Analysis

Prof. Dr. rer. nat. Christof Schelthoff
Fachhochschule Aachen - Campus Jülich

27. Juni 2018

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Analysis 1

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Motivation

Zunächst besteht die einfache Frage: Was ist denn eigentlich Analysis? Die Analysis ist eine mathematische Disziplin, die sich mit Grenzprozessen beschäftigt.

Hierzu ein kleines einleitendes Beispiel:
Wir betrachten eine Geldanlage von $a_0 = 1€$ zu einem unrealistischem aber einfach zu berechnendem Zinssatz von k=100%=1. Nach einem Jahr haben wir dann

$$a_1 = 1€ + 1€ \cdot 1 = 2€$$

Im Folgenden verzichten wir nun auf Einheiten und stellen uns weiterhin die Frage, was passiert, wenn wir nun zunächst den Euro ein halbes Jahr anlegen, diesen mit 50 Cent verzinsen lassen und diesen Betrag im zweiten Halbjahr nochmal anlegen. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1,5 \\ a_2 &= 1,5 + 1,5 \cdot \frac{1}{2} = 2,25 \end{aligned}$$

also bereits 25 Cent mehr. Verkleinern wir den Anlagezeitraum weiter auf monatliches Abheben und Einzahlen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + 1 \cdot \frac{1}{12} = 1,08333 \\ &\dots \\ a_{12} &= a_{11} + a_{11} \cdot \frac{1}{12} = 2,61 \end{aligned}$$

Allgemeiner ergibt sich für eine Aufteilung des Jahres in n Abschnitte der Betrag aus dem Wert a_n. Dieser kann bei einem beliebigen Startkapital a_0 berechnet werden gemäß

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-1} \cdot \frac{1}{n} = a_{n-1}(1 + \frac{1}{n}) \\ &= a_{n-2} \cdot (1 + \frac{1}{n}) \cdot (1 + \frac{1}{n}) = a_{n-2} \cdot (1 + \frac{1}{n})^2 \\ &= ... = a_0(1 + \frac{1}{n})^n \end{aligned}$$

Wird dieser Wert nun bei weiterem Erhöhen von n immer weiter wachsen? Wird der Wert beliebig groß? Letzteres wird nicht der Fall sein - der Wert von $(1+\frac{1}{n})^n$ wird stets unter 3 bleiben, auch wenn wir sekündlich ein- und auszahlen.

Das Modell kann verfeinert werden, in dem wir nun statt 100% beliebige Zinssätze k zulassen. Wir erhalten dann analog

$$a_n = a_0(1 + \frac{k}{n})^n$$

Wir werden sehen, dass für wachsendes n der Grenzwert stets existiert und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{k}{n})^n = e^k$$

und insbesondere für $k = 1$

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e = 2,718..$$

1.2 Grundlagen

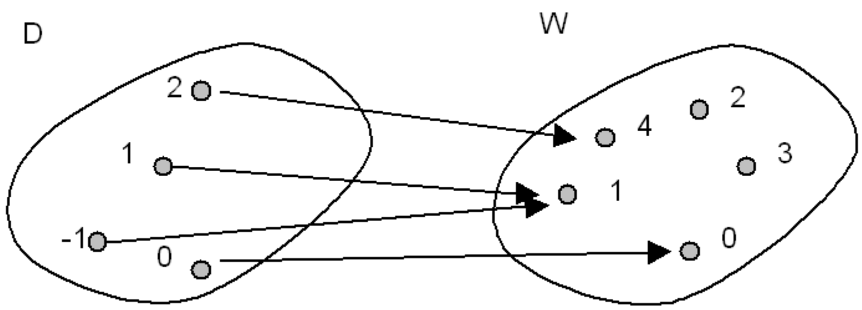
1.2.1 Funktionen

Definition 1 *Eine Abbildung f mit*

$$\begin{array}{cccc} f: & x & \rightarrow & y = f(x) \\ & D & \rightarrow & W \end{array}$$

*heisst **Funktion,** falls $\forall x \in D\ \exists\ y \in W$ mit $y = f(x)$, d.h. zu jedem x aus der Definitionsmenge ein y aus der Wertemenge gehört.*

Die Menge D heisst Definitionsbereich, W Wertebereich.



Funktion

Dies bedeutet auch, dass zu zwei unterschiedlichen Werten der Wertemenge unterschiedliche Werte aus der Definitionsmenge gehört haben, also

$$y_1 \neq y_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2$$

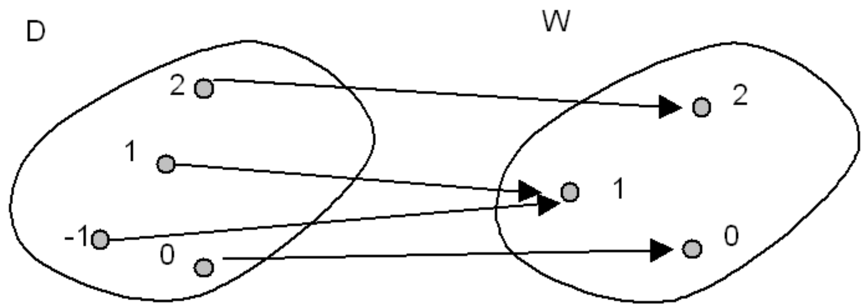
Definition 2 *Die Menge* $G = \{(x, y) | x \in D, y = f(x)\}$ *heisst* ***Graph von f.***

Aus der Wertemenge müssen nicht alle Werte angenommen werden. Betrachten wir nur die tatsächlich angenommenen Werte so definieren wir

Definition 3 $B = \{y = f(x) | x \in D\}$ *heisst das* ***Bild von f****. Kurz:* $B = f(D)$

1.2.2 Eigenschaften von Funktionen

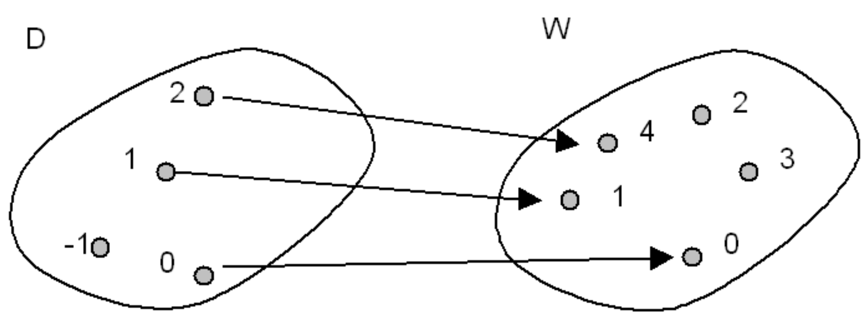
Definition 4 *Eine Funktion* $: D \to W$ *heisst* ***surjektiv (erschöpfend)****, wenn* $\forall y \in W \ \exists x \in D$ *mit* $f(x) = y$



Surjektive Funktion

Anschaulich bedeutet dies, dass alle Funktionswerte angenommen werden.

Definition 5 *Eine Funktion* : $D \to W$ *heisst* ***injektiv (umkehrbar)****, wenn* $\forall x_1, x_2 \in D$ *mit* $x_1 \neq x_2$ *gilt :* $f(x_1) \neq f(x_2)$



Injektive Funktion auf D={0,1,2}

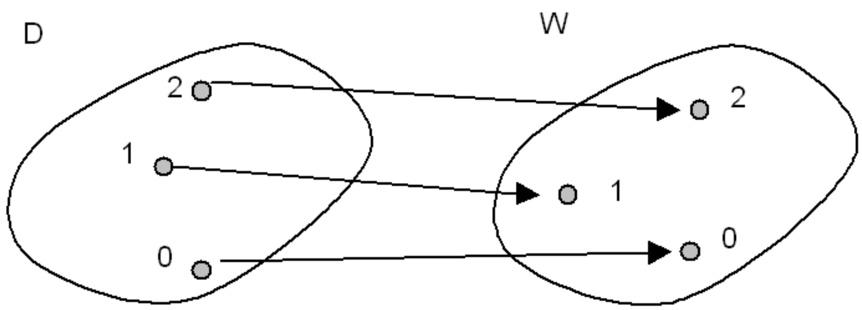
Dies wiederum bedeutet, dass aus Kenntnis der Funktionswerte auf die Werte der Definitionsmenge geschlossen werden kann. Umgekehrt bedeutet dies

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Da f Funktion gilt insbesondere

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & x_2 \\ & \Leftrightarrow & \\ f(x_1) & = & f(x_2) \end{array}$$

Definition 6 *Eine Funktion* $: D \to W$ *heisst* ***bijektiv****, wenn sie surjektiv und injektiv ist.*



Bijektive Funktion

1.2.3 Verkettete Funktionen

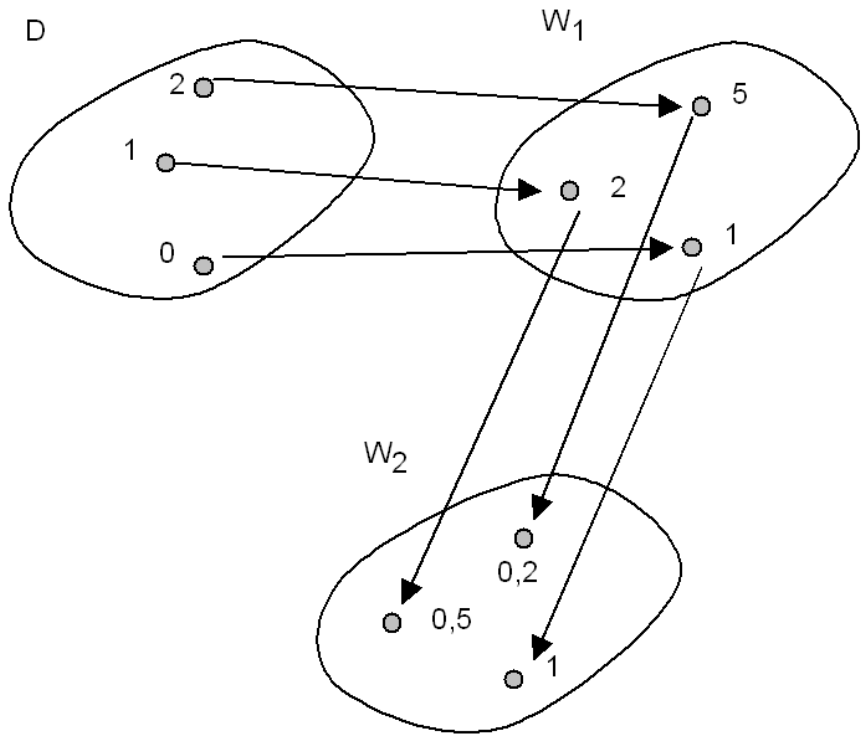
Betrachtet man nun die Wertemenge einer Funktion als Definitionsmenge einer neuen Funktion, so kann auf diesen Werten eine neue Funktion definiert werden:

Definition 7 *Sei* $f : D \to W_1; g : W_1 \to W_2 \Rightarrow$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)$$

heißt ***Verkettung von*** f ***und*** g.

Graph:



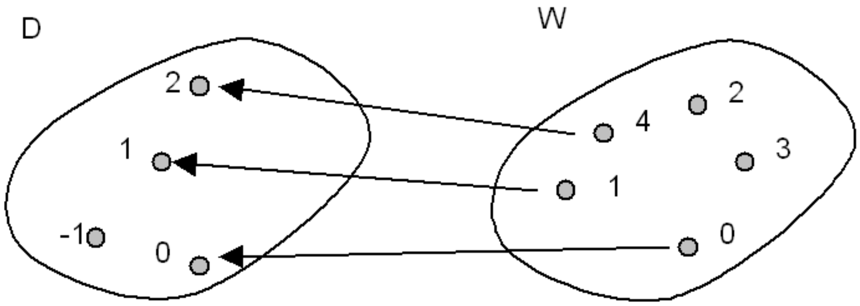
Zu beachten ist, dass diese Verkettung nicht kommutativ ist, also i.A.

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Bei einer umkehrbaren Funktion lassen sich die Rollen von Wertemenge und Definitionsmenge vertauschen und es existiert eine Funktion vom Bild auf das Urbild

Definition 8 *Ist f injektiv, so existiert eine Funktion f^{-1}, von $W' \rightarrow D$ mit $W' = f(D) \subset W$. f^{-1} heißt Umkehrfunktion.*

Also: Sei f injektive Funktion. Dann existiert eine Funktion f^{-1}, die eine Abbildung der angenommenen Bildpunkte auf die ursprüngliche Definitionsmenge darstellt:



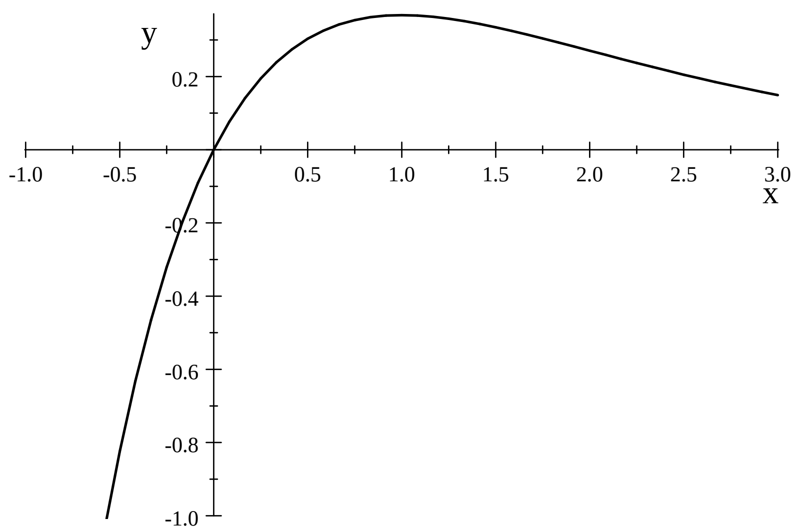
Umkehrfunktion

Für injektive Funktionen gilt

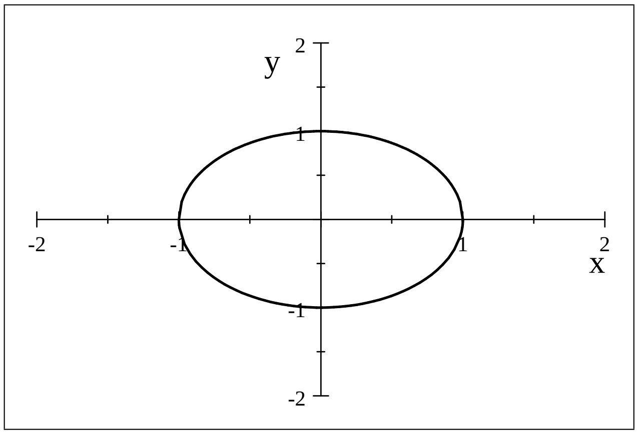
$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \\ &\text{und} \\ f(f^{-1}(y)) &= y \end{aligned}$$

1.2.4 Reelle Funktionen

Wir betrachten nun reelle Funktionen, d.h. $D \subset \mathbb{R}^n, W \subset \mathbb{R}^m$ und als Graph ergibt sich z.B für $n = m = 1$:



dagegen ist der folgende Graph keine Funktion:



Beispiele

1. $$f: \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & b-a \\ Intervall & \to & \mathbb{R} \end{array}$$

$$f: \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \to & \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} \\ \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \end{array}$$

$$f: \begin{array}{ccc} n & \to & a_n \\ \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \end{array}$$

$$f: \begin{array}{ccc} z & \to & z^2 \\ \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \end{array}$$

$$f: \begin{array}{ccc} t & \to & \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \cdot t \\ \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Bei reellen Funktionen der Gestalt $f: \begin{array}{ccc} x & \to & f(x)=y \\ \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \end{array}$ schreiben wir kürzer $y = f(x)$ und wir betrachten zunächst diese Funktionen.

1.2.5 Eigenschaften reeller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Die Funktionswerte sind also reelle Zahlen. Insbesondere dem Wert 0 weisen wir eine besondere Bedeutung zu:

Definition 9 *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktion, $x \in \mathbb{R}$ heisst **Nullstelle**, falls*

$$f(x) = 0$$

Definition 10 *Eine Funktion f heisst* ***nach oben beschränkt****, falls die Wertemenge - das Bild - nach oben beschränkt ist, d.h.*

$$\begin{aligned} \exists c &\in \mathbb{R} \ mit \\ f(x) &\leq c \ \forall x \in D \end{aligned}$$

Eine Funktion f heisst ***nach unten beschränkt****, falls die Wertemenge - das Bild - nach unten beschränkt ist, d.h.*

$$\begin{aligned} \exists c &\in \mathbb{R} \ mit \\ f(x) &\geq c \ \forall x \in D \end{aligned}$$

Definition 11 *f heisst* ***beschränkt****, falls f nach oben und unten beschränkt ist.*

Definition 12 *f heisst* ***gerade****, falls*

$$f(x) = f(-x) \quad \forall x \in D$$

Grafisch bedeutet dies, das die Funktion an der y-Achse gespiegelt werden kann, also achsensymmterisch ist.

Definition 13 *f heisst* ***ungerade****, falls*

$$f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in D$$

Die bedeutet Punktsymmetrie im Ursprung.
Bem.: Ungerade Funktionen erfüllen $f(0) = 0$, denn

$$\begin{aligned} f(0) &= -f(-0) \\ &\Leftrightarrow 2f(0) = 0 \\ &\Leftrightarrow f(0) = 0 \end{aligned}$$

Definition 14 *f heisst* ***periodisch*** *mit Periode T, falls*

$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in D$$

1.2.6 Polynome

Die einfachste Klasse der Funktionen sind die Polynome:

Definition 15 *Eine Funktion*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

mit $a_i, x \in \mathbb{R} \ \ (\mathbb{C}), a_n \neq 0$ heisst ***Polynom oder ganzrationale Funktion vom Grad n***

Satz 16 *Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ bzw $\mathbb{C}$, dann ist $\forall x \in \mathbb{R}$ bzw $\mathbb{C}$ und $n \geq 1$ folgende Zerlegung - die **Division mit Rest** - möglich*

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) \cdot (x - x_0) + r$$

Bew.: Induktion

Induktionsanfang: n=1:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= a_1 x + a_0 \\ &= \underbrace{a_1}_{p_0(x)} (x - x_0) + \underbrace{a_0 + a_1 x_0}_{r} \end{aligned}$$

Ind. Vorr.:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) \cdot (x - x_0) + r$$

Ind. Schluss:

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x) &= a_{n+1} x^{n+1} + ... + a_1 x + a_0 \\ &= x \cdot (a_{n+1} x^n + ... + a_1) + a_0 \\ &= x \cdot (p_{n-1}(x) \cdot (x - x_0) + r) + a_0 \\ &= x \cdot p_{n-1}(x) \cdot (x - x_0) + rx + a_0 \\ &= q_n(x) \cdot (x - x_0) + r \cdot (x - x_0) + r x_0 + a_0 \\ &= (q_n(x) + r) \cdot (x - x_0) + (a + r x_0) \\ &= p_n(x) \cdot (x - x_0) + \tilde{r} \end{aligned}$$

q.e.d.

Folgerung:
1. Dann ist

$$p_n(x_0) = r$$

2. **Abspaltung von Linearfaktoren:** Sei x_0 Nullstelle von $p_n(x)$, dann ist $r = p_n(x_0) = 0$

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) \cdot (x - x_0)$$

3. Fortgesetzt ergibt dies:

Satz 17 *Sind $x_1, ..., x_n$ Nullstellen von $p_n(x)$, so ist*

$$p_n(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_n)$$

*die **Faktorisierung von** $\mathbf{p}_n(\mathbf{x})$*

Bem.:

1. Nicht jedes Polynom hat eine reelle Faktorisierung, z.B.

$$x^2 + 1$$

hat keine reellen Nullstellen.

2. Ist n ungerade, so existiert mind. eine reelle Nullstelle
3. Betrachten wir reelle Koeffizienten, aber als Nullstellen auch komplexe Zahlen, so ist mit $z = a + bi$ auch $\overline{z} = a - bi$ Nullstelle.

Dazu

Lemma 18 *Sei $u, v \in \mathbb{C}$, dann ist*

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = \overline{u \cdot v}$$

Bew. Sei

$$\begin{aligned} u &= a + bi \\ v &= c + di \end{aligned}$$

dann ist

$$\begin{aligned} \bar{u} &= a - bi \\ \overline{v} &= c - di \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} u \cdot v &= (ac - bd) + i \cdot (ad + bc) \\ \overline{u \cdot v} &= (ac - bd) - i \cdot (ad + bc) \end{aligned}$$

Andererseits ist auch

$$\begin{aligned} \overline{u} \cdot \overline{v} &= (a - bi) \cdot (c - di) \\ &= (ac - bd) - i \cdot (ad + bc) \end{aligned}$$

q.e.d

Satz 19 *Sei $z \in \mathbb{C}$,*

$$(\overline{z})^n = (\overline{z^n})$$

Bew.: Induktion: n=1 klar
Induktionsvorr.:

$$(\overline{z})^n = (\overline{z^n})$$

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}(\overline{z})^{n+1} &= \overline{z}^n \cdot \overline{z} \\ &= \overline{z^n} \cdot \overline{z} \\ &= \overline{z^n \cdot z} \\ &= \overline{z^{n+1}}\end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 20 *Sei $z \in \mathbb{C}, p$ Polynom n-ten Grades, $\forall n : a_n \in \mathbb{R}$ mit $p(z) = 0$, dann ist auch*

$$p(\overline{z}) = 0$$

Bew.: Sei z Nullstelle, dann ist

$$p(z) = 0$$

Damit ist

$$\begin{aligned}0 &= \overline{p(z)} = \overline{a_n z^n + ... + a_1 z + a_0} \\ &= \overline{a_n}\overline{z^n} + ... + \overline{a_1}\overline{z} + \overline{a_0} \\ &= a_n \overline{z^n} + ... + a_1 \overline{z} + a_0 \\ &= a_n \overline{z}^n + ... + a_1 \overline{z} + a_0 \\ &= p(\overline{z})\end{aligned}$$

Also ist auch $\overline{z}$ Nullstelle.
Hat ein Polynom in $\mathbb{C}$ somit die Nullstelle

$$x_1 = a + bi$$

so auch

$$x_2 = a - bi$$

und ist somit teilbar durch den rellen Faktor

$$\begin{aligned}(x - x_1) \cdot (x - x_2) &= (x - (a + bi)) \cdot (x - (a - bi)) \\ &= ((x - a) - bi)) \cdot ((x - a) + bi) \\ &= (x - a)^2 + b^2\end{aligned}$$

Bsp: Es gilt

$$i^4 = 1$$

Damit ist $x_1 = i$ Nullstelle von

$$x^4 - 1 = 0$$

Damit aber auch $x_2 = -i$

Und es ist

$$\frac{(x^4-1)}{(x-i)(x+i)} = \frac{x^4-1}{x^2+1} = x^2-1$$

bzw

$$\begin{aligned} x^4-1 &= = (x-i)(x+i)(x^2-1) \\ &= (x-i)(x+i)(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

Bsp 2: Gesucht ist ein Polynom möglichst kleinen Grades mit reellen Koeffizienten und der Nullstelle $x_1 = 1+i$

Wir wissen, dass auch

$$x_2 = 1 - i$$

Nullstelle ist und das gesucht Polynom durch

$$(x-(1+i))(x-(1-i)) = (x-1)^2+1$$

teilbar sein muss. Dies ist aber bereits ein solches Polynom. Ausmultipliziert ergibt sich

$$(x-1)^2+1 = x^2-2x+2$$

Allgemeiner gilt (ohne Beweis):

Satz 21 ***(Fundamentalsatz der Algebra)*** *Jedes Polynom n-ten Grades* ($n \in \mathbb{N}$) *mit reellen Koeffizienten hat genau n komplexe Nullstellen.*

Dies bedeutet:
1. Hat ein Polynom n-ten Grades n+1 oder mehr Nullstellen, dann ist

$$P(x) \equiv 0$$

2. Stimmen zwei Polynome $p(x)$ und $q(x)$ maximal n-ten Grades in mehr als n Punkten überein, so sind sie gleich.

Bew.:
Seien $x_1, ..., x_{n+1}$ Punkte mit $p(x_i) = q(x_i)$, so ist für das Polynom (maximal n-ten Grades) $r(x) = p(x) - q(x)$

$$\begin{aligned} 0 &= p(x_i) - q(x_i) \quad i = 1, .., n+1 \\ &\Rightarrow r(x) \equiv 0 \\ &\Rightarrow p(x) - q(x) \equiv 0 \\ &\Rightarrow p(x) \equiv q(x) \end{aligned}$$

q.e.d.

1.2.7 Gebrochen rationale Funktionen

Definition 22 *Seien $p_m(x)$ und $p_n(x)$ Polynome vom Grad m bzw n, dann heisst*

$$f(x) = \frac{p_m(x)}{p_n(x)}$$

gebrochen rationale Funktion*. Im Fall m<n heisst die Funktion* ***echt gebrochen rational****, sonst* ***unecht gebrochen rational****.*

Bsp.:

$$\frac{x^2+1}{x^3-1} \text{ ist echt gebrochen rational}$$
$$\frac{x^3+1}{x^3-1} \text{ ist unecht gebrochen rational}$$

Dabei lassen sich unecht gebrochen rationale Funktionen stets darstellen als Summe eines Polynoms (ganzrationale Funktion) und einer echt gebrochen rationalen Funktion:

Beispiel:

$$\frac{x^2-2x+1}{x-3} = \left(x^2-2x+1\right) : (x-3) \tag{1.1}$$

$$\begin{array}{cccccc} x^2-2x+1 & : & x-3 & = & x & +1 \\ -(x^2-3x) & & & & & \\ \hline x+1 & & & & & \\ -(x-3) & & & & & \\ \hline 4 & & & & & \end{array}$$

Also:

$$x^2-2x+1 : x-3 = x+1+\frac{4}{x-3}$$

bzw. $x^2-2x+1 = (x+1)\cdot(x-3)+4$

1.2.8 Gleichungen und Ungleichungen

Für das bessere Verständnis sollen hier noch einmal kurz ein paar wichtige Gleichungen und Ungleichungen festgehalten werden.

Definition 23 *Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann heisst*

$$|x| = \begin{cases} x \text{ für } x \geq 0 \\ -x \text{ für } x < 0 \end{cases}$$

der Betrag von x.

Lemma 24 *Es gilt* $\forall x \in \mathbb{R}$

1. $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2. $x \leq |x| \wedge -x \leq |x|$
3. $|x| = |-x|$

Bew.:
1.
$\Leftarrow$:

$$x = 0 \Longrightarrow |x| = x = 0$$

$\Longrightarrow$: Indirekt:
Ann.: Wäre $x > 0$, so wäre

$$|x| = x > 0$$

Wäre $x < 0$, so wäre

$$|x| = -x > 0$$

Somit muss gelten

$$x = 0$$

2.

Im Fall $x \geq 0$ ist

$$x = |x|$$

Damit ergibt sich für $x \geq 0$

$$\begin{array}{rcl} x & = & |x| \Longrightarrow x \leq |x| \\ & & \wedge \\ -x & \leq & 0 \leq |x| \end{array}$$

und damit die Behauptung.
Im Fall $x < 0$ ist

$$\begin{array}{rcl} -x & = & |x| \Longrightarrow -x \leq |x| \\ & & \wedge \\ x & \leq & 0 \leq |x| \end{array}$$

und damit ebenfalls die Behauptung gültig.
3. Mit 2. gilt sogar

$$|x| = \max(x, -x)$$

Damit gilt auch

$$\begin{array}{rcl} |x| & = & \max(x, -x) \\ |-x| & = & \max(-x, +x) \end{array}$$

Satz 25 *Seien* $x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

1.

$$|x - y| = |y - x|$$

2.

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \text{ für } y \neq 0$$

3.

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

(Dreiecksungleichung)

$$|x - y| \leq |x| + |y|$$

4.

$$|x - y| \geq |x| - |y|$$

$$|x + y| \geq ||x| - |y||$$

5. a)

$$(1 + x)^n > 1 + nx$$

für $x \neq 0, x > -1, n \geq 2$ *(Bernoulli-Ungleichung)*

b)

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

für $x \geq -1$ *(abgeschwächt)*

Bew.:

1. $|x - y| = |-(x - y)| = |y - x|$
2. durch Fallunterscheidungen trivial zu zeigen:

x	y	$\lvert x\rvert$	$\lvert y\rvert$	$\lvert x\rvert \cdot \lvert y\rvert$	$\lvert x \cdot y\rvert$
≥ 0	≥ 0	x	y	xy	xy
≥ 0	< 0	x	$-y$	$-xy$	$-xy$
< 0	≥ 0	$-x$	y	$-xy$	$-xy$
< 0	< 0	$-x$	$-y$	xy	xy

x	y	$\lvert x\rvert$	$\lvert y\rvert$	$\frac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert}$	$\left\lvert\frac{x}{y}\right\rvert$
≥ 0	> 0	x	y	$\frac{x}{y}$	$\frac{x}{y}$
≥ 0	< 0	x	$-y$	$-\frac{x}{y}$	$-\frac{x}{y}$
< 0	> 0	$-x$	y	$-\frac{x}{y}$	$-\frac{x}{y}$
< 0	< 0	$-x$	$-y$	$\frac{x}{y}$	$\frac{x}{y}$

3. Für $x + y \geq 0$ gilt mit vorigem Lemma

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$$

Für $x + y < 0$ ebenso:

$$\begin{aligned} |x + y| &= -(x + y) \\ &= -x + (-y) \\ &\leq |x| + |y| \end{aligned}$$

somit ergibt sich dann auch

$$\begin{aligned} |x - y| &= |x + (-y)| \\ &\leq |x| + |-y| \\ &= |x| + |y| \end{aligned}$$

4. Es ist

$$\begin{aligned} |x| &= |x + y - y| \\ &\leq |x + y| + |y| \end{aligned}$$

und damit

$$|x| - |y| \leq |x + y|$$

Analog ergibt sich durch Vertauschen von x und y

$$|y| - |x| \leq |x + y|$$

Damit ist wiederum

$$||x| - |y|| = \max(|x| - |y|\,, |y| - |x|) \leq |x + y|$$

Analog ist:

$$\begin{aligned} ||x| - |y|| &= \max(|x| - |y|\,, |y| - |x|) \\ &= \max(|x| - |-y|\,, |-y| - |x|) \leq |x + (-y)| \\ &= |x - y| \end{aligned}$$

5. a) per Induktion:

Induktionsanfang: Wg.$x \neq 0$ ist

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$$

Induktionsvorr.: Es sei

$$(1+x)^n > 1 + nx$$

Induktionsschluss

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \\ &> (1+nx) \cdot (1+x) \\ &= 1 + nx + x + nx^2 \\ &> 1 + (n+1)x \text{ qed.}\end{aligned}$$

Teil b geht genau so, in dem man in der Induktionsvorr. und -schluss das = zulässt.

q.e.d.

Lemma 26 *Für* $n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{R}^+$ *gilt:*

$$\begin{aligned}0 &\leq x \leq y \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x^n \leq y^n\end{aligned}$$

Bew.:

$$x^n = x \cdot x \cdot ... \cdot x \leq y \cdot y \cdot ... \cdot y = y^n$$

Durch Vertauschung von x und y erhält man für $0 \leq y \leq x$

$$x^n \geq y^n$$

Somit ist äquivalent:

$$0 \leq x \leq y \Longleftrightarrow 0 \leq x^n \leq y^n$$

Damit ist für $\sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{y}$

$$\begin{aligned}0 &\leq \sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{y} \\ &\Longleftrightarrow 0 \leq \sqrt[n]{x^n} = x \leq \sqrt[n]{y^n} = y\end{aligned}$$

Damit gilt weiterhin

$$\begin{aligned}0 &\leq x \leq y \\ &\Longleftrightarrow 0 \leq x^p \leq y^p \\ &\Longleftrightarrow 0 \leq x^{p/q} \leq y^{p/q} \\ &\Longleftrightarrow 0 \leq x^r \leq y^r\end{aligned}$$

für beliebiges $r \in \mathbb{Q}^+$ und da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, sogar für $r \in \mathbb{R}^+$

1.3 Komplexe Analysis

1.3.1 Rechenregeln für komplexe Zahlen in Polarkoordinaten

Multiplikation: Sei $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$. Dann ist

$$\begin{aligned} z &= z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_2} \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Also: Die Multiplikation von (r_1, φ_1) und (r_2, φ_2) ergibt $(r_1 r_2, \varphi_1 + \varphi_2)$

Entsprechend erhält man bei der Division

$$z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2 \cdot e^{i\varphi_2}}{r_1 \cdot e^{i\varphi_1}} = \frac{r_2}{r_1} e^{i(\varphi_2-\varphi_1)} \tag{1.3}$$

Also: $(\frac{r_2}{r_1}, \varphi_2 - \varphi_1)$

Merke: Man mulitpliziert (dividiert) zwei komplexe Zahlen in Polarkoordinaten, in dem man die Radien multipliziert (dividiert) und die Winkel addiert (subtrahiert).

Bem. Ggf muss der Winkel (wenn er negativ oder größer als 2π wird) wieder auf $0 \leq \varphi < 2\pi$ reduziert werden.

Bem.:

1. Zwei Zahlen in Polarkoordinaten sind "gleich", wenn ihre Radien gleich sind, und sich ihr Winkel um ein Vielfaches von 2π unterscheidet.
2. Der Betrag einer komplexen Zahl in Polarkoordinaten ist gleich dem Radius

$$|z| = r$$

3. Die konjugiert komplexe Zahl zu $z = (r, \varphi)$ ist $\bar{z} = (r, -\varphi)$ bzw. $\bar{z} = (r, 2\pi - \varphi)$
4. Potenzen sind recht leicht zu berechnen - zu $z = r \cdot e^{i\varphi}$ ist

$$\begin{aligned} z^n &= (r \cdot e^{i\varphi})^n = r^n \cdot (e^{i\varphi})^n \\ &= r^n \cdot e^{in\varphi} \end{aligned} \tag{1.4}$$

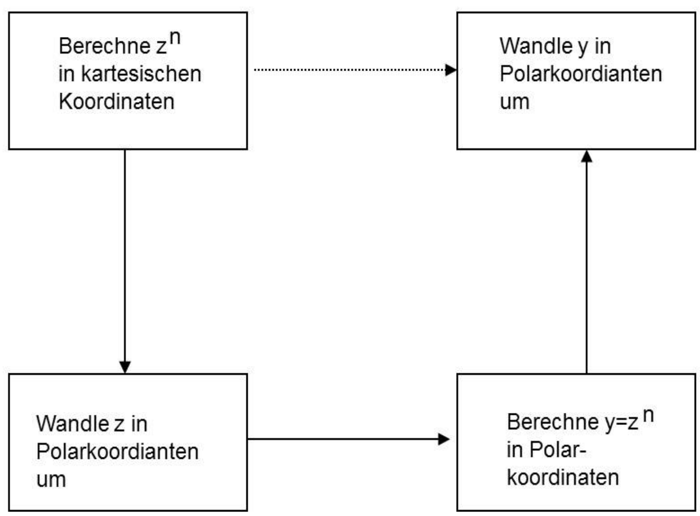
Dies führt zu einem Verfahren, um hohe Potenzen komplexer Zahlen in kartesischen Koordinaten zu berechnen:

Beispiel: Berechne $(1+i)^{100}$ (zu $z = 1+i$ den Wert z^{100})

Schritt 1: Umrechnung von z in Polarkoordinaten: $z = \sqrt{2}e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$
Schritt 2: z^{100} in Polarkoordinaten: $z^{100} = 2^{50} \cdot e^{i\cdot 25\pi} = 2^{50} \cdot e^{i\cdot\pi}$

Schritt 3: Rücktransformation in Polarkoordinaten
$a = 2^{50}\cos(\pi) = -2^{50}$
$b = 2^{50}\sin(\pi) = 0$

Und damit $z^{100} = -2^{50}$



1.3.2 Eigenschaften von $z = e^{i\varphi}$

Die Zahlen $z = e^{i\varphi}$ beschreiben alle Zahlen, welche vom Ursprung den Abstand 1 haben. Dies ist gerade der Einheitskreis. Beliebige Zahlen $z = re^{i\varphi}$ beschreiben analog einen Kreis mit Radius r.

1.3.3 Radizieren (Wurzel ziehen) von komplexen Zahlen

Auch hier wird der Einfachheit halber nur auf das Radizieren von komplexen Zahlen in Polarkoordinaten eingegangen. Liegen die Zahlen in kartesischen Koordinaten vor, so müssen diese erst in Polarkoordinaten umgewandelt werden und schliesslich rücktransformiert werden.

