln Grenzwerte

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$; $\lim_{n\to\infty} b_n = b$; $c \in \mathbb{R}$

⚠ nur wenn beide konvergent

Summenreg. • $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

Faktorreg. • $\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = ca$

Produktreg. • $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$

Quotientenreg. • $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$, $b_n \neq 0, b \neq 0$

Potenzreg. • $\lim_{n\to\infty} (a_n)^k = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^k$, k unabhängig von n!!

Folgen

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f(n) \in \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) $f(n) = a_n$

arithmetische Folge: $a_n = a_0 + n \cdot c$; $a_0, c \in \mathbb{R}$

geometrische Folge: $a_n = a_0 + c^n$; $a_0, c \in \mathbb{R}$

- Weierstraß: Jede beschränkte Folge $a_n \in \mathbb{R}$ hat eine konv Teilfolge
- konv $\Rightarrow$ beschränkt ; unbeschränkt $\Rightarrow$ div
- beschränkt $\wedge$ monoton $\Rightarrow$ konv
- Cauchy-Konvergent: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ mit $|a_n - a_m| < \varepsilon$
  $\forall n > m \geq n_0$
- Grenzwert: $\lim_{n\to\infty} (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = a$
  $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$
- $a_n \leq b_n$ für (fast) alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$
  (nur unendlich Folgen!)

Logarithmus

$d \neq 1 \neq e$

- $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^b) = b \cdot \ln(a)$
- $\log_d(d) = 1 \wedge \log_d(1) = 0$
- $\log_d s = \frac{\log_b s}{\log_b d}$ (b frei wählbar)

Potenzregeln

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$

$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

Beschränktheit: $\forall_{n \in \mathbb{N}} : |a_n| \leq S$ + Grenzwert

Differenzierbarkeit: wenn in x_0 ein Grenzwert existiert $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{h = x - x_0}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

$f(x)$ stetig in x_0 $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\lim_{x \searrow x_0} f(x)}_{\text{rechtsseitig stetig}} = \underbrace{\lim_{x \nearrow x_0} f(x)}_{\text{linksseitig stetig}} = f(x_0)$

$\Rightarrow$ Stetigkeit von: sin/cos(x)

$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\cot(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ $\tanh(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x}$

$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\coth(x) = \frac{\cosh x}{\sinh x}$

diff'bar $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ stetig

Zusammensetzung stetiger Funktionen mit $+, -, \cdot, :, \circ$ $\Rightarrow$ stetig

cos & sin & e

- $\cos(-x) = \cos(x)$ auch für cosh/sinh
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$
- $e^{i\pi} + 1 = 0 \Rightarrow e^{i\pi} = -1$
- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\cosh(ix) = \cosh(x)$
- $\sinh(ix) = i \sinh(x)$
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ • $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Rotationskörper

Rotationsvolumen $V_a^b(f) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

Mantelfläche $M_a^b(f) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+|f'(x)|^2}\, dx$

Hyperbelfunktion

$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$

$\tanh := \frac{\sinh x}{\cosh x}$

$\cos x := Re(e^{ix}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

$\sin x := Im(e^{ix}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Satz von Taylor

$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ Taylorkoeffizient

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ Taylorreihe

konvergiert für Punkt $x \in [a,b]$ innerhalb r wenn $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

Taylorpolynom vom Grad k

$T_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

Restglied

$R_k(x) = f(x) - T_k(x)$ $f(x) = T_k(x) + R_k(x)$

Restgliedformel von Lagrange

$R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\tilde{x})}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}$

$\tilde{x}$ zwischen x_0 & x

Restgliedabschätzung

$|R_k(x)| \le \max_{t\in[a,b]} |f^{(k+1)}(t)| \frac{|x-x_0|^{k+1}}{(k+1)!}$

$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$ Taylorreihe von $\ln x$

allg. Exponentialfunktion

$a^n = \left(e^{\ln(a)}\right)^n = e^{n\cdot\ln(a)}$ $a > 0$

Funktionsuntersuchung

notw. Bedingung $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar und $f'(x) = 0$

