Mathematische Modelle und Methoden – Lösungen

Aufgabe 1

a) T:= Preis Tacker, U:= Preis Umschlag, B:= Preis Büroklammern

$$5T + 10U + 50B = 50$$
$$10T + 5U + 25B = 70$$

b) Preisspanne bzw. exakte Preise:

$$5T + 10U + 50B = 50$$
$$20T + 10U + 50B = 140$$

Zieht man die erste Gleichung von der zweiten Gleichung ab, ergibt sich $15T = 90 \Leftrightarrow T=6$

Einsetzten von T in die zweite Gleichung ergibt:

$$5U + 25B = 70 - 10*6 = 10$$

Preisspannen:

$$U = 0 \Rightarrow B = 10/25 = 0,4$$
$$B = 0 \Rightarrow U = 10/5 = 2$$

Ein Tacker kostet genau 6€, ein Umschlag kostet zwischen 0 und 2€ und eine Büroklammer zwischen 0€ und 40 Cent.

c) Rechnungsbetrag für eine Lieferung mit 5 Tackern und 200 Büroklammern:

$$200B + 5T \Rightarrow 200* 0.4 + 5*6 = 80 + 30 = 110$$

Man muss maximal 110€ zahlen.

d) Ermittlung Preiserhöhung

$5T + 20U + 200B = 80$

- ⇨ $30 + 20U + 200B = 80$
- ⇨ $20U + 200B = 50$
- ⇨ $10U + 100B = 25$

Dies widerspricht keiner der anderen Gleichungen, man kann also nicht entscheiden, ob die Preise erhöht wurden.

Aufgabe 2

$$t_{n+1} = 0.6t_n + 0.4T = 0.6t_n + 8$$

a)

$$t_0 = 100$$
$$t_1 = 0.6 * 100 + 8 = 68$$
$$t_2 = 0.6 * 68 + 8 = 48{,}8$$
$$t_3 = 0.6 * 48{,}8 + 8 = 37{,}28$$
$$t_4 = 0.6 * 37{,}28 + 8 = 30{,}368$$
$$t_5 = 0.6 * 30{,}368 + 8 = 26{,}2208$$

b) Induktionsanfang: Für n=0 gilt: t_0 = 0.6(100-20) + 20 = 100

Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges, aber festes N ∈ $\mathbb{N}^0$ gelte: $t_n = 0.6^n(t_0 - T) + T$

Induktionsbehauptung: Für n+1 gilt dann $t_{n+1} = 0.6^{n+1}(t_0 - T) + T$

Induktionsbeweis:

$$t_{n+1} = 0.6t_n + 0.4T$$
$$= 0.6(0.6^n(t_0 - T) + T) + 0.4T$$
$$= 0.6^{n+1}(t_0 - T) + 0.6T + 0.4T$$
$$= 0.6^{n+1}(t_0 - T) + T$$

c) $t_n < 20{,}5$

⬄ $0.6^n (t_0 – T) + T < 20{,}5$

⬄ $0.6^n (100 – 20) + 20 < 20{,}5$

⬄ $0.6^n * 80 < 0{,}5$

⬄ $0.6^n < 0{,}5/80 = 0{,}00625$ => n = (lg(0,00625)/lg(0,6) ~ 9.935

Nach der 10. Stunde

Aufgabe 3

a) Urne mit 40 unterschiedlichen Kugeln. Ziehen von 8 Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge. Daher: Kombination von 8 aus 40 ohne Wiederholung.
Ergebnis:

$$\binom{40}{8} = \frac{(33 * 34 * \ldots * 40)}{2 * 3 * \ldots * 8} = 76904685$$

b) Ziehe zuerst 2 der unzufriedenen Studierenden und dann 6 der 30 Studierenden wie in a)
Ergebnis:

$$\binom{10}{2} * \binom{30}{6} = 45 * \frac{25 * \ldots * 30}{2 * 3 * \ldots * 6} = 26719875$$

c) Relativer Anteil:

$$\frac{26719875}{76904685}$$

d) wie b):
i)

$$\binom{9}{2} * \binom{31}{6} = 36 * \frac{31 * \ldots * 26}{2 * 3 * \ldots * 6} = 26506116$$

ii)

$$\binom{11}{2} * \binom{29}{6} = 55 * \frac{29 * \ldots * 24}{2 * 3 * \ldots * 6} = 26126100$$

iii) Das Ergebnis aus b) ist das Maximum.