Motivation: Welche (komplexe) Zahlen erfüllen $z^4 = 1$ bzw. $z^4 - 1 = 0$?

Wir erraten vermutlich schnell eine Lösung $z_0 = 1$, etwas langsamer eine Lösung $z_1 = -1$. Gibt es weitere Lösungen? Wie kann man diese berechnen statt zu erraten?

Gesucht ist eine komplexe Zahl z,welche die Gleichung

$$z^n = \hat{z} = \hat{r} \cdot e^{i\hat{\varphi}} \tag{1.5}$$

erfüllt.

Man beachte, dass die rechte Seite, also $\hat{r}$ und $\hat{\varphi}$ sowie n gegeben sind und Lösungen, d.h. verschiedene Zahlen $z = (r, \varphi)$, die die obige Gleichung lösen, gesucht sind.

Wir bilden zunächst zu einer beliebigen Zahl z die Potenz z^n und erhalten

$$z^n = r^n e^{in\varphi} \stackrel{!}{=} \hat{r} \cdot e^{i\hat{\varphi}} \tag{1.6}$$

Wir haben oben gesehen, dass komplexe Zahlen gleich sind, wenn die Radien gleich sind und die Winkel sich nur um ein Vielfaches von 2π unterscheiden, also

1. Für den Radius

$$r^n = \hat{r} \Longrightarrow r = \sqrt[n]{\hat{r}}$$

Dieses bedeutet, dass alle Lösungen, den gleichen Radius $r = \sqrt[n]{\hat{r}}$ haben müssen.

2. Für die Winkel müssen gelten

$$\begin{aligned} n\varphi &= \hat{\varphi} + k \cdot 2\pi \qquad k \in \mathbb{Z} \\ \varphi = \varphi_k &= \frac{\hat{\varphi} + k \cdot 2\pi}{n} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Es gibt also mehrere Winkel, die hier zu einem Ergebnis führen. Es kommen jedoch in Wahrheit nur für die Werte von $k = 0, 1, ..., n-1$ insgesamt n verschiedene Lösungen heraus. Danach wiederholen sich die Winkel wieder ($k = n$ liefert $\varphi_n = \dfrac{\hat{\varphi} + n \cdot 2\pi}{n} = \dfrac{\hat{\varphi}}{n} + 2\pi \hat{=} \dfrac{\hat{\varphi}}{n} = \varphi_0$

Zusammenfassend ergibt sich zur Lösung von $z^n = \hat{r} \cdot e^{i\hat{\varphi}} = \hat{z}$:

0. Ist $\hat{z}$ nicht in Polarkoordinaten gegeben, so ist zunächst die Polarform herzustellen.

1. Berechne $\boxed{r = r_k = \sqrt[n]{\hat{r}}}$ Dieser Radius ist Radius aller Lösungen

2. Berechne für $k = 0, 1, ..., n-1$

$$\boxed{\varphi_k = \frac{\hat{\varphi} + k \cdot 2\pi}{n} = \frac{\hat{\varphi}}{n} + \frac{k}{n} \cdot 2\pi} \tag{1.8}$$

3. Die Lösungen sind dann die n Zahlen $z_k = (r_k, \varphi_k) = r_k \cdot e^{i\varphi_k}$ für $k = 0, 1, ..., n-1$

Beispiele:

A) $z^4 = 1 \quad (n = 4)$, d.h. es gibt 4 Lösungen

0. Rechte Seite in Polarkoordinaten: $\hat{z} = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ (nachrechnen oder "sehen"). Damit $\hat{r} = 1, \hat{\varphi} = 0$

1. $r = r_k = \sqrt[4]{1} = 1$

2. Berechne für $k = 0, 1, 2, 3$

$$\varphi_k = \frac{0 + k \cdot 2\pi}{4} = \frac{k}{4} \cdot 2\pi \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= 0 \\
\varphi_1 &= \frac{\pi}{2} \\
\varphi_2 &= \pi \\
\varphi_3 &= \frac{3}{2}\pi
\end{aligned}$$

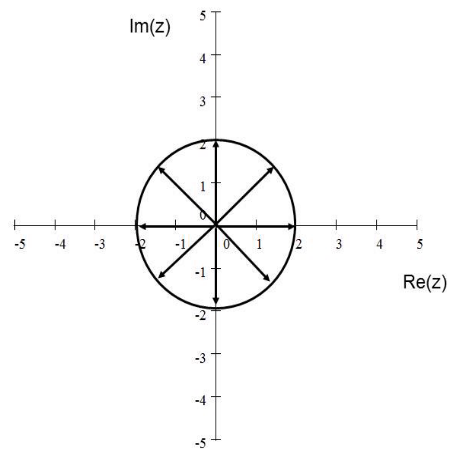
3. Die Lösungen sind

$$\begin{aligned}
z_0 &= 1 \cdot e^{i \cdot 0} = 1 && (1, 0) \\
z_1 &= 1 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} = i && (1, \frac{\pi}{2}) \\
z_2 &= 1 \cdot e^{i \cdot \pi} = -1 && (1, \pi) \\
z_3 &= 1 \cdot e^{i \cdot \frac{3}{2}\pi} = -i && (1, \frac{3}{2}\pi)
\end{aligned}$$

Kontrolle: (Erfüllen diese Zahlen $z^4 = 1$?)

1. $z_0^4 = 1^4 = 1$ 2. $z_1^4 = i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$
3. $z_2^4 = (-1)^4 = 1$ 4. $z_3^4 = (-i)^4 = (-i)^2 \cdot (-i)^2 = 1$

Bem.: Alle Lösungen bilden ein gleichmässiges n-Eck innerhalb eines Kreises, z.B. für $z^8 = 256$:



1.3.4 Anwendung: Faktorisierung von Polynomen mit komplexen Koeffizienten

Polynome mit reellen Koeffizienten können - wie oben gesehen - zwar komplexe Nullstellen haben, jedoch tauchen diese immer paarweise mit der konjugiert komplexen Nullstelle auf. Hat das Polynom komplexe Koeffizienten, so können auch einzelne komplexe Nullstellen auftauchen. Im Falle einer quadratischen Gleichung kann jedoch das Radizieren verwendet werden, um diese Nullstellen

zu bestimmen:

Bsp.: Es sind alle Nullstellen des komplexen Polynoms

$$x^2 + 2ix + 15 - 16i$$

zu bestimmen. Hier gilt mit der üblichen quadratischen Ergänzung

$$\begin{aligned} x^2 + 2ix + 15 - 16i &= 0 \\ x^2 + 2ix + i^2 - i^2 + 15 - 16i &= 0 \\ (x+i)^2 &= -16 + 16i \\ z^2 &= 16\sqrt{2}e^{i\cdot\frac{3}{4}\pi} \end{aligned}$$

Dies liefert

$$\begin{aligned} z_1 &= 4\sqrt[4]{2}e^{i\cdot\frac{3}{8}\pi} = 4\sqrt[4]{2}\cos(\frac{3}{8}\pi) + i\cdot 4\sqrt[4]{2}\sin(\frac{3}{8}\pi) \\ z_2 &= 4\sqrt[4]{2}e^{i\cdot\frac{11}{8}\pi} = 4\sqrt[4]{2}\cos(\frac{11}{8}\pi) + i\cdot 4\sqrt[4]{2}\sin(\frac{11}{8}\pi) \end{aligned}$$

und wegen $z = x + i$ bzw $x = z - i$

$$\begin{aligned}
x_1 &= 4\sqrt[4]{2}\cos(\frac{3}{8}\pi) + i \cdot 4\sqrt[4]{2}\sin(\frac{3}{8}\pi) - i \\
&= 4\sqrt[4]{2}\cos(\frac{3}{8}\pi) + i \cdot \left(4\sqrt[4]{2}\sin(\frac{3}{8}\pi) - 1\right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
x_2 &= 4\sqrt[4]{2}\cos(\frac{11}{8}\pi) + i \cdot 4\sqrt[4]{2}\sin(\frac{11}{8}\pi) - i \\
&= 4\sqrt[4]{2}\cos(\frac{11}{8}\pi) + i \cdot \left(4\sqrt[4]{2}\sin(\frac{11}{8}\pi) - 1\right)
\end{aligned}$$

also die Faktorisierung

$$x^2 + 2ix + 15 - 16i = (x - x_1)(x - x_2)$$

Bem.: Ggf müssen reelle Koeffizienten vorher abgespalten werden. So hat das Polynom

$$x^6 + 2ix^5 + (15 - 16i)x^4$$

die (4-fache) Nullstelle $x = 0$ und die zuvor ermittelten Nullstellen.

Kapitel 2

Folgen und Reihen

Suchen wir uns Zuflucht bei den Reihen !
L. Euler

2.1 Grundlagen

Definition 27 *Eine reelle Folge ist eine Funktion*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ & \quad \textit{oder} \\ f &: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

Notation: $f(n) = a_n$,

eine komplexe Folge eine Funktion

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{N} \to \mathbb{C} \\ & \quad \textit{oder} \\ f &: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C} \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet a_n das n-te Folgenglied, $< a_n >$ die gesamte Folge.

Beispiele von Folgen

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
$a_n = n^2$	1	4	9	16
$a_n = (-1)^n$	-1	1	-1	1
$a_n = \frac{1}{n}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
$a_n = i^n + 1$	$i+1$	0	$-i+1$	2

2.1.1 Rekursionen

Im folgenden werden weiterhin Beschreibungen von Folgengliedern eine Rolle spielen, bei der ein Folgenglied sich aus dem vorhergehenden ausrechnen lässt. Bei der Modellbildung ist dann der aktuelle Zustand aus dem vorhergehenden berechenbar. Dies sind die sog. Rekursionen. Die beiden wichtigsten sind:

1. Die arithmetische Folge

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + c}$$

Hier wächst also der Folgenwert vom Zeitpunkt $n-1$ zum Zeitpunkt n stets um einen konstanten Wert c. Ein Beispiel hierfür wäre das folgende: Sie haben zu Beginn des Jahres einen Kilometerstand von 15000 km und fahren täglich 50 km nach Jülich. Der Tachostand erhöht sich damit täglich um $c = 50$. Das rekursive Bildungsgesetz lautet dann

$$a_n = a_{n-1} + 50$$

Wir sehen, dass wir also die Berechnung von a_{25} zurückführen können auf a_{24}, dies wiederum auf a_{23} usw. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} a_{25} &= a_{24} + 50 \\ &= (a_{23} + 50) + 50 \\ &= ... \\ &= (a_0 + 50) + ... + 50 \\ &= 50 \cdot 25 + a_0 \end{aligned}$$

bzw. allgemeiner

$$a_n = 50 \cdot n + a_0$$

Zur expliziten Berechnung brauchen wir also noch (erwartungsgemäß) den Starttachometerstand $a_{0.}$

Allgemein ist damit das Bildungsgesetz der arithmetischen Folge

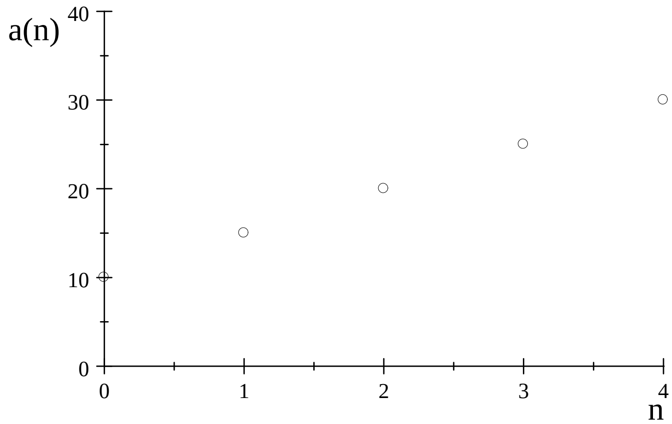
$$\boxed{a_n = c \cdot n + a_0}$$

Bem.: Die arithmetische Folge wird also beschrieben durch einen festen Zuwachs c pro Zeiteinheit (von $n-1$ zu n), welches analog zu

$$\triangle a := a_n - a_{n-1} = c = const.$$

ist.

Zeichnerisch ergibt sich ein Verlauf wie im Folgenden für $a_0 = 10$ und c=5



2. Die geometrische Folge

$$\boxed{a_n = a_{n-1} \cdot c}$$

Hier gilt, dass der Zuwachs zum nächsten Zeitschritt vom Bestand zu diesem Zeitpunkt abhängt.Ein typisches Beispiel ist hierbei das Wachstum einer Bakterienkultur oder einer Geldanlage. Z.B. gilt für ein Sparbuch, welches mit 5% verzinst wird, dass der Bestand im n-ten Jahr sich ergibt gemäß

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} \cdot 1,05 \\ &= a_{n-2} \cdot 1,05 \cdot 1,05 \\ &= ... = a_0 \cdot 1,05^n \end{aligned}$$

Für a_n erhalten wir somit

$$a_n = a_0 \cdot (1,05)^n$$

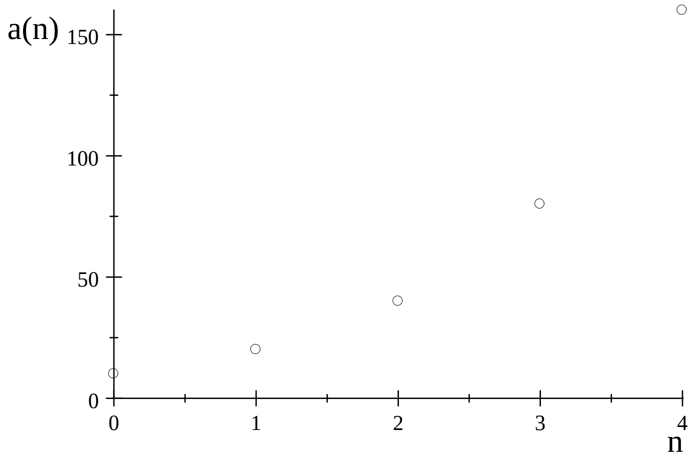
womit der Bestand wiederum vom Startbestand a_0 abhängt.
Für die geometrische Folge gilt allgemein

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = c = const.$$

und das Bildungsgesetz

$$\boxed{a_n = a_0 \cdot c^n}$$

Zeichnerisch ergibt sich ein Verlauf wie im Folgenden für $a_0 = 10$ und c=2



Bsp.: 1000 mol einer Bakterienkultur wachsen täglich um 2%. Wir interessieren uns für den Bestand nach 10 Tagen: Es gilt die Rekursion $a_{n+1} = a_n \cdot 1,02$ und damit

$$a_{10} = 1000 \cdot 1,02^{10} = 1219 \text{ mol}$$

Kontrolle: Sie haben ein Blatt Papier der Stärke 0,01 cm und falten dieses 20 mal jeweils in der Mitte (wir gehen davon aus, technisch ginge dieses). Wie dick wäre dann das Blatt Papier?

Lösung: $a_{20} = 0,01 \cdot 2^{20} = 10486\ cm$ also ca. 105 m ! Beim 10 maligen Falten wäre es immerhin $0,01 \cdot 2^{10} = 10$ cm hoch.

Bem.: Um zu entscheiden, ob eine Population einer arithmetischen oder geometrischen Folge gehorcht, müssen Sie folgendes tun:

Ist die Differenz zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder konstant,
so ist dies eine arithmetische Folge

Ist der Quotient zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder konstant,
so ist dies eine geometrische Folge

Ist beides nicht der Fall, so ist die Folge weder arithmetisch noch geometrisch

Anwendung: Wieviele Teilmengen einer $n-$elementigen Menge gibt es? Wir bezeichnen die Anzahl der Teilmengen einer n-elementigen Menge mit a_n. Zunächst betrachten wir mal a_0. Die einzige Nullelementige Menge ist die leere Menge und dies ist damit auch die einzige Teilmenge, also

$$a_0 = 1$$

Weiterhin gehen wir davon aus, dass wir alle Teilmengen a_{n-1} einer (n–1)-elementigen Menge kennen.

Wir nehmen ein Element x hinzu, erhalten eine $n-$elementige Menge. Die Teilmengen dieser Menge zerfallen in zwei Gruppen: Zunächst sind alle Teilmengen der (n–1)-elementigen Menge wieder gültige Teilmengen, also a_{n-1} Stück. Weiterhin können wir Teilmengen mit x betrachten. Diese erhalten wir, in dem wir jede Teilmenge der (n–1)elementigen Menge um x erweitern. Dies sind wiederum a_{n-1} Stück. Da wir nun nur Teilmengen haben die x enthalten, unterscheiden sich diese Teilmengen von den zuerst gezählten. Andererseits muss jede Teilmenge einer $n-$elementigen Menge in eine der beiden Klassen zerfallen.

Daher gilt:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-1} \\ &= 2 \cdot a_{n-1} \end{aligned}$$

also eine geometrische Folge. Weiterhin ist $a_0 = 1$ und damit

$$a_n = 1 \cdot 2^n = 2^n$$

Also: Eine n-elementige Menge hat 2^n Teilmengen.

2.1.2 Differenzenrekursion

Im vorigen Abschnitt haben wir bei der Modellbildung den Übergang vom Zeitpunkt $n-1$ zum Zeitpunkt n gemäß einer Rückführung auf den Zustand a_{n-1} durchgeführt. Häufig wird bei der Modellbildung untersucht, wie sich die Größe vom Zustand a_{n-1} zum Zustand a_n **ändert.** Also

$$\Delta a := a_n - a_{n-1}$$

wird beschrieben.

Dies ergibt im arithmetischen Modell

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + c \\ a_n - a_{n-1} &= c \end{aligned}$$

also eine konstante Änderung pro Zeitschritt.

Die Lösung ist bekannt: $a_n = a_0 + n \cdot c$. Wir sehen hier, dass im Fall $c > 0$ Wachstum der Folge vorliegt, für $c = 0$ ist die Folge konstant $a_n = a_0$ und für $c < 0$ eine fallende Zahlenfolge vorliegt. Im letzten Fall wird die Folge auch negative Werte annehmen.

Im geometrischen Modell haben wir dagegen

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} \cdot c \\ &= a_{n-1} + (c-1) \cdot a_{n-1} \end{aligned}$$

und damit

$$a_n - a_{n-1} = (c-1) \cdot a_{n-1}$$

Führen wir die neue Größe $k := c - 1$ ein, erhalten wir hiermit

$$\triangle a := a_n - a_{n-1} = k \cdot a_{n-1}$$

Dieses beschreibt eine Änderung, die von k und dem aktuellen Bestand abhängt.

Wir sehen auch hier für die Lösung mit $c = 1 + k$

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 \cdot c^n \\ &= a_0 \cdot (1+k)^n \end{aligned}$$

Ist der Wert $c > 1$ bzw. $k > 0$ so liegt eine wachsende Funktion vor, für $c = 1$ $(k = 0)$ die konstante Folge $a_n = a_0$ und für $c < 1$ $(k < 0)$ eine fallende, aber bei positivem a_0 auch stets positive Folge.

2.1.3 Zusammenfassung

Gegeben sind der Startwert a_0 und der Zuwachs c

Folge	Rekursion	Differenzenrekursion	Direkt	Eigenschaft
arithm.	$a_n = a_{n-1} + c$	$\triangle a = a_n - a_{n-1} = c$	$a_n = a_0 + n \cdot c$	$a_n - a_{n-1}$ konst.
geom.	$a_n = a_{n-1} \cdot c$	$\triangle a = a_n - a_{n-1}$	$a_n = a_0 \cdot c^n$	$\frac{a_n}{a_{n-1}}$ konst.
		$= (c-1) \cdot a_{n-1}$	$= a_0 \cdot (1+k)^n$	
		$= k \cdot a_{n-1}$		

Bsp:
1. 5,9,13,17, ... ist arithmetische Reihe mit $a_0 = 5$ und c=4.
Damit ist

$$a_n = 5 + 4n$$

2. 5,15,45,135,... ist geometrische Reihe mit $a_0 = 5$ und c=k+1=3.
Damit ist

$$a_n = 5 \cdot 3^n$$

2.1.4 Summen (Reihen)

Definition 28 *Sind Zahlen $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ gegeben, so ist*

$$a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n = \sum_{k=m}^{n} a_k \tag{2.1}$$

die *Summe von a_k* über k gleich m bis n. Die a_k sind die Summanden, k der Laufindex.

Bem. 1: Es gibt also stets n-m+1 Summanden. k ist ein reiner Laufindex (Hilfsvariable) und darf somit im Resultat nicht auftauchen. Es ist ebenso zulässig, andere Buchstaben (z.B. i) zu verwenden.

Bem. 2: Analog wird durch

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n \tag{2.2}$$

das Produkt definiert und insbes. heißt $\prod_{k=1}^{n} = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$ die Fakultät von n.

2.1.5 Rechenregeln für Summen

Satz 29 *Es gilt:*

1. $\sum_{k=m}^{n} c = c + c + \ldots + c = c \cdot (n - m + 1)$

2. $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+l}^{n+l} a_{k-l}$ *(Indextransformation)*

3. $\sum_{k=m}^{n}(ca_k + db_k) = c \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k + d \cdot \sum_{k=m}^{n} b_k$

4. $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{m-1} a_k$ *(Addition der Null)*

ggf. auch: $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k$

Beweis

1. Trivial durch Abzählen.
2.

$\sum_{k=m+l}^{n+l} a_{k-l} = a_{m+l-l} + a_{m+l+1-l} + \ldots + a_{n+l-l} = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n = \sum_{k=m}^{n} a_k \quad \checkmark$

3.

$$\begin{aligned} c \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k + d \cdot \sum_{k=m}^{n} b_k &= c \cdot (a_m + a_{m+1} + ... + a_n) + d \cdot (b_m + b_{m+1} + ... + b_n) \\ &= ca_m + ca_{m+1} + ... + ca_n + db_m + db_{m+1} + ... + db_n \\ &= ca_m + db_m + ca_{m+1} + db_{m+1} + ... + ca_n + db_n \\ &= \sum_{k=m}^{n} (ca_k + db_k) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a_k &= a_0 + ... + a_n \\ &= a_0 + ... + a_{m-1} + a_m + ... + a_n \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} a_k + \sum_{k=m}^{n} a_k \end{aligned}$$

2.1.6 Wichtige Summen

In einigen Fällen kann die Summe durch einen festen Wert ersetzt werden und damit die Rechnung vereinfacht werden.

Die arithmetische Summe

Summieren wir eine arithmetische Folge $a_k = k \cdot c + a_0$, so reduziert sich dies auf das Problem

$$\begin{aligned} S_{arithm}(n) &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot c + a_0 \\ &= (n+1) \cdot a_0 + c \cdot \sum_{k=1}^{n} k \end{aligned}$$

Also: Gesucht ist der Wert von

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} k \tag{2.3}$$

zum Beispiel $S(10) = \sum_{k=1}^{10} k = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$

Hierzu schreiben wir die Summe zweimal untereinander (beim zweiten Mal in umgekehrter Reihenfolge) und erhalten:

$$\begin{array}{llll} 1+2 & + & 3+ & \ldots + n + \\ n + (n-1) + & (n-2) + & \ldots & +1 \end{array}$$

und erhalten in dem wir untereinander stehende Zahlen addieren:

$$2 \cdot S(n) = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1)}_{n-mal} = n \cdot (n+1) \tag{2.4}$$

Bem.: Dieser Trick wurde von C.F. Gauß im Alter von 7 Jahren entdeckt.
Hieraus ergibt sich damit:

$$\boxed{S(n) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}} \tag{2.5}$$

Die geometrische Summe

Summieren wir eine geometrische Folge $a_k = a_0 \cdot c^k$, so reduziert sich dies auf das Problem

$$\begin{aligned} S_{geom}(n) &= \sum_{k=0}^{n} a_0 \cdot c^k \\ &= a_0 \cdot \sum_{k=0}^{n} c^k \end{aligned}$$

Der Laufindex steht hier im Exponenten. Hierzu betrachten wir:

Definition 30 *Die Summe* $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$ *heißt* ***Geometrische Summe****.*

Die geometrische Summe hängt also neben der Grenze n auch von der Zahl x ab.

Zunächst betrachten wir den Fall $x = 1$, dann ist

$$S_n(1) = 1 + 1 + ... + 1 = n + 1$$

Ansonsten ergibt die Multiplikation mit x:

$$x \cdot S_n(x) = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n+1} \tag{2.6}$$

und damit

$$S_n(x) - x \cdot S_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n - x - x^2 - x^3 - \ldots - x^{n+1} \tag{2.7}$$

$$S_n(x) \cdot (1 - x) = 1 - x^{n+1} \tag{2.8}$$

Division durch $1 - x$ liefert:

$$\boxed{S_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \left(= \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \right)} \tag{2.9}$$

Beispiel: Wir numerieren die Felder eines Schachbrettes von 0 bis 63 durch. Auf das erste Feld legen wir 1 Cent, auf das zweite 2 Cent, auf das dritte 4 Cent usw. (verdoppeln also jeweils). Wieviel Geld liegt nun am Ende auf dem gesamten Schachbrett? Also: $1+2+4+8+\ldots+2^{63}$

Wir haben eine geometrische Summe mit $x = 2$ und $n = 63$, also

$$S_{63}(2) = \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = 2^{64} - 1 = (etwa)\ 184 \text{ Billarden Euro}$$

Anwendung: Mein Sohn ist in der Vorschule und erhält 30 Euro Taschengeld im Jahr. Ich habe ihm vorgeschlagen, dieses Taschengeld jährlich bis zu seinem Abitur um 20 Euro zu erhöhen. Mein Sohn meinte dagegen, dass der Zuwachs später größer als jetzt sein sollte. Er meinte, ein Viertel des Betrages des Vorjahres - also beispielsweise im ersten Schuljahr nur um 7,50 Euro - zu erhöhen. Bei welchem Modell ist denn die Gesamtsumme (Inflation kann vernachlässigt werden) gezahlten Taschengeldes größer? Wieviel Geld zahle ich im 13. Jahr?

Bezeichne a_k das Taschengeld am Ende des k-ten Jahres.
Modell 1:

$$a_k = a_{k-1} + 20, \quad a_0 = 30$$

Lösung

$$a_k = 30 + 20 \cdot k$$

und damit

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{13} 30 + 20 \cdot k &= 14 \cdot 30 + 20 \cdot \frac{13 \cdot 14}{2} \\ &= 420 + 1820 = 2240\end{aligned}$$

Modell 2:

$$a_k = a_{k-1} \cdot 1,25, \quad a_0 = 30$$

Lösung

$$a_k = 30 \cdot 1,25^k$$

und damit

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{13} 30 \cdot 1,25^k &= 30 \cdot \frac{1,25^{14} - 1}{1,25 - 1} \\ &= 120 \cdot (1.25^{14} - 1) \\ &= 2608,50\end{aligned}$$

Also ist die Gesamtsumme im zweiten Modell größer.

Weiterhin gilt $a_{13} = 30 + 20 \cdot 13 = 290$ Euro im ersten Modell, $a_{13} = 30 \cdot 1,25^{13} = 545,70$ Euro.

Insgesamt ergibt sich für die geometrische und arithmetische Summe:
Arithmetisch:

$$\begin{aligned}a_k &= a_0 + c \cdot n : \\ \sum_{k=0}^{n} a_k &= \sum_{k=0}^{n} a_0 + k \cdot c \\ &= (n+1) \cdot a_0 + c \cdot \sum_{k=0}^{n} k \\ &= (n+1) \cdot a_0 + c \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2}\end{aligned}$$

Geometrisch:

$$\begin{aligned}a_k &= a_0 \cdot c^k : \\ \sum_{k=0}^{n} a_k &= \sum_{k=0}^{n} a_0 \cdot c^k \\ &= a_0 \cdot \frac{c^{n+1} - 1}{c - 1}\end{aligned}$$

bzw. im Modell mit dem Wachstumsparameter $k = c - 1$ bzw. $c = k + 1$ (der hat nun nichts mit dem Laufindex in der Summe zu tun):

$$S(n) = a_0 \cdot \frac{(k+1)^{n+1} - 1}{k}$$

2.1.7 Rechnen mit Summen

Hier ist ein wesentliches Verfahren die Addition der Null. Zunächst an einem Beispiel: Gesucht ist die Summe

$$\sum_{k=3}^{10} k = 3 + 4 + 5 + \ldots + 10$$

Wir wissen $\sum_{k=1}^{10} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 10 = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$ und schreiben:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{10} k &= 3 + 4 + 5 + \ldots + 10 + \underbrace{1 + 2 - 1 - 2}_{0} \\
&= \sum_{k=1}^{10} k \qquad - 3 \\
&= 55 - 3 = 52
\end{aligned}$$

Entsprechend bei geometrischen Summen:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} x^k &= x^2 + x^3 + \ldots + x^n \\
&= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n - 1 - x \\
&= \sum_{k=0}^{n} x^k \qquad - 1 - x \\
&= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 1 - x
\end{aligned}$$

Die obigen Verfahren können auch beliebig kombiniert werden:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{5} (3^k + 5k + 2) &= \sum_{k=2}^{5} 3^k + \sum_{k=2}^{5} 5k + \sum_{k=2}^{5} 2 \\
&= \sum_{k=0}^{5} 3^k - 3^0 - 3^1 + 5(\sum_{k=1}^{5} k - 1) + 2 \cdot (5 - 2 + 1) \\
&= \frac{1 - 3^6}{1 - 3} - 1 - 3 + 5 \cdot (\frac{5 \cdot 6}{2} - 1) + 8 \\
&= 364 - 1 - 3 + 5 \cdot 14 + 8 \\
&= 360 + 78 = 438
\end{aligned}$$

Zur Berechnung von beliebigen endlichen Polynomsummen

$$\sum_{k=0}^{n} a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + ... + a_m k^m$$

ist somit nur zu klären, wie die Summe

$$\sum_{k=0}^{n} k^j$$

ist. Hierzu sei ein Beispiel genannt, wie dies für $j = 1$ auf die bekannte Lösung führt: Es ist

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 &= \sum_{k=0}^{n+1} k^2 - \sum_{k=0}^{n} k^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k^2 - \sum_{k=0}^{n} k^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 - \sum_{k=0}^{n} k^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n} k^2 + 2k + 1 - k^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n} 2k + 1 \\
&= 2\sum_{k=0}^{n} k + (n+1)
\end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k &= \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1) \cdot (n+1-1)}{2} \\
&= \frac{n \cdot (n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Enstpsrechend kann nun iterativ berechnet werden

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 &= 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 \\
&= 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + \frac{(3n+2) \cdot (n+1)}{2}
\end{aligned}$$

und damit:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

u.s.w.

2.2 Binomialkoeffizienten und der binomische Lehrsatz

2.2.1 Der Binomialkoeffizient

Betrachte $A = \{a, b, c, d\}$.

Wieviele Teilmengen hat eine solche Menge? Dies wissen wir bereits: $2^4 = 16$ Teilmengen waren dies. Nun wollen wir dieses Resultat weiter verfeinern. Z.B. Wieviele 2-elementige Teilmengen dieser 4-elementigen Menge gibt es?

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$ - also 6 Stück.

Wieviele 1-elementige Teilmengen dieser 4-elementigen Menge gibt es?

$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$ - also 4 Stück.

Allgemein möcchten wir nun die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge berechnen und führen hierzu ein neues Symbol ein. Die Anzahl hängt dabei nicht vom speziellen Namen der Elemente ab, sondern nur von der Gesamtzahl der Elemente und der Größe der Teilmengen.

Definition 31 *Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge bezeichnen wir mit* $\binom{n}{k}$. *Diese Zahlen heißen **Binomialkoeffizienten** oder Binomialzahlen.*

Es ist $\binom{n}{0} = 1$ (leere Menge)
$\binom{n}{n} = 1$ (gesamte Menge)
$\binom{n}{1} = n$ (jedes Element einzeln)

Beispiel: Beim Lotto wird aus der Menge {1,...,49} eine 6-elementige Teilmenge gewählt. Die Anzahl ist somit $\binom{49}{6}$, welche wir im folgenden ausrechnen werden.

Kommen wir zurück zu obigen Beispiel der Menge $A = \{a, b, c, d\}$ und die zugehörigen 2-elementigen Teilmengen $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$ und die 2-elementigen Teilmengen $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$. Erweitern wir nun die Menge um eine weiteres Element, z.B. x, so erhalten wir die neue Menge $A = \{a, b, c, d, x\}$. Wie können nun deren 2-elementige Teilmengen berechnet werden?

Zunächst gibt es zwei Gruppen von 2-elementigen Teilmngen: Die die x nicht enthalten, sind eben die Teilmengen der alten 4-elementigen Menge.

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$$

Anzahl:$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Hinzu kommen nun noch die Teilmengen, in denen das neue Element x vorkommt. Damit müssen wir noch eine 1-elementige Teilmenge der alten Menge hinzufügen.

$$\{a, x\}, \{b, x\}, \{c, x\}, \{d, x\}$$

Die Anzahl der Mengen mit x entspricht also der Anzahl der 1-elementigen Teilmengen der 4-elementigen Menge, also $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 6 + 4 = 10 \end{aligned}$$

Dieses Verfahren kann verallgemeinert werden und der Beweis analog geführt werden:

Satz 32 *Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten. Für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt:*

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Damit kann also auch obiges Beispiel gelöst werden:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \\ &= 3 + 3 + 4 = 10 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Rekursion kann also die Berechnung auf die Berechnung von $\binom{n}{0}$ und $\binom{n}{n}$ zurückgeführt werden.

Beweis: Wir betrachten eine n-elementige Menge M und ein Element x dieser Menge. Dann kann man die k-elementigen Teilmengen in 2 Rubriken einteilen:

1. k-elementige Teilmengen, die das Element x nicht enthalten
2. k-elementige Teilmengen, die das Element x enthalten

Zu 1.: Diese Mengen sind alle k-elementigen Teilmengen der (n-1)-elementigen Menge M-$\{x\}$. Deren Anzahl ist

$$\binom{n-1}{k} \tag{2.11}$$

zu 2.: Betrachtet man die Mengen, welche entstehen, wenn wir das Element x aus jedem dieser Teilmengen entfernen, so verbleiben (k-1)-elementige Teilmengen der (n-1)-elementigen Menge M-$\{x\}$.

Hiervon existieren

$$\binom{n-1}{k-1} \tag{2.12}$$

Mengen. Umgekehrt kann auch jede Teilmenge in 2. durch eine solche Teilmenge und Hinzufügen des Elementes x erzeugt werden.

Insgesamt ergibt sich die rekursive Additionsformel für Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Das obige Bildungsgesetz wird im Pascal'schen Dreieck festgehalten:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Die oberste Zeile ist für n=0, die nächste n=1, usw. Dabei steht innerhalb einer Zeile der Wert $\binom{n}{0}$ an erster Stelle, dann $\binom{n}{1}$ usw.

Dieses Schema wird z.B. zur Berechnung der Zahl $\binom{49}{6}$ jedoch schnell unhandlich. Zur praktischen Berechnung gibt es eine explizite Berechnungsformel.

Zunächst:

Definition 33 *Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Der Term*

$$n! := \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n & n > 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

*heißt **Fakultät von n***

Bsp.: $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

Es gilt: $(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1) = (n+1) \cdot n!$

Satz 34 *Sei $k, n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:*

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 & k > n \\ \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!} & k \leq n \end{cases} \tag{2.14}$$

Zum Beweis müssen wir das Pascalsche Dreieck und die Rekursion überprüfen. Also: Ist $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1$ und $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$?

Teil 1:

$$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1, \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1$$

Teil 2:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} &= \frac{(n-1)!}{(n-1-k)! \cdot k!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))! \cdot (k-1)!} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot (n-k)}{(n-1-k)! \cdot k! \cdot (n-k)} + \frac{(n-1)! \cdot k}{(n-k)! \cdot (k-1)! \cdot k} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot (n-k)}{(n-k)! \cdot k!} + \frac{(n-1)! \cdot k}{(n-k)! \cdot k!} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot (n-k) + (n-1)! \cdot k}{(n-k)! \cdot k!} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot (n-k+k)}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{(n-k)! \cdot k!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \text{ q.e.d}
\end{aligned}$$

Bem: Wir sehen auch hier:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} &= \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \\ &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(n-(n-k))! \cdot (n-k)!} \\ &= \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Also: Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen entspricht gerade der Anzahl der (n-k)-elementigen Teilmengen. Dies ist auch anschaulich klar: Jedes Bilden einer k-elementigen Teilmenge lässt eine (n-k)-elementige Teilmenge übrig. Deren Anzahl ist also gleich.

Der Binomialkoeffizient ist stets eine **ganze Zahl**. Er beschreibt die Anzahl der Möglichkeiten eine k-elementige Teilmenge einer n-elementigen Menge auszuwählen. (Bsp.: Wenn ich 10 T-Shirts besitze, und für eine Reise 3 T-Shirts einpacken möchte, so habe ich $\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$ Möglichkeiten diese T-Shirts auszuwählen.)