Satz von Rolle: $f \in C[a,b]$ $f(a) = f(b)$ diff'bar

$x^* \in [a,b]$ $\exists f(x^*) = 0$

Mittelwertsatz $x^* \in [a,b] \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f(x^*)$

Sekanten steigung

$f''(x) > 0$ konvex: linksgekrümmt

$f''(x) < 0$ konkav: rechts "

Integration von Partialbrüchen

(1) $\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + C,\ x \neq a$

(2) $\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \frac{1}{-n+1}(x-a)^{-n+1} + C;\ n\in\mathbb{N}, n\ge 2, x\neq a$

(3) $\int \frac{1}{x^2+sx+t} dx = \frac{2}{\sqrt{4t-s^2}} \arctan\left(\frac{2x+s}{\sqrt{4t-s^2}}\right) + C$

(falls $4t-s^2 > 0$) nur wenn Nullstellen komplex sind

$\Rightarrow s^2 - 4t < 0$

(4) $\int \frac{x}{x^2+sx+t} dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+sx+t| - \frac{s}{2}\underbrace{\int \frac{1}{x^2+sx+t} dx}_{(3)}$

(5) $\int \frac{1}{(x^2+sx+t)^n} dx =$

$\frac{2x+s}{(n-1)(4t-s^2)(x^2+sx+t)^{n-1}} + \frac{s(2n-3)}{(n-1)(4t-s^2)}$

$\cdot \int \frac{1}{(x^2+sx+t)^{n-1}} dx$

Konvergenz einer rekursiven Folge

$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}(a_n) = a$

Beschränktheit:

IV: $a_n \le a \in \mathbb{N}$

IA: $a_0 \le a$

IB: $a_{n+1} \le a$

IS: $a_n \overset{IV}{\le} a$

Wurzel: $a_n \ge 0$

M.S.

IV: $a_{n+1} \ge a_n$

IB: $a_{n+2} \ge a_{n+1}$

Grundregeln unbestimmter Integrale

- Faktorregel: $\int s f(x)\, dx = s \int f(x)\, dx$ $\forall s \in \mathbb{R}$
- Summenregel: $\int f(x)+g(x)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$ für $f(x) \neq 0$

Partielle Integration

$\int u(x)\cdot v'(x)\, dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x) v(x)\, dx$

$\int u(x)\cdot \frac{v'(x)}{v^2(x)} = \int \frac{u'(x)}{v(x)} dx - \frac{u(x)}{v(x)}$

$\int_a^b u\cdot v'\, dx = [u\cdot v]_a^b - \int_a^b u'\cdot v\, dx$

Substitution

$x = 2u$ $\frac{dx}{du} = (2u)'$ $\Rightarrow dx = 2\, du$

$u = 2x$ $\frac{du}{dx} = (2x)'$ $\Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$

$\int \frac{1}{x\ln(x)} = \int \frac{1/x}{\ln(x)} = \ln|\ln(x)| + C$

$\int \tan(x)\, dx = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} dx = -\ln|\cos(x)| + C$

$\int \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx = -\int \ln(x)\, dx$

Typ 1

Vergleichskriterium

(a) $|f(x)| \le g(x)$ $\forall x \in [a,\infty)$

$\int_a^\infty g(x)\, dx$ konv $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)$ (absolut) konv

(b) $0 \le g(x) \le f(x)$ $\forall x \in [a,\infty)$

$\int_a^\infty g(x)$ divergent $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)$ divergent

Integralkriterium für die Konvergenz von Reihen

$f: [m,\infty) \to \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ m.f. nichtnegative Funktion

$\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$ konvergent $\Leftrightarrow \int_m^\infty f(x)\, dx$ konvergent

$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^a} dx \begin{cases} \text{konv} & a > 1 \\ \text{div} & 0 \le a \le 1 \end{cases}$

- $\int_0^b \frac{1}{x^a} dx$ konv $a < 1$ $(b > 0)$
- $\int_0^b \frac{1}{x^a} dx$ div $a \ge 1$

Typ 2

$f(x)$ integrierbar in jedem $[a,b]$ ohne c unendlichkeitsstelle

$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx$

$\int_a^b f(x)\, dx := \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$

c nicht wählbar

CHW uneigentlich in c:

$CHW := \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\, dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\, dx\right)$

Vergleichskriterium

a) $|f(x)| \le g(x)$ $\forall x \in [a,b]$

$\int_a^b g(x)\, dx$ konv $\Rightarrow \int_a^b f(x)$ konv

$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx \le \int_a^b g(x)\, dx$

b) $0 \le g(x) \le f(x)$ $\forall x \in [a,b]$

$\int_a^b g(x)\, dx$ div $\Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx$ div

	0	30	45	60	90	180	270	360
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Pdst.	0	Pdst.	0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

Satz der Beschränktheit: $f[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ beschränkt in $[a,b]$

Satz von Min/Max: $\exists x_1, x_2 \in [a,b]$: $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$ $\forall x [a,b]$

Zwischenwertsatz: $f(a) \le y \le f(b) \Rightarrow \exists \hat{x} \in [a,b]: f(\hat{x}) = y$

Nullstellensatz: $\underbrace{f(a)\cdot f(b)}_{\text{unterschiedlichs VZ}} < 0 \Rightarrow \exists \hat{x} \in [a,b]$ mit $f(\hat{x}) = 0$

Mittelwertsatz $f \in C[a,b]$ $\exists \hat{x} \in [a,b]$

$\int_a^b f(x)\, dx = f(\hat{x})(b-a)$

$f(\hat{x}) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$

komplexe Analysis

$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$z = \begin{cases} a + ib \\ r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ re^{i\varphi} \end{cases}$ $\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a}, & a > 0 \\ \pi + \arctan\frac{b}{a}, & a < 0 \end{cases}$

$\bar{z} = a - ib$

$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

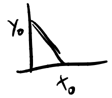
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\cdot\bar{z_2}}{z_2\cdot\bar{z_2}}$

Rechenregeln

- $z\cdot\bar{z} = x^2 + y^2$
- $\bar{z}^n = \overline{z^n}$ für $n \in \mathbb{N}$
- $\bar{z_1}\cdot\bar{z_2} = \overline{z_1 z_2}$
- $\bar{z_1} + \bar{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$

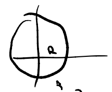
Analysis 2

Koordinaten Dreieck



$0 \le x \le x_0$
$0 \le y \le x_0 - x$

Koordinaten Kreis



$0 \le r \le R$
$0 \le \varphi \le 2\pi$

$x^2 + y^2 \le R^2$

Doppelintegral

x-Normalbereich: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ g(x) \le y \le h(x)\}$

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=a}^{b} \int_{y=g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

y-Normalbereich: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ p(x) \le x \le q(x)\}$

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=c}^{d} \int_{x=p(x)}^{q(x)} f(x,y)\,dx\,dy$$

3.8 Substitutionsformel für Doppelintegrale

Geht man im $\mathbb{R}^2$ mit Hilfe der Substitution

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v)$$

zu neuen Koordinaten u, v über, so gilt

$$\boxed{\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{A^*} f(x(u,v), y(u,v))\,|D|\,du\,dv}$$

für $|D| \neq 0$, wobei $|D|$ der Betrag der Jakobi-Determinante (Funktionaldeterminante)

$$\boxed{D = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}}$$

und

$$A^* = \{(u,v) : (x(u,v), y(u,v)) \in A\}$$

ist.

ohne Beweis

$(x,y) \to (r,\varphi)$

Polar Koordinaten

$x = r \cdot \cos(\varphi) \quad y = r \cdot \sin(\varphi)$

$$\iint_{A^*} f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \cdot r\,dr\,d\varphi$$