e) u entspricht der wirklichen Anzahl von Unzufriedenen. u ∈ 2, …, 34, da ja 2 sich outen und mindestens 6 zufrieden sind.
Formel: $\binom{u}{2} * \binom{40 - u}{6}$ für 2 <= u <= 34

Aufgabe 4

a) Gesucht: Rechtecks Fläche + Halbkreisfläche:

$$F(a,r) = 2 * a * r + \frac{1}{2} * \pi * r^2$$

b) Gesucht: Rand Unten + Rand Oben + linke Seite + Halbkreis:

$$R(a,r) = a + a + 2 * r + \pi * r = 2 * a + 2 * r + \pi * r$$

c) Nebenbedingung: $200 = 2 * a + 2 * r + \pi * r$ für den Rand.

Eingesetzt in F:

$$F(r) = (200 - 2 * r - \pi * r) * r + \frac{1}{2} * \pi * r^2$$

Notwendige Bedingung:

$$F'(r) = 0 \Leftrightarrow 200 - 4 * r - 2 * \pi * r + \pi * r = 0 \Leftrightarrow r * (-4 - \pi) = -200$$

$$\Rightarrow r = \frac{200}{4 + \pi}\ Extremstelle$$

Hinreichende Bedingung:

$$F''(r) = -4 - \pi < 0\ \forall r$$

$\Rightarrow$ Also liegt bei r ein Maximum vor:

$$a = \frac{200 - 2 * r - \pi * r}{2} = \left(\frac{\left(200 - (2 + \pi) * \frac{200}{4 + \pi}\right)}{2}\right) = \left(\frac{\left(200 - \left(\frac{400 + 200 * \pi}{4 + \pi}\right)\right)}{2}\right)$$

$$= \frac{800 + 200 * \pi - 400 - 200 * \pi}{2 * (4 + \pi)} = \frac{200}{4 + \pi}$$

Aufgabe 5:

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Die Stahlplatte liegt dann auf, wenn D in der ABC-Ebene liegt (3 Punkte legen Ebene fest). Es müsste dann gelten:

$$\mathrm{D} = \mathrm{A} + \alpha(B - A) + \beta(C - A)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = -2 * \alpha + \beta \\ 3 = \alpha + 5 * \beta \\ 1 = \alpha + 3 * \beta \end{cases}$$

Subtraktion der 3. Gleichung von der 2. Gleichung führt zu $\beta = 1$. eingesetzt in die 1. Gleichung erhält man $\alpha = -0.5$, was aber zum Widerspruch zu den beiden anderen Gleichungen führt. Also liegen die 4 Punkte nicht in einer Ebene.

b) Länge des Stahlseils:

$$\|B - A\| + \|C - B\| + \|D - C\| + \|A - D\|$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = 3 + \sqrt{22} + 3 + \sqrt{14} = 14,4321$$

c) Für die Mittelpunkte gilt: $M_1 = \frac{(A+B)}{2}$ usw.:

$$M1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3,5 \end{pmatrix}; M2 = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3,5 \\ 5 \end{pmatrix}; M3 = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}; M4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1,5 \\ 3,5 \end{pmatrix};$$