Zur praktischen Berechnung von $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$: Es lässt sich in der Regel vermeiden mit zu großen Zahlen zu rechnen, in dem man rechtzeitig kürzt: Im Beispiel

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} &= \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120\end{aligned}$$

Beim Kürzen verwendet man zuerst die größere Fakultät im Nenner, dann die kleinere.

Beim Lotto ergibt sich hiermit

$$\begin{pmatrix} 49 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = 13.983.816$$

Vertiefungsaufgabe: Schreiben Sie ein Excel-Sheet, welches das Pascalsche Dreieck berechnet und erstellen Sie zwei Eingabefelder, bei dem Sie die Zahlen n und k eingeben und den Binomialkoeffizienten $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ aus dem Dreieck heraussuchen.

2.2.2 Der binomische Lehrsatz

Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ *und* $n \in \mathbb{N}$ gilt:

Satz 35

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) a^k \cdot b^{n-k} \tag{2.15}$$

Bew.: Zunächst: Wenn wir die linke Seite ausmultiplizieren, erhalten wir n Klammern und beim Ausklammern Terme der Gestalt $a^k \cdot b^{n-k}$. Dieser Term kommt immer dann vor, wenn wir in k Klammern a auswählen und aus den verbleibenden $n-k$ das b.

Also: Betrachten wir die Menge $A = \{Klammer1, Klammer2, ..., Klammer\ n\}$. Auf wieviele Arten können wir gerade k Klammern auswählen (aus denen wir den Wert a nehmen)?

Die Anzahl Möglichkeiten dies zu tun ist wie im vorigen Abschnitt gesehen gerade $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$.

Wegen $(a+b)^n = (b+a)^n$ ist auch:

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) b^k \cdot a^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) a^{n-k} \cdot b^k \end{aligned}$$

und kann damit sowohl in der letzten als auch in der ursprünglichen Variante

geschrieben werden.

Bem.:

1. Für n=2 erhält man die erste binomische Formel:

$$(a+b)^2 = \left(\begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} \right) a^2 b^0 + \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right) a^1 b^1 + \left(\begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \right) a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. a=b=1:

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \tag{2.16}$$

Also: Die Summe aller möglichen Teilmengen (s.o.) ist 2^n

3. a=1, b=-1,n≥ 1 :

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (-1)^k \tag{2.17}$$

oder

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ ungerade}}}^{n} \binom{n}{k} \tag{2.18}$$

Also: Es gibt genau so viele gerade wie ungerade Teilmengen.

Kapitel 3

Konvergenz von Folgen, Reihen und Funktionen

3.1 Grundlagen über Mengen und die Sätze von Bolzano-Weierstrass

Wir betrachten hier nun als Mengen Teilmengen reeller Zahlen.

Für das Folgende ist die Existenz von irrationalen Punkten zwischen zwei rationalen Punkten und rationalen Punkten zwischen irrationalen wichtig, dazu

Lemma 36 $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$

Bew.: Wir nehmen an, es existiere eine Darstellung von $\sqrt{2}$ als gekürzter Bruch, also $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, wobei insbesondere p und q nicht beide gerade sind (sonst liesse sich der Bruch kürzen).

Damit ist

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{p^2}{q^2} \\ p^2 &= 2q^2 \end{aligned}$$

Damit ist p^2 gerade und damit auch p. Wäre p ungerade, also $p = 2n+1$, so wäre auch das Quadrat $p^2 = (2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 = 2\cdot(2n^2+2n)+1 = 2k+1$ ungerade.

Also sei $p = 2m$ und damit $p^2 = 4m^2$

$$\begin{aligned} 4m^2 &= 2q^2 \\ 2m^2 &= q^2 \end{aligned}$$

Damit ist aber auch q^2 gerade und mit gleichen Argumenten wie oben auch q gerade. Damit müssen p und q gerade sein und der Bruch $\frac{p}{q}$ war nicht vollständig gekürzt im Widerspruch zur Vor.

Lemma 37 *Sei $x \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}, y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $z \in \mathbb{Q}$ dann ist 1. $xy \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ und 2. $z + xy \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$*

Bew.:
1. Sei

$$x = \frac{p}{q}$$

Wäre

$$xy = \frac{k}{l}$$

so wäre auch

$$y = \frac{k}{l} \cdot \frac{q}{p} = \frac{kq}{lp} \in \mathbb{Q}$$

Somit muss $xy \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sein.
2. Sei $z = \frac{m}{n}$. Wäre

$$\begin{aligned} z + xy &\in \mathbb{Q} \\ z + xy &= \frac{a}{b} \end{aligned}$$

so wäre

$$xy = \frac{a}{b} - \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$$

im Widerspruch zu Teil 1.

Satz 38 *Zwischen zwei Zahlen a und $b \in \mathbb{Q}$ mit $a < b$ existiert stets ein $c \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ mit $a < c < b$.*

Bew.: Wir betrachten nun die irrationale Zahl $\sqrt{2}$. Damit ist auch $\frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Die Zahl $\sqrt{2}$ muss kleiner als 2 sein, da sonst $2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 > 4$. und es gilt wegen $0 < \sqrt{2} < 2$:
$0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$
Nun ist mit dem vorigen Satz

$$c = a + (b - a)\frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$$

und

$$\begin{aligned} c &= a + (b - a)\frac{\sqrt{2}}{2} > a \\ c &= a + (b - a)\frac{\sqrt{2}}{2} < a + (b - a) = b \end{aligned}$$

also

$$a < c < b$$

q.e.d.

Lemma 39 *Jede endliche Dezimalzahl d ist rational.*

Bew.: Sei k die Anzahl der Nachkommastellen dieser Zahl d. Dann ist

$$\begin{aligned} d \cdot 10^k &= n \in \mathbb{N} \\ d &= \frac{n}{10^k} \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 40 *Zwischen zwei Zahlen a und $b \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ mit $a < b$ existiert stets ein $c \in \mathbb{Q}$ mit $a < c < b$.*

Bew.: a und b unterscheiden sich in der $n-$ten Dezimalstelle. Wähle als c diejenige Zahl, die man erhält, wenn man von b ab der (n+1)-ten Stelle abschneidet, so erhält man eine rationale Zahl mit $a < c < b$.

Bsp.: $a = 1,7332....$
$b = 1,7348....$

$c = 1,734$
Bem.: Es gilt auch, in dem man den Mittelwert betrachtet, dass zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen eine weitere liegt und gleiches gilt auch für die rationalen Zahlen (der Mittelwert zweier Brüche ist wieder ein Bruch).

Dies bedeutet nun dass gilt: Zwischen zwei verschiedenen rationalen oder reellen Zahlen liegt stets sowohl eine rationale als auch reelle Zahl. Wir sprechen davon, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt.

Definition 41 *Gilt für alle $x \in A$*

$$|x| \leq K$$

so heisst die Menge A ***beschränkt*** *und K* ***Schranke****.*

Gilt nur $x \leq K$ so heisst die Menge ***nach oben beschränkt*** *und K* ***obere Schranke****. Im Falle $x \geq K$* ***nach unten beschränkt*** *und K* ***untere Schranke****.*

Bem. Es existieren unendlich viele obere Schranken, falls A nach oben beschränkt ist, da mit jeder Schranke auch jede größere Zahl eine obere Schranke ist.

Lemma 42 *Eine Menge M ist genau dann beschränkt, wenn Sie nach oben und nach unten beschränkt ist.*

Bew.: Sei M beschränkt, d.h.

$$|x| \leq K$$

dann ist

$$-K \leq x \leq K$$

also:

$$x \geq -K$$

und

$$x \leq K$$

und damit nach oben und unten beschränkt.
Umgekehrt: Ist nun

$$x \leq K$$

und

$$x \geq L$$

so ist

$$x \leq K \leq \max(K, -L)$$

und

$$-x \leq -L \leq \max(K, -L)$$

also

$$\max(x, -x) = |x| \leq \max(K, -L)$$

Definition 43 *Der Wert*

$$K = \min_{K^* \in \mathbb{R}} \{K^* \text{ ist obere Schranke}\}$$

*heißt **kleinste obere Schranke** oder **Supremum von A**. Notation:* $\sup(A)$
*Gilt $K \in A$ so heisst K **Maximum von A** - max(A).*

Definition 44 *Der Wert*

$$K = \max_{K^* \in \mathbb{R}} \{K^* \text{ ist untere Schranke}\}$$

*heißt **größte untere Schranke** oder **Infimum von A**. Notation:* $\inf(A)$
*Gilt $K \in A$ so heisst K **Minimum von A** - min(A).*

Bsp.: Betrachte $A = \{0 < x \leq 1\}$, so ist

$$\begin{aligned} 1 &= \sup(A) = \max(A) \\ 0 &= \inf(A) \end{aligned}$$

und das Minimum existiert nicht.

Bem.: Das Supremum/Infimum kann auch in jedem anderen geordneten Körper definiert werden.

Satz 45 *(Vollständigkeitsaxiom) Jede nicht-leere nach oben beschränkte Menge A hat ein Supremum, jede nicht-leere nach unten beschränkte Menge A hat ein Infimum.*

Bem.: Diese Aussage wird als Axiom betrachtet, d.h. wird nicht bewiesen. Anschaulich ist jedoch klar, dass eine Menge mit einer oberen Schranke auch eine kleinste obere Schranke hat. Das Supremum bzw. Infimum ist, falls es existiert, eindeutig bestimmt.

Definition 46 $U_\varepsilon(K) := \{x \in \mathbb{R} | \quad |x - K| < \varepsilon\}$ *heisst* ***ε-Umgebung von K in*** $\mathbb{R}$

Satz 47 *Ist* $K = \sup(A)$ *(kleinste obere Schranke), so existiert in jeder ε-Umgebung von K* $U_\varepsilon(K) := \{x \in A| \quad |x - K| < \varepsilon\}$ *mindestens ein Element.*

Bew.: Angenommen, es existiert zu einem ε dort kein Element mehr, so wäre auch $K - \varepsilon$ eine obere Schranke und kleiner als K.

Definition 48 $x_0 \in A$ *heisst* ***innerer Punkt von A****, falls eine ε-Umgebung existiert, so dass* $U_\varepsilon(x_0) \in A$*, also vollständig in A enthalten ist. A heisst* ***offen****, falls jeder Punkt der Menge innerer Punkt ist.*

Bsp.: $\{0 < x < 1\} = (0, 1)$ ist eine offene Menge.

Definition 49 *a heißt* ***Häufungspunkt einer Menge*** *A, wenn* $\forall \varepsilon > 0$ *in der Umgebung* $U_\varepsilon(a)$ *ein Punkt* $x \in A$ *mit* $x \neq a$ *existiert.*

Bem.:
1. Dies bedeutet, dass unendlich viele x_n existieren mit

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

2. Der Häufungspunkt muss selber nicht in A liegen, z.B. ist Null Häufungspunkt der Menge $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\}$

Definition 50 *A heisst* ***abgeschlossen,*** *wenn jeder Häufungspunkt von A in A liegt.*

Bem.:
1. Jede endliche Menge ist abgeschlossen.
2. Da $\mathbb{N}$ keinen Häufungspunkt hat, ist $\mathbb{N}$ abgeschlossen.
3. $[a, b]$ ist abgeschlossen.

Wichtig sei noch zu erwähnen, dass man für abgeschlossene und offene Mengen eine Grundmenge betrachten muss. Wir haben hier die $\varepsilon-$Umgebung in $\mathbb{R}$

definiert. Man kann auch hier die $\varepsilon-$Umgebung in einer anderen Grundmenge definieren, welches auch die Bedeutung von abgeschlossen und offen ändert, z.B.

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(K, M) \quad : \quad &= \{x \in M| \ |x - K| < \varepsilon\} \\ &\text{heisst } \varepsilon - \text{Umgebung von K in M} \end{aligned}$$

Damit wäre die Menge $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}$ abgeschlossen (Jeder Häufungspunkt liegt in der Menge, da in der ε-Umgebung nur Elemente von $\mathbb{Q}$ sind), in $\mathbb{R}$ jedoch nicht, da in jeder $\varepsilon-$Umgebung dann noch Werte aus $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ liegen.

Wir betrachten hier - sofern nichts anderes erwähnt - jedoch nur Mengen und damit offen und abgeschlossen bzgl. $\mathbb{R}$.

Satz 51 *(Bolzano-Weierstrass für Mengen) Jede unendliche beschränkte Menge A reeller Zahlen besitzt mind. einen Häufungspunkt.*

Bew.: A ist beschränkt, d.h. $\exists[a_0, b_0] =: I_0$ mit unendlich vielen Elementen. Teilen wir die Menge in zwei Bereiche $I_1^{(1)} = [a, \frac{a+b}{2}]$ und $I_1^{(2)} = [\frac{a+b}{2}, b]$ so existiert zumindest in einem von beiden wieder unendlich viele Elemente. Dies sei $I_1 =: [a_1, b_1]$. Dieses Intervall teilen wir wieder u.s.w.

Dieses Intervall wandert dann zwar gelegentlich etwas nach links oder rechts, jedoch bleibt es im ursprünglichen Intervall. Weiterhin hat dann $I_n = [a_n, b_n]$ die Länge $\frac{b-a}{2^n}$ und enthält unendlich viele Elemente. Betrachten wir die Menge der linken Intervallgrenzen

$$U = \{a_0, a_1, ...\}$$

und die rechten

$$O = \{b_0, b_1, ...\}$$

Wir sehen hier. dass immer eine der beiden Grenzen konstant bleibt. Generell gilt für alle Intervallgrenzen hier:

$$\forall i, k \in \mathbb{N}_0 : a_i \leq b_k$$

und damit insbesondere für jedes feste n

$$b_n \geq a_0$$

Damit ist die Menge O nach unten beschränkt ist und damit existiert auch $x = \inf O$.

Es gilt zudem für alle n

$$a_n \leq \inf O$$

Denn wäre

$$\inf O < a_n$$

dann gäbe es auch für $\varepsilon = \frac{1}{2}(a_n - \inf O)$

$$b_k \in (\inf O, \inf O + \varepsilon)$$

und damit

$$b_k < a_n$$

was auf Grund der Konstruktion nicht sein kann.
Da aber $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ ist auch wegen

$$\inf O \leq b_n$$

$$\begin{aligned} \inf O - a_n &\leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \\ \inf O &\leq a_n + \frac{b-a}{2^n} \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen n so gross, dass

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$$

Damit ist auch

$$\begin{aligned} \inf O &< a_n + \varepsilon \\ \inf O - \varepsilon &< a_n \leq \inf O < \inf O + \varepsilon \end{aligned}$$

und dies bedeutet das zwischen $\inf O - \varepsilon$ und $\inf O$ und somit in der $\epsilon-$Umgebung von $\inf O$ alle linken Intervallgrenzen a_k für $k > n$ liegen und damit mindestens eine. Dies heisst aber das $\inf O$ Häufungspunkt ist, falls nicht alle $a_n = \inf O$ für $n \geq n_0$ sind.

Ist dies jedoch der Fall - d.h. schliesslich werden nur die rechten Grenzen b_n verändert - so gilt für $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} b_n &= a_n + \frac{b-a}{2^n} \\ &= \inf O + \frac{b-a}{2^n} \\ &< \inf O + \varepsilon \end{aligned}$$

und damit liegen die b_n in $U_\varepsilon(\inf O)$ und da $b_n = \inf O + \frac{b-a}{2^n}$ ist insbesondere $b_n \neq \inf O$.

Damit ist $\inf O$ Häufungspunkt.

q.e.d.

Definition 52 *Sei x größter Häufungspunkt von A, dann heisst*

$$x = \limsup A \qquad \text{(Limes Superior)}$$

Sei x kleinster Häufungspunkt von A, dann heisst

$$x = \liminf A \qquad \text{(Limes Inferior)}$$

Es gilt

$$\inf A \leq \liminf A \ \leq \limsup A \leq \sup \ A$$

Bsp.: $A = \{1 + \frac{(-1)^n}{n}\} = \{0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, ...\}$ dann ist:

$$\begin{aligned} \inf A &= 0 \\ \liminf A &= \limsup A = 1 \\ \sup \ A &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

3.2 Konvergenz von Folgen

3.2.1 Monotonie

Definition 53 *Eine Folge a_n heisst **monoton wachsend**, falls $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt. Gilt sogar $a_n < a_{n+1}$, so heisst die Folge **streng monoton wachsend.***

Definition 54 *Eine Folge a_n heisst **monoton fallend**, falls $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt. Gilt sogar $a_n > a_{n+1}$, so heisst die Folge **streng monoton fallend.***

Der Beweis der Monotonie muss für alle $n \in \mathbb{N}$ gemacht werden

Definition 55 *a heisst Häufungspunkt einer Folge (!), wenn zu jeder $\varepsilon-$Umgebung $U_\varepsilon(a)$ unendlich viele Folgenglieder a_n in $U_\varepsilon(a)$ liegen, also*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \infty - \textit{viele } a_n \textit{ mit } |a_n - a| < \varepsilon$$

Bsp.: a=1 und a=-1 sind Häufungspunkte der Folge $a_n = (-1)^n$

Bem.: Eine Folge ist keine Menge. Die Menge ergibt sich aus den Zahlenwerten der Folge. Ist a Häufungspunkt der Menge A der Zahlenwerte von a_n, so auch der Folge selber, aber nicht umgekehrt. Der Satz von Bolzano-Weierstrass lässt sich aber damit zumindest in einer Richtung erweitern: Jede beschränkte Folge hat mind. einen Häufungspunkt.

Bsp $a_n = 1 :\quad A = \{1\}$ hat keinen Häufungspunkt, $< a_n >= 1 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ hat den Häufungspunkt 1.

Definition 56 *Sei a_n Folge. Betrachten wir eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen n_k mit $n_k < n_{k+1}$, so ist die Folge $b_k = a_{n_k}$ eine Folge aus Elementen von a_n und heisst **Teilfolge von** a_n.*

3.2.2 Konvergenz und Grenzwert einer Folge

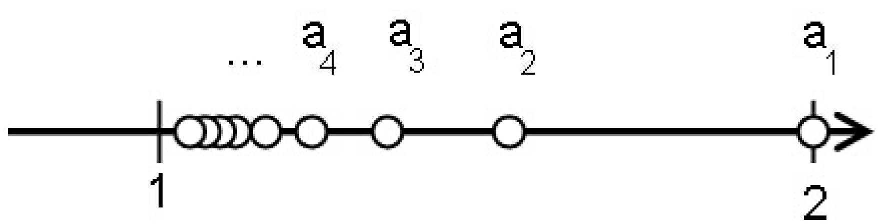
Wir betrachten nun die Folge

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}$$

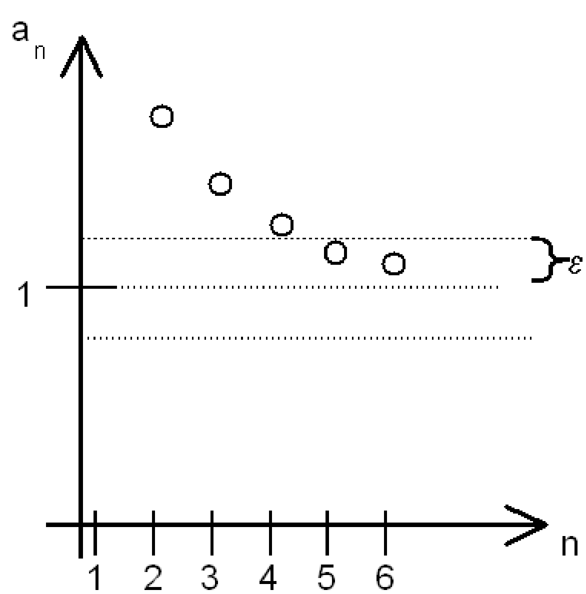
Die ersten Folgenglieder lauten $a_1 = 0, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{4}{3}, a_4 = \frac{5}{4}$ und allgemein $a_n = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$.Wir sehen, dass der Wert beliebig nahe erreicht wird, ohne dass dieser Wert selber angenommen wird.

Grafische Darstellung :

Eindimensional:



Zweidimensional:



Wir sehen: die Folge ist monoton fallend und in jeder noch so kleinen Umgebung der Eins liegen schließlich alle Funktionswerte, d.h. für beliebige $\varepsilon > 0$ gilt für große n:

$$|a_n - a| < \varepsilon \tag{3.1}$$

Eine solche Zahl, in deren Umgebung schließlich alle Funktionswerte liegen, wird definiert als Grenzwert einer Zahlenfolge:

Definition 57 *Eine Zahl $a\epsilon\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) heißt* ***Grenzwert oder Limes*** *einer Zahlenfolge $< a_n >$, wenn $\forall\ \varepsilon > 0$ eine Zahl $n_0(\varepsilon)$ existiert, so dass für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$ (fast immer) gilt*

$$|a_n - a| < \varepsilon \tag{3.2}$$

Oder kurz: $\forall\varepsilon > 0\exists n_0(\varepsilon)$ mit $|a_n - a| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$

Bem.: Für reelle Zahlenfolgen bedeutet dies analog als betragsfreie Ungleichung

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

Satz 58 *Jeder Grenzwert a ist auch Häufungspunkt*

Bew.:

$$\begin{aligned} \forall\varepsilon &> 0\ \ \exists n_0(\varepsilon) \text{ mit } |a_n - a| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0 \\ &\Longrightarrow \forall\varepsilon > 0 \text{ ist } |a_n - a| < \varepsilon \text{ für } \infty - \text{viele } n \\ &\Longrightarrow a \text{ ist Häufungspunkt} \end{aligned}$$

.

Bem.: 1. Die Reihenfolge ist also: Wähle zunächst ein kleines ε und schaue dann nach, ob es ein n_0 $=n_0(\varepsilon)$ gibt, so dass alle folgenden a_n innerhalb der $\varepsilon-$Schranke um den Grenzwert liegen.

2. Desto kleiner das ε, desto größer wird $n_0(\varepsilon)$ werden.

3. Es müssen schließlich alle Folgenglieder in der Umgebung liegen - "Nur" unendlich viele reicht nicht aus, z.B. (-1)^n nimmt unendlich oft die 1 bzw. die -1 an, hat aber keinen Grenzwert.

4. Wichtig ist für alles folgende: Werden endlich viele Folgenglieder verändert, weggelassen oder hinzugefügt, so ändert sich das Konvergenzverhalten der Folge nicht.

Definition 59 *Eine Folge $< a_n >$ heisst* ***konvergent****, falls ein Grenzwert existiert. Existiert dieser nicht, so heisst die Folge* ***divergent****.*

Bem.: a heisst auch Limes der Folge.

Notation: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$.

Bem.:
1. Da ε eine beliebige kleine Zahl ist, reicht es aus, wenn die Folge

$$|a_n - a| < k\varepsilon$$

für ein $k \in (0, \infty)$ erfüllt. Durch entsprechende Verkleinerung von ε erreichen wir dann auch eine beliebge Nähe zum Grenzwert. Dies wird weiter unten noch an einem Beispiel erläutert.

2. Um Divergenz zu zeigen, bedeutet die Umkehrung: Finde ein $\varepsilon > 0$, so dass schliesslich nicht alle a_n erfüllen $|a_n - a| < \varepsilon$. Betrachten wir beispielsweise die Folge

$$a_n = (-1)^n$$

so werden zwar die Zahlen 1 und -1 unendlich oft angenommen, aber die 1 ist z.B. kein Grenzwert, da zu $\varepsilon = 1$ und ungerades n gilt

$$|a_n - a| = |(-1)^n - 1| = 2 > \varepsilon = 1$$

Definition 60 *Eine konvergente Folge mit a=0 heisst* ***Nullfolge.***

Beispiele:
1. $a_n = \frac{1}{n}$:konvergent $a = 0$, also Nullfolge
2. $a_n = (-1)^n$ divergent
3. $a_n = n^2$ divergent (uneigentlicher Grenzwert a=∞)

Zur Berechnung von $n_0(\varepsilon)$ muss die Ungleichung nach n äquivalent umgeformt werden.

Bsp.:

$$a_n = 3 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$

Grenzwert:

$$a = 3$$

Zur Berechnung von $n_0(\varepsilon)$:

$$|a_n - a| = \left|(-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{array}{rcl} |a_n - a| & < & \varepsilon \\ & \Leftrightarrow & \\ \frac{1}{n} & < & \varepsilon \end{array}$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0(\varepsilon)$ mit $|a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$Wenn also n groß genug gewählt wird, wird der Wert auf der linken Seite beliebig klein. Es ergibt sich dann für

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

dass die Ungleichung erfüllt ist.

Wir wählen damit $n_0(\varepsilon)$ als nächstgrössere ganze Zahl, also formal

$$n_0(\varepsilon) = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$$

Beachten Sie hier, dass bei natürlichen Zahlen hiermit die nächste Zahl, bei Elementen aus $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ die Zahl zunächst abgerundet wird und dann eins addiert wird, also faktisch aufgerundet wird.

Um ein n_0 zu finden, kann häufig die Ungleichung nicht äquivalent umgeformt werden. Es reicht jedoch eine Abschätzung um Konvergenz zu zeigen.

Ist für $n > m$

$$0 \leq |a_n - a| \leq b_n$$

und ist für $n > n_0(\varepsilon)$

$$0 \leq b_n < \varepsilon$$

so ist für

$$n > \max(m, n_0)$$

auch

$$0 \leq |a_n - a| \leq \varepsilon$$

Das Vorgehen ist dabei für gebrochen rationale Folgen wie folgt:

I) Finden des Grenzwertes durch Division (Kürzen) mit der höchsten Potenz des Nenners.

II) Berechnen von $|a_n - a|$, welches nun eine gebrochen rationale Nullfolge ist.

III) Einen Wert bestimmen, ab dem die Folge stets positiv oder negativ ist und damit die Beträge auflösen.

IV) Abschätzen durch eine einfache positive Nullfolge

Bem: Achten Sie darauf dass Sie beim Abschätzen keine negativen Brüche erzeugen, z.B.

$$0 \leq \frac{1}{n^2 - 6n + 6}$$

Wir vergrössern den Bruch, in dem wir den Nenner verkleinern. Aber: Er darf nicht negativ werden, z.B.

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2} \not\leq \frac{1}{-1}$$

ist falsch.
Also betrachten wir nur n>6 und dort ist:

$$0 \leq \frac{1}{n^2 - 6n + 6} \leq \frac{1}{n^2 - 6n}$$

V) n_0 unter Beachtung von III) berechnen.

Bsp.: Berechnen Sie zu einem vorgegebenem $\varepsilon > 0$ einen Grenzwert a und ein n_0, so dass die Folge

$$\frac{-8n^2 - 2n + 20}{4n^2 - n + 100}$$

stets innerhalb der $\varepsilon-$Umgebung von a liegt.

Wie groß wird n_0 für $\varepsilon = 0,1$ und $\varepsilon = 0,001$?

I) Finden des Grenzwert:
Durch Division der höchsten Potenzen erhalten wir

$$a = -2$$

II) Berechnen der Abweichung
Wir erhalten für die Abweichung vom Grenzwert:

$$\begin{aligned} \left| \frac{-8n^2 - 2n + 20}{4n^2 - n + 100} + 2 \right| &= \left| \frac{-8n^2 - 2n + 20}{4n^2 - n + 100} + \frac{8n^2 - 2n + 200}{4n^2 - n + 100} \right| \\ &= \left| \frac{-4n + 220}{4n^2 - n + 100} \right| \end{aligned}$$

III) Beträge auflösen:
Wir sehen, dass der Betrag schliesslich negativ ist, also für $n > 55$:

$$\left| \frac{-4n + 220}{4n^2 - n + 100} \right| = \frac{4n - 220}{4n^2 - n + 100}$$

IV) Abschätzen durch eine positive Nullfolge dort ist:

$$0 \leq \frac{4n - 220}{4n^2 - n + 100} < \frac{4n}{4n^2 - n^2} = \frac{4}{3} \frac{1}{n}$$

V) n_0 so bestimmen, dass der abgeschätzte Wert kleiner als ε wird:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3}\frac{1}{n} &< \varepsilon \\
\frac{1}{n} &< \frac{3}{4}\varepsilon \\
n &> \frac{4}{3\varepsilon} \\
n_0 &= \left\lfloor \frac{4}{3\varepsilon} \right\rfloor + 1
\end{aligned}$$

VI) n_0 muss aber gross genug sein, damit die obigen Abschätzungen zulässig sind, also $n > 55$, also mindestens 56:

$$n_0 = \max(\left\lfloor \frac{4}{3\varepsilon} \right\rfloor + 1, 56)$$

Für

$$\varepsilon = \frac{1}{10}$$

$$\begin{aligned}
n_0 &= \max(\left\lfloor \frac{40}{3} \right\rfloor + 1, 56) \\
&= \max(14, 56) = 56
\end{aligned}$$

Für

$$\varepsilon = \frac{1}{1000}$$

$$\begin{aligned}
n_0 &= \max(\left\lfloor \frac{4000}{3} \right\rfloor + 1, 56) \\
&= \max(1334, 56) = 1334
\end{aligned}$$

Lemma 61 *Der Grenzwert einer Folge ist eindeutig.*

Bew.: Seien a und b verschiedene Grenzwerte mit $a < b$ und dem Abstand $d := |a - b| > 0$. Da sowohl b als auch a Grenzwerte sind, gilt für beliebiges ε :

$$\begin{aligned}
|a_n - a| &< \varepsilon \text{ für } n \geq n_0^a(\varepsilon) \\
|a_n - b| &< \varepsilon \text{ für } n \geq n_0^b(\varepsilon)
\end{aligned}$$

Für $n_0 = \max(n_0^a(\varepsilon), n_0^b(\varepsilon))$ ist damit für alle $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}
|a_n - a| &< \varepsilon \\
|a_n - b| &< \varepsilon
\end{aligned}$$

Wählen wir $\varepsilon = \frac{d}{2}$, so gilt

$$\begin{aligned} d &= |a-b| \leq |a-a_n+a_n-b| \\ &\leq |a_n-a|+|a_n-b| \\ &< \varepsilon+\varepsilon = \frac{d}{2}+\frac{d}{2} = d \end{aligned}$$

und damit ein Widerspruch. ($d < d$). Daher ist jeder Grenzwert eindeutig.

Satz 62 *Jede konvergente Folge ist beschränkt, d.h.* $|a_n| \leq S$.

Bew.: Wir geben uns ein beliebiges ε vor und betrachten die Folgenterme *vorne* bis zum Index $n_0(\varepsilon)$ und diejenigen *dahinter*.

Für die Werte bis n_0 haben wir endlich viele Zahlen und die Folge ist beschränkt duch das Maximum und Minimum der Werte. Für die Werte dahinter liegen alle Folgenglieder zwischen $a-\varepsilon$ und $a+\varepsilon$ und sind somit auch beschränkt.
Formal:

$$\begin{aligned} a_n &\leq S_o = \max(\max_{0\leq k\leq n-1} a_k, a+\varepsilon) \\ a_n &\geq S_u = \min(\min_{0\leq k\leq n-1} a_k, a+\varepsilon) \end{aligned}$$

q.e.d

Bem.: Damit gilt umgekehrt: Jede nicht beschränkte Folge ist divergent.

Satz 63 *Es ist äquivalent:*
1. a ist Häufungspunkt von a_n
2. es existiert eine Teilfolge von a_n*, die gegen a konvergiert.*

Bew.:
$2 \Longrightarrow 1$: Sei a_{n_k} eine Teilfolge, die gegen a konvergiert. Dann ist

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \text{ mit } |a_{n_k}-a| < \varepsilon \text{ für alle } n_k > n_0$$

damit sind unendlich viele Folgenglieder a_{n_k} in jeder Umgebung und damit erst recht in a_n. Damit ist a Häufungspunkt.
$1 \Longrightarrow 2$:

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists n \text{ mit } |a_n-a| < \varepsilon$$

Wähle $\varepsilon = \frac{1}{k}$ dann ist

$$\begin{aligned} k &= 1: \exists n_1 \text{ mit } |a_{n_1}-a| < \varepsilon \;= 1 \\ k &= 2: \exists n_2 \text{ mit } |a_{n_2}-a| < \varepsilon \;= \frac{1}{2} \\ k &= 3: \exists n_3 \text{ mit } |a_{n_3}-a| < \varepsilon \;= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

u.s.w. Die so konstruierte Teilfolge ist damit eine gegen a konvergente Teilfolge.

Damit gilt, da jede beschränkte Folge mind. einen Häufungspunkt hat:

Satz 64 *1. (Bolzano-Weierstrass für Folgen) Jede beschänkte Folge a_n besitzt mindestens eine konvergente Teilfolge.*

2. Jede beschränkte Folge a_n besitzt einen kleinsten (a) und grössten (b) Häufungspunkt mit $b \geq a$

$$\begin{aligned} a &= \liminf a_n \\ b &= \limsup a_n \end{aligned}$$

3. Eine Folge konvergiert genau dann, wenn Sie beschränkt ist und nur einen Häufungspunkt besitzt. Dann ist

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \liminf a_n = \limsup a_n.$$

3.2.3 Rechnen mit konvergenten Folgen

Der Beweis der Konvergenz kann in vielen Fällen mit Hilfe der folgenden Sätze vereinfacht werden:

Satz 65 *(Vergleichssatz) Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ und fast immer (bis auf endlich viele Folgenglieder) $a_n \leq b_n$, so ist*

$$a \leq b$$

Bew. Da nur endlich viele Folgenglieder nicht erfüllen $a_n \leq b_n$, gilt schliesslich für n_0 gross genug

$$a_n \leq b_n \qquad \forall n \geq n_0$$

Nehmen wir nun an, $a > b$, dann ist für $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ und $n \geq n_0^b(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} |b_n - b| &< \varepsilon \\ b_n &< b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} \\ &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

Entsprechend ist für $n \geq n_0^a(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} |a_n - a| &< \varepsilon \\ a_n &> a - \varepsilon \\ &= a - \frac{a-b}{2} \\ &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

also insbesondere für alle $n \geq \max(n_0^a(\varepsilon), n_0^b(\varepsilon))$

$$b_n < a_n$$

im Widerspruch zur Vorr.

Satz 66 *(Sandwich-Lemma oder Einschnürungssatz) Gilt fast immer, also bis auf endliche viele n (oder auch für $n \geq n_0$)*

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, *so ist*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a$$

Bew.:
Für $n \geq n_0(\frac{\varepsilon}{3}) = \max(n_0^a, n_0^b)$ ist

$$\begin{aligned}
|c_n - a| &= |c_n - a_n + a_n - a| \\
&\leq |c_n - a_n| + |a_n - a| \\
&\leq |b_n - a_n| + |a_n - a| \\
&= |b_n - a + a - a_n| + |a_n - a| \\
&\leq |b_n - a| + 2\,|a_n - a| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + 2\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 67 *Ist* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, *so ist* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$, *d.h.* $b_n = a_n - a$ *ist Nullfolge.*

Bew.: Klar:

$$|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow |(a_n - a) - 0| < \varepsilon$$

Das Sandwich-Lemma wird auch häufig für $a_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ angewendet. Z.B. die Folge

$$c_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

ist stets positiv und es gilt

$$0 = a_n \leq c_n \leq b_n = \frac{1}{n}$$

Damit ist auch c_n Nullfolge.

3.2.4 Rechenregeln für Grenzwerte

Wie können wir nun verknüpfte Folgen wie z.B. $a_n = \frac{1}{n} + \frac{3+2n}{n} - 5$ auf ihre Konvergenz und Grenzwerte untersuchen? Können wir dies in kleinere Bausteine zerlegen? Hier helfen die folgenden Eigenschaften

Satz 68 *Für* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ *sowie* $c \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n + b_n &= a + b \\
\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n &= c \cdot a \\
\lim_{n\to\infty} a_n b_n &= ab \\
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{a}{b} \quad \textit{für } b_n \neq 0, b \neq 0 \\
\textit{insbesondere} &: \\
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} &= \frac{1}{b} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \quad \textit{für } b_n \neq 0, b \neq 0
\end{aligned}$$

Bew.: zB der ersten Aussage:

Diese machen wir zur Verdeutlichung, dass $k\varepsilon$ als Schranke reicht, nun einmalig auf zwei Varianten:

1. Wir wählen n_0^a und n_0^b, so dass

$$\begin{aligned}
|a_n - a| &< \frac{\varepsilon}{2} \\
|b_n - b| &< \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Dann ist für $n \geq n_0 = \max(n_0^a, n_0^b)$

$$\begin{aligned}
\left|(a_n + b_{n)} - (a + b)\right| &= |a_n - a + b_n - b| \\
&\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ q.e.d}
\end{aligned}$$

Der Faktor $\frac{\varepsilon}{2}$ ist jedoch eigentlich erst am Ende des Beweises klar. Deshalb kann man sich dies künftig wie folgt erleichtern:

Vorr.:

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ und } |b_n - b| < \varepsilon$$

für $n \geq \max(n_0^a, n_0^b)$ und damit:

$$\begin{aligned}
\left|(a_n + b_{n)} - (a + b)\right| &= |a_n - a + b_n - b| \\
&\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\
&< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \text{ q.e.d}
\end{aligned}$$

Aussage 3 wird so bewiesen: da a_n gegen a konvergiert, exisitiert ein n_0, so dass $|a_n| < |a| + 1 \ \forall < n_0$ und damit ab n_0

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\
&\leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\
&= |a_n|\,|b_n - b| + |b|\,|a_n - a| \\
&< \varepsilon \cdot (|a_n| + |b|) \\
&\leq \varepsilon \cdot (|a| + 1 + |b|) = k\varepsilon
\end{aligned}$$

Da ε beliebig klein wird, gilt dies auch für $k\varepsilon$.