⚠

Euler multiplikation

$p(x,y) + q(x,y) \cdot y' = 0 \iff m(x,y) \cdot p + m(x,y) \cdot q \cdot y' = 0$

$$m'(x) = \frac{p_y(x,y) - q_x(x,y)}{q(x,y)} \cdot m(x) \qquad m'(y) = \frac{q_x(x,y) - p_y(x,y)}{p(x,y)} \cdot m(y)$$

wenn nur in x — wenn nur in y

Dreifachintegrale

$\iiint_U 1\,dU = \text{Volumen}$

Anwendungen

- Volumen zwischen der Fläche $z = f(x,y)$ und A für $f(x,y) \ge 0$ in $A \subset \mathbb{R}^2$: $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$
- Flächeninhalt von A: $I(A) = \iint_A 1\,dx\,dy$
- Flächenschwerpunkt (x_S, y_S) einer Fläche A mit Inhalt $I(A)$

$$x_S = \frac{1}{I(A)} \iint_A x\,dA \qquad y_S = \frac{1}{I(A)} \iint_A y\,dA$$

Kurvenintegral

$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \end{pmatrix}$ Vektorfeld: v_1, v_2 stetig

$k: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ Kurve, $t \in [a,b]$, $x(t), y(t)$ stetig diffbar

$$\int_k \vec{v}\,dk = \int_a^b \langle f(\vec{x}(t)), \vec{x}'(t) \rangle\,dt$$

Kurve:

$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$

Komponentenweise Ableiten

für Gradientenfeld ⚠

$\vec{A} = \vec{x}(a) \quad \vec{E} = \vec{x}(b) \quad V = \text{Potenzialfunktion von } \vec{v}$

$$\int_k \vec{v}\,dk = V(\vec{E}) - V(\vec{A})$$

$\int_k \vec{v}\,dk = -\int_{-k} \vec{v}\,dk$

$\int_k c \cdot \vec{v}\,dk = c \int_k \vec{v}\,dk$

$\int_k (f+g)\,dk = \int_k f\,dk + \int_k g\,dk$

Kreis: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}$

Tangentenvektor: $\vec{x}'(t)$

$T(s) = \vec{x}(t) + s \cdot \vec{x}'(t)$

Gradientenfeld

$\mathbb{R}^2$: $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

$\mathbb{R}^3$: $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \\ f_3(x,y) \end{pmatrix}$

$\mathrm{rot}(\vec{f}) \equiv 0$ (f ist wirbelfrei)

Lipschitz-Stetigkeit

$f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-Stetig bzgl. y, wenn

$\exists\, L > 0: |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L\,|y_1 - y_2| \quad \forall (x,y_1),(x,y_2) \in D$

Kriterium

$f_y(x,y)$ stetig und beschränkt in $D \Rightarrow f$ Lipschitz-Stetig bzgl. y in D

$\iff$ eindeutige Lösung in $[a,b]$ für y_0

Iterationsverfahren **Picard-Lindelöf**

Gegeben: AWP: $y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0$ $\quad f$ in $[a,b] \in \mathbb{R}$ stetig $\quad x_0 \in [a,b]$

$y_0(x) = y_0$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,dt$$

$$\lim_{n \to \infty} y_n(x) = y(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

Potenzialfunktion

$f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \mathrm{grad}\,V \Rightarrow V_x = f_1,\ V_y = f_2$

① $V(x,y) = \int f_1(x,y)\,dx = F_1(x,y) + c(y) = U(x,y)$

② $V_y = \frac{\partial F_1}{\partial y} + c'(y) = f_2(x,y)$

$\Rightarrow c'(y) = f_2(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}$

③ $\Rightarrow c(y) = \int c'(y)\,dy$

Anwendung

$\vec{f}$ Geschwindigkeit einer Flüssigkeit

wirbeldichte

Körper $\vec{x}$ dreht sich, wenn $\mathrm{rot}(f(\vec{x})) \neq \vec{0}$

$\mathrm{rot}(f(\vec{x})) = 0 \Rightarrow$ wirbelfrei

Quellendichte

$\vec{x}$ heißt $\begin{cases} \text{Quelle, falls } \mathrm{div}(f(\vec{x})) > 0 \\ \text{Senke, falls } \mathrm{div}(f(\vec{x})) < 0 \end{cases}$

$\mathrm{div}(f(\vec{x})) = 0 \Rightarrow$ quellenfrei

Richtungsableitung

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \vec{v}, \vec{x_0} \in \mathbb{R}^n$

⚠

$$\boxed{D_{\vec{v}} f(\vec{x_0}) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x_0}) = \langle \mathrm{grad}(f(\vec{x_0})), \vec{v} \rangle}$$

normiert !!