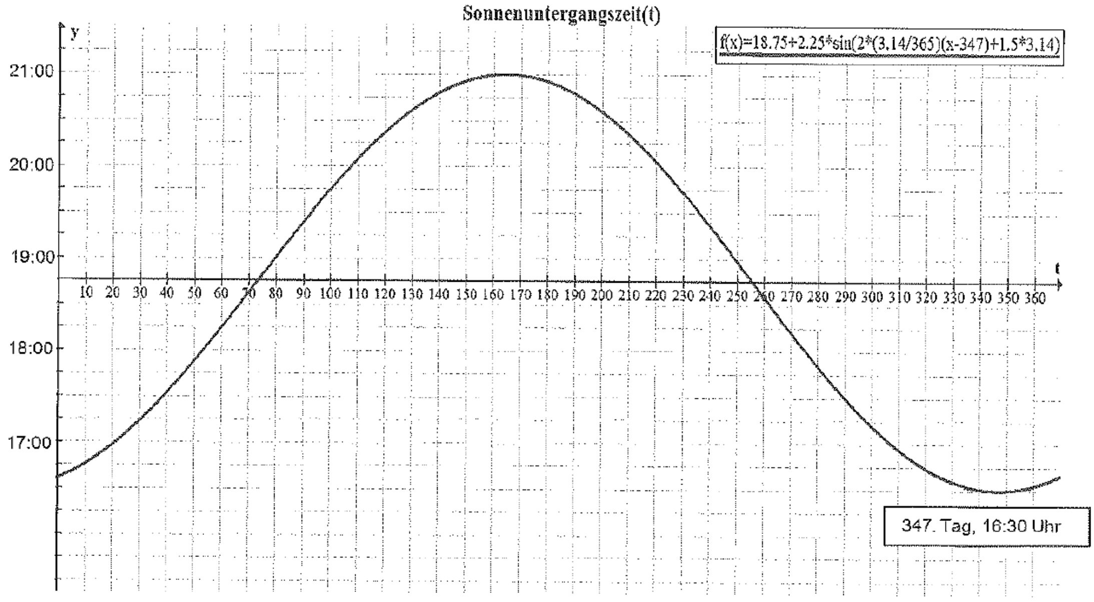
d) Analog zu a) stellt man auf

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1,5 \\ 3,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3,5 \end{pmatrix} + \alpha * \left(\begin{pmatrix} 1,5 \\ 3,5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3,5 \end{pmatrix} \right) + \beta * \left(\begin{pmatrix} 3,5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3,5 \end{pmatrix} \right)$$

Bei Auflösung des Gleichungssystems ergeben sich keine Widersprüche, $\alpha = -1$ und $\beta = 1$ kommt heraus. Die vier Mittelpunkte liegen also in einer Ebene und die entsprechende Stahlplatte kann auf die Mittelpunkte aufgelegt werden.

Aufgabe 6

a) Graphische Darstellung:



b) Ansatz:

$$SU(t) = a + b * \sin(c * (t - 347) + d)$$

dabei ist

- $a = 18{,}75$ mittlere Zeit wegen Verschiebung auf y-Achse
- $b = 2{,}25$ halbe Schwankung von Minimum zum Maximum
- $c = 2\pi/365$ Skalierungsfaktor von 1 bis 365 auf 0 bis 2π
- $d = \frac{3}{2}\pi$ die Verschiebung auf der x-Achse, da Minimum am 347. Tag und $sin(\frac{3}{2}\pi) = -1$ (Minimum)

Insgesamt ergibt sich also:

$$SU(t) = 18{,}75 + 2{,}25 * \sin\left(\left(\frac{2\pi * (t - 347)}{365}\right) + \frac{3}{2}\pi\right), t \in [1; 365]$$

c) $SU(1) = 16{,}62$ entspricht 16:37 Uhr

$SU(182) = 20{,}9$ entspricht 20:54 Uhr

d) $SA(1) = 8{,}74$ entspricht 8:45 Uhr

$SU(1) - SA(1) = 7{,}875$ entspricht 7 Stunden und 52 Minuten

$SA(182) = 4{,}25$ entspricht 4:15 Uhr

$SU(182) - SA(182) = 16{,}65$ entspricht 16 Stunden und 39 Minuten