Bsp:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} 2 + 3 \cdot \frac{1}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} 2 + 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 2
\end{aligned}$$

Bem. Insbesondere ergibt sich hieraus der erwartete Zusammenhang:

Lemma 69 *Ist* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, *so ist* $\lim_{n\to\infty} \triangle a = \lim_{n\to\infty} a_n - a_{n-1} = 0$ *(Nullfolge).*

Bew.: Es ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n-1} = a$ und damit $\lim_{n\to\infty} \triangle a = \lim_{n\to\infty} a_n - a_{n-1} = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} a_{n-1} = a - a = 0$.

Bem.: Die Umkehrung gilt nicht. (Dies wird später noch gezeigt. Sie können dies jedoch an der Folge $a_0 = 1, a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n}$ gerne einmal ausprobieren)

Grenzwerte gebrochen rationaler Funktionen

Merke: Dividiere durch die höchste Potenz des Nenners ! Dann lassen sich obige Rechenregeln zur Vereinfachung anwenden, z.B.

$$a_n = \frac{2n+1}{n+3} = \frac{n \cdot (2 + \frac{1}{n})}{n \cdot (1 + \frac{3}{n})} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}} = 2$$

$$a_n = \frac{2n+1}{n^2+3} = \frac{n^2 \cdot (\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})}{n^2 \cdot (1 + \frac{3}{n})} = \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n}} = 0$$

$$a_n = \frac{2n^2+1}{n+3} = \frac{n \cdot (2n + \frac{1}{n})}{n \cdot (1 + \frac{3}{n})} = \frac{2n + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}} \text{ divergent}$$

Weitere wichtige Grenzwerte sind:

$$
\begin{aligned}
\text{a) } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} &= 0 \text{ für } a > 0 \\
\text{b) } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} &= 1 \text{ für } a > 0 \\
\text{c) } \lim_{n\to\infty} q^n &= 0 \text{ für } |q| < 1 \\
\text{d) } \lim_{n\to\infty} n^k q^n &= 0 \text{ für } |q| < 1, \\
k &\in \mathbb{N}, q \in \mathbb{R} \\
\text{e) } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} &= 1 \\
\text{f) } \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} &= 0
\end{aligned}
$$

Bew.:

a) Sei $\varepsilon > 0$, dann ist für $n > n_0(\varepsilon) = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt[\alpha]{\varepsilon}} \right\rfloor + 1$,also $n > \frac{1}{\sqrt[\alpha]{\varepsilon}}$ auch $n^\alpha > \frac{1}{\varepsilon}$ und damit

$$\left| \frac{1}{n^a} \right| = \frac{1}{n^a} < \varepsilon$$

b) Für $a \geq 1$, gilt, dass für alle $\varepsilon > 0$ und $n > n_0(\varepsilon) = \lfloor \frac{a}{\varepsilon} \rfloor + 1$,also $n > \frac{a}{\varepsilon}$ gilt:

$$1 \leq a < (1+\varepsilon)^n$$

denn gemäß Bernoulli ist:

$$(1+\varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon > 1 + \frac{a}{\varepsilon}\varepsilon > a$$

Somit erhalten wir mit dem Sandwich-Lemma die Konvergenz:

$$1 = \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{(1+\varepsilon)^n} = 1 + \varepsilon$$

Für $0 < a < 1$ gilt dann für $b = \frac{1}{a} > 1$ und für $n > n_0(\varepsilon) = \lfloor \frac{b}{\varepsilon} \rfloor + 1$,also $n > \frac{b}{\varepsilon}$:

$$1 \leq b < (1+\varepsilon)^n$$

und damit

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^n} \leq a \leq 1$$

und damit ebenfalls die Konvergenz gemäß Sandwich-Lemma durch das Ziehen der $n - ten$ Wurzel:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(1+\varepsilon)^n}} = \frac{1}{1+\varepsilon} \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{1} = 1$$

c) Sei $\varepsilon > 0$, dann ist für $n > n_0(\varepsilon)$ und $q < 1$ wegen Teil b) $|q| < \sqrt[n]{\varepsilon}$ und damit

$$|q^n| = |q|^n < \sqrt[n]{\varepsilon}^n = \varepsilon$$

d) Für $q = 0$ ist die Aussage trivial. Sei q zunächst größer Null. Dann ist $q = \frac{1}{1+a}$,$a > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} q^n &= \frac{1}{(1+a)^n} \\ n \cdot q^n &= \frac{n}{(1+a)^n} < \frac{n}{1 + an + a^2 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{n} + a + \frac{a^2}{2} n - \frac{a^2}{2}} \end{aligned}$$

eine Nullfolge. Damit gilt:

$$\lim_{n \to \infty} n \cdot q^n = 0$$

Induktiv ergibt sich, da

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{1}{k!} n^k + \ldots \end{aligned}$$

$$\lim_{n \to \infty} n^k \cdot q^n = 0$$

Für $-1 < q < 0$ ist analog $q = -\frac{1}{1+a}$ und dann

$$\begin{aligned} q^n &= (-1)^n \frac{1}{(1+a)^n} \\ |n \cdot q^n| &= \left| (-1)^n \frac{n}{(1+a)^n} \right| < \left| \frac{n}{1 + an + a^2 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2}} \right| = \left| \frac{1}{\frac{1}{n} + a + \frac{a^2}{2} n - \frac{a^2}{2}} \right| \end{aligned}$$

ebenfalls Nullfolge. Damit gilt die Behauptung.

e) Mit Teil d) ist $\forall \varepsilon > 0$

$$\frac{n}{(1+\varepsilon)^n}$$

Nullfolge. Damit ist für n gross genug

$$0 < \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} < 1$$

Somit

$$n < (1+\varepsilon)^n$$

und damit

$$\sqrt[n]{n} \leq 1 + \varepsilon$$

Da $1 \leq n$ ist auch $1 = \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{n}$, also insgesamt

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \varepsilon$$

Damit gilt, da ε beliebig klein werden darf:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

f) Es ist:

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot ... \cdot \frac{1}{n} \leq 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1 \cdot \frac{1}{n}$$

Gemäß Sandwich-Lemma folgt die Behauptung.

3.2.5 Konvergenz monotoner Folgen

Wir haben bereits gesehen: Jede konvergente Folge ist beschränkt, aber nicht jede beschränkte Folge ist konvergent, z.B. $a_n = (-1)^n$. Gibt es Kriterien, wann beschränkte Folgen konvergieren?

Satz 70 *: Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent. Auch: Jede nach oben beschränkte monoton wachsende Folge ist konvergent oder jede nach unten beschränkte monoton fallende Folge ist konvergent.*

Der Grenzwert ist bei monoton fallenden Folgen $\inf\{a_n\}$*, bei wachsenden Folgen* $\sup\{a_n\}$.

Bew.: Ohne Einschränkung betrachten wir den Fall monoton wachsender Funktionen, die nach oben beschränkt sind, also $a_n \leq S = \sup\{a_n\}$. Dann existiert für $\forall \varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} S - \varepsilon &< a_{n_0} \leq S \\ \text{wegen der Monotonie} &: \\ \forall n &\geq n_0(\varepsilon) : S - \varepsilon < a_n \leq S \end{aligned}$$

und damit

$$|S - a_n| = S - a_n < \varepsilon$$

qed.

Angewandt wird das Montonie-Prinzip nun auch wie folgt:

Die Intervallschachtelung

Definition 71 *(und Satz): Sei $[a_n, b_n]$ abgeschlossenes Intervall mit*

1.

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$$

*dann ist $I_n = [a_n, b_n]$ eine **Intervallschachtelung** und die Folgen a_n und b_n konvergieren gegen $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = S$.*

Bew.: a_n und b_n sind beschränkt und monoton und daher konvergent. Wegen $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$ ist $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

3.2.6 Die eulersche Zahl

Wir betrachten nun die Folge

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$

und untersuchen deren Konvergenzeigenschaften.

Wir zeigen zunächst dass die Folge

$$b_n = (1 - \frac{1}{n})^n$$

streng monoton wachsend für $n \geq 2$ ist, in dem wir - die Folgenglieder sind alle positiv - zeigen :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &> b_n \\ \frac{b_{n+1}}{b_n} &> 1 \end{aligned}$$

Es ist mit der Bernoulli-Ungleichung

$$\begin{aligned}
\frac{(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1-\frac{1}{n})^{n}} &= \frac{(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1-\frac{1}{n})^{n+1}} \cdot (1-\frac{1}{n}) \\
&= \left(\frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n-1}{n}}\right)^{n+1} \cdot (1-\frac{1}{n}) \\
&= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot (1-\frac{1}{n}) \\
&= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot (1-\frac{1}{n}) \\
&> \left(1+\frac{n+1}{n^2-1}\right) \cdot (1-\frac{1}{n}) \\
&= (1+\frac{1}{n-1}) \cdot (1-\frac{1}{n}) \\
&= \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \\
&= 1 \text{ qed.}
\end{aligned}$$

Damit ist insbesondere wegen $b_2 = (1-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ auch

$$b_n = (1-\frac{1}{n})^n > \frac{1}{4} \text{ für } n \geq 3$$

Bem: Dies wird später verwendet, um zu zeigen $e < 4$. Wer lieber diesen Grenzwert genauer einschränkt, kann z.B. auch verwenden:

$$b_6 = (1-\frac{1}{6})^6 = 0,334 > \frac{1}{3}$$

und erhält somit auch später $e < 3$.

Nun kommen wir zur Folge $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ zurück und zeigen von dieser Monotonie und Beschränktheit.

1. $a_n \leq 4$: Es ist wie oben gezeigt für $n \geq 3$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} &< (1-\frac{1}{n})^n \\
\frac{1}{4}(1+\frac{1}{n})^n &< (1-\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n})^n \\
\frac{1}{4}(1+\frac{1}{n})^n &< (1-\frac{1}{n^2})^n < 1
\end{aligned}$$

und damit

$$(1+\frac{1}{n})^n < 4$$

Da auch für $n = 1$ und $n = 2$ die Gleichung richtig ist, gilt Sie für alle Zahlen.

2. Strenge Monotonie (wachsend): Es ist

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\\
&> 1-\frac{n+1}{(n+1)^2}=1-\frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \frac{1-\frac{1}{n+1}}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}\\
&= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n}} = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}\right)^{n}\\
&= \left(\frac{1}{\frac{n}{n+1}}\right)^{n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\\
&= (1+\frac{1}{n})^n = a_n \quad \text{qed.}
\end{aligned}$$

Damit wissen wir, dass die Folge einen Grenzwert hat:

Definition 72 *Der Grenzwert* $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n =: e$ *existiert und heisst* ***eulersche Zahl.*** *Der Wert ist e=2,718...*

Bem.: Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n &= \lim_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n})^n\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{n}{n-1}}\right)^n\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{n-1+1}{n-1}}\right)^n\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n\\
&= \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}\\
&= \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\cdot\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}\\
&= \frac{1}{e}\cdot 1=\frac{1}{e}
\end{aligned}$$

Betrachten wir analog zu einer festen Zahl a die Folge

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a}{n})^{\frac{n}{a}}$$

so liefert der Ausdruck schliesslich den gleichen Grenzwert (ohne Beweis), also

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a}{n})^{\frac{n}{a}} = e$$

und damit gilt

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a}{n})^{n} = \lim_{n\to\infty}\left((1+\frac{a}{n})^{\frac{n}{a}}\right)^{a} = e^{a}$$

Bem.: Die eulersche Zahl ist transzendent (Keine Lösung eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten). Eine schnellere Berechnung liefert (s.u.)

$$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+...$$

3.2.7 Konvergenz rekursiver Folgen

Die Konvergenz einer rekursiv definierten Folge kann mit den gleichen Mitteln wie bei iterativen (expliziten) Folgen mit dem Monotonieprinzip gezeigt werden.

Das Verfahren lässt sich am Besten an einem Beispiel verifizieren. Gegeben sei eine einstufige Rekursion

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_{n+1} &= \frac{1}{3}(a_n+1) \end{aligned}$$

Monotonie: Zunächst muss bei der Monotonie festgestellt werden, ob die Folge wachsend oder fallend ist. Hierzu berechnen wir die ersten Terme:

$$a_1 = \frac{1}{3}(0+1) = \frac{1}{3} > a_0$$

Weitere Terme könnten zur Verifizierung *Die Folge ist streng monoton wachsend* berechnet werden. Der Beweis erfolgt dann induktiv:
Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$a_{n+1} > a_n$$

Induktionsanfang:

$$n = 0 : a_1 > a_0 \text{ (s.o.)}$$

Induktionsvorr.:$\forall n \in \mathbb{N}_0, n$ fest, aber beliebig, gelte:

$$a_{n+1} > a_n$$

Induktionsschluss:
Wegen

$$a_{n+1} > a_n$$

ist auch

$$a_{n+1} + 1 > a_n + 1$$

und

$$\frac{1}{3}(a_{n+1} + 1) > \frac{1}{3}(a_n + 1)$$

also:

$$a_{n+2} = \frac{1}{3}(a_{n+1} + 1) > \frac{1}{3}(a_n + 1) = a_{n+1} \text{ qed.}$$

Beschränktheit: Das Auffinden einer geeigneten Schranke ist etwas schwierig. Bei wachsenden, postiven Größen sollte man die Schranke gross genug wählen oder zuvor den möglichen Grenzwert ausrechnen, der dann obere Schranke ist.

Wir zeigen wiederum induktiv:

$$a_n < \frac{1}{2}$$

Induktionsanfang

$$a_0 = 0 < \frac{1}{2}$$

Induktionsvorr.

$$a_n < \frac{1}{2}$$

Induktionsschluss

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 1) < \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Bem.: Der Beweis hätte auch für $a_n < 5$ oder jede andere Zahl grösser als $\frac{1}{2}$ funktioniert. Der Ind. Schluss wäre dann

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 1) < \frac{1}{3}(5 + 1) = 2 < 5$$

Da die Folge monoton und beschränkt ist, wissen wir nun das ein Grenzwert existiert. Aber wie groß ist dieser?

Hierzu gilt für den gesuchten Grenzwert a

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

und damit

$$\begin{aligned} a &= \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}(a_n+1) = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(a_n+1) \\ &= \frac{1}{3}(a+1) \end{aligned}$$

Diese Gleichung lässt sich nach a auflösen und wir erhalten den gesuchten Grenzwert

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}a &= \frac{1}{3} \\ a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Beispiel 2: Wir zeigen für die rekursiv definierte Folge

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{2a_n+28}-2, \\ a_0 &= 0 \end{aligned}$$

die Konvergenz.
A) Monotonie:
Wir berechnen den Startwert:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{28}-2 \\ &\geq 3 > 0 = a_0 \end{aligned}$$

Und vermuten eine monton wachsende Folge.
Der Beweis wird induktiv gezeigt:
Induktionsanfang:

$$a_1 = \sqrt{28}-2 \geq a_0 = 0$$

Induktionsvor.:$\forall n \in \mathbb{N}$ (beliebig, aber fest)

$$a_{n+1} \geq a_n$$

Induktionsbeh.: Dann ist auch:

$$a_{n+2} \geq a_{n+1}$$

Induktionsschluss: Wegen

$$a_{n+1} \geq a_n$$

ist

$$2a_{n+1}+28 \geq 2a_n+28$$

Wegen der gezeigten Monotonie-Eigenschaft der Wurzelfunktion ist

$$\sqrt{2a_{n+1}+28} \geq \sqrt{2a_n+28}$$

und damit

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \sqrt{2a_{n+1} + 28} - 2 \\ &\geq \sqrt{2a_n + 28} - 2 = a_{n+1} \end{aligned}$$

B) Mögliche Grenzwerte: Diese erfüllen:

$$\begin{aligned} a &= \lim a_{n+1} = \lim \sqrt{2a_n + 28} - 2 \\ &= \sqrt{2a + 28} - 2 \end{aligned}$$

Damit

$$\begin{aligned} a + 2 &= \sqrt{2a + 28} \\ a^2 + 4a + 4 &= 2a + 28 \\ a^2 + 2a - 24 &= 0 \\ a &= -1 \pm \sqrt{1 + 24} \\ a &= -6 \vee a = 4 \end{aligned}$$

C) Da die Folge wachsend ist und mit Null startet, verbleibt nur $a = 4$ und wir zeigen Beschränktheit:

$$a_n \leq 4$$

I.A.

$$a_0 = 0 \leq 4$$

I.V.$\forall n \in \mathbb{N}$ (beliebig, aber fest)

$$a_n \leq 4$$

I.B.

$$a_{n+1} \leq 4$$

I.S.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{2a_n + 28} - 2 \\ &\leq \sqrt{2 \cdot 4 + 28} - 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

D) Da die Folge monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, ist sie konvergent und es muss gelten $a = 4$.

Der Grenzwert -6 kann nie erreicht werden, da stets gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{2a_n + 28} - 2 \\ &\geq -2 \end{aligned}$$

Zur Übung betrachte man das Konstrukt

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+....}}}$$

Zunächst definieren wir dies rekursiv:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_{n+1} &= \sqrt{1+a_n} \end{aligned}$$

Und können von dieser Folge nun Monotonie und Beschränktheit zeigen. Den Grenzwert bezeichnet man im Übrigen als den goldenen Schnitt.

3.2.8 Konvergenz komplexer Folgen

Völlig analog wird die Konvergenz komplexer Folgen behandelt, in dem wir die oben behandelte Konvergenz reeller Zahlenfolgen auf den Real- und Imaginärteil anwenden und wenn beide konvergieren, konvergiert auch die komplexe Folge. Falls eine der beiden Folgen nicht konvergiert, ist auch die komplexe Folge divergent.

Bsp: Die Folge

$$a_n = \frac{in + \frac{1}{n} + 3n}{n+2} = i\frac{n}{n+2} + \frac{3n}{n+2}$$

konvergiert gegen

$$a = i + 3$$

3.2.9 Cauchy-Konvergenz

Ein grundlegendes Problem der Konvergenzuntersuchung

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

ist, dass Sie Konvergenz nur zeigen können, wenn Sie den Grenzwert bereits kennen. In diesem Abschnitt werden wir die Konvergenz ohne diese Kenntnis sicher stellen.

Definition 73 *(Cauchy-Konvergenz): Eine Folge a_n heisst **Cauchy-konvergent,** falls*

$$\begin{aligned} \forall\varepsilon &> 0 \; \exists n_0(\varepsilon) \; mit \; |a_n - a_m| < \varepsilon \\ \forall n &> m \geq n_0 \end{aligned}$$

Bsp.:
1. $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ ist Cauchy-konvergent, denn

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= \left|1 - \frac{1}{n} - (1 - \frac{1}{m})\right| \leq \frac{1}{m} < \varepsilon \\ \text{für } n &> m \geq n_0(\varepsilon) = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \end{aligned}$$

2. $a_n = n^2$ ist nicht Cauchy-konvergent, denn

$$|a_n - a_m| = \left|n^2 - m^2\right|$$

Und hier ist z.B. für $n = m + 1, \varepsilon = 1$

$$|a_n - a_m| = 2m + 1 > 1 = \varepsilon$$

Beachten Sie die Vorgehensweise:

Konvergenz: für alle m und n mit $n > m$ wird schliesslich (je nach Wahl von ε etwas früher oder später)

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

Divergenz: Egal wie gross dass n_0 gewählt ist, finden wir $n > m$ grösser als dieses n_0, so dass der Abstand grösser als ein vorgegebenes ε wird.

Kümmern wir uns nun um den Zusammenhang zwischen Konvergenz und Cauchy-Konvergenz.

Satz 74 *Jede konvergente Folge ist auch Cauchy-konvergent.*

Bew.: Sei a_n konvergent, d.h.

$$\begin{aligned} |a_n - a| &< \varepsilon \ \ \forall n \geq n_0 \\ |a_m - a| &< \varepsilon \ \ \forall m \geq n_0 \end{aligned}$$

dann ist auch

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |a_n - a + a - a_m| \\ &\leq |a_n - a| + |a_m - a| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

Aber gilt auch die Umkehrung?

Satz 75 *Jede Cauchy-konvergente Folge ist beschränkt.*

Bew.: Zu $\varepsilon = 1 \ \exists n_0(1)$, so dass

$$|a_n - a_m| < 1 \ \ \forall n > m \geq n_0(1)$$

Weiterhin gilt

$$|a_n| - |a_m| < |a_n - a_m| < 1$$

also

$$|a_n| < 1 + |a_m| \quad \forall n > m \geq n_0(1)$$

Insbesondere für $m = n_0(1)$ ist

$$|a_n| < 1 + |a_{n_0}| \quad \forall n \geq n_0(1)$$

und damit ist die Folge beschränkt (endlich viele vor n_0 und danach durch $1 + |a_{n_0}|$ beschränkt).

Hiermit können wir nun Äquivalenz zwischen Cauchy-Konvergenz und Konvergenz zeigen:

Satz 76 *Jede Cauchy-konvergente Folge (Cauchy-Folge) ist konvergent.*

Bew.: Siehe: Bolzano-Weierstraß Satz 64: Jede beschränkte Folge hat mindestens einen Häufungspunkt a.Damit

$$\begin{aligned} & \exists\infty - \text{viele } m \text{ mit} \\ |a_m - a| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Wähle nun ein $m \geq n_0(\varepsilon)$ mit $|a_m - a| < \varepsilon$, so ist für jedes $n > m$

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= |a_n - a_m + a_m - a| \\ &\leq |a_n - a_m| + |a_m - a| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad \text{qed.} \end{aligned}$$

Hieraus folgt, das der Häufungspunkt auch Grenzwert sein muss. Das $n_0(\varepsilon)$ entspricht dabei dem m.

3.2.10 Zusammenfassung Folgen

a_n Folge. Es existiert ein Grenzwert a falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \ \text{ mit } |a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq n_0$$

Die Überprüfung der Konvergenz geschieht mit einem der folgenden Kriterien:

1. Direkt über :$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon)$ mit $|a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq n_0$

2. Jede(s) Summe/Differenz/Produkt/Quotient konvergenter Folgen ist konvergent.
2. Monotonieprinzip: Ist die Folge monoton und beschränkt, so ist Sie konvergent.

3. Cauchy-Konvergenz:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon &> 0\ \exists n_0(\varepsilon) \text{ mit } |a_n - a_m| < \varepsilon \\ \forall n &> m \geq n_0 \end{aligned}$$

Ist die Funktion nicht monoton (aber weiterhin beschränkt), so besitzt Sie zumindest eine konvergente Teilfolge.

Und schliesslich: Jede Intervallschachtelung konvergiert.

3.3 Unendliche Reihen

Zur Motivation:
Geucht ist der Wert der Summe der natürlichen Zahlen, also

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + ...$$

Zunächst ist zu

$$\begin{aligned} A &= 1 - 1 + 1 - 1 + ... \\ -1 + A &= -1 + 1 - 1 + 1 - ... = -A \\ A &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Weiterhin ist zu

$$B = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - ...$$

$$\begin{aligned} 2B &= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - ... \\ &\quad\ + 1 - 2 + 3 - 4 + ... \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + ... = A \\ B &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Nun gilt für unsere gesuchte Summe:

$$\begin{aligned} N - B &= 1 + 2 + 3 + 4 + ... \\ &\quad -(1 - 2 + 3 - 4 + ...) \\ &= 4 + 8 + 12 + .. \\ &= 4N \end{aligned}$$

mit $B = \frac{1}{4}$ ist dann

$$\begin{aligned} N - \frac{1}{4} &= 4N \\ -\frac{1}{4} &= 3N \\ N &= -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

Dieses unsinnige Ergebnis sollte klar machen: Vorsicht bei unendlichen Reihen ! Gibt es einen Grenzwert? Wann darf ich Summanden umsortieren? Hochmotiviert gehen wir somit der Sache auf en Grund:

Definition 77 *Jede Folge a_k definiert durch*

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

eine neue Folge, die ***Folge der Teilsummen (Partialsummen)***

Falls benötigt wird auch hier die Folge bei 0 begonnen, also

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

wodurch das erste Folgenglied

$$S_0 = a_0$$

festgesetzt wird.

In gleicher Weise wie die Konvergenz der Folgen kann nun die neue Folge der Partialsummen auf Konvergenz untersucht werden. Also: Wann konvergiert

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

?

Bsp.:Der griechische Philosoph Zenon hatte einige seltsame Ideen. Eine davon war die, daß Bewegung unmöglich ist. Er versuchte, dies durch einen Wettlauf zwischen Achill, dem schnellsten Läufer Griechenlands, und einer Schildkröte zu belegen.Die Schildkröte erhält 100 Meter Vorsprung.

Achill, der zehnmal so schnell läuft wie das lahme Vieh, hat diese 100 Meter natürlich flugs überwunden. Eingeholt hat er die Schildkröte dann aber noch nicht, denn die ist in der Zeit ja auch gelaufen und zwar 10 Meter.

Wenn Achill diese 10 Meter gelaufen ist, ist die Schildkröte aber auch schon wieder ein bißchen weiter, sie hat immer noch einen Meter Vorsprung.

Den muß Achill ja nun noch laufen, um die Schildkröte einzuholen. Wenn er diesen Meter überwunden hat, ist die Kröte immer noch vorne. So geht das immer weiter. Der Vorsprung wird zwar immer kleiner, aber Achill hat keine Chance, die Schildkröte einzuholen. Wenn Achill, der schnellste Läufer der Antike, ein trödeliges Tier nicht einholen kann, dann ist doch wohl das ganze Konzept der Bewegung Quatsch, sagte dann Herr Zenon!

Versuchen wir dies nun über die Partialsummen darzustellen. Sei a_n die Strecke im $n-$ ten Schritt und beginnen wir die Zählung bei $n = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} a_0 &= 100 \\ a_1 &= 10 \\ &... \\ a_k &= 100 \cdot 10^{-k} \end{aligned}$$

Die Summe aller zurückgelegten Entfernungen ergibt sich gemäß

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} 100 \cdot 10^{-k} \\ &= 100 + 10 + 1 + 0,1 + 0,01 + ... \\ &= 111,1111... \end{aligned}$$

Offensichtlich gibt es zwar unendlich viele (immer kleiner werdende) Zeitabschnitte, aber die Gesamtstrecke überschreitet den o.a. Grenzwert trotzdem nicht.

In einem solchen Fall existiert ein Grenzwert der Reihe und daher definieren wir:

Definition 78 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k :=\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ *heisst* ***konvergent****, wenn die Folge S_n der Partialsummen konvergiert, d.h.*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Bem.: Die Konvergenzbezeichnungen ergeben sich analog zu denen des vorigen Kapitels:

S_n heisst konvergent falls $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0(\varepsilon)$ mit $|S_n - S| < \varepsilon \; \forall n \geq n_0$

3.3.1 Die unendliche geometrische Reihe

Wegen der besonderen Bedeutung in den folgenden Abschnitten wird hier nochmal auf die geometrische Reihe eingegangen. Zunächst kennen wir die endliche geometrische Reihe gemäß

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

Es ist $\forall x \in \mathbb{R}$ (und ebenso für $x \in \mathbb{C}$):

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + ... + x^n \\ x \cdot S_n &= x \cdot \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + ... + x^n = x + x^2 + ... + x^{n+1} \end{aligned}$$

und damit

$$S_n - x \cdot S_n = S_n \cdot (1 - x) = 1 - x^{n+1}$$

Hieraus folgt

$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

die endliche **geometrische Reihe.**

Damit ist für $|x| < 1 : \lim_{n\to\infty} x^n = 0$ und

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - \lim_{n\to\infty} x^{n+1}}{1 - x} \\ &= = \frac{1 - x \lim_{n\to\infty} x^n}{1 - x} \\ &= \frac{1 - x \cdot 0}{1 - x} \\ &= \frac{1}{1 - x} \end{aligned}$$

Entsprechend ist die Reihe für $|x| \geq 1$ divergent.
So ist z.B.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

Beim Übergang zu den komplexen Zahlen überlege man sich zunächst das gilt

$$|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$$

Nun ist falls $|x| < 1$ auch

$$\lim_{n\to\infty} |x|^n = \lim_{n\to\infty} |x^n| = 0$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0$$

dann gilt aber auch

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} x^n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \\
&= \frac{1}{1-x}\left(1 - \lim_{n\to\infty} x^{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{1-x}\left(1 - x\lim_{n\to\infty} x^{n}\right) \\
&= \frac{1}{1-x}
\end{aligned}$$

Bem.: Jede periodische Zahl kann als unendliche Summe und damit als Bruch dargestellt werden, z.B.

$$\begin{aligned}
0,4\overline{23} &= 0,4 + 0,0\overline{23} \\
&= 0,4 + \frac{1}{10}\cdot 0,\overline{23} \\
&= 0,4 + \frac{1}{10}\cdot (23\cdot 10^{-2} + 23\cdot 10^{-4} + 23\cdot 10^{-6} + ...) \\
&= 0,4 + \frac{23}{10}\cdot \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-2k} \\
&= 0,4 + \frac{23}{10}\cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^k = 0,4 + \frac{23}{10}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{100}} - 1\right) \\
&= 0,4 + \frac{23}{10}\cdot\frac{1}{99} = \frac{4}{10} + \frac{23}{990} = \frac{396+23}{990} = \frac{419}{990}
\end{aligned}$$

3.3.2 Cauchy Reihen

Definition 79 *S_n heisst **Cauchy-Reihe**, falls*

$$\begin{aligned}
\forall\varepsilon &> 0\ \exists n_0(\varepsilon) \quad \textit{mit} \ |S_n - S_m| < \varepsilon \quad \forall n > m \geq n_0 \\
&\quad \textit{bzw.} \\
\forall\varepsilon &> 0\ \exists n_0(\varepsilon) \quad \textit{mit} \ |\sum_{k=m+1}^{n} a_k| < \varepsilon \quad \forall n > m \geq n_0
\end{aligned}$$

Bem.: Beachte

$$\begin{aligned}
S_n - S_m &= \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k \\
&= \sum_{k=m+1}^{n} a_k
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich aus der Äquivalenz von Konvergenz und Cauchy-Konvergenz für Folgen analog:

Satz 80 ***Cauchy-Konvergenz für Reihen*** *$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ konvergiert genau dann, wenn S_n Cauchy-Reihe ist.*

Weiterhin gilt, dass, sofern die Folge keine Nullfolge ist, die Reihe nicht konvergieren kann. Aber es gibt auch Nullfolgen, deren Partialsummen beliebig gross werden:

Bem: Ohne Einschränkung kann $n = m + l$ mit $l \in \mathbb{N}$ gewählt werden.
Beispiele:

1. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ ist divergent (Harmonische Reihe), denn

$$\begin{aligned} S_{2^n} = & \underbrace{1}_{\geq 1\cdot\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq 1\cdot\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \\ > & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... = (n+1) \cdot \frac{1}{2} > \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Und damit werden die Partialsummen divergent. Das Cauchy Kriterium liefert analog
$\forall m$ und $n = 2m$:

$$|S_{2m} - S_m| \geq m\frac{1}{2m} = \frac{1}{2} = \varepsilon$$

also divergent.

2. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$:

$$\begin{aligned} S_n - S_m &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \sum_{k=m+1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^m - \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m \end{aligned}$$

S_n ist Cauchy-Reihe, denn $S_n - S_m$ wird beliebig klein:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^m &< \varepsilon \\ m \cdot \ln(\frac{1}{2}) &< \ln(\varepsilon) \\ m &> \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(\frac{1}{2})} \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) = \left\lfloor \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(\frac{1}{2})} \right\rfloor + 1 :$

$$S_n - S_m \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m < \varepsilon$$

Satz 81 *Sei $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ konvergent, dann ist a_k Nullfolge.*

Bew.: Es ist

$$S_n - S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_n$$

und wegen der Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$$

Damit ist auch

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - S_{n-1} = S - S = 0$$

Bem.: Ist also $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, so ist S_n divergent.

Folgende Rechenregeln übertragen sich in natürlicher Weise von den Folgen:

Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm b_k &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k \\ \sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k &= c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k \end{aligned}$$

Bem.: Alle Rechenregeln gelten selbstverständlich auch für den Summationsbeginn bei $k = 0$.

Definition 82 *Gilt $\sum_{k=0}^{n} |a_k|$ konvergent (Kurz: $\sum_{k=0}^{n} |a_k| < \infty$), so heisst die **Reihe** $\sum_{k=0}^{n} a_k$ **absolut konvergent**. Analog heisst eine **Folge** a_n absolut konvergent, falls $|a_n|$ konvergent ist.*

Satz 83 *Ist $\sum_{k=0}^{n} a_k$ absolut konvergent, so ist $\sum_{k=0}^{n} a_k$ konvergent.*

Bew.: Zeige $\sum_{k=0}^{n} a_k$ ist Cauchy-Reihe:

$$\left|\sum_{k=m+1}^{m+l} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{m+l} |a_k| < \varepsilon$$

q.e.d.

Lemma 84 *Ist $\sum_{k=0}^{n} a_k$ konvergent und $a_k \geq 0$, so ist auch $\sum_{k=0}^{n} a_k$ absolut konvergent.*

Bew. Wg. $a_k \geq 0$ ist $\sum_{k=0}^{n} |a_k| = \sum_{k=0}^{n} a_k$ konvergent. q.e.d.

Bem.: Die Definition der absoluten Konvergenz existiert auch für Folgen, jedoch ist dort die Konvergenz die stärkere Bedingung. So ist $a_n = (-1)^n$ zwar absolut konvergent, aber nicht konvergent.

3.3.3 Teleskopsummen und Teleskopprodukte

Betrachten wir wiederum die Reihe

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - (\frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n+1}) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Weiterhin ist (s.u. Partialbruchzerlegung):

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)}$$

Wenn sich Terme auslöschen, sprechen wir von Teleskopsummen. Der Grenzwert kann dann als Folgen-Grenzwert der endlichen Reihe berechnet werden.

In diesem Fall

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

Diese Technik kann verallgemeinert werden. Bsp:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k\cdot(k+2)}$$

Wir versuchen einen Ansatz

$$\frac{2}{k\cdot(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+2}$$

Und erhalten nach Multiplikation mit $k\cdot(k+2)$

$$2 = A\cdot(k+2) + B\cdot k$$

Wir setzen nun Werte für k ein (beliebige, aber die Nullstellen des ursprünglichen Nenners liefern die einfachsten Werte):

$$\begin{aligned} k &= 0: \quad 2 = 2A \Rightarrow A = 1 \\ k &= -2 : 2 = -2B \Rightarrow B = -1 \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\frac{2}{k\cdot(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$$

In die endliche Summe eingesetzt:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k\cdot(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - ... \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

Nun kann der Grenzwert gebildet werden

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Teleskopsumme eignen sich daher besonders zur Berechnung des Grenzwertes, während die anderen Verfahren reine Existenzbeweise waren.

Konvergiert bereits jede der Teleskopsummen können diese auch separat betrachtet werden.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2\cdot(k+1)^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 \end{aligned}$$

Die Herleitung über die Teleskopsumme wäre entsprechend:

1. Zerlegung in Partialbrüche (bitte nachrechnen)

$$\frac{2k+1}{k^2 \cdot (k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

2. Betrachten der endlichen Summe

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

3. Grenzwertbildung

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = 1$$

Allgemein betrachten wir die unendliche Summe

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - a_{k+l}$$

und beschreiben die endliche Summe als Funktion von n

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{k+l} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=l+1}^{n+l} a_k \\ &= \sum_{k=1}^{l} a_k - \sum_{k=n+1}^{n+l} a_k \end{aligned}$$

Wir erhalten damit $2l$ Summanden und bilden dann den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

Analog gilt:
Ein Produkt der Form

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

mit $a_k \neq 0$ heisst Teleskopprodukt.

