Daniel Weinholz | IT Center, RWTH Aachen

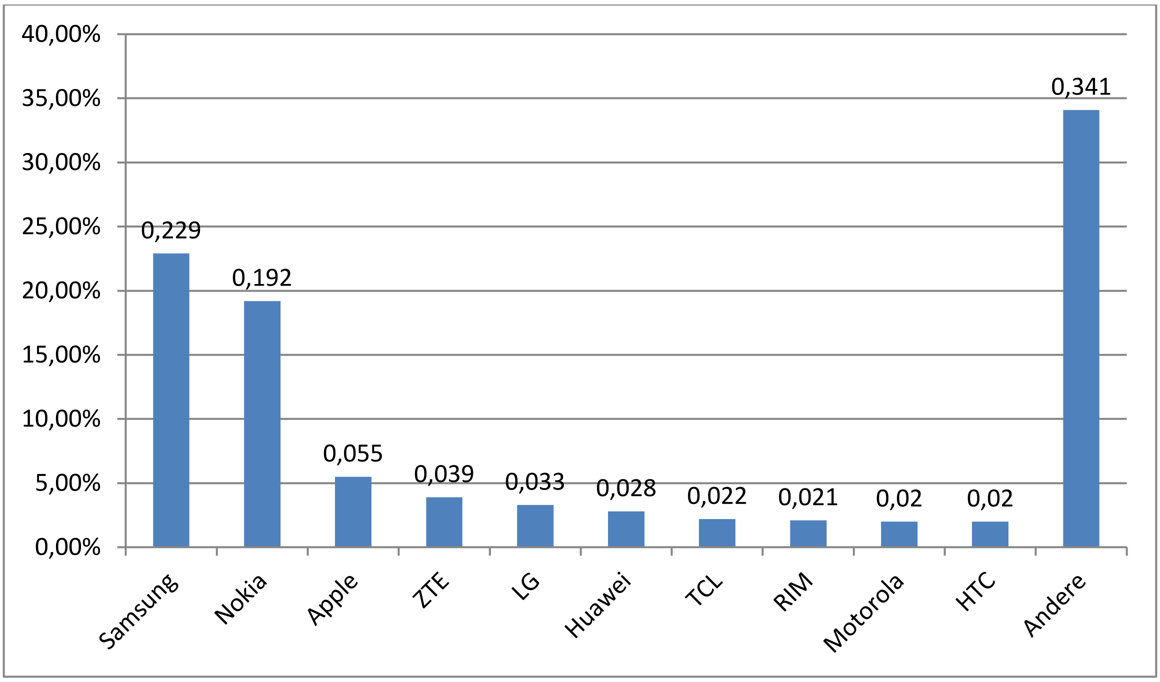
Mathematische Modelle und Methoden

Dauer: 135 Minuten

<u>Hinweis:</u> Von den sechs aufgeführten Aufgaben müssen genau fünf Aufgaben bearbeitet werden. Die nicht-bearbeitete Aufgabe muss (!) von Ihnen explizit angegeben werden! Es wird nicht automatisch die am schlechtesten bearbeitete Aufgabe gestrichen, sondern Aufgabe 6, wenn Sie nichts angeben.

Aufgabe 1

Im Jahr 2012 ergaben sich folgende Marktanteile für den Verkauf von Handys weltweit:



Bei den Personen in den folgenden Aufgaben handelt es sich immer um Personen, die sich 2012 ein neues Handy gekauft haben.

a) Sie befragen vier Personen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der vier Personen ein Handy des Herstellers Nokia gekauft hat?

b) Sie befragen sechs Personen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau drei Handys chinesischer Hersteller (ZTE, Huawei, TCL) darunter sind?

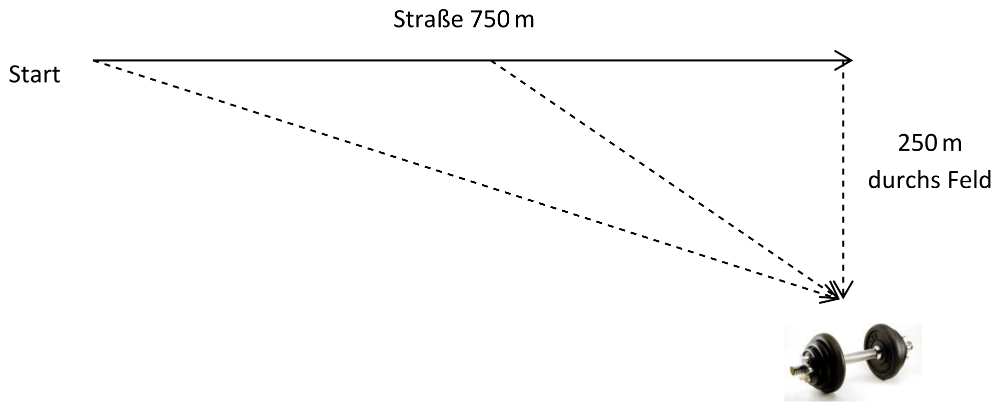
c) Nun befragen Sie fünf Personen. Wie wahrscheinlich ist es, dass höchstens zwei Handys der Marke HTC dabei sind?