(1) $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{grad}\,f(\vec{x_0})}{\|\mathrm{grad}\,f(\vec{x_0})\|}$ Richtung des stärksten Anstiegs

(2) $\vec{v} = -\dfrac{\mathrm{grad}\,f(\vec{x_0})}{\|\mathrm{grad}\,f(\vec{x_0})\|}$ Richtung des stärksten Abstiegs

Taylorpolynom Grad n Entwicklungspunkt (x_0, y_0)

$$T_n(x,y) = \sum_{\substack{i,k=0 \\ i+k \le n}} \frac{1}{i!\,k!} \frac{\partial^{i+k} f(x_0,y_0)}{\partial x^i \partial y^k} (x - x_0)^i (y - y_0)^k$$

Grad 0

$T_0(x,y) = f(x_0,y_0)$

Grad 1 (Tangentialebene)

$T_1(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$

Grad 2

$T_2(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) + \frac{f_{xx}(x_0,y_0)}{2}(x - x_0)^2 + f_{xy}(x_0,y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{f_{yy}(x_0,y_0)}{2}(y - y_0)^2$

Implizites Differenzieren

$y = g(x)$ die durch $F(x,y) = 0$ beschriebene Funktion

$$\Rightarrow y' = g'(x_0) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

$$\mathrm{grad}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

- $\mathrm{div} = \langle 1, \mathrm{grad}(f) \rangle$
- $$\mathrm{rot}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Vollständiges Differential

$dz = \langle \mathrm{grad}\,f, (dx_1, \dots, dx_n)^T \rangle$

$dx = (x - x_0) \quad dy = (y - y_0) \quad = \left\langle \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle$

$\mathrm{grad}(f + g) = \mathrm{grad}\,f + \mathrm{grad}\,g$

$\mathrm{gr}(\alpha \cdot g) = \alpha \cdot \mathrm{grad}(g)$

$\mathrm{grad}(f \cdot g) = g \cdot \mathrm{grad}(f) + f \cdot \mathrm{grad}(g)$

6.4 Tangentialebene im $\mathbb{R}^n$

Sei $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ partiell diff'bar. Die Tangentialebene im $\mathbb{R}^n$ an der Stelle $\vec{x}_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in U$ ist definiert durch die Funktion $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{T(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + f_{x_1}(\vec{x}_0) \cdot (x_1 - x_1^{(0)}) + \dots + f_{x_n}(\vec{x}_0) \cdot (x_n - x_n^{(0)}) = f(\vec{x}_0) + \langle \mathrm{grad}\,f(\vec{x}_0), (\vec{x} - \vec{x}_0) \rangle}$$

1. Ordnung DGL

- $\boxed{y' = ay}$: $y(x) = C\cdot e^{ax}$
- $\boxed{y' = f(x)}$: $y(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + C$
- Separierbar: $\boxed{y' = f(x)\cdot g(y)}$ $\quad \int \frac{1}{g(y)}\,dy = f(x)\,dx$

  $\Leftrightarrow G(y) = F(x) + C$ (nach y auflösen)
- $\boxed{y' = f(ax+by+c)}$

  Substitution: $z = ax+by+c$

  $\Rightarrow z' = a + b\cdot f(z)$
- $\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$

  Substitution: $z = \frac{y}{x}$

  $\Rightarrow z' = \frac{1}{x}\left(f(z) - z\right)$
- Bernoulli-DGL

  $\boxed{y' + f(x)y = g(x)\cdot y^{\alpha} \quad (\alpha \neq 1)}$

  $u = y^{1-\alpha} \Rightarrow u' + (1-\alpha)f(x)u = (1-\alpha)g(x)$

- linear hom. $\boxed{y' + f(x)y = 0}$

  $y = C\cdot e^{-\int f(x)\,dx}$
- $\boxed{y' + f(x)y = g(x)}$

  $y(x) = y_H + y_p = e^{-\int f(x)\,dx}\left(C + \int g(x)\, e^{\int f(x)\,dx}\,dx\right)$
- $\boxed{y' + \overset{\text{konstant}}{a}y = g(x)}$ $\quad a \neq 0$

  y_h: $y' + a\,y = 0 \Leftrightarrow y_H = C\cdot e^{-ax}$

  y_p:

$g(x)$	y_p
$k\,e^{bx}$	$c_0\,e^{bx}$, $b \neq -a$ $c_0\,x\,e^{-ax}$, $b = -a$
$k\cdot\cos(bx)$ $c\cdot\sin(bx)$ $k\sin(bx) + k\cos(bx)$	$c_0\sin(bx) + c_1\cos(bx)$

Exakte DGL

$p(x,y) + q(x,y)\,y' = 0$ oder $p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = 0$

$F(x,y)$: $F_x = p(x,y)$, $F_y = q(x,y)$ $\Rightarrow \operatorname{grad}(F) = \begin{pmatrix} F_x(x,y) \\ F_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(x,y) \\ q(x,y) \end{pmatrix} = \vec{v}(x,y)$

$y(x)$: $F(x, y(x)) = C$ (implizite Darstellung) | ges. Potenzialfunktion von $\vec{v}$ wenn $p_y = q_x$ (Integrabilitätskriterium)

Der Form + Integrabilitätskriterium $\Rightarrow$ exakte DGL

2. Ordnung

- $y'' + y = 0$: $y = c_1\sin(x) + c_2\cos(x)$
- $y'' = f(x)$: $y' = \int f(x)\,dx + c_1$

  $y = \int F(x)\,dx + c_1 x + c_2$
- $y'' = x$: $y = \int \frac{1}{2}x^2 + c_1\,dx$

  $= \frac{1}{6}x^3 + c_1 x + c_2$

$\int x\cdot\sin(x)\,dx = \left[x\cos(x) - \cos(x)\right]$

n. Ordnung

y_H

$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$

$p(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$

Nullstellen	y_H:
$s \in \mathbb{R}$	$e^{sx}, e^{sx}\cdot x, e^{sx}\cdot x^2, \dots$ (x^k vielfachheit)
$s_1 = v + iw$ $s_2 = v - iw$	$e^{vx}\cos(wx), e^{vx}\cdot x\cdot\cos(wx), \dots$ $e^{vx}\sin(wx), e^{vx}\cdot x\cdot\sin(wx), \dots$

C nicht vergessen!

y_p

$g(x) = e^{rx}(\alpha_0, \alpha_1 x, \alpha_2 x^2, \dots, a_m x^m)$

$y_p = x^k\cdot e^{rx}(\beta_0, \beta_1 x, \beta_2 x^2, \dots, \beta_m x^m)$

Falls r k-Fache Nullstelle

$g(x) = e^{rx}(\alpha_0, a_1 x, \dots)\cdot \begin{vmatrix}\cos(tx) \\ \sin(tx)\end{vmatrix}$ oder

Falls r k-Fache Nullstelle

$y_p = x^k\cdot e^{rx}(\beta_0, \beta_1 x, \dots)\cdot\cos(tx)$
$\quad + x^k\cdot e^{rx}(\gamma_0, \gamma_1 x, \dots)\sin(tx)$

Richtungsfeld

Sei $y(x)$ Lösung des AWP: $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$

Steigung von $y(x)$ in x_0: $y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0)$

Anwendungen

- exponentielles Wachstum: $y(t) = ?$

  $y_0 = y(0)$: Anfangspopulation

  $\Rightarrow y'(t) = \underset{\text{Wachstumsfaktor } (>0)}{k}\cdot y(t)$

  $y(t) = y_0\cdot e^{kt}$ (exponentielles Wachstumsgesetz)

  C: $y(0) = y_0 = C\cdot e^0$
- exponentieller Zerfall: Wachstum (s.o.) nur mit $k < 0$
- freier Fall: $y(t)$: Strecke $\quad y'(t)$: Geschwindigkeit $\quad y''(t)$: Beschleunigung

  AWP: $y'' = g$ ← Erdbeschleunigung
- freier Fall (mit Luftwiderstand): Geschwindigkeit im freien Fall