Es ist

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\alpha_{n+1}}{a_1}$$

Beweis per Induktion:
I.Anfang.: n=1

$$\prod_{i=1}^{1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\alpha_2}{a_1}$$

I.Vorr.: Für alle n sei

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\alpha_{n+1}}{a_1}$$

I.Behauptung: Dann ist:

$$\prod_{i=1}^{n+1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\alpha_{n+2}}{a_1}$$

I.Schluss

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n+1} \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \prod_{i=1}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} \cdot \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \\ &= \frac{\alpha_{n+1}}{a_1} \cdot \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \\ &= \frac{\alpha_{n+2}}{a_1}\end{aligned}$$

Damit gilt z.B.

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)^2 &= \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 = \prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^2}{k^2} \\ &= (n+1)^2\end{aligned}$$

3.3.4 Konvergenzkriterien für fast immer nicht negative Reihen

Die folgenden Überlegungen gelten somit für Reihen die $a_n \geq 0$. Dies kann allgemein benutzt werden um bei einer beliebigen Reihe durch Betragsbildung bereits die absolute Konvergenz zu zeigen, woraus die Konvergenz der ursprünglichen Reihe folgt.

Das Verfahren

$$\begin{aligned} & 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq 1\cdot\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \frac{1}{9} + \\ > \; & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots \to \infty\end{aligned}$$

ist typisch. Finden wir zu einer positiven Folge, eine ebenfalls positive (fast immer) kleinere Folge, die bereits divergiert, so divergiert auch die ursprüngliche.

Umgekehrt gilt: Finden wir eine (betragsmässig) (fast immer) größere Folge, die bereits konvergiert, dann muss auch die ursprüngliche Folge konvergieren.

Z.B.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}}_{<2\cdot\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}}_{<4\cdot\frac{1}{4^2}=\frac{1}{4}} + \frac{1}{8^2} + \\
&< 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2
\end{aligned}$$

Anm.: Den exakten Wert der Reihe zu berechnen ist ungleich schwieriger. In diesem Fall ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Das Majoranten- und Minorantenkriterium

Satz 85 *Sei* $0 \leq a_k \leq b_k \ \forall k \in \mathbb{N}$ *fast immer*

1. ***Majorantenkriterium:*** *Gilt* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergiert, so konvergiert* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$*.* b_k *heisst konvergente Majorante.*

2. ***Minorantenkriterium:*** *Gilt* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergiert, so divergiert* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$*.* a_k *heisst divergente Minorante.*

Bew.: 1.) Sei $\sum_{k=1}^{n} b_k = B_n, \sum_{k=1}^{\infty} b_k = B, \sum_{k=1}^{n} a_k = A_n$. Dann ist A_n monoton wachsend und wegen

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k = B$$

beschränkt und damit ist A_n konvergent.

2.) Ann.: $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ konvergiert $\Rightarrow$ mit 1. $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ konvergiert. Widerspruch !

Bsp.:

1.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ also ist } \frac{1}{k^2} \text{ konvergente Majorante.}$$

damit
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k} \text{ konvergiert.}$$

2.
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}+k} &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}, \ \frac{1}{k} \text{ ist divergente Minorante} \end{aligned}$$

damit
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}+k} \text{ ist divergent.}$$

3. Entsprechend
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k} > \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ divergiert.}$$

Etwas vorsichtiger ist zu argumentieren, falls die Reihe negative Summanden im Nenner bzw. positive im Zähler enthält. Verdeutlichen wir dies am Beispiel:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k+1}{k^3-k-1}$$

erscheint asymptotisch wie $\frac{1}{k^2}$ zu verlaufen. Zur Abschätzung müssten wir jedoch den Zähler vergrössern bzw. Nenner verkleinern. Dabei muss die wesentliche Konvergenzstruktur $\frac{1}{k^2}$ erhalten bleiben.
Es gilt:
Im Zähler:
$$1 < \frac{k}{2}$$

Im Nenner:

$$\begin{aligned} k &< \frac{1}{3}k^3 \\ \text{bzw. } -k &> -\frac{1}{3}k^3 \end{aligned}$$

und
$$-1 > -\frac{1}{2}k^3$$

allerdings erst ab $k = 3$. Dort gilt

$$\begin{aligned}\frac{k+1}{k^3-k-1} &< \frac{k+\frac{1}{2}k}{k^3-\frac{1}{3}k^3-\frac{1}{2}k^3} \\ &= \frac{\frac{3}{2}k}{\frac{1}{6}k^3} = 9\cdot\frac{1}{k^2}\end{aligned}$$

Da $\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ konvergiert haben wir eine konvergente Majorante $9\cdot\frac{1}{k^2}$ gefunden.

Das Cauchy-Kondensationskriterium

Satz 86 *Sei* $lim_{n\to\infty}a_n = 0, a_n$ *monoton fallend,* $a_n \geq 0$*, dann ist äquivalent:*

$$i)\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ ist konvergent}$$

$$ii)\sum_{k=1}^{\infty} 2^k\cdot a_{2^k} \text{ ist konvergent}$$

Bew.: $i) \Rightarrow ii)$:

$$\begin{aligned}a &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \underbrace{a_3 + a_4}_{\geq 2\cdot a_4} + \underbrace{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}_{\geq 4\cdot a_8} + \\ &\geq 0 + a_2 + 2\cdot a_4 + 4\cdot a_8 + ... \\ &= \frac{1}{2}\cdot(2a_2 + 4\cdot a_4 + 8\cdot a_8 + ...) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} 2^k\cdot a_{2^k}\end{aligned}$$

Damit ist $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k\cdot a_{2^k}$ beschränkt durch $2a$ und monoton wachsend und daher konvergent (Monotonieprinzip).

$ii) \Rightarrow i)$:

$$\begin{aligned}b &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^k\cdot a_{2^k} = 2a_2 + 4\cdot a_4 + 8\cdot a_8 + ... \\ &\geq a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + ... \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - a_1\end{aligned}$$

Damit ist $\sum_{k=1}^{n} a_k$ monoton wachsend und beschränkt durch $b + a_1$ und damit konvergent (Monotonieprinzip).

q.e.d.

Beispiele:
1.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ divergent, denn } \quad :$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k} \quad = \quad \sum_{k=1}^{\infty} 1 = n \text{ divergent}$$

2.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ konvergent, denn } \quad :$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{(2^k)^2} \quad = \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ konvergent (geom. Reihe)}$$

Insgesamt gilt:

1. Da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent, ist mit dem Minorantenkriterium

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \text{ divergent für } \alpha \leq 1$$

2. Da $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ konvergent, ist mit dem Majorantenkriterium

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \text{ konvergent für } \alpha \geq 2$$

Und für $\alpha \in (1,2)$ ist mit dem Cauchy-Kondensationsprinzip und $\alpha = 1 + \beta, \beta \in (0,1)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad = \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\beta}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{1}{k^\beta} \text{ konvergent, da}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^{k\beta}} \quad = \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k\beta}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^\beta}\right)^k \text{ konvergent wg } \frac{1}{2^\beta} < 1$$

Also gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \text{ konvergent für } \alpha \quad > \quad 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \text{ divergent für } \alpha \quad \leq \quad 1$$

Gibt es noch etwas *dazwischen* ? ... Ja:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \cdot \ln k}$$

Dies divergiert mit dem Cauchy-Kondensationsprinzip da

$$\sum_{k=2}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k \cdot \ln 2^k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ divergent.}$$

Das Wurzel- und Quotientenkriterium

Wir halten zunächst noch einmal fest: Für die geometrische Reihe gilt:

$$\begin{array}{rcl} & & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c^n \text{ ist} \\ \text{konvergent für } |c| & < & 1 \\ \text{divergent für } |c| & \geq & 1 \end{array}$$

Betrachten wir nun eine Folge $a_n \geq 0$ und berechnen

$$r := \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Falls nun gilt $r < 1$, so bedeutet dies dass für beliebige positive ε schliesslich gilt:

$$|\sqrt[n]{a_n} - r| < \varepsilon$$

und damit

$$\sqrt[n]{a_n} < r + \varepsilon$$

Da $r < 1$ gilt, finden wir ein $\varepsilon-$Band, welches nach oben immer noch unterhalb der 1 liegt, also formal zu

$$\varepsilon = \frac{1-r}{2}$$

ist für $n > n_0(\varepsilon)$

$$\sqrt[n]{a_n} < r + \frac{1-r}{2} = \frac{r+1}{2} < 1$$

Wir setzen damit

$$c := r + \frac{1-r}{2} = \frac{r+1}{2}$$

und es gilt $c < 1$.

Mit Hilfe der geometrischen Reihe gilt dann für $n > n_0$

$$\begin{array}{rcl} \sqrt[n]{a_n} & < & c < 1 \\ a_n & < & c^n \end{array}$$

und damit ist c^n konvergente Majorante und damit auch $\sum a_n$ konvergent.

Ist umgekehrt $r > 1$, so gibt es zu $\varepsilon = \frac{r-1}{2}$ ein n_0 mit

$$|\sqrt[n]{a_n} - r| < \varepsilon$$

und

$$\sqrt[n]{a_n} > r - \varepsilon = r - \frac{r-1}{2} = \frac{r+1}{2} := c > 1$$

und damit ist $\sqrt[n]{a_n} > 1$ und damit auch $a_n > 1$ und somit keine Nullfolge. Daher muss Divergenz vorliegen.

Dies wird festgehalten im :

Satz 87 ***Wurzelkriterium*** *Sei a_n eine Folge mit $0 \leq a_n$ fast immer, dann gilt: Existiert*

$$r := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

so ist für
1. r<1 die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent (sogar absolut konvergent)
2. r>1 die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent
3. r=1 hier keine Aussage möglich

Betrachten wir beliebige Folgen, so können wir bei der Konvergenz wegen der absoluten Konvergenz im obigen Satz modifiziert verwenden:

Satz 88 ***Wurzelkriterium-2*** *Sei a_n eine Folge. Existiert*

$$r := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

so ist für
1. r<1 die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent
2. r>1 die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent
3. r=1 hier keine Aussage möglich

Bew.: Es bleibt nur 2. zu zeigen:
Wegen $r := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ ist $b_n = |a_n| > 1$. Dann ist aber b_n keine Nullfolge und damit auch a_n nicht, weshalb die Reihe divergiert.
Bsp.: Für den Fall 3 sollen hier zwei Reihen mit r=1 aufgeführt werden, die einmal konvergieren und einmal divergieren.

Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ ist konvergent}$$

mit

$$\begin{aligned} r &:= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right) \\ &= 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Aber:
die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ ist divergent}$$

mit

$$\begin{aligned} r &:= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Anwendung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n^2} \quad \text{ist konvergent}$$

denn

$$\begin{aligned} r &:= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n} \\ &= \frac{1}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1 \end{aligned}$$

Häufig ist es jedoch etwas umständlich die $n-$te Wurzel zu berechnen. Hier hilft ein ähnliches Kriterium - das Quotientenkriterium:

Nun sei wieder $0 < a_n$ und gilt weiterhin

$$r := \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

so ist ähnlich wie beim Wurzelkriterium

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - r\right| < \varepsilon$$

also wieder mit $\varepsilon = \frac{1-r}{2}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r + \frac{1-r}{2} = \frac{r+1}{2} < 1$$

und wieder mit

$$c := \frac{r+1}{2} < 1$$

$$a_{n+1} \leq c \cdot a_n$$

ab einem Index $n_{0.}$
Damit ist induktiv

$$a_{n+1} \leq c^{n+1-n_0} \cdot a_{n_0}$$

bzw

$$a_n \leq c^{n-n_0} \cdot a_{n_0} = c^n \cdot \frac{a_{n_0}}{c^{n_0}} = k \cdot c^n$$

Hier ist $c^n \cdot \frac{a_{n_0}}{c^{n_0}}$ die konvergente Majorante und die Reihe $\sum a_n$ konvergiert.
Umgekehrt gilt falls

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r > 1$$

dass schliesslich gilt

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &\geq c > 1 \\ a_{n+1} &> a_n \end{aligned}$$

und damit ist wegen $a_n > 0$ dieses keine Nullfolge.

Dies hält der folgende Satz fest:

Satz 89 ***Quotientenkriterium*** *Sei a_n eine Folge mit $0 < a_n$ fast immer, dann gilt: Existiert*

$$r := \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

so ist für
1.$r < 1$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent (sogar absolut konvergent)
2. $r > 1$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent
3. $r = 1$ hier keine Aussage möglich

Bem: Enthält die Folge auch negative Summanden, so kann wegen der aboluten Konvergenz das Kriterium modifiziert werden:

Satz 90 ***Quotientenkriterium-2*** *Sei a_n eine Folge. Existiert*

$$r := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

so ist für
1.$r < 1$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent
2. $r > 1$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent
3. $r = 1$ hier keine Aussage möglich

Bem.: Existiert der Grenzwert der Folge nicht, so reicht in beiden Fällen zu zeigen, dass der grösste Häufungspunkt die Bedingung erfüllt und die Folge $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ bzw. $\sqrt[n]{a_n}$ beschränkt ist, also

$$\begin{aligned} r &: = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \\ &\text{bzw} \\ r &: = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{a_n} < 1 \end{aligned}$$

und für die Divergenz

$$\begin{aligned} r &: = \lim_{n\to\infty} \inf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \\ &\text{bzw} \\ r &: = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{a_n} > 1 \end{aligned}$$

Bsp.:
1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$
Es ist

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0 \end{aligned}$$

und damit ist die Folge konvergent.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x > 0$

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} \cdot x \\ &= x \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0 \end{aligned}$$

Bem.: Da a_n eine positive Folge ist, zeigen Quotienten- und Wurzelkriterium die absolute Konvergenz der Reihen. Damit gilt auch für beliebiges x :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| \text{ konvergiert}$$

und hieraus folgt die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

3. Noch ein Beispiel, wo der Grenzwert nicht existiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

mit

$$a_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{für } n \text{ gerade} \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

liefert

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$$

und damit die Konvergenz.

Abschliessend sei noch bemerkt, dass mit Wurzel- und Quotientenkriterium die absolute Konvergenz einer Reihe gezeigt wird. Wenn eine Reihe jedoch nicht absolut konvergiert, so kann Sie trotzdem konvergieren. In diesem Fall muss aber der Grenzwert 1 herauskommen, da im Falle, dass der Grenzwert grösser als eins wird, die Folge keine Nullfolge ist und damit Divergenz vorliegt.

3.3.5 Alternierende Reihen

Bisher wurde Konvergenz für positive Reihen (zumindest ab einem gewissen Index, also fast immer) gezeigt. Wir betrachten nun Reihen mit wechselndem positiven und negativen Vorzeichen:

Definition 91 *Sei a_n eine Folge mit $0 \leq a_n$. Dann heisst die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n$$

alternierende Reihe.

Ausgeschrieben ist die alternierende Reihe

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...$$

Betrachten wir zunächst die alternierende harmonische Reihe

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \\ = \quad & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - ... \end{aligned}$$

Betrachten wir die Folge der geraden Partialsummen, so ist

$$\begin{aligned} b_1 &= S_2 = a_1 - a_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ b_2 &= S_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} > b_1 \\ b_3 &= S_6 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} > b_2 \\ & ... \end{aligned}$$

so ist die Folge b_n monoton steigend.
Betrachten wir die Folge der ungeraden Partialsummen, so ist

$$\begin{aligned} c_1 &= S_1 = a_1 = 1 \\ c_2 &= S_3 = a_1 - a_2 + a_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 1 = c_1 \\ c_3 &= S_5 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < c_2 \\ & ... \end{aligned}$$

so ist die Folge c_n monoton fallend.

Insbesondere ist

$$c_n - b_n = \frac{1}{2n}$$

Weiterhin ist $c_n > b_n \ \forall n$ und damit

$$c_n > b_1, \text{ d.h. } c_n \text{ ist nach unten beschränkt}$$

und

$$b_n < c_1, \text{ d.h. } b_n \text{ ist nach oben beschränkt}$$

Damit sind beide Folgen konvergent und es existieren

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n\to\infty} b_n \\ y &= \lim_{n\to\infty} c_n \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} y - x &= \lim_{n\to\infty} c_n - \lim_{n\to\infty} b_n \\ &= \lim_{n\to\infty} c_n - b_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0 \end{aligned}$$

gilt

$$y = x$$

und die Folge konvergiert.

Benutzt haben wir hier, dass die alternierenden Folgenterme betragsmässig eine monoton fallende Nullfolge sind. Dies wird nun allgemein festgehalten im

Satz 92 ***Konvergenzkriterium von Leibniz für alternierende Reihen***
Sei $a_n > 0$ und a_n monoton fallend und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n$$

konvergent.

Bem.: Sinnvoll ist hier $a_n > 0$.Wäre ein $a_n = 0$ so wären alle folgenden wegen der Monotonie ebenfalls 0 und daher die Reihe konvergent.

Bew. Analog zur alternierenden harmonischen Reihe.

Bei diesen Reihen ist auch die näherungsweise Berechnung des Grenzwertes möglich, denn es ist beim Abbruch der Reihe nach dem $m - ten$ Glied

$$\begin{aligned} |S - S_m| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n - \sum_{n=1}^{m} (-1)^{n-1} \cdot a_n \right| \\ &= \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n \right| = \left| (-1)^m a_{m+1} + (-1)^{m+1} a_{m+2} + ... \right| \\ &= \left| a_{m+1} \underbrace{- a_{m+2} + a_{m+3}}_{\leq 0} ... \right| \leq a_{m+1} \end{aligned}$$

Bsp.: Berechnen Sie

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$$

auf 3-Stellen genau, d.h.

$$|S - S_m| \leq 10^{-3}$$

Hinreichend ist dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{m+1} &\leq 10^{-3} \\ m &\geq 999 \end{aligned}$$

also sind die ersten 999 Summanden auszurechnen.

3.3.6 Zusammenfassung Konvergenzkriterien

An Beispielen:

1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Konvergent wg Leibniz

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

divergent mit Minorante $\frac{1}{n}$

3.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$$

divergent wg Cauchy

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

konvergent wg Quotientenkriterium

5.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

konvergent wg Wurzelkriterium

3.3.7 Umordnung von Reihen

Vorsicht ist geboten bei der Umordnung der Reihen. Auch Klammerung - das Assoziativgesetz - darf nicht einfach so angewandt werden.

Beispiel:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + ...$$

ist divergent. Klammerung würde aber sogar mehrere Grenzwerte ermöglichen:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n &= 1 - 1 + 1 - 1 + ... \\ &= (1-1) + (1-1) + ... \\ &= 0 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n &= 1 - 1 + 1 - 1 + ... \\ &= 1 + (-1+1) + (-1+1) + ... \\ &= 1 \end{aligned}$$

Es gilt jedoch (ohne Beweis):

Satz 93 *Ist die Reihe $\sum a_k$ absolut konvergent, so dürfen die Summanden beliebig umsortiert und geklammert werden.*

Ist die Reihe nur konvergent, gilt dies wiederum nicht. Betrachten wir

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$$

so gilt

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

und damit

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1 = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - ...$$

Eine Umsortierung liesse ein anderes Ergebnis erzielen. Wir können immer soviele Terme subtrahieren, bis die Gesamtsumme negativ wird und dann die nächste positive Zahl nehmen, also

$$S = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{3} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + ...$$

und sehen damit, dass das Ergebnis zumindest negativ werden müsste. Eine Umsortierung führt also zum falschen Ergebnis.

Somit gilt das Kommutativgesetz nicht bei unenendlichen Reihe.Im obigen Fall darf auch die Summe nicht zerlegt werden, denn es ist zwar für jedes endliche n

$$\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}$$

Jedoch ist im Grenzübergang

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1$$

während weder $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ noch $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}$ existieren.

3.3.8 Das Cauchy-Produkt

Wir betrachten nun Produkte zweier unendlicher Reihen. Als anschauliches Beispiel betrachten wir

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i$$

Das Ergebnis kennen wir bereits:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$$

Beide Reihen sind absolut konvergent.

Wir berechnen

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + ...\right) \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + ...\right)$$

Wir multiplizieren aus und sortieren um (geometrische Reihen sind absolut konvergent), in dem wir nach der Summe l der Exponenten sortieren:

$$\begin{array}{lc}
l = 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \\
l = 1 & \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \\
l = 2 & \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \\
\;... &
\end{array}$$

Daher gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{l-k}$$

Dieses liesse sich dann berechnen zu

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^l \sum_{k=0}^{l}\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-k} &= \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^l \sum_{k=0}^{l}\left(\frac{3}{2}\right)^k \\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^l \frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{l+1}}{1-\frac{3}{2}} \\
&= -2\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^l - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^l \\
&= -2\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \frac{3}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) \\
&= -2\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{6}{2}\right) = 3
\end{aligned}$$

Verallgemeinert gilt:

Satz 94 *Sei $\sum a_k$ absolut konvergent, $\sum b_k$ konvergent, dann ist*

$$c_l = \sum_{k=0}^{l} a_k \cdot b_{l-k}$$

absolut konvergent und es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{i=0}^{\infty} b_i &= \sum_{l=0}^{\infty} c_l \\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l} a_k \cdot b_{l-k}
\end{aligned}$$

Bsp.: Es ist für $c < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c^k = \frac{1}{1-c}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-c)^2} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} c^k\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} c^k \cdot \sum_{i=0}^{\infty} c^i \\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l} c^k \cdot c^{l-k} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l} c^l \\
&= \sum_{l=0}^{\infty}(l+1)c^l = \sum_{l=0}^{\infty} l \cdot c^l + \sum_{l=0}^{\infty} c^l \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} l \cdot c^l + \frac{1}{1-c}
\end{aligned}$$

und damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{\infty} l \cdot c^l &= \frac{1}{(1-c)^2} - \frac{1}{1-c} \\
&= \frac{1-(1-c)}{(1-c)^2} = \frac{c}{(1-c)^2}
\end{aligned}$$

Also ist z.B.

$$\sum_{l=0}^{\infty} l \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^l = \frac{\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^2} = 2$$

Schliesslich soll nun noch ein Beispiel gebracht werden, welches zeigt, dass die Umordnung bei nicht absolut konvergenten Reihen unzulässig ist.

Es ist

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}}$$

konvergent als Summe einer alternierenden Nullfolge gemäss Leibniz. Wir definieren der Vollständigkeit halber $a_0 = 0$

Damit ist

$$S^2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

ebenfalls konvergent.

Berechnen wir dagegen das Cauchy Produkt

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_l$$

mit (beachte: $a_0 = 0$)

$$\begin{aligned} c_l &= \sum_{k=0}^{l} a_k \cdot a_{l-k} = \sum_{k=1}^{l-1} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot (-1)^{l-k} \frac{1}{\sqrt{l-k}} \\ &= \sum_{k=1}^{l-1} (-1)^l \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{l-k}} = (-1)^l \cdot \sum_{k=1}^{l-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{l-k}} \end{aligned}$$

so ist der Wert in der Summe

$$|c_l| > \sum_{k=1}^{l-1} \frac{1}{\sqrt{l-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{l-1}} = \frac{l-1}{l-1} = 1$$

Damit ist c_l keine Nullfolge und es gilt für das Cauchy-Produkt

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_l \text{ ist divergent}$$

3.4 Potenzreihen

Wir betrachten nun als Funktionen Polynome unendlichen Grades und definieren:

Definition 95 *Sei $x \in \mathbb{R}$, $a_n \in \mathbb{R}$, so heisst*

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

*reelle **Potenzreihe** von x.*

Bem.: Entsprechend heissen für $x \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$ die Reihen komplexe Potenzreihen.

Wir betrachten nun die Folge als vorgegeben und definierend für die Potenzreihe und je nach gewähltem Wert von x wird die so entstehende unendliche Reihe konvergieren oder divergieren.

Lemma 96 *Jede Potenzreihe konvergiert für $x = 0$*

Bew.: Es ist

$$p(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 0^n = a_0$$

und damit konvergent.

Eine konvergente Reihen dieser Gestalt haben wir bereits kennengelernt:

$a_n = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

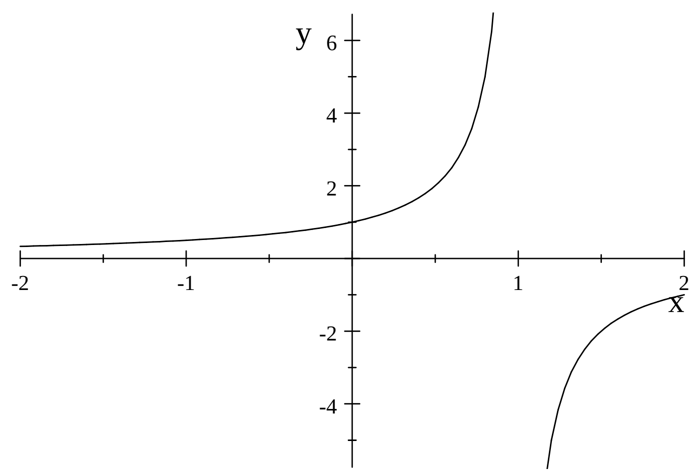
Hier hatten wir gesehen, dass die Reihe konvergiert für $|x| < 1$ und zwar gegen den Wert

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

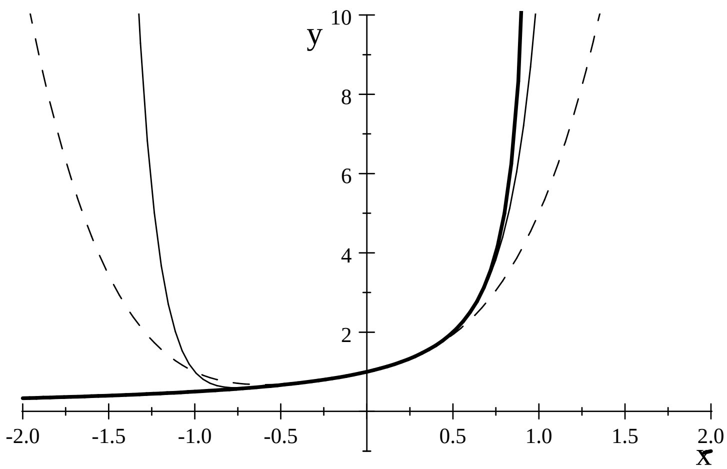
Anders interpretiert kann die Funktion $\frac{1}{1-x}$ersetzt werden durch die Funktion

$$1 + x + x^2 + ...$$

Grafisch: Zeichnen wir die Funktion $\dfrac{1}{1-x}$:



und nun die Potenzreihen bis zum k-ten Term - hier k=4 (gestrichelt) und k=10 - so sehen wir auf dem Intervall [-1,1] weitgehende Übereinstimmung.



Wann konvergiert nun eine beliebige Reihe?

Also: Sei eine Folge - siehe Bespiel 1: nicht notwendig eine Nullfolge - gegeben. Für welche Werte $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die zugehörige Potenzreihe $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$?

Das Quotientenkriterium liefert hier für positive a_n und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$$r := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

Konvergenz.

Hier ist nun der Summand $a_n x^n$ und Anwendung des gleichen Kriteriums liefert

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} \cdot x^{n+1}}{a_n \cdot x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| = r \cdot |x| < 1$$

also

$$|x| < \frac{1}{r} =: R$$

Es ist aber auch

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{r} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \end{aligned}$$

Also: Jede Potenzreihe konvergiert für

$$\boxed{|x| < R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|}$$

Nun zur Divergenz: Ist die Folge keine Nullfolge, also auch

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}\cdot x^{n+1}}{a_n\cdot x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x| = r\cdot|x|$$

so kann die Folge nicht konvergieren.

Für

$$r\cdot|x| = 1$$

bzw.

$$|x| = \frac{1}{r}$$

kann keine Aussage gemacht werden.

Die gleiche Herleitung mit dem Wurzelkriterium liefert entsprechend

$$R = \frac{1}{r} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Damit insgesamt:

Satz 97 *Jede Potenzreihe konvergiert für*

$$|x| < R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

und divergiert für

$$|x| > R$$

bzw. konvergiert für

$$|x| < R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

und divergiert für

$$|x| > R$$

Betrachten wir nun Potenzreihen die um einen Entwicklungspunkt x_0 verschoben sind, also der Form

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

so ergibt sich analog

Satz 98 *Jede Potenzreihe $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ konvergiert für*

$$|x - x_0| < R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

und divergiert für

$$|x - x_0| > R$$

bzw. konvergiert für

$$|x - x_0| < R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}}$$

und divergiert für

$$|x - x_0| < R$$

Diese Überlegungen gelten auch für komplexe Zahlen, welches grafisch zu einem Kreis um den Punkt x_0 mit Radius R führt.

Innerhalb dieses Kreises herrscht Konvergenz, ausserhalb Divergenz und auf dem Rand kann keine Aussage gemacht werden.

Definition 99 $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ *bzw.* $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}}$ *heisst der* ***Konvergenzradius der Potenzreihe.***

Auf dem Kreisrand, bzw. bei reellen Zahlen für

$$|x - x_0| = R$$

d.h.

$$x = x_0 \pm R$$

muss der **Rand** gesondert betrachtet werden.

Beispiel:

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x - 0)^n \end{aligned}$$

Wir sehen $x_0 = 0, a_n = \frac{1}{n}$

und

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1 \end{aligned}$$

Also konvergiert die Reihe für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$.

Der Rand $|x| = 1$, d.h. $x = 1$ und $x = -1$ muss nun gesondert betrachtet werden:

$$x = 1 :$$

$$\begin{aligned} p(1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 1^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \end{aligned}$$

ist divergent (harmonische Reihe).

$$x = -1 :$$

$$p(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n$$

ist konvergent gemäß Leibnizkriterium für alternierende Reihen.

Bem.: Wird $r = 0$, so wird die Gleichung

$$r \cdot |x| < 1$$

bzw.

$$r \cdot |x - x_0| < 1$$

für jede Zahl erfüllt und die Reihe konvergiert stets. Wir bezeichnen dann den Konvergenzraidus mit $R = \infty$.

Ist $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ divergent (wird beliebig gross), so ist obige Gleichung nur für $x = 0$ erfüllt. Insgesamt haben wir stets einen der folgenden Fälle

1. Konvergenz nur für $x = 0$ bzw $x = x_0$
2. Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$
3. Konvergenz für $|x - x_0| < R$ und Divergenz für $|x - x_0| > R$

Bem.: Existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ bzw $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ nicht, so darf der Limes durch den limsup ersetzt werden.

3.4.1 Spezielle Potenzreihen

Wir betrachten nun eine Funktion der Gestalt

$$f(x) = \frac{a}{b + cx}$$

und wollen dessen Potenzreihe um einen beliebigen Punkt x_0 sowie den Konvergenzradius dieser Reihe aus der Kenntnis der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{1-x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{für } |x| < 1 \end{aligned}$$

ermitteln.

Völlig analog ergibt sich aus der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{1-(x-x_0)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (x-x_0)^n \quad \text{für } |x-x_0| < 1 \end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{1-c(x-x_0)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(c \cdot (x-x_0)\right)^n \quad \text{für } |c \cdot (x-x_0)| < 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c^n \cdot (x-x_0)^n \quad \text{für } |x-x_0| < \frac{1}{|c|} \end{aligned}$$

Die restlichen Konstanten lassen sich nun durch reines Ausklammern vor die Summe ziehen.

Bsp.:
Wir wollen die Potenzreihe um $x_0 = 1$ der Reihe

$$f(x) = \frac{3}{5 + 2x}$$

bestimmen. Zunächst ist:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3}{5+2x} \\
&= 3 \cdot \frac{1}{5+2(x-1)+2} \\
&= 3 \cdot \frac{1}{7-(-2)\cdot(x-1)} \\
&= \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{1-\frac{-2}{7}(x-1)} \\
&= \frac{3}{7} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{7} \cdot (x-1) \right)^n \quad \text{für } \left| \frac{-2}{7}(x-1) \right| < 1 \\
&= \frac{3}{7} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{7} \right)^n \cdot (x-1)^n \quad \text{für } |x-1| < \frac{7}{2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{-2}{7} \right)^n \cdot (x-1)^n \quad \text{für } |x-1| < \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

Bem.: Da die geometrische Reihe am Rand nicht konvergiert, braucht auch hier nicht der Rand betrachtet zu werden.

3.4.2 Die eulersche Zahl und die exponentielle Funktion

Bisher hatten wir die eulersche Zahl als Grenzwert einer Folge kennengelernt:

$$e := \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

Nun werden wir dies als Grenzwert einer Summe kennen lernen. Hierzu definieren wir

Definition 100 *Die Funktion*

$$exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

heisst ***exponentielle Funktion.*** *Sie konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ und ist damit wohldefiniert.*

Wir verwenden im Folgenden sogar $x \in \mathbb{C}$. Auch hier gilt absolute Konvergenz für die entstehenden Real- und Imaginärteilreihen.

Die Konvergenz kann leicht über das Quotientenkriterium gezeigt werden:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{(n+1)} \right| = 0$$

Bem.: Ist $x \in \mathbb{C}$, so heisst die Funktion komplexe Exponentialfunktion.

Satz 101 *Es ist*

$$\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

Beweis: Wir werden zeigen, dass für die Folge

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$

mit bekanntem Grenzwert e gilt:

$$a_n \leq S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq e$$

und da a_n den Grenzwert e hat, muss dies gemäss Sandwich-Lemma auch der Grenzwert von S_n sein.

Der Beweis wird aufgeteilt in die beiden Unterbeweise

1. $a_n \leq S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ und

2. $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq e$

Vorüberlegung: Es ist

$$\begin{aligned}
a_n &= (1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \cdot \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot (1 - \frac{1}{n}) \cdot (1 - \frac{2}{n}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{k-1}{n})
\end{aligned}$$

1. $a_n \leq S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$:

$$\begin{aligned}
a_n &= (1 + \frac{1}{n})^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot (1 - \frac{1}{n}) \cdot (1 - \frac{2}{n}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{k-1}{n}) \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = S_n
\end{aligned}$$

2.$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq e = \lim_{m\to\infty} a_m$

Es ist für n beliebig schliesslich $m > n$ falls wir $\lim_{m\to\infty}$ betrachten und damit

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \underbrace{\lim_{m\to\infty}(1-\frac{1}{m}) \cdot \lim_{m\to\infty}(1-\frac{2}{m}) \cdot ... \cdot \lim_{m\to\infty}(1-\frac{k-1}{m})}_{\text{max. n Faktoren}} \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot (1-\frac{1}{m}) \cdot (1-\frac{2}{m}) \cdot ... \cdot (1-\frac{k-1}{m}) \\
&\leq \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot (1-\frac{1}{m}) \cdot (1-\frac{2}{m}) \cdot ... \cdot (1-\frac{k-1}{m}) \\
&= \lim_{m\to\infty} (1+\frac{1}{m})^m = e
\end{aligned}$$

q.e.d.

Weitere Eigenschaften der eulerschen Zahl:

Im Beweis im vorigen Kapitel haben wir gesehen, dass $e < 4$ leicht gezeigt werden konnte. Nun können wir diesen Wert noch weiter eingrenzen. Es ist

$$\begin{aligned}
e &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + ...
\end{aligned}$$

Betrachten wir die ersten fünf Summanden dieser positiven Folge, so wissen wir

$$e > 2,7083$$

Nach oben schätzen wir die Reihe wie folgt ab:

$$
\begin{aligned}
e &= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dots \\
&= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}\dots\right) \\
&< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 3\cdot 3}\dots\right) \\
&= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-1\right) \\
&= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right) \\
&= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=2,75
\end{aligned}
$$

Somit ist

$$2,7083 < e < 2,75$$

Bem.: Obige Rechnung lässt sich noch verfeinern:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \le e \le \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{n!\cdot n}$$

Die wichtigste Eigenschaft ist jedoch

Satz 102 $\forall a,b \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\exp(a+b)=\exp(a)\cdot\exp(b)$$

Bem.: Ohne Modifikation des folgenden Beweise gilt sogar die Gleichung für $a,b \in \mathbb{C}$, welches wir weiter unten auch verwenden.

Bew.: Da die exponentielle Funktion für jede Zahl konvergiert und damit auch für jede positive Zahl konvergent ist, ist die Reihe absolut konvergent und wir können das Cauchy-Produkt anwenden:

$$\begin{aligned}
\exp(a)\cdot\exp(b) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{n!}\\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}\frac{a^k}{k!}\cdot\frac{b^{l-k}}{(l-k)!}\\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\cdot\sum_{k=0}^{l}\underbrace{\frac{l!}{k!(l-k)!}}_{\binom{k}{l}}a^k b^{l-k}\\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}(a+b)^l\\
&= \exp(a+b)
\end{aligned}$$

q.e.d.