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass alle vier Handys von vier befragten Personen von einem südkoreanischen Hersteller (Samsung, LG) stammen?

Aufgabe 2

Wenn Matse Müller ins Fitnessstudio geht, möchte er einen möglichst kurzen Weg haben. Das Fitnessstudio liegt direkt an einem Feldgebiet. Matse Müller hat folgende Wahlmöglichkeiten für seinen Weg:

1. Benutzung der Straße (750 m) und dann 250 m direkt durch das Feld zum Fitnessstudio.
2. Er kann komplett durch das Feld laufen, ist dabei allerdings langsamer, als wenn er die Straße benutzt.
3. Als ‚Mittelding' zwischen Wahl 1 und 2 kann er bis zu einem Punkt x die Straße nutzen und von da aus dann noch durch das Feld laufen (siehe Skizze).

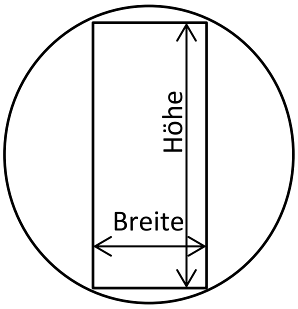


Auf der Straße schafft Matse Müller eine Geschwindigkeit von 6 km/h, auf dem Feld nur 3 km/h. Berechnen Sie

a) wie lang der kürzeste Weg ist (Wahlmöglichkeit 2) und wie lange er dafür benötigt.
b) wie lange er für Wahlmöglichkeit 3 in Abhängigkeit vom Punkt x (Wechsel Straße ins Feld) benötigt.
c) den schnellsten Weg und wie lange er dafür braucht.

Aufgabe 3

Matse Müller ist dabei, sein Haus neu zu gestalten. Aktuell sind in seinem Haus noch zylinderförmige Säulen mit rundem Querschnitt in Verwendung, an denen er sich mittlerweile aber satt gesehen hat. Deshalb sollen diese Säulen nun zu rechteckigen Pfeilern umgearbeitet werden.
Folgende Skizze zeigt den Querschnitt von Säule und Pfeiler:



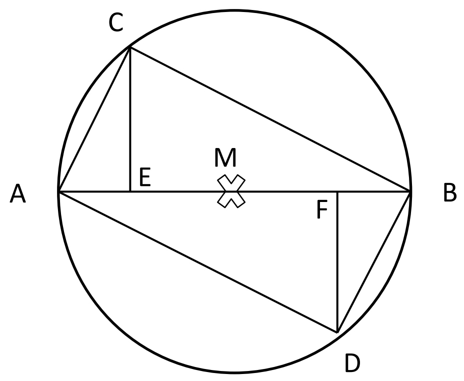
Die Pfeiler besitzen eine Tragfähigkeit, die proportional von Breite, Quadrat der Höhe und einer Proportionalitätskonstanten c (abhängig vom Pfeilermaterial) abhängig ist.

a) Stellen Sie die Funktion, die die Tragfähigkeit abhängig von Breite und Höhe beschreibt, auf.
b) Gehen Sie von einem bekannten Durchmesser der Säule aus und eliminieren Sie dann die Höhe (d.h. stellen Sie die Tragfähigkeit nur in Abhängigkeit der Breite dar).
c) Wenn die Säule einen Durchmesser von $d = 40cm$ hat, berechnen Sie die Breite und Höhe des rechteckigen Pfeilers, der die größtmögliche Tragfähigkeit besitzt.

   Hinweis: Prüfen Sie notwendiges und hinreichendes Kriterium für das Maximum.

d) Begründen Sie, warum ein Zimmermann denselben Balken wie in c) berechnet erhält, wenn er folgende Schritte durchführt: (Skizze siehe nächste Seite)
   - Wähle eine beliebige Linie, die durch den Mittelpunkt M der Querschnittsfläche verläuft und den Kreis in den Punkten A und B schneidet.
   - Teile die Strecke von A nach B in drei identisch lange Teile. Die Stellen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ sind die Punkte E und F.
   - Zeichne von Punkt E eine senkrecht zur Linie AB verlaufende Linie in die eine Richtung und vom Punkt F eine senkrecht zur Linie AB verlaufende Linie in die andere Richtung.
   - Die Schnittpunkte dieser Linien mit dem Kreis sind die Punkte C und D.
   - Durch A, B, C und D wird der gesuchte Balken definiert.