  $v(t) = \frac{m}{\rho}g + \left(v_0 - g\frac{m}{\rho}\right)e^{-\frac{\rho}{m}t}$

Lokale Extremalprobleme ohne NB

2 notwendige Bedingung:

$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$, stationärer Punkt bei (x_0, y_0)

/ $T(x_0, y_0)$ ist parallel zur xy-Ebene

hinreichende Bedingung:

$d(x_0,y_0) < 0$	$d(x_0,y_0) > 0$	$d(x_0,y_0) = 0$
(x_0,y_0) Sattelpunkt	(x_0,y_0) Extremalpunkt	keine allgemeine Lösung möglich

(x_0,y_0) Extremalpunkt:
- $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$, $f_{yy}(x_0,y_0) > 0$ → (x_0,y_0) Minimalpunkt
- $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$, $f_{yy}(x_0,y_0) < 0$ → (x_0,y_0) Maximalpunkt

$d(x_0,y_0) = \det(H(x_0,y_0))$

Hesse Matrix $H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$

n notwendige Bedingung:

$f(x_1, \dots, x_n)$

$\vec{x}_0$ Extremum von $f \Rightarrow \operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = \vec{0}$

$H(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2}(\vec{x}_0) & \cdots & f_{x_1x_n}(\vec{x}_0) \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2}(\vec{x}_0) & & f_{x_2x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2}(\vec{x}_0) & \cdots & f_{x_nx_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$

hinreichende Bedingung:

$H(\vec{x}_0)$ positiv definit $\Leftrightarrow \vec{x}\,H\,\vec{x} > 0 \ \forall \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \Rightarrow$ lokales Minimum in $\vec{x}_0$

$H(\vec{x}_0)$ negativ definit $\Leftrightarrow \vec{x}\,H\,\vec{x} < 0 \ \forall \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \Rightarrow$ lokales Maximum in $\vec{x}_0$

$H(\vec{x}_0)$ indefinit $\Leftrightarrow \vec{x}\,H\,\vec{x} < 0 \ \forall \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \Rightarrow$ Sattelpunkt in $\vec{x}_0$

Lokale Extremwerte mit Nebenbedingung

Lagrange

Gesucht die Extremwerte von $z = f(x,y)$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$

(1) Stelle die Lagrange-Funktion auf:

$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(2) $L_x(x,y) = f_x(x,y) + \lambda g_x(x,y) = 0$
$L_y(x,y) = f_y(x,y) + \lambda g_y(x,y) = 0$
$L_\lambda(x,y) = g(x,y) = 0$
$\Big\}$ (x_0,y_0) optimale Lösung, $\operatorname{grad} L(x_0, y_0, \lambda) = \vec{0}$

Hinreichende Bedingung

$H = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & g_x \\ L_{xy} & L_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{pmatrix}$

$\det H > 0 \Rightarrow$ Maximum
$\det H < 0 \Rightarrow$ Minimum
$\det H = 0 \Rightarrow$ keine Entscheidung möglich

$f(x,y) = x + 2y \quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

$f_x = 1 \quad g_x = 2x$

$f_y = 2 \quad g_y = 2y$

$L_x = 1 + \lambda 2x = 0$
$L_y = 2 + \lambda 2y = 0$
$\Big\}$ $x = \frac{-1}{2\lambda}$, $y = \frac{-1}{\lambda}$

$L_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \overset{x,y}{\Longrightarrow} \left(\frac{-1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\lambda}\right) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{1}{4} + 1\right) = 1$

$\Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{-1}{(\pm\sqrt{5})} \quad y = \frac{-1}{\frac{\pm\sqrt{5}}{2}} = \frac{-2}{\pm\sqrt{5}}$

$s_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \quad s_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-\sqrt{5}}{2}\right)$

2. Eliminationsmethode (Einsetzmethode) Schulmethode

$g(x,y) = 0$

↓ Auflösen nach x oder y (nicht immer möglich oder zu aufwendig)

$y = u(x)$ oder $x = v(y)$

↓ Einsetzen in $f(x,y)$

Optimiere $h(x) = f(x, u(x))$ bzw. $k(y) = f(v(y), y)$