Lemma 103 *$\forall n\in\mathbb{N}_0$ ist $exp(n)=e^n$*

Bew.: per Induktion:

Induktionsanfang: $n=0: 1=e^0=\exp(0)$
Induktionsvorr.: Sei

$$\exp(n)=e^n$$

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}
\exp(n+1) &= \exp(n)\cdot\exp(1)\\
&= e^n\cdot e=e^{n+1}
\end{aligned}$$

q.e.d.

Lemma 104 *$\forall x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}_0$ ist $exp(nx)=\exp(x)^n$*

Bew. per Induktion über n:
Induktionsanfang: $n=0:$

$$1=\exp(0)=\exp(0)$$

Induktionsvorr.:

$$exp(nx)=exp(x)^n$$

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}
\exp((n+1)x) &= \exp(nx+x)=\exp(nx)\cdot\exp(x)\\
&= exp(x)^n\cdot\exp(x)=\exp(x)^{n+1}
\end{aligned}$$

Lemma 105 *Es ist* $exp(\frac{1}{n}) = \sqrt[n]{e} = e^{\frac{1}{n}}$

Bew.:

$$\begin{aligned} e &= \exp(1) = \exp(n \cdot \frac{1}{n}) = \exp(\frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}) \\ &= \exp(\frac{1}{n})^n \end{aligned}$$

und damit die Behauptung durch das Ziehen der n-ten Wurzel.

Insgesamt gilt damit für jede positive rationale Zahl und die Null

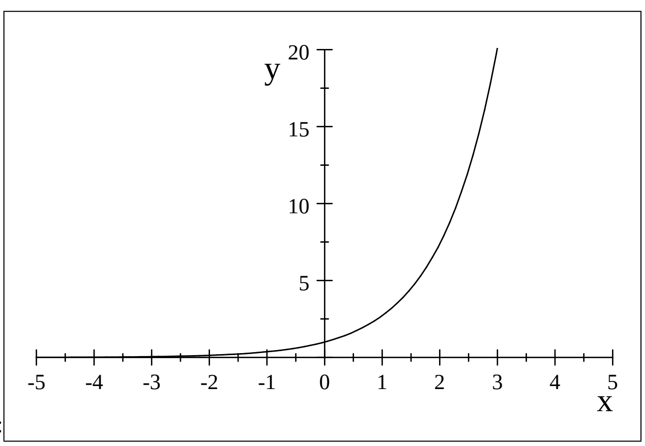
$$\begin{aligned} \exp(\frac{p}{n}) &= \exp(p \cdot \frac{1}{n}) = \exp(\frac{1}{n})^p \\ &= \left(\sqrt[n]{e}\right)^p = e^{\frac{p}{n}} \end{aligned}$$

Für negative gilt ebenfalls

$$\begin{aligned} 1 &= \exp(0) = \exp(\frac{p}{n} + (-\frac{p}{n})) = \exp(\frac{p}{n}) \cdot \exp(-\frac{p}{n}) = e^{\frac{p}{n}} \cdot \exp(-\frac{p}{n}) \\ \exp(-\frac{p}{n}) &= e^{-\frac{p}{n}} \end{aligned}$$

Da die rationalen Zahlen dicht in den reellen Zahlen liegen, definieren wir auch für die reellen Zahlen

$$\exp(x) = e^x$$

Graph: 

Betrachten wir die Exponentialfunktion mit imaginärem Argument, und sortieren anschliessend nach reellen und imaginären Anteilen (Absolut konvergent

!), so ist:

$$\begin{aligned}
\exp(ix) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\
&= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

und wir geben dem Real und Imaginärteil neue Namen

Definition 106 *Die Funktion*

$$\mathrm{Re}(\exp(ix)) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} =: \cos(x)$$

*heisst **Cosinusfunktion** oder **Cosinus**, die Funktion*

$$\mathrm{Im}(\exp(ix)) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} =: \sin(x)$$

***Sinusfunktion** oder **Sinus**.*

Damit gilt:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$$

und beide Reihen konvergieren absolut.

Weiterhin sehen wir da der Cosinus nur gerade, der Sinus nur ungerade Potenzen enthält

$$\begin{aligned}
\cos(-x) &= \cos(x) \\
\sin(-x) &= -\sin(x)
\end{aligned}$$

Satz 107 *Es gilt:* $-1 \leq \sin(x) \leq 1$
und $-1 \leq \cos(x) \leq 1$

Bew. Zunächst gilt das jede komplexe Zahl einer grösseren Betrag hat als der Imaginärteil oder Realteil dieser Zahl, also für $z = a + bi$

$$\begin{aligned}
|a| &= \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z| \\
|b| &= \sqrt{b^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|
\end{aligned}$$

Weiterhin ist für $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\overline{\exp(ix)} &= \overline{\cos(x) + i\sin(x)} \\ &= \cos(x) - i \cdot \sin(x) \\ &= \cos(-x) + i \cdot \sin(-x) \\ &= \exp(i \cdot (-x)) = \exp(-ix) \\ &= \exp(\overline{ix})\end{aligned}$$

und damit ist nach Definition des Sinus und Cosinus:

$$\begin{aligned}|\sin(x)| &= |\mathrm{Im}(\exp(ix))| \leq |\exp(ix)| = \sqrt{\exp(ix) \cdot \overline{\exp(ix)}} \\ &= \sqrt{\exp(ix) \cdot \exp(\overline{ix})} = \sqrt{\exp(ix) \cdot \exp(-ix)} \\ &= \sqrt{\exp(ix - ix)} = \sqrt{\exp(0)} = 1\end{aligned}$$

und ebenso

$$|\cos(x)| = |\mathrm{Re}(\exp(ix))| \leq |\exp(ix)| = 1$$

Lemma 108 *Additionstheoreme: Seien u,v,x$\in \mathbb{R}$, dann ist*

$$\begin{aligned}\sin(u+v) &= \sin(u)\cos(v) + \sin(v)\cos(u) \\ \cos(u+v) &= \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v) \\ \sin^2(x) + \cos^2(x) &= 1\end{aligned}$$

Bew.:

$$\begin{aligned}\sin(u+v) &= \mathrm{Im}(\exp(i \cdot (u+v))) = \mathrm{Im}(\exp(iu) \cdot \exp(iv)) \\ &= \mathrm{Im}((\cos(u) + i\sin(u)) \cdot (\cos(v) + i\sin(v))) \\ &= \sin(u)\cos(v) + \sin(v)\cos(u)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(u+v) &= \mathrm{Re}(\exp(i \cdot (u+v))) = \mathrm{Re}(\exp(iu) \cdot \exp(iv)) \\ &= \mathrm{Re}((\cos(u) + i\sin(u)) \cdot \cos(v) + i\sin(v))) \\ &= \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 &= \exp(0) = \exp(ix - ix) = \exp(ix) \cdot \exp(-ix) \\ &= (\cos(x) + i \cdot \sin(x)) \cdot (\cos(x) - i \cdot \sin(x)) \\ &= \cos^2(x) + \sin^2(x)\end{aligned}$$

Bem.: Es ist

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \cos(2\cdot\frac{x}{2})\\ &= \cos^2(\frac{x}{2})-\sin^2(\frac{x}{2})\\ &= \cos^2(\frac{x}{2})+\sin^2(\frac{x}{2})-2\sin^2(\frac{x}{2})\\ &= 1-2\sin^2(\frac{x}{2})\end{aligned}$$

3.5 Grenzwerte von Funktionen

3.5.1 Stetigkeit

Bisher haben wir die Konvergenz als Konvergenz von Zahlenfolgen a_n betrachtet. Nun wollen wir den Konvergenzbegriff auf Funktionen erweitern, d.h. zu klären, wann

$$\lim_{x\to x_0} f(x)$$

existiert.

Hierzu nähern wir uns der Stelle x_0 mit einer gegen x_0 konvergenten Folge x_n an und betrachten die durch die Funktionswerte erzeugte Folge $f(x_n)$. Konvergiert diese Folge für jede vorgegebene gegen x_0 konvergente Folge x_n,so bezeichnen wir dies als Konvergenz.

Definition 109 *Gilt* $\forall(x_n)$, *dass, falls* $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ *gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$$

so heisst die Funktion ***konvergent für*** $\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0$ *und wir schreiben*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) =: \lim_{x\to x_0} f(x)$$

Entspricht der Wert des Grenzwertes dem Funktionswert $f(x_0)$, so verläuft die Funktion kontinuierlich. Dies definieren wir zu:

Definition 110 *Gilt* $\forall(x_n)$, *dass, falls* $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ *gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

so heisst die Funktion ***stetig in*** $\mathbf{x}_0$

Bem.: Nicht stetige Funktionen heissen unstetig.

Wegen

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(x_n) &= f(x_0)\\ &= f(\lim_{n\to\infty} x_n)\end{aligned}$$

ist Stetigkeit also **Vertauschbarkeit von Funktion und Grenzwert.** Diese Eigenschaft wird später z.B. bei der Integration und Differentiation eine zentrale Rolle spielen.

Bsp.: $f(x) = 2x, x_0 = 3$
Sei $x_n \to 3$ beliebige Folge. Dann ist

1. $f(x_0) = f(3) = 6$
2. $f(x_n) = 2x_n$ und damit

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(x_n) &= \lim_{n\to\infty} 2x_n = 2\lim_{n\to\infty} x_n\\ &= 2\cdot 3 = 6\end{aligned}$$

Es ist jedoch zu beachten, dass Konvergenz für **beliebige** gegen x_0 konvergente Folgen zu zeigen ist, welches dieses Kriterium gelegentlich unhandlich macht.

Während Stetigkeit für alle Folgen zu zeigen ist, ist Unstetigkeit einfacher zu zeigen. Hier reicht es, eine Folge zu finden, deren Grenzwert nicht mit dem Funktionswert übereinstimmt.

Bsp: Wir betrachten

$$f(x) = \begin{array}{ll} x & \text{für x} \geq 1 \\ 1+x & \text{für x} < 1 \end{array}$$

und zeigen die Unstetigkeit im Punkt $x_0 = 1$:
Es ist $1 = f(1)$, aber für $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ gilt $f(x_n) = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} \to 2$
daher ist die Funktion nicht konvergent in $x_0 = 1$ und auch nicht stetig.

Existieren jedoch Grenzwerte, wenn sich dem Punkt nur von links oder rechts genähert wird, so sprechen wir von einseitigen Grenzwerten:

Definition 111 *Existiert für Folgen x_n mit $x_n > x_0$ ein Grenzwert L, also existiert*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = L =: r\text{-}\lim_{x\to x_0} f(x)$$

so heisst der Grenzwert ***rechtseitiger Grenzwert****. Gilt $L = f(x_0)$, so heisst die Funktion* ***rechtsseitig stetig****.*

Entsprechend für $x < x_0$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = L =: l\text{-}\lim_{x\to x_0} f(x)$$

linksseitiger Grenzwert *bzw* ***linksseitig stetig****.*

Damit gilt:

Satz 112 *Eine Funktion $f(x)$ ist genau dann stetig in x_0, wenn*

$$l\text{-}\lim_{x\to x_0} f(x) = r\text{-}\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definition 113 *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ heisst stetig auf $D = [a, b]$, falls f für jedes $x_0 \in D$ stetig ist.*

Bem: Am Rand braucht nur der einseitige Grenzwert betrachtet zu werden.

Bsp.: $f(x) = x$ ist stetig $\forall x \in \mathbb{R}$.

denn es ist

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x = x_0 = f(x_0)$$

Definition 114 *Ist eine Funktion $\forall x \in [a, b]$ stetig, so schreiben wir*

$$f \in C[a, b]$$

3.5.2 Das $\varepsilon - \delta-$Kriterium

Ohne die Folgen zu betrachten ist eine alternative Definition der Steitgkeit

Definition 115 *Eine Funktion $f(x)$ heisst* ***stetig*** *in x_0, falls*

$$\begin{aligned} \forall\varepsilon &> 0 \;\; \exists\delta(x_0, \varepsilon) > 0, \\ \text{so dass } \forall|x - x_0| &< \delta \text{ gilt:} \\ |f(x) - f(x_0)| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Merke: **Stetigkeit bedeutet kleine Änderung der Eingabewerte bewirken nur eine kleine Änderung der Funktionswerte.** Die Vorgehensweise ist dabei ähnlich wie bei der Konvergenz von Folgen. Wir kriegen den Unterschied von Funktionswert und Wert in der Umgebung beliebig klein, in dem wir nur die Werte nahe genug an der Stelle x_0 wählen. Wie nah dies sein muss, hängt vom vorgegebenen Genauigkeitskriterium ε ab.

Bem.: Es gilt dann

$$\begin{aligned} |x| &= |x - x_0 + x_0| \\ &\leq |x - x_0| + |x_0| \\ &< |x_0| + \delta \end{aligned}$$

Da wir mit jedem gültigen δ auch jedes kleinere δ wählen dürfen, beschränken wir falls nötig $\delta < 1$ und dort gilt dann

$$|x| < |x_0| + 1$$

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = x^2$$

und die Stelle $x_0 = 10$ mit $f(10) = 100$. Die Funktion wird nun auch in der Nähe des Wertes $x_0 = 10$ Werte nahe bei 100 annehmen (das ist die Bedeutung der Stetigkeit). Z.B. ist zu $\varepsilon = 1$ die Frage, wann

$$\left|x^2 - 100\right| < 1$$

also die Werte zwischen 99 und 101 liegen. Wir probieren $\delta = 1$ und erhalten $x \in (9; 11)$ mit den Funktionswerten zwischen 81 und 121. Daher sind die Abweichungen zu groß.

Als nächstes versuchen wir $\delta = \frac{1}{100}$und erhalten $x \in (9,99; 10,01)$ mit den Funktionswerten zwichen 99,8 und 100,2, also ein gültiges δ.

Jedes kleinere δ würde auch erfüllen, dass die Funktionswerte um weniger als $\varepsilon = 1$ auseinanderliegen.

Wir wollen aber das δ nicht durch ausprobieren finden, sondern berechnen. Starten wir mit folgenden Umformungen:

$$\left|x^2 - 100\right| = |x - 10| \cdot |x + 10|$$

Der zweite Betrag wird je nach δ $x-$Werte erzeugen, die größer oder kleiner sind, so ist für $\delta = 1$ der maximale Wert von $|x + 10|$ 21, für $\delta = 2$ entsprechend 22. Für kleinere δ zumindest kleiner als 21. Da aber mit jedem δ auch jeder kleinere Wert für δ gültig ist, beschränken wir δ durch einen festen Wert, z.B. $\delta \leq 1$.

Damit wissen wir

$$\begin{aligned} \left|x^2 - 100\right| &= |x - 10| \cdot |x + 10| \\ &\leq |x - 10| \cdot 21 \end{aligned}$$

und bestimmen ein δ, so dass

$$|x - 10| \cdot 21 < \varepsilon$$

für

$$|x - 10| < \delta$$

Hier funktioniert
$$\delta = \frac{\varepsilon}{21}$$
da dann
$$|x-10| \cdot 21 < \frac{\varepsilon}{21} \cdot 21 = \varepsilon$$
Wir haben also für δ die Bedingungen
$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\varepsilon}{21} \\ \delta &\leq 1 \end{aligned}$$

Dieses fassen wir zusammen
$$\delta = \min(\frac{\varepsilon}{21}, 1)$$
Bem.: Dass für $\varepsilon = 42, \delta = \frac{\varepsilon}{21} = 2$ die Bedingung
$$\left|x^2 - 100\right| < 42$$
für
$$|x-10| < 2$$
nicht erfüllt ist, sehen sie wie folgt: für $x = 11,99$ ist $11,99 - 10 = 1,99 < 2$ aber
$$\left|x^2 - 100\right| = 43,76 > 42$$

Allgemein ist für $\delta \leq 1$
$$\begin{aligned} \left|x^2 - x_0^2\right| &= |x - x_0| \cdot |x + x_0| \\ &\leq |x - x_0| \cdot (2\,|x_0| + 1) \end{aligned}$$

und somit wählen wir analog zum obigen Beispiel
$$\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{2\,|x_0| + 1})$$
(z.B. oben für $\varepsilon = 1$ und $x_0 = 10$
$$\delta = \min(1, \frac{1}{21}) = \frac{1}{21}$$
wie oben)
und erhalten
$$\begin{aligned} & |x - x_0| \cdot (2\,|x_0| + 1) \\ < \; & \frac{\varepsilon}{2\,|x_0| + 1} \cdot (2\,|x_0| + 1) \\ = \; & \varepsilon \end{aligned}$$

Bem. Ein häufiges Problem entsteht, wenn wir δ nicht durch eine Konstante nach oben begrenzen, denn dann wäre

$$\begin{aligned} \left|x^2 - x_0^2\right| &= |x - x_0| \cdot |x + x_0| \\ &\leq |x - x_0| \cdot (2\,|x_0| + \delta) \end{aligned}$$

und müssten nun setzen

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2\,|x_0| + \delta}$$

und könnten δ nicht ausrechnen, da es von sich selber abhängt.

Ein weiteres Beispiel noch: Wir zeigen die Stetigkeit der Funktion $\sqrt{1-x}$ auf $(-\infty, 1]$. Das Problem besteht hier bei $x_0 = 1$:

$$f(x) - f(x_0) = \left|\sqrt{1-x} - \sqrt{1-x_0}\right|$$

Für $x_0 < 1$ ist mit $\delta = \varepsilon \cdot \sqrt{1-x_0}$

$$\begin{aligned} &\left|\sqrt{1-x} - \sqrt{1-x_0}\right| \\ = \; &\frac{|x - x_0|}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x_0}} \leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{1-x_0}} < \frac{\delta}{\sqrt{1-x_0}} = \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{1-x_0}}{\sqrt{1-x_0}} = \varepsilon \end{aligned}$$

Für $x_0 = 1$ ist mit $\delta = \varepsilon^2$

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{1-x} - \sqrt{1-x_0}\right| &= \left|\sqrt{1-x}\right| \\ &= \left|\frac{1-x}{\sqrt{1-x}}\right| \\ &= \left|\frac{1-x}{\sqrt{1-x} - \sqrt{1-x_0}}\right| \end{aligned}$$

und damit

$$\left|\sqrt{1-x} - \sqrt{1-x_0}\right|^2 \leq |1-x| = |x-1| = \delta = \varepsilon^2$$

Wurzel ziehen liefert auch hier:

$$\left|\sqrt{1-x} - \sqrt{1-x_0}\right| < \varepsilon$$

3.5.3 Stetigkeit verketteter Funktionen

Aus den Rechenregeln für Grenzwerte folgen sofort:

Satz 116 *Seien $f(x)$ und $g(x)$ in x_0 stetige Funktionen, dann ist auch*

1. $(f+g)(x) = f(x) \pm g(x)$ *stetig in* x_0
2. $\lambda \cdot f(x)$ *stetig in* x_0
3. $f(x) \cdot g(x)$ *stetig in* x_0
4. $\frac{f(x)}{g(x)}$ *stetig in* x_0*, falls* $g(x_0) \neq 0$

Bew. zu 1. Die Summenfunktion zweier Funktionen wird formal in natürlicher Weise definiert zu $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$

$$\begin{aligned}(f+g)(x_0) &= f(x_0)+g(x_0) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) + g(\lim_{n\to\infty} x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} (f(x_n)+g(x_n)) = \lim_{n\to\infty} (f+g)(x_n)\end{aligned}$$

Fortgeführt ergibt dieses:

1. Alle Polynome und gebrochen rationalen Funktionen sind stetig auf ihrem Definitionsbereich.
2. Auch die Wurzel ist stetig für $x_0 \neq 0$, da

$$\begin{aligned}\sqrt{x_n} - \sqrt{x_0} &= \frac{\left(\sqrt{x_n}-\sqrt{x_0}\right)\cdot\left(\sqrt{x_n}+\sqrt{x_0}\right)}{\sqrt{x_n}+\sqrt{x_0}} \\ &= \frac{x_n - x_0}{\sqrt{x_n}+\sqrt{x_0}} \to 0\end{aligned}$$

Satz 117 *Sind g und h auf jedem Punkt der Definitionsmenge stetige Funktionen, so ist auch deren Verkettung $f(x) := h(g(x))$ auf jedem Punkt x_0 der Definitionsmenge stetig.*

Bew.: Es ist wegen der Stetigkeit jeweils Funktionswertbildung und Grenzwert vertauschbar, also:

$$\lim_{n\to\infty} h(g(x_n)) = h(\lim_{n\to\infty} g(x_n)) = h(g(\lim_{n\to\infty} x_n)) = h(g(x_0))$$

q.e.d.

Damit ist auch eine beliebige Verkettung von Funktionen stetig, z.B.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2\sqrt{x}}}{x^2+1}$$

3.5.4 Weitere Stetigkeitsuntersuchungen

Eine hilfreiche Technik, um die Stetigkeit in x_0 zu zeigen, ist hierbei die Rückführung auf die Stetigkeit im Ursprung:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_n &= x_0 \\ \text{ist äquivalent mit } h_n &= x_n - x_0 \text{ zu} \\ \lim_{n\to\infty} x_n - x_0 &= \lim_{n\to\infty} h_n = 0\end{aligned}$$

und wir zeigen - falls dies die Rechnung vereinfacht - mit $x_n = x_0 + h_n$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f(x_n) &= f(x_0) \\ \lim_{n\to\infty} f(x_0+h_n) - f(x_0) &= 0 \\ &\quad \text{oder} \\ \lim_{n\to\infty} f(x_0+h_n) &= f(x_0) \end{aligned}$$

Damit ist also im Wesentlichen Stetigkeit einer Funktion mit Hilfe einer Nullfolge h_n zu zeigen.

Analog kann dieses Hilfsmittel auch in der folgenden Form angewandt werden:

Definition 118 *Eine Funktion $f(x)$ heißt stetig in x_0, falls für $x = x_0 + h$ gilt:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

Lemma 119 *Es ist äquivalent*

$$0 = \lim_{n\to\infty} |x_n| \Longleftrightarrow 0 = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Bew.: Gemäß der Definition des Grenzwertes gilt:

$$|x_n - 0| = |x_n| = ||x_n|| = ||x_n| - 0|$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

q.e.d.

Bem. Dies bedeutet insbesondere, dass die Betragsfunktion stetig in $x_0 = 0$ ist, denn für $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ist

$$\left|\lim_{n\to\infty} x_n\right| = |0| = 0 = \lim_{n\to\infty} |x_n|$$

bzw.

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0$$

Analog gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} |f(x) - f(0)| &= 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) - f(0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \end{aligned}$$

Also f ist stetig in Null. Weiterhin:

Lemma 120 *Die Funktion $|x|$ ist stetig.*

Bew.: Zu zeigen ist, dass für jede Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x_0|$. Hierzu unterteilen wir - um den Betrag auflösen zu können - den Beweis in 3 Fälle:

1. $x_0 > 0$: Damit ist auch schliesslich $x_0 + h$ positiv und es ist:
$$\lim_{h\to 0} |x_0 + h| = \lim_{h\to 0} x_0 + h = x_0 = |x_0|$$
2. $x_0 < 0$: Damit ist auch schliesslich $x_0 + h$ negativ und es ist:
$$\lim_{h\to 0} |x_0 + h| = \lim_{h\to 0} -(x_0 + h) = -x_0 = |x_0|$$
3. $x_0 = 0$: Dann ist (s.o.)
$$\lim_{h\to 0} |h| = 0$$

Mit Hilfe der Betragsfunktion kann nun die Stetigkeit in $x_0 = 0$ für beliebige Funktionen sichergestellt werden.

Zunächst sei ein wichtiges Hilfsmittel erwähnt:

Lemma 121 *Sandwich-Lemma für Funktionen: Gilt $\forall\, |x - x_0| < K, x \neq x_0 ::$*
$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$
und
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = c$$
so ist auch
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = c$$

Bew.: Ergibt sich direkt aus den Folgendefinitionen.

Satz 122 *Gilt $0 \leq |f(x) - f(0)| \leq c \cdot |x|$ für ein $c \in \mathbb{R}^+, \forall\, |x| < K \in \mathbb{R}^+$, so gilt*
$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$
also f ist stetig in $x_0 = 0$.
Alternativ: Für alle Folgen mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ist $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(0)$

Bew.: Im Sandwich-Lemma setzen wir als untere Funktion 0, als obere $c \cdot |x|$ und als zu untersuchende Funktion $|f(x) - f(0)|$. Dann ist:
$$\lim_{x\to 0} |f(x) - f(0)| = 0$$

und damit

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x) - f(0) &= 0 \\ \lim_{x\to 0} f(x) &= f(0) \end{aligned}$$

q.e.d.

Zusammengefasst ist also das Vorgehen um Stetigkeit einer Funktion in x_0 zu zeigen:

1. Zeige die Funktion ist stetig in $x_0 = 0$ durch Auffinden vom c und K mit

$$0 \leq |f(x) - f(0)| \leq c \cdot |x| \quad \forall |x| < K$$

denn dann gilt auch für den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

weshalb die Funktion in $x_0 = 0$ stetig sein muss.

2. Zeige die Stetigkeit in x_0 durch $x = x_0 + h, h \to 0$

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} f(x_0 + h) &= f(x_0) \\ bzw. \lim_{h\to 0} f(x_0 + h) - f(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

unter Verwendung der Kenntnis der Stetigkeit in Punkt 0.

3.5.5 Stetigkeit der Funktionen sin(x) und cos(x)

Wir zeigen zunächst die Stetigkeit dieser Funktionen im Nullpunkt und können dann auf die generelle Stetigkeit schliessen. Dazu

Lemma 123 $\forall\ |x| < 1$ *gilt*

$$0 \leq |\sin(x)| \leq |x|$$

Bew.: Wegen $|x| < 1$

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \end{aligned}$$

ist der Ausdruck $\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ eine monoton fallende Nullfolge. Gemäss der Abschätzung für alternierende Nullfolgen gilt für jedes $0 \leq x \leq 1$, da dann $x - \frac{x^3}{3!} = x \cdot (1 - \frac{x^2}{3!}) \geq 0$

$$0 \leq x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin(x) \leq x$$

also

$$0 \leq \sin(x) \leq x$$

Für $-1 \leq x < 0$ sind die Summanden mit positivem Vorzeichen negativ und umgekehrt und somit gemäß Leibniz

$$\begin{aligned} x &\leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{3!} \\ &= x \cdot (1 - \frac{x^2}{3!}) \leq 0 \end{aligned}$$

also

$$0 \geq \sin(x) \geq x$$

und daher für die Beträge

$$|\sin(x)| \leq |x|$$

$\forall x \in [-1, 1]$
q.e.d.

Daher gilt mit dem Sandwich Lemma

Satz 124 *Die Funktion* $\sin(x)$ *ist in* $x_0 = 0$ *stetig.*

Bew.: Es gilt (s.o.):

$$0 \leq |\sin(x) - \sin(0)| \leq |x|$$

$\forall x \in [-1, 1]$

Satz 125 *Die Funktion* $\cos(x)$ *ist in* $x_0 = 0$ *stetig.*

Bew.: Es ist $\cos(x) = 1 - 2\sin^2(\frac{x}{2})$ und daher als Verkettung stetiger Funktionen stetig.

Satz 126 *Die Funktion* $\sin(x)$ *ist* $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ *stetig.*

Bew.: Zu zeigen ist

$$\lim_{h\to 0} \sin(x_0 + h) = \sin(x_0)$$

Für

$$h = x - x_0 \to 0$$

erhalten wir eine Nullfolge und dort ist der Sinus und Cosinus stetig. Also gilt

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \sin(h) &= \sin(0) = 0 \\ \lim_{h\to 0} \cos(h) &= \cos(0) = 1 \end{aligned}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} & \sin(x_0 + h) \\ = \; & \sin(x_0)\cos(h) + \sin(h)\cos(x_0) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \sin(x_0 + h) &= \lim_{h\to 0} \sin(x_0)\cos(h) + \sin(h)\cos(x_0) \\ &= \sin(x_0) \cdot \lim_{h\to 0} \cos(h) + \cos(x_0) \cdot \lim_{h\to 0} \sin(h) \\ &= \sin(x_0) \end{aligned}$$

q.e.d.

Damit ist auch wegen $\cos(x) = 1 - 2\sin^2(\frac{x}{2})$ gültig:

Satz 127 *Die Funktion* $\cos(x)$ *ist* $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ *stetig.*

Satz 128 *Die Funktion exp(x) ist in* $x_0 = 0$ *stetig.*

Bew.: Zunächst gilt für $n \in \mathbb{N}_0$

$$n! \geq 2^{n-1}$$

da die Aussage für $n = 0$ und $n = 1$ richtig ist und für $n \geq 2$ gilt:

$$\begin{aligned} 2n! &= 2 \cdot n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 \\ &\geq 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 2 \cdot 2^{n-1} \cdot 1 = 2^n \end{aligned}$$

Es ist für $|x| < 1$:

$$\begin{aligned}
|\exp(x) - 1| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 \right| \\
&= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x^n|}{n!} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x^n|}{2^{n-1}} \\
&= |x| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|x^{n-1}\right|}{2^{n-1}} \\
&= |x| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|x|}{2} \right)^n \\
&\leq |x| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n \\
&= |x| \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \cdot |x|
\end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 129 *Die Funktion* $\exp(x)$ *ist* $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ *stetig.*

Es ist für $h = x - x_0 \to 0$

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= \exp(x_0 + h) = \exp(x_0) \cdot \exp(h) \\
\lim_{h \to 0} \exp(x_0 + h) &= \lim_{h \to 0} \exp(x_0) \cdot \exp(h) = \exp(x_0) \cdot \lim_{h \to 0} \exp(h) \\
&= \exp(x_0)
\end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 130 *Jede Potenzreihe ist im Innern ihres Konvergenzradius (also nicht zwingend für die Randpunkte) stetig.*

Bew. Blatter - Analysis 2. Weshalb der Beweis aufwändig ist sei kurz erwähnt:

Zu Zeigen wäre:

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

also für Potenzreihen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

$$\lim_{h\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0 + h)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$$

Es ist:

$$\lim_{h\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0 + h)^n = \lim_{h\to 0} \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n (x_0 + h)^n$$

Das Problem liegt nun darin, wann die Reihenfolge der Grenzwertbildung vertauscht werden kann. Dies darf im Innern des Konvergenzradius gemacht werden (hier fehlt hier der Beweis) und dann ist wegen der Stetigkeit endlicher Polynome:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n (x_0 + h)^n &= \lim_{m\to\infty} \lim_{h\to 0} \sum_{n=0}^{m} a_n (x_0 + h)^n \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n \lim_{h\to 0} (x_0 + h)^n \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n x_0^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n
\end{aligned}$$

An dieser Stelle aber kurz etwas zu

Vertauschbarkeit von Grenzprozessen

Vorsicht ist zu geniessen, falls Grenzprozesse in ihrer Reihenfolge vertauscht werden sollen. Hierzu einige Beispiele, bei denen dann unterschiedliche Ergebnisse heraus kommen:

Betrachten wir zunächst die doppelte Folge

$$a_{m,n} = \frac{n}{n+m}$$

Hier gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{m,n} &= \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+m} \\
&= \lim_{m\to\infty} 1 = 1
\end{aligned}$$

aber

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{m,n} &= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \frac{n}{n+m} \\
&= \lim_{n\to\infty} 0 = 0
\end{aligned}$$

Das nächste Beispiel beziehe sich auf eine Funktionenfolge auf $[0, 1]$:

$$f_n(x) = x^n$$

Dann ist:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{matrix} 0 & \text{für } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{matrix}$$

und damit

$$\lim_{x\to 1} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to 1} 0 = 0$$

aber

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

Übertragen wir dieses auf Reihen, so sehen wir ein ähnliches Problem:

$$\sum_{k=1}^{n} x^k \cdot (1 - \frac{1}{x})$$

ergibt für $0 \le x \le 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x^k \cdot (1 - \frac{1}{x}) &= \lim_{x\to 1} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x^k - x^{k-1} \\ &= \lim_{x\to 1} \lim_{n\to\infty} x^n - 1 \\ &= \lim_{x\to 1} -1 = -1 \end{aligned}$$

aber

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1} \sum_{k=1}^{n} x^k \cdot (1 - \frac{1}{x}) &= \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1} \sum_{k=1}^{n} x^k - x^{k-1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1} x^n - 1 \\ &= \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \end{aligned}$$

Vorsicht auch bei Potenzreihen - Betrachten wir

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} n! \cdot x^n$$

so konvergiert diese nur für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$, da für den Konvergenzradius R gilt:

$$|x| < R$$

$$R = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = 0$$

Damit

$$\lim_{x\to 0} \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} n! \cdot x^n \text{ exisitiert nicht}$$

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{x\to 0} \sum_{n=0}^{m} n! \cdot x^n \quad = \quad \lim_{m\to\infty} 1 = 1$$

3.5.6 Unstetigkeit

Im Allgemeinen - Gegenbeispiel siehe unten - ist Unstetigkeit auf einzelne Punkte reduziert.

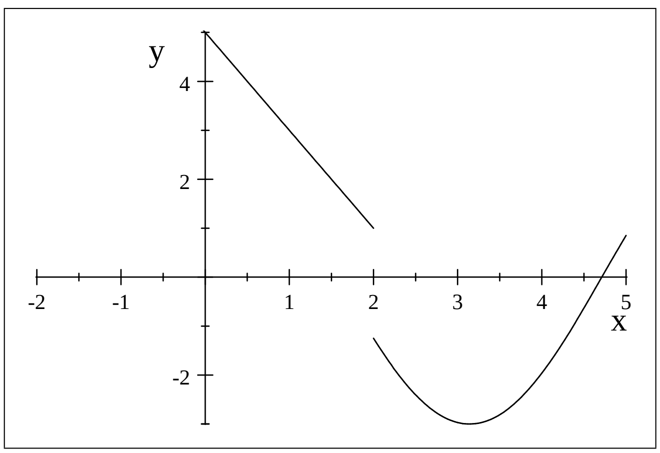
Es gibt verschiedene Typen der Unstetigkeit

1. Sprungstellen, d.h.

$$l - \lim_{x \to x_0} f(x) \neq r - \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Bsp.:

$$\begin{array}{lcl} x^2 - 1 \text{ für } x & \geq & 2 \\ 5 - 2x \text{ für } x & < & 2 \end{array}$$



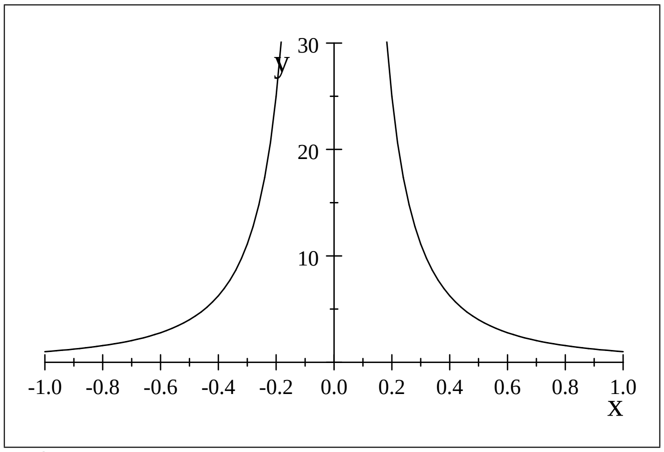
2. Unendlichkeitsstellen

Bsp: f ist in der Umgebung von x_0 nicht beschränkt, d.h.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) > R$$

z.B.

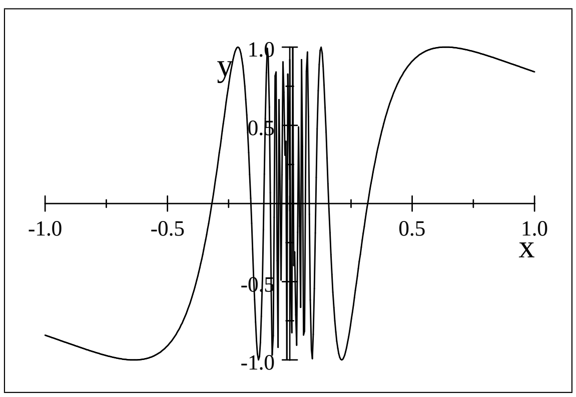
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \text{ in } x_0 = 0$$



3. Oszillationsstellen

z.B.

$$\lim_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x}) \text{ in } x_0 = 0$$



4. Singuläre Definitionen

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x \quad \text{für } x \neq 1 \\ &= 4 \quad \text{für } x = 1 \end{aligned}$$

5. Definitionslücken

$$f(x) = \frac{x}{x} \quad \text{für } x \neq 0$$

6. Kombinationen

$$f(x) = \frac{x}{x} \cdot \sin(\frac{1}{x})$$

Umgekehrt können Definitionslücken zu stetigen Funktionen vervollständigt werden, in dem man als Funktionswert den Grenzwert hinzufügt.