Dieses Vorgehen wurde in der folgenden Skizze einmal eingezeichnet:



Aufgabe 4

Matse Müller ist voller Vorfreude: Direkt neben seinem Fitnessstudio ist noch ein großes rechteckiges Grundstück frei, auf dem nun eine Schwimm- und Erlebniswelt gebaut werden soll. Dieses Grundstück besitzt allerdings ein starkes Hanggefälle. Betrachtet man dieses Grundstück in einem dreidimensionalen, kartesischen Koordinatensystem mit einem Grenzpunkt als Koordinatenursprung, (1. Komponente in West-Ost-Richtung, 2. Komponente in Süd-Nord-Richtung und 3. Komponente für die Höhenangabe) erhält man für die restlichen Grenzpunkte die Koordinaten A (0/60/0), B (-80/60/60) und C (-80/0/60).

a) Zeigen Sie, dass die genannten Grenzpunkte tatsächlich in einer Ebene liegen.
b) Berechnen Sie die Fläche des Grundstücks. Die Koordinaten sind in Metern angegeben.

Nicht dem tatsächlichen Flächeninhalt entsprechend wurde das Grundstück auf einer Karte im Grundbuchamt mit einer Fläche von $4800 m^2$ eingetragen.

c) Erklären Sie, welche sinnvolle Regelung das Grundbuchamt hierbei angewendet hat.

Das Grundstück wird von dem Flugzeug eines Modellfliegers überflogen. Die Flugroute des Flugzeugs lässt sich durch eine Gerade beschreiben

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

d) Berechnen Sie den konstanten Abstand des Flugzeuges zum Grundstück.
e) Zeigen Sie, dass der Abstand aus d) (Falls Sie ihn nicht berechnen konnten, gehen Sie von 20m aus:) mit der minimalen Entfernung des Flugzeuges vom Mittelpunkt des Grundstücks im Modell durch den Punkt M (-40/30/30) übereinstimmt.

Aufgabe 5

Ein Programm benötigt für Berechnungen Werte des natürlichen Logarithmus für positive reelle x. Leider steht Ihnen keine $\ln(x)$ Funktion zur Verfügung. Aus diesem Grund muss eine einfache Approximation verwendet werden.

Es gilt dabei folgende Taylorreihenentwicklung:

$$\ln(1+x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{x^i}{i} \; für \; x \in (-1,1]$$

Diese kann man durch eine Summe leicht annähern:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{x^i}{i}$$

a) Berechnen Sie die Näherungen S_4 und S_5 für $\ln(2)$, die sich für obige Taylorreihenentwicklung ergeben.

b) Begründen Sie, warum der tatsächliche Wert zwischen den beiden Näherungen liegt.

Nachteil an dieser Approximation ist, dass sie sehr langsam konvergiert und nicht für alle positiven, reellen x geeignet ist, sondern nur für $x \leq 2$.

c) Zeigen Sie, dass $\ln(2) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ gilt.

d) Bestimmen Sie mittels der Gleichung aus c) und obiger Partialsumme neue Näherungen für $\ln(2), für \; n = 4, n = 5$.

e) Was folgt aus d) für den Wert von $\ln(2)$?

Eine andere Möglichkeit, den natürlichen Logarithmus $\ln(y), y > 0$ anzunähern, ist die Verwendung einer rekursiven Folge:

$$a_0 = 0, \qquad a_{n+1} = a_n + \frac{2}{2n+1} * \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{2n+1}$$

f) Bestimmen Sie die ersten 3 Werte für $y = 2$.

g) Der exakte Wert lautet 0.69314718; bestimmen Sie mit dieser Info die Genauigkeit von a_3 (Anzahl exakter Dezimalstellen).

Aufgabe 6

Die Firma, in der Matse Müller arbeitet, produziert auch Laptops. Über Jahre hinweg konnte man dabei feststellen, dass der Ausschuss 5% beträgt.

a) Wie lautet die Formel für die Wahrscheinlichkeit, in einer Stichprobe aus 420 Laptops 30 defekte Laptops zu haben?

b) Nennen Sie die hier zugrundeliegende diskrete Verteilung und ihre zugehörigen Parameter.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Anzahl der defekten Laptops in der Stichprobe.

Das exakte Ergebnis aus a) lässt sich mittels eines normalen Taschenrechners nicht mehr bestimmen. Deshalb wird eine Approximation mittels der Normalverteilung verwendet.

d) Überprüfen Sie, ob diese Approximation nach der folgenden Faustformel erlaubt ist:

$$Varianz = n * p * (1 - p) > 9$$

e) Berechnen Sie als approximierten Wert für die Wahrscheinlichkeit aus a) den Wert der Dichte der passenden Normalverteilung.