Definition 131 *(+ Satz) Sei $f(x)$ stetig für $x \neq x_0, x_0 \notin D$. Dann erhält man mit $f(x_0) := \lim_{x \to x_0} f(x)$ eine stetige Fumktion, wenn der Grenzwert existiert. x_0 heisst "hebbare Lücke".*

Bsp.:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x-1} \end{aligned}$$

hat den Grenzwert

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} x + 1 = 2$$

Bem.: Es gibt auch nirgends stetige Funktionen, z.B. die **Dirichletfunktion**

$$f(x) = \begin{matrix} 1 & \text{für } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \\ \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \end{matrix}$$

da für jedes x_0 eine konvergente Folge existiert mit dem Grenzwert 1, als auch Folgen mit dem Grenzwert 0.

3.5.7 Stetigkeit auf Intervallen

Satz 132 *Sei $f : [a, b] \to R$ stetig $\Rightarrow$ $f(x)$ ist beschränkt.*

Ann.: Sei f nicht nach oben beschränkt (analog nach unten), dann ist für eine beliebige nach oben nicht beschränkte monoton wachsende Folge K_n :

$$\forall K_n \; \exists x_n \in [a, b] \text{ mit } f(x_n) > K_n$$

Da $x_n \in [a, b]$ ist x_n beschränkt und es existiert nach Bolzano-Weierstrass eine konvergente Teilfolge x_{n_k} mit

$$\lim_{n_k \to \infty} x_{n_k} = c = x_0 \text{ mit } x_0 \in [a, b]$$

Wegen der Stetigkeit von f ist dann aber auch

$$\lim_{n_k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$$

also $\lim_{n_k \to \infty} f(x_{n_k})$ endlich im Widerspruch zu $f(x_n) > K_n$.

Da also jede stetige Funktion auf kompakten Intervallen beschränkt ist, gilt weiterhin:

Satz 133 *Jede auf $[a, b]$ stetige Funktion nimmt dort ein Minimum und Maximum an, d.h. es existiert $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \qquad \forall x \in [a, b]$$

bzw.

$$\begin{aligned} f(x_2) &= \max_{x\in[a,b]} f(x) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \\ f(x_1) &= \min_{x\in[a,b]} f(x) = \inf_{x\in[a,b]} (x) \end{aligned}$$

Bem.: x_1 und x_2 müssen nicht eindeutig sein. Wichtig ist die Abgeschlossenheit des Intervalls, z.B. nimmt $f(x) = x$ auf $x \in (0, 1)$ weder Minimum noch Maximum an.

Im Allgemeinen ist in der $\varepsilon - \delta -$Definition δ von ε und x_0 abhängig. Ist die Stetigkeit sogar unabhängig von x_0, so gilt:

Definition 134 *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heisst **gleichmässig stetig auf** D, falls es ein $\delta > 0$ unabhängig von x_0 gibt, so dass*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

für alle

$$|x - x_0| < \delta$$

Satz 135 *Jede gleichmässig stetige Funktion ist stetig.*

Bew.: Da die einzige Verschärfung der gleichmässigen Stetigkeit die Unabhängigkeit von x_0 ist, ist hier nichts weiter zu beweisen.

Bsp: $f(x) = x^2$ ist stetig auf $\mathbb{R}$, aber nicht gleichmässig stetig, denn für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existiert kein von x_0 unabhängiges δ, denn wählen wir zu diesem δ

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{\delta} \\ x &= x_0 + \frac{\delta}{2} \\ &= \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

so ist zwar

$$|x - x_0| = \frac{\delta}{2}$$

aber

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= |x^2 - x_0^2| \\
&= |x - x_0| \cdot |x + x_0| \\
&= \frac{\delta}{2} \cdot (\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}) \\
&> \frac{\delta}{2} \cdot \frac{2}{\delta} = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Beispiel 2: $f(x) = \sqrt{x}$ ist gleichmässig stetig in $[0, \infty)$, denn

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| &\leq \left|\sqrt{x}\right| + \left|\sqrt{x_0}\right| = \sqrt{x} + \sqrt{x_0} = \frac{\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right) \cdot \left(\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right)}{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}} \\
&= \frac{x - x_0}{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}} = \frac{|x - x_0|}{\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right|}
\end{aligned}$$

und damit für $\delta = \varepsilon^2$, welches unabhängig von x_0 ist:

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right|^2 \leq |x - x_0| < \delta = \varepsilon^2$$

Wurzel ziehen liefert:

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| < \varepsilon$$

Es gilt falls der Definitionsbereich ein abgeschlossenes Intervall ist:

Satz 136 *Eine stetige Funktion f:$[a, b] \to \mathbb{R}$ ist gleichmässig stetig.*

3.5.8 Lipschitz-Stetigkeit

In der $\varepsilon - \delta -$Definition wird häufig verwendet, den Faktor $|x - x_0|$ zu eliminieren. Oben hatten wir als Beispiel die Funktion $f(x) = x^2 - 9$ in $x_0 = 3$ bzw. $[a, b] = [2, 4]$ gesehen

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= |x^2 - 9| \\
&= |x - 3| \cdot |x + 3| \\
&\leq 7 \cdot |x - 3| \\
&< 7 \cdot \delta < \varepsilon
\end{aligned}$$

Dies macht man sich im Begriff der Lipschitz-Stetigkeit zu Nutze:

Definition 137 *Eine Funktion f heisst lokal Lipschitz-Stetig in x_0, wenn es ein $L \geq 0$ und ein $\delta > 0$ gibt, so dass*

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L \cdot |x - x_0|$$

$\forall |x - x_0| < \delta$, *$L$ heisst **Lipschitz-Konstante.***

Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heisst Lipschitz-Stetig , wenn es ein $L > 0$ gibt, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

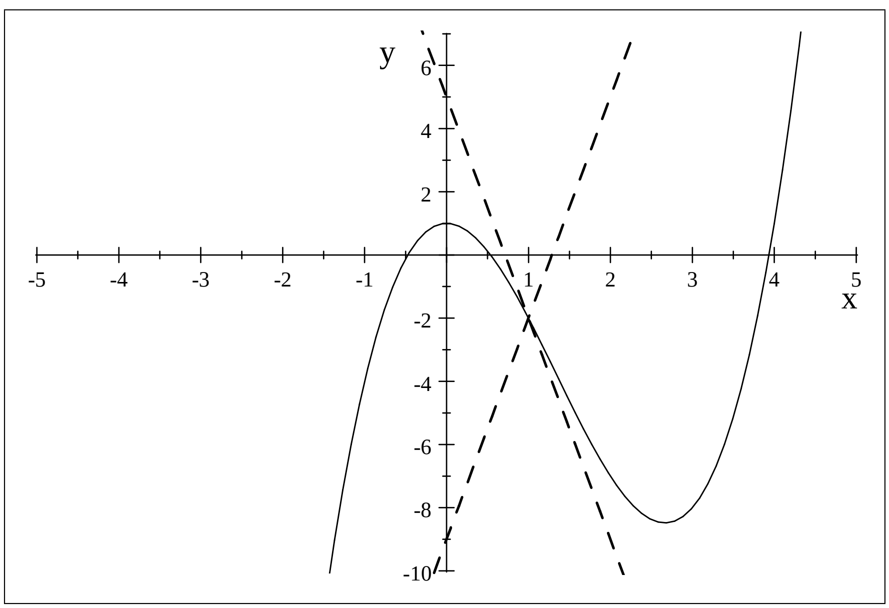
*$\forall x, y \in [a,b]$. L heisst **Lipschitz-Konstante***

Bem.: Lokale Lipschitz-Stetigkeit bedeutet, dass es für jeden Punkt $x_0 \in [a,b]$ eine kleine Umgebung δ gibt, so dass alle Sekantensteigungen, die in dieser Umgebung gebildet werden, beschränkt bleiben. Im Gegensatz hierzu bedeutet Lipschitz Stetigkeit, dass auf dem gesamten Intervall alle möglichen Sekantensteigungen beschränkt bleiben.

Bei der Berechnung lokaler Lipschitz-Stetigkeit muss die Lipschitz-Konstante also unabhängig von x sein, wird aber i.a. von δ und x_0 abhängen. Geometrisch bedeutet Lipschitz-Stetigkeit, dass es zwei Geraden gibt

$$y = f(x_0) \pm L(x - x_0)$$

so dass der Graph in der Umgebung von x_0 zwischen den Geraden liegt.



Bsp: $f(x) = x^2$ ist lokal Lipschitz-Stetig in $[a,b]$, denn es ist in jedem Punkt x_0:

Sei $|x - x_0| < \delta$ dann ist $|x| = |x - x_0 + x_0| < |x - x_0| + |x_0| < \delta + |x_0|$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |x^2 - x_0^2| \\ &= |x - x_0| \cdot |x + x_0| \\ &\leq x - x_0| \cdot (|x| + |x_0|) \\ &< |x - x_0| \cdot (\delta + |x_0| + |x_0|) \\ &= (\delta + 2\,|x_0|) \cdot |x - x_0| \end{aligned}$$

Damit ist $L = (\delta + 2\,|x_0|)$, z.B. für $\delta = 1$ ist $L = 1 + 2\,|x_0|$

Satz 138 *Ist eine Funktion Lipschitz-stetig so ist Sie auch gleichmässig stetig.*

Bew.: Wähle zu $\varepsilon > 0$ beliebig

$$\delta = \frac{\varepsilon}{L}$$

So ist für $|x - x_0| < \delta$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq L \cdot |x - x_0| \\ &< L \cdot \frac{\varepsilon}{L} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

q.e.d.
Somit auch da jede gleichmässig stetige Funktion stetig ist:

Satz 139 *Ist eine Funktion in x_0 Lipschitz-Stetig, so ist sie dort stetig.*

Bsp:

1. $f(x) = x^2$ ist Lipschitz-Stetig auf [0,1], da

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |x^2 - y^2| \\ &= |x - y| \cdot |x + y| \\ &\leq 2 \cdot |x - y| \end{aligned}$$

2. $f(x) = \sqrt{x}$ ist Lipschitz-Stetig auf $[1, \infty)$, da

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \\ &= \frac{|x - y|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} \\ &\leq \frac{1}{2}|x - y| \end{aligned}$$

3. $f(x) = \sqrt{x}$ ist nicht Lipschitz-Stetig in $x_0 = 0$, denn

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \sqrt{x} \\ &= \frac{|x-0|}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Wäre nun die Funktion Lipschitz-stetig, so gäbe es ein L mit

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{x} - \sqrt{0}\right| &= \sqrt{x} \leq L \cdot |x - 0| = L \cdot x \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} \leq L \cdot x \\ &\Leftrightarrow 1 \leq L \cdot \sqrt{x} \\ &\Leftrightarrow L \cdot \sqrt{x} \geq 1 \end{aligned}$$

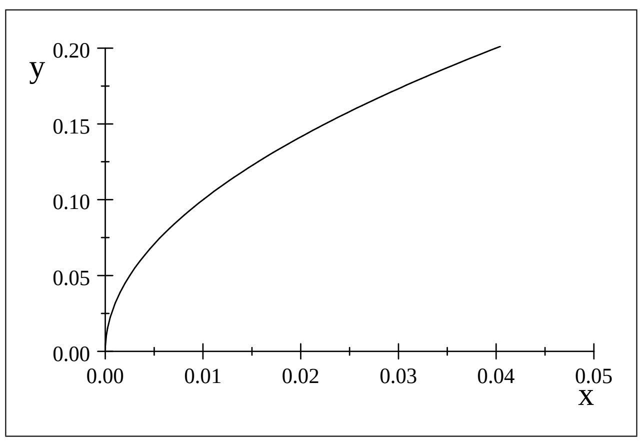
Wählen wir jedoch x klein genug, also z.B.

$$x < \frac{1}{4L^2}$$

so ist

$$L \cdot \sqrt{x} < L \cdot \frac{1}{2L} = \frac{1}{2}$$

im Widerspruch zu $L \cdot \sqrt{x} \geq 1$.Grafisch bedeutet dies, dass in der Nähe der Null der Anstieg der Sekante beliebig gross werden kann.



Zusammenhang der Stetigkeitsbegriffe
1. Es gilt folgende Implikation:
Lipschitz stetig => Gleichmässig stetig => Stetig

2. Gegenbeispiele:
Eine stetige Funktion, die nicht gleichmässig stetig ist, ist $f(x) = x^2$ auf $\mathbb{R}$

Eine gleichmässig stetige Funktion, die nicht Lipschitz stetig ist,

ist $f(x) = \sqrt{x}$ auf $[0, 1]$

3. Unter zusätzlichen Vorraussetzungen lassen sich doch die Folgerungen umkehren:

Eine stetige Funktion auf kompakten (abgeschlossenen) Intervallen ist gleichmässig stetig.

3.5.9 Der Zwischenwertsatz

Satz 140 *Sei* $f : [a, b] \to R$ *stetig mit* $f(a) = c$ *und* $f(b) = d \Rightarrow \forall y \in [\min(c, d), \max(c, d)]\ \exists x^* \in [a, b]$ *mit* $f(x^*) = y$

Bew.: Intervallschachtelung: Sei $x_l^{(0)} = a, x_r^{(0)} = b$ und betrachte $x^{(1)} = \frac{a+b}{2}$. Ist $f(x^{(1)}) > y$, so setze $x_r^{(1)} = x^{(1)}$ sonst $x_l^{(1)} = x^{(1)}$. Der jeweils andere Wert wird belassen.

Damit konvergiert

$$\begin{aligned} x_r^{(n)} &\to x^* \\ x_l^{(n)} &\to x^* \end{aligned}$$

und wegen der Stetigkeit

$$\lim_{n\to\infty} f(x_l^{(n)}) = f(x^*) = \lim_{n\to\infty} f(x_r^{(n)})$$

Weiterhin gilt

$$f(x_l^{(n)}) \le y \le f(x_r^{(n)})$$

und damit

$$y = f(x^*)$$

Damit ergibt sich insbesondere für eine Funktion mit Vorzeichenwechsel und $y = 0$:

Satz 141 *Nullstellensatz Sei* $f : [a, b] \to R$ *stetig mit* $f(a) \cdot f(b) < 0$, *dann* $\exists x^* \in [a, b]$ *mit*

$$f(x^*) = 0$$

3.5.10 Der Fixpunktsatz

Definition 142 *Ein Wert $x \in \mathbb{R}$ heisst **Fixpunkt** einer Funktion $f(x)$, falls $x = f(x)$*

Satz 143 *Fixpunktsatz: Sei $f : [a, b] \to [c, d]$ stetig mit $[c, d] \subset [a, b]$ (selbstkontrahierend), dann existiert ein Fixpunkt $u = f(u)$*

Bew.: Es ist

$$a \leq c \leq f(x) \leq d \leq b$$

damit ist insbesondere für $x = a$ und $x = b$:

$$\begin{aligned} a &\leq f(a) \\ f(b) &\leq b \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} f(a) - a &\geq 0 \\ f(b) - b &\leq 0 \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Funktion

$$g(x) := f(x) - x$$

so hat diese Funktion damit eine Nullstelle $u \in [a, b]$

$$g(u) = f(u) - u = 0$$

also

$$f(u) = u$$

q.e.d.

Die Kontraktionseigenschaft ist in der o.a. Darstellung noch etwas unhandlich. Wir betrachten nun Intervalle, die auf sich selber abgebildet werden, um dies zu verwenden:

Satz 144 *Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ Lipschitz-stetig mit $0 \leq L < 1$, d.h. $\forall x, y \in [a, b]$ gilt*

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

dann gilt:
1. f hat genau einen Fixpunkt x^*
2. Für jeden Startwert $x_0 \in [a, b]$ liefert die Iteration $x_{n+1} = f(x_n)$ eine gegen den Fixpunkt konvergierende Folge mit

$$\begin{aligned} |x_n - x^*| &\leq \frac{L}{1 - L} \cdot |x_n - x_{n-1}| \\ &\leq \frac{L^n}{1 - L} \cdot |x_1 - x_0| \end{aligned}$$

Bem.:$|x_n - x^*| \leq \frac{L}{1-L} \cdot |x_n - x_{n-1}|$ heisst **a-posteriori** Abschätzung, $|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L} \cdot |x_1 - x_0|$ **a-priori** Abschätzung für den Fehler $|x_n - x^*|$

Bew. des Satzes:

1. Eindeutigkeit des Fixpunktes: Wären x_1^* und x_2^* verschiedene Fixpunkte, so wäre

$$\begin{aligned} |x_1^* - x_2^*| &= |f(x_1^*) - f(x_2^*)| \\ &\leq L \cdot |x_1^* - x_2^*| \end{aligned}$$

und damit

$$(1-L) \cdot |x_1^* - x_2^*| \leq 0$$

gilt wegen $0 < L < 1:$

$$\begin{aligned} |x_1^* - x_2^*| &= 0 \\ x_1^* &= x_2^* \end{aligned}$$

2. Existenz des Fixpunktes:

Konvergenz zeigen wir mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums. Dazu muss $|x_m - x_n| < \varepsilon$ werden, wenn wir nur n gross genug wählen und $m = n+k$ setzen. Wir betrachten nun die Summe der Abweichungen als Teleskopsumme zweier Folgenterme und erhalten

$$x_{n+k} - x_n = \sum_{l=n}^{n+k-1} x_{l+1} - x_l$$

und damit

$$\begin{aligned} |x_{n+k} - x_n| &= \left| \sum_{l=n}^{n+k-1} x_{l+1} - x_l \right| \\ &\leq \sum_{l=n}^{n+k-1} |x_{l+1} - x_l| \end{aligned}$$

Es ist aber für $l \geq n$

$$\begin{aligned} |x_{l+1} - x_l| &= |f(x_l) - f(x_{l-1})| \\ &\leq L \cdot |x_l - x_{l-1}| \\ &\dots \\ &\leq L^{l-n} \cdot |x_{n+1} - x_n| \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\sum_{l=n}^{n+k-1} |x_{l+1} - x_l| &\leq \sum_{l=n}^{n+k-1} L^{l-n} \cdot |x_{n+1} - x_n| \\
&= |x_{n+1} - x_n| \cdot \sum_{l=0}^{k-1} L^l \\
&= |x_{n+1} - x_n| \cdot \frac{1 - L^k}{1 - L} \\
&\leq \frac{1}{1 - L} \cdot |x_{n+1} - x_n| \\
&\leq \frac{L}{1 - L} \cdot |x_n - x_{n-1}| \leq ... \\
&\leq \frac{L^n}{1 - L} \cdot |x_1 - x_0|
\end{aligned}$$

Also insbesondere

$$|x_{n+k} - x_n| \leq \frac{L}{1 - L} \cdot |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{L^n}{1 - L} \cdot |x_1 - x_0|$$

für beliebiges k. Damit ist die Folge Cauchy-Folge und somit konvergent.

Für $k \to \infty$ ergibt sich $x_{n+k} \to x^*$ und wir erhalten

$$|x^* - x_n| \leq \frac{L}{1 - L} \cdot |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{L^n}{1 - L} \cdot |x_1 - x_0|$$

In der Praxis geht man wie folgt vor: Soll der Fixpunkt auf eine Genauigkeit von ε bestimmt werden, so benötigt man

$$|x^* - x_n| < \varepsilon$$

und man berechnet (a-posteriori) so lange Iterationen bis gilt

$$\frac{L}{1 - L} \cdot |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

A-priori kann man nach Berechnung des Startfehlers $|x_1 - x_0|$ berechnen

$$|x^* - x_n| \leq \frac{L^n}{1 - L} \cdot |x_1 - x_0|$$

also bei Kenntnis des L kann man die maximale Anzahl der Iterationen berechnen gemäss

$$\frac{L^n}{1 - L} \cdot |x_1 - x_0| < \varepsilon$$

und damit

$$L^n < \frac{\varepsilon \cdot (1-L)}{|x_1 - x_0|}$$

und durch logarithmieren

$$\begin{aligned} n \cdot \ln(L) &< \ln\left(\frac{\varepsilon \cdot (1-L)}{|x_1 - x_0|}\right) \\ n &> \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon \cdot (1-L)}{|x_1 - x_0|}\right)}{\ln(L)} = \frac{\ln\left(\frac{|x_1 - x_0|}{\varepsilon \cdot (1-L)}\right)}{\ln\left(\frac{1}{L}\right)} \end{aligned}$$

Beispiel: Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{5}{3}\sqrt{x}$$

und die zugehörige Fixpunkt-Iteration

$$x_{n+1} = \frac{5}{3}\sqrt{x_n}$$

Diese ist gleichmässig stetig auf $[1, 4]$ mit

$$\begin{aligned} \left|\frac{5}{3}\sqrt{x} - \frac{5}{3}\sqrt{y}\right| &\leq \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |x - y| \\ &= \frac{5}{6} \cdot |x - y| \end{aligned}$$

und die Abb. ist kontrahierend. Weiterhin ist mit $x_0 = 4$ dann $x_1 = \frac{10}{3}$, also

$$|x_1 - x_0| = \frac{2}{3}$$

Der Fixpunkt kann auf $\varepsilon = \frac{1}{100}$ berechnet werden gemäß

$$n > \frac{\ln(\frac{800}{3})}{\ln(\frac{3}{2})} = 13,8$$

:

Also sind maximal 14 Iterationen nötig.

Beispiel 2: $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ auf $[2, 5]$ mit $x_0 = 3$. Es ist

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \leq \left|\frac{y - x}{x \cdot y}\right| \leq \frac{1}{4}\,|x - y|$$

Mit $x_1 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$ ist

$$|x_1 - x_0| = \frac{2}{3}$$

und es ist zu $\varepsilon = \frac{1}{100}$ wegen $L = \frac{1}{4}$

$$n > \frac{\ln(\frac{200}{3} \cdot \frac{4}{3})}{\ln(4)} = 3,23$$

also $n_0 = 4$. Die Iteration liefert den Fixpunkt

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{3}{7} + 2 = \frac{17}{7} = 2,428 \\ x_3 &= \frac{7}{17} + 2 = \frac{41}{17} = 2,412 \\ x_4 &= \frac{17}{41} + 2 = \frac{99}{41} = 2,414 \end{aligned}$$

Schliesslich sei noch ein Satz ohne Beweis erwähnt, der auf dem Zwischenwertsatz beruht:

Satz 145 *Ist eine Funktion auf einem Intervall streng monoton (und damit umkehrbar) und dort stetig, so ist auch die Umkehrfunktion stetig.*

3.5.11 Eigenschaften der Funktionen sin(x) und cos(x)

Wir haben bereits die Funktionen sinus und cosinus kennengelernt:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \operatorname{Im}(\exp(ix)) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \\ \cos(x) &= \operatorname{Re}(\exp(ix)) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \end{aligned}$$

In diesem Abschnitt widmen wir uns zunächst den reellen Argumenten der Sinus- und Cosinusfunktion, deren Stetigkeit wir ja bereits gezeigt haben.

Wir betrachten zunächst die Cosinusfunktion auf dem Intervall $[0,2]$. Dort gilt

$$\cos(0) = 1$$

und da für $0 < x \leq 2$ und $n \geq 1$ auch gilt

$$\begin{aligned} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} &= \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdot \frac{x}{2n+1} \cdot \frac{x}{2n+2} \\ &\leq \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdot \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{2}{2n+2} \\ &\leq \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} < \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

sind die Summanden der Reihe

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...$$

bzw.

$$\cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...$$

eine alternierende monoton fallende Nullfolge.

Ebenso gilt - wie wir später verwenden - für die Summanden der Sinusfunktion für $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} &= \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \cdot \frac{x}{2n} \cdot \frac{x}{2n+1} \\ &\leq \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \cdot \frac{2}{2n} \cdot \frac{2}{2n+1} \\ &\leq \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} < \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \end{aligned}$$

gleiches.

Für den Cosinus gilt daher die Abschätzung

$$\begin{aligned} \cos(2) - 1 &\leq -\frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = -\frac{4}{2} + \frac{16}{24} = -\frac{4}{3} \\ \cos(2) &\leq -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Mit dem Zwischenwertsatz ergibt sich, dass diese Funktion eine Nullstelle im Intervall (0,2) hat.

Definition 146 *Der Wert der ersten (Bem.: und einzigen) Nullstelle von cos(x) im Intervall [0,2] wird mit*

$$x^* = \frac{\pi}{2}$$

bezeichnet, also

$$\pi := 2 * \min_{x \in \mathbb{R}^+} (\mathrm{Re}(\exp(ix)) = 0)$$

Bem.: Für die Eindeutigkeit der Nullstelle müsste noch die Monotonie der Funktion im Intervall [0,2] gezeigt werden.

Es gilt

$$\begin{aligned} 1 &= \exp(0) = \exp(ix - ix) = \exp(ix) \cdot \exp(-ix) \\ &= (\cos(x) + i\sin(x)) \cdot (\cos(-x) + i\sin(-x)) \\ &= (\cos(x) + i\sin(x)) \cdot (\cos(x) - i\sin(x)) \\ &= \cos^2(x) + \sin^2(x) \end{aligned}$$

Und damit für $x^* = \frac{\pi}{2}$
$$1 = \sin^2(\frac{\pi}{2})$$
Da $\sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6} \geq x(1 - \frac{x^2}{6}) \geq 0$ für $x \in [0, 2]$ ist
$$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$$
und hieraus folgt für die exponentielle Funktion
$$\begin{aligned} \exp(i \cdot \frac{\pi}{2}) &= \cos(\frac{\pi}{2}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) \\ &= i \end{aligned}$$

Damit
$$\begin{aligned} \exp(i\pi) &= \exp(i\frac{\pi}{2}) \cdot \exp(i\frac{\pi}{2}) \\ &= (i)^2 = -1 \end{aligned}$$

bzw.
$$\exp(i\pi) + 1 = 0$$
oder
$$e^{i\pi} + 1 = 0$$
Bem.: Dies ist die wohl schönste mathematische Gleichung überhaupt, da Sie die 4 wichtigsten Konstanten $e, i, \pi, 1$ und 0 sowie die Operationen Addition, Multiplikation und Potenzieren in eine Beziehung setzt.

Es ergibt sich hieraus auch direkt
$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1 = -1 + 0 \cdot i$$
d.h.
$$\begin{aligned} \cos(\pi) &= -1 \\ \sin(\pi) &= 0 \end{aligned}$$
Und durch nochmaliges Quadrieren
$$e^{i2\pi} = \left(e^{i\pi}\right)^2 = 1$$
Hieraus folgt
$$e^{i\cdot(x+2\pi)} = e^{ix} \cdot e^{i2\pi} = e^{ix}$$
bzw.
$$\begin{aligned} \cos(x + 2\pi) &= \cos(x) \\ \sin(x + 2\pi) &= \sin(x) \end{aligned}$$

also die Periodizität dieser Funktionen.

Schliesslich gilt wegen

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

auch dass

$$\begin{array}{rcl} \cos(x) & \in & [-1,1] \\ \sin(x) & \in & [-1,1] \end{array}$$

also die Beschränktheit.

Weitere Beziehungen liefert die Exponentialfunktion mit

$$\begin{array}{rcl} e^{i\cdot(x+\pi)} & = & e^{i\cdot x+i\pi} = e^{ix}\cdot e^{i\pi} = -e^{ix} \\ & & \text{also für} \\ \cos(x+\pi) & = & -\cos(x) \\ \sin(x+\pi) & = & -\sin(x) \end{array}$$

und schliesslich ergibt sich noch ein Zusammenhang der beiden Funktionen aus

$$\begin{array}{rcl} \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + i\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) & = & e^{i\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} \\ & = & e^{ix}\cdot e^{\left(i\frac{\pi}{2}\right)} \\ & = & i\cdot e^{ix} \\ & = & i\cdot(\cos(x)+i\cdot\sin(x)) \\ & = & -\sin(x)+i\cdot\cos(x) \end{array}$$

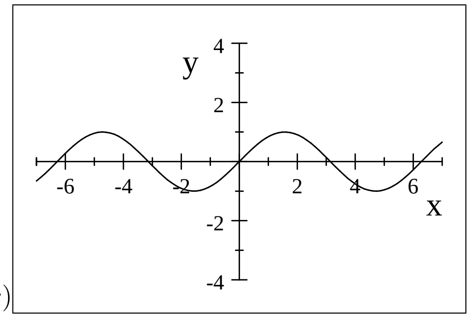
Also

$$\begin{array}{rcl} \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) & = & -\sin(x) \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) & = & \cos(x) \end{array}$$

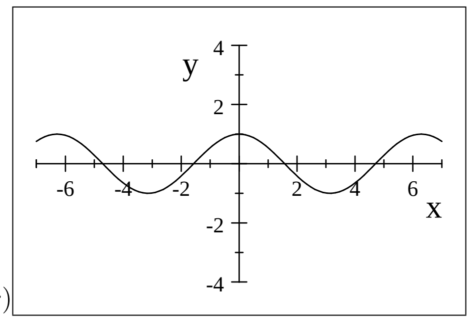
Schliesslich werden wir im folgenden auch den Quotient der beiden Funktionen betrachten:

Definition 147 *Die Funktion* $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} =: \tan(x)$ *heisst* ***Tangens****, die Funktion* $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} =: \cot(x)$ *heisst* ***Cotangens.***

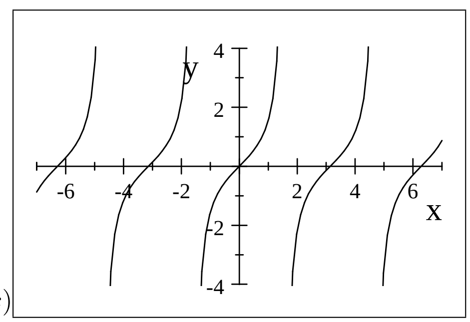
Graphen:



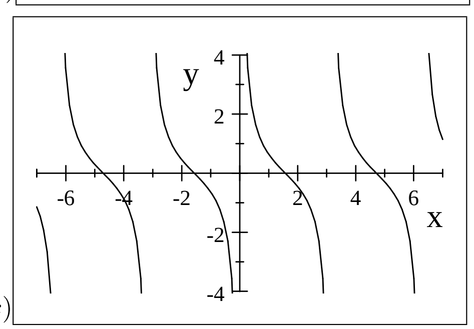
$\sin(x)$



$\cos(x)$



$\tan(x)$



$\cot(x)$

Umkehrfunktionen trigonometrischer Funktionen

Definition 148 *Die Umkehrfunktion von* $y = \sin(x)$ *heisst*

$$f^{-1}(y) = x = \arcsin(y)$$

bzw. von $y = \cos(x)$

$$f^{-1}(y) = x = \arccos(y)$$

und von $y = \tan(x)$

$$f^{-1}(y) = x = \arctan(y)$$

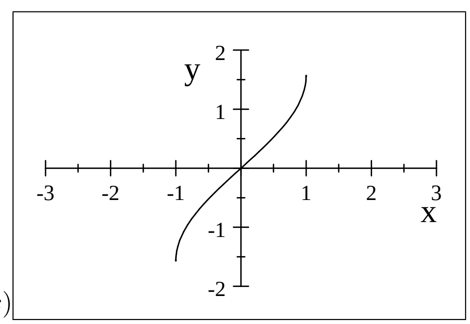
bzw. zu $y = \cot(x)$

$$f^{-1}(y) = x = arc\cot(y)$$

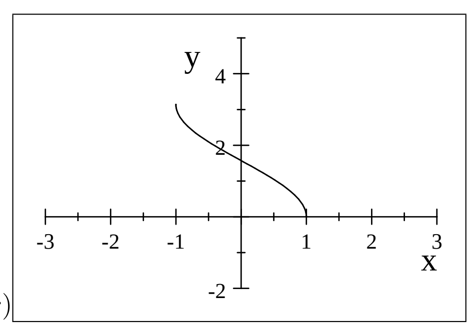
Bem.: Alle Umkehrfunktionen stetiger Funktionen sind wiederum stetig.

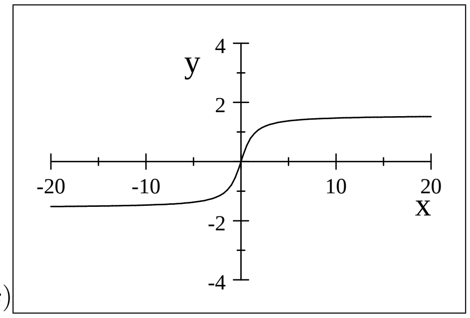
Die Graphen sind

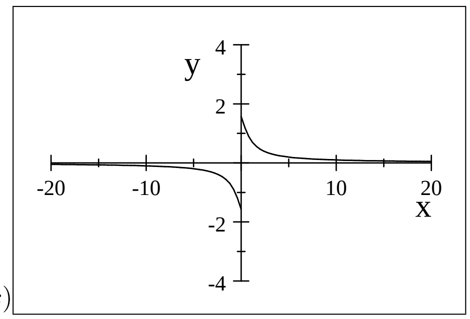
$arcsin(x)$



$arccos(x)$



arctan(x)


arccot(x)


3.5.12 Die Logarithmusfunktion

Definition 149 *Die Umkehrfunktion von $y = \exp(x)$ heisst*

$$f^{-1}(y) = x = \ln(y)$$

Logarithmus (-funktion)

und es gilt

$$\exp(\ln(x)) = \ln(\exp(x)) = x$$

Es ergibt sich wegen exp(0)=1

$$\ln(1) = 0$$

und die Beziehungen:
1.

$$\begin{aligned} \ln(a) + \ln(b) &= \ln(\exp(\ln(a) + \ln(b))) \\ &= \ln(\exp(\ln a) \cdot \exp(\ln b)) \\ &= \ln(ab) \end{aligned}$$

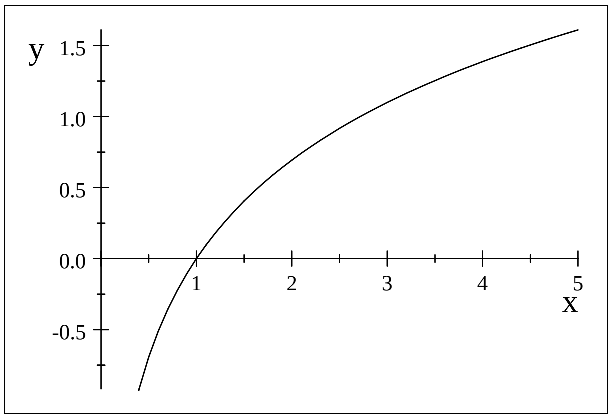
2.

$$\begin{aligned} \ln(a) - \ln(b) &= \ln(\exp(\ln(a) - \ln(b))) \\ &= \ln(\exp(\ln a) / \exp(\ln b)) \\ &= \ln(\frac{a}{b}) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} b \cdot \ln(a) &= \ln(\exp(b \cdot \ln(a)) \\ &= \ln(\exp(\ln a)^b) \\ &= \ln(a^b) \end{aligned}$$

Graph: $\ln(x)$



3.5.13 Die hyperbolischen Funktionen

Definition 150 *Für $x \in \mathbb{C}$ heisst die Funktion*

$$\cosh x := \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$$

Cosinus Hyperbolicus*, die Funktion*

$$\sinh x := \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$$

der ***Sinus Hyperbolicus.***

Satz 151 *Es ist*

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \sinh(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Bew.:

$$
\begin{aligned}
\cosh x \quad : \quad &= \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}2\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sinh x \quad : \quad &= \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}2\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}
$$

Damit ist auch

$$
\begin{aligned}
\cosh(-x) &= \cosh(x) \\
\sinh(-x) &= -\sinh(x)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\cosh^2(x)-\sinh^2(x) &= \left(\frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}\right)^2-\left(\frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(\left(\exp^2(x)+2\exp(0)+\exp^2(-x)\right)-\left(\exp^2(x)-2\exp(0)+\exp^2(-x)\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}4 = 1
\end{aligned}
$$

Der Zusammenhang zu den Cosinus und Sinusfunktionen ergibt sich für reelles x gemäss

$$
\begin{aligned}
\cos(x) &= \cosh(ix) \\
\cosh(x) &= \cos(ix) \\
&\text{und} \\
\sin(x) &= -i\cdot\sinh(ix) \\
\sinh(x) &= -i\cdot\sin(ix)
\end{aligned}
$$

Bew.:

$$\begin{aligned}
\cosh(ix) &= \frac{\exp(ix)+\exp(-ix)}{2} \\
&= \frac{1}{2}(\cos(x)+i\sin(x)+\cos(-x)+i\sin(-x)) \\
&= \frac{1}{2}(\cos(x)+i\sin(x)+\cos(x)-i\sin(x)) \\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

damit:

$$\cos(ix)=\cosh(i^2x)=\cosh(-x)=\cosh(x)$$

und aus

$$\begin{aligned}
-i\cdot\sinh(ix) &= -i\cdot\frac{\exp(ix)-\exp(-ix)}{2} \\
&= -i\cdot\frac{1}{2}(\cos(x)+i\sin(x)-\cos(-x)-i\sin(-x)) \\
&= -i\cdot\frac{1}{2}(i\sin(x)+i\sin(x)) \\
&= -i\cdot i\sin(x)=\sin(x)
\end{aligned}$$

daher ist $\sin(ix)=(-i)\sinh(i^2x)$ und es folgt auch

$$\begin{aligned}
-i\cdot\sin(ix) &= (-i)\cdot(-i)\sinh(i^2x) \\
&= -1\cdot\sinh(-x) \\
&= \sinh(x)
\end{aligned}$$

Schliesslich ist noch

$$\cosh(x+y)=\cosh(x)\cosh(y)+\sinh(x)\sinh(y)$$

und

$$\sinh(x+y)=\sinh(x)\cosh(y)+\cosh(x)\sinh(y)$$

Bew.:

$$\begin{aligned}
\cosh(x)\cosh(y)+\sinh(x)\sinh(y) &= \frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2} \\
&= \frac{1}{4}\left(e^xe^y+e^xe^{-y}+e^{-x}e^y+e^{-x}e^{-y}\right) \\
&\quad +\frac{1}{4}\left(e^xe^y-e^xe^{-y}-e^{-x}e^y+e^{-x}e^{-y}\right) \\
&= \frac{2e^xe^y+2e^{-x}e^{-y}}{4}=\frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2} \\
&= \cosh(x+y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
&= \frac{1}{4}\left(e^x e^y + e^x e^{-y} - e^{-x} e^y - e^{-x} e^{-y}\right) \\
&\quad + \frac{1}{4}\left(e^x e^y - e^x e^{-y} + e^{-x} e^y - e^{-x} e^{-y}\right) \\
&= \frac{2e^x e^y - 2e^{-x} e^{-y}}{4} = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} \\
&= \sinh(x+y)
\end{aligned}$$

Kapitel 4

Differentialrechnung

4.1 Motivation

Überlegen wir uns zunächst, wie wir eine Geschwindigkeit berechnen können: Sehen sie z.B. auf einem Foto einen fallenden Stein. Da dieses eine Momentaufnahme ist, können Sie zwar anhand der Skala den Weg - also die Höhe über dem Boden ablesen, jedoch kann hieraus noch nicht die Geschwindigkeit berechnet werden. Um die Geschwindigkeit zu berechnen, brauchen wir die Daten an einem zweiten Messpunkt.

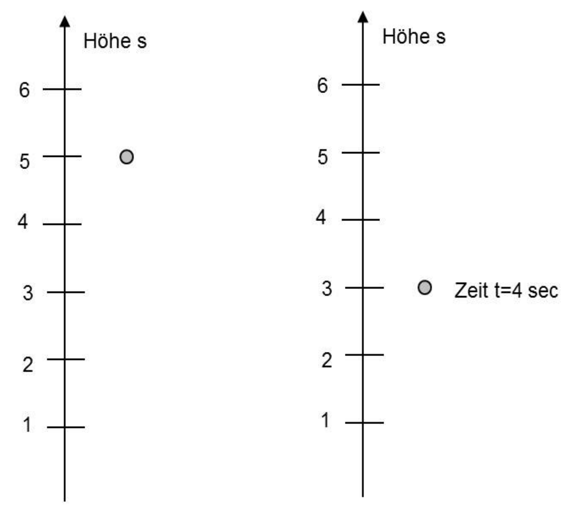
Aus der Weg- und Zeitdifferenz ergibt sich dann die durchschnittliche Geschwindigkeit. Hierzu tragen wir den zurückgelegten Weg $s(t)$ zum Zeitpunkt t in einem kartesischen Koordinatensystem auf.

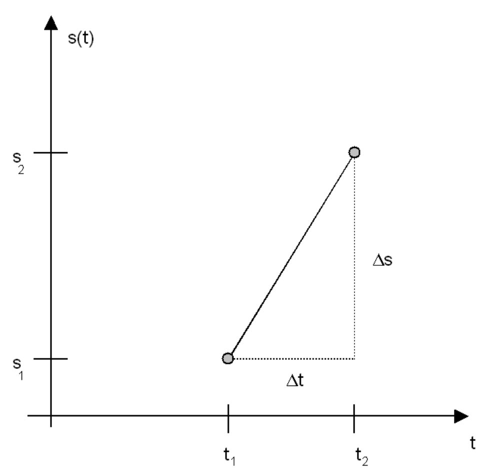
Gegeben ist damit ein Weg-Zeit-Verlauf $s(t)$. Wir können somit die (Durchschnitts-) Geschwindigkeit berechnen, wenn von einem Körper in einer beliebigen Zeitspanne von t_1 bis t_2 der Weg von $s_1 = s(t_1)$ nach $s_2 = s(t_2)$ zurückgelegt wurde. Zunächst wissen wir, dass sich die Geschwindigkeit berechnen lässt gemäß

$$Geschwindigkeit = \frac{Weg\ddot{a}nderung}{Zeit\ddot{a}nderung}$$

also $v = \frac{\triangle s}{\triangle t}$.

Skizze:





Es ergibt sich nun für die Geschwindigkeit $v = \frac{\triangle s}{\triangle t}$, also die Steigung der Geraden durch die beiden Messpunkte.Damit können wir anhand der beiden Meßpunkte die Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitraum t_1 bis t_2 berechnen:

$$\begin{aligned}\overline{v} &= \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}\end{aligned} \tag{4.1}$$

Bewegt sich der Körper insbesondere gleichmäßig, so ist $s(t) = c \cdot t$ und damit

$$\begin{aligned}v &= \frac{c \cdot t_2 - c \cdot t_1}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{c \cdot (t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = c\end{aligned}$$

also die Geschwindigkeit konstant.

Bewegt sich der Körper mit wechselnder Geschwindigkeit (er legt in gleichen Zeitabschnitten verschieden lange Wege zurück), so stellt sich die Frage nach der momentanen Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt t_1. Hierzu ziehen wir - wie oben - einen zweiten Messpunkt t_2 hinzu, welcher nun "möglichst kurz" nach dem Zeitpunkt t_1 liegen sollte.

Formal wählen wir zunächst einen festen Zeitpunkt t_2 und bilden dann den Grenzübergang (Limes) $t_2 \to t_1$.

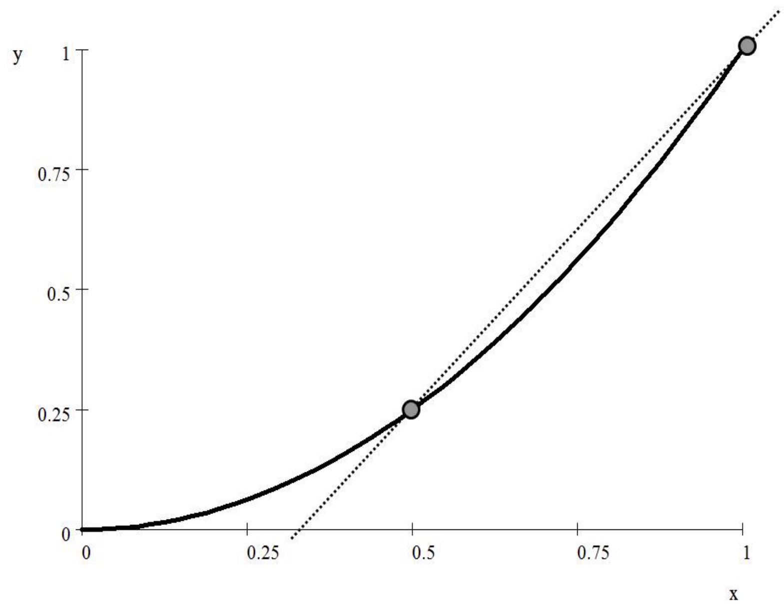
Beispiel: Freier Fall, also $s(t) = \frac{g}{2} t^2$. Wie ist die Geschwindigkeit zu einem festen Zeitpunkt t_1?

$$\begin{aligned}\overline{v} &= \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{\frac{g}{2} t_2^2 - \frac{g}{2} t_1^2}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{g}{2} \frac{(t_2 - t_1) \cdot (t_2 + t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{g}{2}(t_2 + t_1)\end{aligned} \tag{4.2}$$

und für $t_2 \to t_1$

$$v(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{g}{2}(t_2 + t_1) = \frac{g}{2} \cdot 2 \cdot t_1 = g \cdot t_1 \tag{4.3}$$

Diesen Grenzprozeß wollen wir uns noch einmal anhand der Funktion $f(x) = x^2$ anschauen:



Wir betrachten nun die Stelle $x_0 = 0,5$ und interessieren uns wiederum für die Sekantensteigung durch x_0 und einen benachbarten Punkt:

Zunächst betrachten wir einen Punkt in der Nähe von x_0, berechnen dort den Funktionswert (z.B. $x_1 = 1$) und legen eine Gerade durch die beiden Punkte. Wir erhalten eine Sekante mit der Steigung $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1 - 0,25}{0,5} = \frac{0,75}{0,5} = 1,5$. Dies ist also eine erste Näherung für die Steigung im Punkt $x_0 = 0,5$.

Verschieben wir nun den zweiten Punkt näher an x_0, so erhalten wir eine verbesserte Näherung: Mit $x_1 = 0,6$:

$$\frac{0,36 - 0,25}{0,1} = 1,1 \tag{4.4}$$

Beim Übergang $x_1 \to x_0$ erhalten wir schliesslich statt der Sekante eine Tangente und die Sekantensteigung wird zur Tangentensteigung.

Berechnen wir den Grenzwert mit den uns aus dem vorigen Kapitel zur Verfügung stehenden Mitteln, so erhalten wir für $x_1 = 0,5 + h$:

$$\begin{aligned} m_s &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(0,5+h) - f(0,5)}{0,5+h-0,5} = \frac{f(0,5+h) - f(0,5)}{h} \\ &= \frac{(0,5+h)^2 - 0,5^2}{h} = \frac{0,25+h+h^2-0,25}{h} = \frac{h \cdot (1+h)}{h} = 1+h \end{aligned}$$

Wir interessieren uns für den Übergang $x_1 \to x_0$, also $h \to 0$ (welches den Übergang von der Tangente zur Sekante beschreibt) und erhalten

$$m_t = \lim_{h \to 0} 1 + h = 1 \tag{4.5}$$

Die Kurventangente hat also im Punkt $x_0 = 0,5$ die Steigung 1.

Wir schreiben:

$$y'(0,5) = f'(0,5) = 1 \tag{4.6}$$

und nennen die Tangentensteigung als Grenzwert der Sekantensteigung die "Ableitung von f(x) an der Stelle x_0".

4.2 Verallgemeinerung

Gegeben sei eine Funktion $f(x)$. Zur sinnvollen Bildung aller folgenden Werte muss die Funktion stetig sein, da sonst die Tangente in diesem Punkt nicht existiert.

Gesucht wird die Tangentensteigung an der Stelle $P = (x_0, f(x_0))$

Wir betrachten hierzu einen benachbarten Punkt $Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ und erhalten als Sekantensteigung

$$\begin{aligned} m_s &= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} \\ &= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Dieser Wert heißt auch (rechtsseitiger) Differenzenquotient.
Wandert nun $Q \to P$, so erhalten wir im Grenzfall die Tangentensteigung

$$\boxed{\mathrm{m}_T = \lim_{h \to 0} \mathrm{m}_s = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}} \tag{4.8}$$

Es werden auch häufig folgende Notationen für die Tangentensteigung verwendet: $y'; y'(x_0); f'(x_0); \frac{dy}{dx}|_{x=x_0}; \frac{d}{dx}f|_{x=x_0}$ oder besonders häufig auch in diesem Buch

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ oder } \frac{\partial y}{\partial x}$$

Definition 152 *Eine Funktion $f(x)$ heißt **differenzierbar in** x_0, wenn der Grenzwert*

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

*existiert. Der Grenzwert heißt **"Ableitung von f an der Stelle** x_0**".***

Definition 153 *Eine Funktion $f'(x)$ heißt **Ableitung (oder Ableitungsfunktion) von** $f(x)$, wenn Sie jeder Stelle x_0 ihre Ableitung $f'(x_0)$ zuordnet und dieser Grenzwert existiert.*

Bem.
1. $f'(x)$ heißt auch "erste Ableitung".
2. Analog kann mit $x = x_0 + h$ verwendet werden:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Satz 154 *Ist eine Funktion in x_0 differenzierbar, so ist Sie dort auch stetig*

Bew.: Sei f differenzierbar, d.h. es ist

$$0 = 0 \cdot f'(x_0) = \lim_{h\to 0} h \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x_0+h) - f(x_0)$$

und damit

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

bzw

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) &= 0 \\ \lim_{x\to x_0} f(x) &= f(x_0) \end{aligned}$$

Die Umkehrung gilt jedoch nicht, da z.B.$f(x) = |x|$ stetig, aber

$$\begin{aligned} r - \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= r - \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = 1 \\ l - \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= l - \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = -1 \end{aligned}$$

also existiert der Grenzwert nicht.

4.2.1 Einige Grenzwerte von Sin, Cos, Exp

Zur Erinnerung nochmal das Sandwich-Lemma für Funktionen:

Lemma 155 *Sandwich-Lemma für Funktionen: Gilt* $\forall\, |x - x_0| < K, x \neq x_0$:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

und

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = c$$

so ist auch

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = c$$

Einige weitere wichtige Grenzwerte sind im Folgenden von Nöten:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + ... \end{aligned}$$

Es ist für $x \in [0, 1]$,da $n! \geq 2^{n-1}$

$$1 \leq 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + ... \leq 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + .. = \frac{1}{1 - \frac{x}{2}}$$

Für $x \in [-1, 0)$ genügt die Reihe

$$\frac{\exp(x) - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + ...$$

dem Leibniz-Kriterium (alternierende monotone Nullfolge) und damit

$$1 + \frac{x}{2} < \frac{\exp(x) - 1}{x} < 1$$

Somit gilt gemäß Sandwich Lemma mit $x_0 = 0, K = 1$,

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 + \frac{x}{2} & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$h(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & x < 0 \\ \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} & x \geq 0 \end{array} \right\}$$

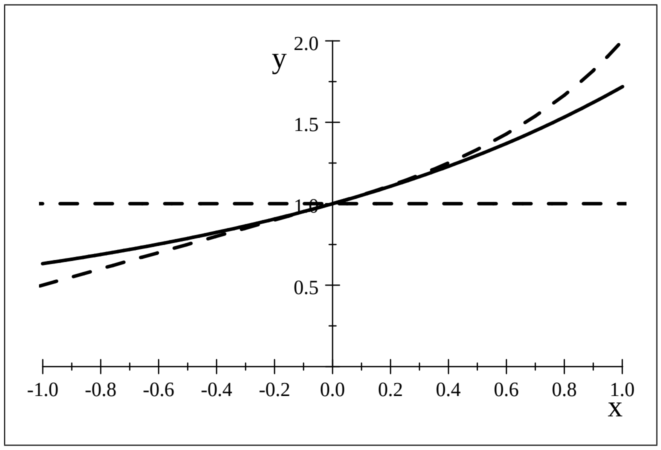
mit

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 = \lim_{x \to 0} h(x)$$

Daher ist also

$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$$

Anschaulich:



Ähnliches gilt nun bei Sinus und Cosinus:
Für die Funktion $\sin(x)$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{x} &= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...}{x} \\ &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - ... \end{aligned}$$

und für $-1 \leq x < 1$ ist dies eine Leibniz-Reihe. Daher gilt

$$1 - \frac{x^2}{3!} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

Damit ist gemäß Sandwich Lemma mit $x_0 = 0, K = 1, f(x) = 1 - \frac{x^2}{3!}, h(x) = 1$ und

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} h(x) = 1$$

und es gilt:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Nun zur Cosinus-Funktion:
Es gilt da $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...$

$$\frac{\cos(x) - 1}{x} = -\frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \frac{x^5}{5!} + ...$$

Für $0 \leq x \leq 1$

$$-\frac{x}{2!} \leq \frac{\cos(x)-1}{x} \leq 0$$

und für $-1 \leq x \leq 0$

$$0 \leq \frac{\cos(x)-1}{x} \leq -\frac{x}{2!}$$

Damit ist dort gemäß Sandwich Lemma mit $x_0 = 0, K = 1$,

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x < 0 \\ -\frac{x}{2} & x \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$h(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{x}{2} & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{array} \right\}$$

und damit

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$$

Bem.: Wir dürfen NICHT !!! den Grenzwert der Reihe gemäß

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n &= \lim_{x \to 0} a_0 + a_1 x + ... \\ &= a_0 \end{aligned}$$

berechnen. Z.B. betrachten wir die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n$$

so konvergiert diese nur für

$$|x| < R = \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

also nur für $x = 0$. Daher ist $\lim_{x \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ divergent und damit nicht gleich a_0. Hierzu müsste noch die Stetigkeit von Potenzreihen innerhalb des Konvergenzradius gezeigt werden und dann der Radius berechnet werden.

Dann wäre mit

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

und der Stetigkeit von $p(x)$

$$\lim_{x \to 0} p(x) = p(\lim_{x \to 0} x) = p(0) = a_0$$

4.2.2 Berechnung elementarer Ableitungen

Nun zur Berechnung der Ableitungen:

1. $f(x) = x^2$

In jedem Punkt x_0 gilt für die Ableitung:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - {x_0}^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - {x_0}^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2x_0h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2x_0 + h = 2x_0 \end{aligned}$$

2. $f(x) = c$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0$$

3. $f(x) = x^n$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^n - {x_0}^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} x_0^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x_0^{n-1}h + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} x_0^{n-2}h^2 + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} h^n - x_0^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^n + nx_0^{n-1}h + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} x_0^{n-2}h^2 + \ldots + h^n - x_0^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{nx_0^{n-1}h + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} x_0^{n-2}h^2 + \ldots + h^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} nx_0^{n-1} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} x_0^{n-2}h + \ldots + h^{n-1} = nx_0^{n-1} \end{aligned}$$

4. $f(x) = e^x$

Es ist s.o.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{(x_0+h)} - e^{x_0}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0}\cdot e^h - e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0}\cdot (e^h - 1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} e^{x_0}\cdot 1 = e^{x_0} \end{aligned}$$

Zur weiteren Erläuterung sei hier eine alternative Herleitung angegeben, die die Einführung der eulerschen Zahl ebenfalls veranschaulicht:

Zunächst gilt für beliebige Basen, dass die Ableitung der Funktion

$$f(x) = a^x$$

an der Stelle $x_0 = 0$ sich ergibt aus

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Weiterhin gilt für beliebige Stellen x_0

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{a^{x_0+h} - a^{x_0}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a^{x_0} \cdot (a^h - 1)}{h} = a^{x_0} \cdot f'(0) \\ &= f(x_0) \cdot f'(0) \end{aligned}$$

Gibt es nun Basen, für die

$$f'(x_0) = f(x_0)$$

gilt? Bzw. analog

$$f'(0) = 1$$

Dann wäre mit einer Nullfolge

$$h = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1$$

und damit

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{n}} - 1 &\to \frac{1}{n} \\ a^{\frac{1}{n}} &\to 1 + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$a \to (1 + \frac{1}{n})^n$$

also

$$a = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

Diese Basis wird dann als natürliche Basis $a = e$ definiert.

5. $f(x) = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x_0+h-x_0}{h\cdot(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}
\end{aligned}$$

6. $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x_0+h}-\frac{1}{x_0}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{1}{x_0+h}-\frac{1}{x_0}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{x_0-(x_0+h)}{(x_0+h)\cdot x_0} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{(x_0+h)\cdot x_0} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x_0+h)\cdot x_0} = \frac{-1}{x_0^2}
\end{aligned}$$

7. $f(x) = \sin(x)$

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0)\cos(h)+\cos(x_0)\sin(h)-\sin(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0)(\cos(h)-1)+\cos(x_0)\sin(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \sin(x_0)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x_0)\frac{\sin(h)}{h} \\
&= \sin(x_0)\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x_0)\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} \\
&= \sin(x_0)\cdot 0 + \cos(x_0)\cdot 1 = \cos(x_0)
\end{aligned}$$

8. $f(x) = \cos(x)$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x_0+h)-\cos(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x_0)\cos(h)-\sin(x_0)\sin(h)-\cos(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x_0)(\cos(h)-1)-\sin(x_0)\sin(h)}{h} \\ &= \cos(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} \\ &= \cos(x_0)\cdot 0 - \sin(x_0)\cdot 1 = -\sin(x_0) \end{aligned}$$

4.3 Die Tangentengleichung

Wollen wir die Gleichung der Tangente einer Funktion $f(x)$ in einem Punkt x_0 bestimmen, so verwenden wir den Ansatz

$$T(x) = f_1(x) = m\cdot(x-x_0)+b$$

Die Tangente im Punkt x_0 hat die Eigenschaften

1. Die Steigung ist $m = f'(x_0)$
2. Sie geht durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$

Einsetzen der zweiten Bedingung liefert

$$f(x_0) = f_1(x_0) = b$$

und damit ist die Tangentengleichung bekannt:

$$f_1(x) = f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$

Beispiel: Wie lautet die Gleichung der Tangente zur Funktion $f(x) = x^2$ im Punkt $x_0 = 5$ (mit $f(5) = 25$)?

Es ist $f'(x) = 2x$ und damit $f'(5) = 10$ die Steigung der Tangente. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0) \\ &= 10\cdot(x-5)+25 \end{aligned}$$

4.4 Ableitungsregeln

Weitere Ableitungen können für Verknüpfungen der o.g. Funktionen berechnet werden.

Satz 156 *"Faktorregel": Sei $g(x)$ differenzierbar, $c \in \mathbb{R}$, dann ist die Ableitung von $f(x) = c \cdot g(x)$ gegeben durch $f'(x) = c \cdot g'(x)$*

Bew.:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{c \cdot g(x_0+h) - c \cdot g(x_0)}{h} \\ &= c \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\ &= c \cdot g'(x_0) \text{ für jedes } x_0 \text{ qed.} \end{aligned}$$

Beispiele:
1. $f(x) = 3 \cdot e^x \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot e^x$
2. $f(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 6x$

Satz 157 *"Summenregel": Sei $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ differenzierbar, dann ist die Ableitung von $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$ gegeben durch $f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x)$.*

Bew.:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f_1(x_0+h) + f_2(x_0+h) + ... + f_n(x_0) - f_1(x_0) - ... - f_n(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f_1(x_0+h) - f_1(x_0)}{h} + ... + \lim_{h \to 0} \frac{f_n(x_0+h) - f_n(x_0)}{h} \\ &= f_1'(x_0) + ... + f_n'(x_0) \end{aligned}$$

Beispiel: $f(x) = 3x^2 + \sin(x) + 2e^x$ dann ist: $f'(x) = 6x + \cos(x) + 2e^x$

Damit ergibt sich direkt

Lemma 158 *Ein Polynom n-ten Grades* $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *ist in jeder Stelle differenzierbar und hat die Ableitung*

$$\begin{aligned} p_n'(x) &= \sum_{k=0}^{n} \left(a_k x^k\right)' \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot k \cdot x^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \cdot (k+1) \cdot x^k \end{aligned}$$

Satz 159 *"Produktregel": Sei* $f(x) = u(x) \cdot v(x)$*, dann ist* $f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)$.

Merkregel:

$u(x)$		$u'(x)$
	$\times$	
$v(x)$		$v'(x)$

Bew.:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h)\cdot v(x_0+h) - u(x_0)\cdot v(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h)\cdot v(x_0+h) - u(x_0+h)\cdot v(x_0) + u(x_0+h)\cdot v(x_0) - u(x_0)\cdot v(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h)\cdot(v(x_0+h) - v(x_0)) + (u(x_0+h) - u(x_0))\cdot v(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} u(x_0+h)\cdot\frac{(v(x_0+h) - v(x_0))}{h} + v(x_0)\cdot\frac{(u(x_0+h) - u(x_0))}{h} \\ &= u(x_0)\cdot v'(x_0) + u'(x_0)\cdot v(x_0) \quad \text{für jedes } x_0 \quad \text{qed.} \end{aligned}$$

Beispiel: $f(x) = 3x \cdot \sin(x)$, dann ist: $f'(x) = 3x\cos(x) + 3\sin(x)$

Satz 160 *"Quotientenregel": Sei* $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$*, dann ist* $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{(v(x))^2}$

Merkregel:

$u(x)$		$u'(x)$
	$\times$	
$v(x)$		$v'(x)$

wie oben, jedoch erhält die Hauptdiagonale ein negatives Vorzeichen und der Term wird durch v^2 dividiert.

Beispiele:

1. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$, dann ist: $f'(x) = \dfrac{2x\cdot(x-1)-1\cdot(x^2+1)}{(x-1)^2}$
2.$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, dann

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\cos(x)\cdot\cos(x)+\sin(x)\cdot\sin(x)}{\cos^2(x)} \\
&= 1+\tan^2(x)
\end{aligned}$$

Bew.: 1. Für $g(x) = \frac{1}{v(x)}$ gilt:

$$\begin{aligned}
g'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{v(x_0+h)}-\frac{1}{v(x_0)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{v(x_0)-v(x_0+h)}{v(x_0+h)\cdot v(x_0)}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}-\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}\cdot\frac{1}{v(x_0+h)\cdot v(x_0)} \\
&= -\frac{v'(x_0)}{v^2(x_0)}
\end{aligned}$$

und somit

$$g'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$$

Gemäss Produktregel ist dann für Funktionen

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{u(x)}{v(x)} = u(x)\cdot\frac{1}{v(x)} \\
f'(x) &= u'(x)\cdot\frac{1}{v(x)}+u(x)\cdot\left(-\frac{v'(x)}{v^2(x)}\right) \\
&= \frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}
\end{aligned}$$

Die wohl wichtigste Regel ist die folgende:

Satz 161 *"Kettenregel": Sei $f(x) = g(v(x))$ ("Verkettete Funktion"), dann ist $f'(x) = v'(x)\cdot g'(v(x))$ (Innere mal äußere Ableitung).*

Merke: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dv}\cdot\dfrac{dv}{dx}$

Bew.: Zunächst sei erwähnt, dass generell für stetige Funktionen gilt dass eine Nullfolge in h auch zu einer Nullfolge der Differenz der Funktionswerte führt, denn Stetigkeit bedeutet:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} f(x_0+h) &= f(x_0)\\ \lim_{h\to 0} f(x_0+h)-f(x_0) &= 0\end{aligned}$$

Da h Nullfolge, ist damit für stetige Funktionen auch

$$h^* = f(x_0+h) - f(x_0) \text{ Nullfolge}$$

und weiterhin

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h^*$$

Diese Eigenschaft benuzten wir nun für die Funktion $v(x)$. Es ist mit $h^* = v(x_0+h) - v(x_0)$ bzw. $v(x_0+h) = v(x_0) + h^*$

$$\begin{aligned}f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{g(v(x_0+h))-g(v((x_0))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{g(v(x_0+h))-g(v(x_0))}{v(x_0+h)-v(x_0)} \cdot \frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{g(v(x_0+h))-g(v(x_0))}{v(x_0+h)-v(x_0)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}\\ &= \lim_{h^*\to 0} \frac{g(v(x_0)+h^*)-g(v(x_0))}{h^*} \cdot v'(x_0) = g'(v(x_0)) \cdot v'(x_0)\end{aligned}$$

q.e.d.
Zur Notation empfiehlt sich die folgende Schreibweise:
1. Ersetze zunächst $u = v(x)$ und bilde $v'(x)$
2. Bestimme die äussere Funktion $g(u)$ und leite diese nach der neuen Unbekannten u ab ($g'(u)$) und ersetze dann wiederum den Platzhalter u durch $v(x)$. Wir erhalten so $g'(v(x))$.
3. Mutlipliziere die Teilergebnisse $v'(x)$ und $g'(v(x))$

Beispiel 1:
$f(x) = \sin(x^2)$

$$\begin{aligned}u &= v(x) = x^2 \Rightarrow v'(x) = 2x\\ g(u) &= \sin(u) \Rightarrow g'(u) = \cos(u) \Rightarrow g'(h(x)) = \cos(x^2)\\ \text{und damit } f'(x) &= h'(x)g'(h(x)) = 2x \cdot \cos(x^2)\end{aligned}$$

Beispiel 2. $f'(x) = 2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{x\cdot\ln(2)}$

$u = h(x) = x \cdot \ln(2) \Rightarrow h'(x) = \ln(2)$

$g(u) = e^u \Rightarrow g'(u) = e^u \Rightarrow g'(h(x)) = e^{x \cdot \ln(2)} = 2^x$

$\Rightarrow f'(x) = \ln(2) \cdot e^{x \cdot \ln(2)} = \ln(2) \cdot 2^x$
Beispiel 3. $f'(x) = a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \cdot \ln(a)} \Rightarrow f'(x) = \ln(a) \cdot e^{x \cdot \ln(a)} = \ln(a) \cdot a^x$

Generell wird die Kettenregel angewendet um Funktionen der Gestalt

$$f(x) = g(x)^{h(x)}$$

zu differenzieren, in dem diese umgeformt wird zu

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(\ln(g(x)^{h(x)})) \\ &= \exp(h(x) \cdot \ln(g(x)) \end{aligned}$$

Die äussere Ableitung ergibt stets wieder die Exponentialfunktion, welche wieder in der ursprünglichen Form $g(x)^{h(x)}$ geschrieben werden kann, die innere wird gemäss Produktregel berechnet:

$$h'(x) \cdot \ln(g(x)) + h(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$$

und damit ergibt sich

$$f'(x) = g(x)^{h(x)} \cdot \left(h'(x) \cdot \ln(g(x)) + h(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) \right)$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x)^x \\ &= \exp(x \cdot \ln(\sin(x))) \end{aligned}$$

Dann ist

$$f'(x) = \sin(x)^x \cdot \left(\ln(\sin(x) + x \cdot \frac{1}{\sin(x)} \cos(x) \right)$$

Um die Ableitung von Umkehrfunktionen zu Berechnen, hilft folgende Überlegung vom Beispiel

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \\ f^{-1}(y) &= \ln y \end{aligned}$$

Wir betrachten

$$\begin{aligned} 1 &= \left(e^{\ln y}\right)' \\ &= (\ln y)' \cdot e^{\ln y} \\ &= (\ln y)' \cdot y \\ &\Rightarrow (\ln y)' = \frac{1}{y} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ f^{-1}(y) &= \sqrt{y} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\sqrt{y}^2\right)' \\ &= 2\sqrt{y}\cdot(\sqrt{y})' \\ &\Rightarrow (\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{aligned}$$

Satz 162 *"Ableitung der Umkehrfunktion": Sei $y = f(x)$ differenzierbar mit Ableitung $f'(x)$ und umkehrbar mit der Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$, dann ist:*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Bew.: Gemäss Kettenregel ist:

$$\begin{aligned} 1 &= (y)' = (f\left(f^{-1}(y)\right))' \\ &= \left(f^{-1}\right)'(y)\cdot f'(f^{-1}(y)) \end{aligned}$$

und damit

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

q.e.d.

Also: Ausgehend von einer Funktion mit bekannter Ableitung wird die Umkehrfunktion gebildet und deren Ableitung im Platzhalter y berechnet, in dem wir den Kehrtwert der Ableitung der ursprünglichen Funktion nehmen und in dieser wieder x durch $f^{-1}(y)$ ersetzen.

Merkregel:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Beispiel:

1. $y = f(x) = e^x$ mit $f'(x) = e^x$. Dann ist $x = f^{-1}(y) = \ln(y)$ und

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

(oder wieder verständlicher: $f(x) = \ln(x) \to f'(x) = \dfrac{1}{x}$)

2. $y = f(x) = \tan(x)$ mit $f'(x) = \tan^2(x) + 1$. Dann ist $x = f^{-1}(y) = \arctan(y)$ und

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{\tan^2(x)+1} = \frac{1}{y^2+1}$$

3. $y = f(x) = x^2$ mit $f'(x) = 2x$. Dann ist $x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ und

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Wir betrachten schliesslich die Funktion

$$y = f(x) = x^n$$

mit bekannter Ableitung

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Damit ist $x = f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{n}}$ mit der Ableitung

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)'(y) &= \frac{1}{n \cdot x^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n \cdot \left(y^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n} y^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}\end{aligned}$$

Also ergibt sich auch für die Wurzeln die bekannte Ableitungsregel

$$(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

bzw. mit $a = \frac{1}{n}$

$$(x^a)' = a x^{a-1}$$

Damit ist nun für positive rationale Exponenten

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

gemäß Kettenregel

$$\begin{aligned}f'(x) &= m \cdot \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \\ &= \frac{m}{n} x^{\frac{m-1}{n}+\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}\end{aligned}$$

Für negative ist:

$$f(x) = x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$$

und damit mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\left(\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}\right)^2 \cdot \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} \\ &= -\frac{m}{n}\left(\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}\right)^2 \cdot x^{\frac{m}{n}} \cdot \frac{1}{x} \\ &= -\frac{m}{n}\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}} \cdot \frac{1}{x} \\ &= -\frac{m}{n}\frac{1}{x^{\frac{m}{n}+1}} = -\frac{m}{n}x^{-(\frac{m}{n}+1)} \\ &= -\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1} \end{aligned}$$

Da die rationalen Zahlen dicht in $\mathbb{R}$ liegen gilt

$$f(x) = x^a$$

hat die Ableitung

$$f'(x) = a \cdot x^{a-1}$$

für $\forall a \in \mathbb{R}$.

Ersetzen wir den Platzhalter y durch den gewohnten Parameter x erhalten wir also

$f(x)$	$f'(x)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{x^2+1}$

Als Zusammenfassung hier nun die Tabelle der elementaren Ableitungsfunktionen:

$f(x)$	$f\prime(x)$	
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	auch für $n \in \mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	-$\sin(x)$	
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = \tan^2(x) + 1$	
$\cot(x)$	$\frac{-1}{\sin^2(x)}$	
e^x	e^x	
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$	
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	

und die Ableitungsregeln für aus diesen Funktionen entstandene Funktionen

4.5 Lokale Extrema

Definition 163 *existiert eine Stelle x_0 einer Funktion $f(x)$ und eine $\varepsilon-$Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ von x_0, so dass $\forall x \in U_\varepsilon(x_0)$ gilt:*
1. $f(x) \geq f(x_0)$ so heisst x_0 lokales Minimum
2. $f(x) \leq f(x_0)$ so heisst x_0 lokales Maximum

Analog: Für $h \in U_\varepsilon(0)$
1. $f(x_0 + h) \geq f(x_0)$ so heisst x_0 lokales Minimum
2. $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$ so heisst x_0 lokales Maximum

Ist $f(x)$ differenzierbar, so gilt für $h \in U_\varepsilon(0)$ und ein lokales Minimum x_0 :

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0$$

Und damit für $h > 0$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

bzw. für $h < 0$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

Damit muss für den Grenzwert gelten

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0$$

Entsprechend muss für ein Maximum gelten

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0$$

Also ergibt sich

Satz 164 *Ist f differenzierbar in x_0 und x_0 lokales Extremum, so gilt*

$$f'(x_0) = 0$$

Bem.: Anschaulich heisst dies, das die Extrema waagerechte Tangenten haben. Die Umkehrung gilt jedoch nicht, da z.B. $f(x) = x^3$ zwar erfüllt $f'(0) = 0$, aber dort liegt kein Extremum vor.

Bem 2: Ist f in x_0 nicht differenzierbar, jedoch stetig und in der Umgebung differenzierbar, so muss ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung vorliegen, um ein lokales Extremum zu erhalten.

Bsp:

$$f(x) = \begin{matrix} x^2 + x & x \geq 0 \\ & \\ -x & x < 0 \end{matrix}$$

ist in $x_0 = 0$ stetig, ist ausserhalb von x_0 differenzierbar und hat die Ableitung

$$f'(x) = \begin{matrix} 2x + 1 & x \geq 0 \\ & \\ -1 & x < 0 \end{matrix}$$

4.6 Der Mittelwertsatz

Zur Vorbereitung dient der

Satz 165 *(Rolle): Ist f auf $[a, b]$ stetig mit $f(a) = f(b)$ und auf (a, b) differenzierbar, so existiert ein $x^* \in (a, b)$ mit $f'(x^*) = 0$*

Bew.: Wäre $f(x)$ auf [a,b] konstant, so wäre für $x^* \in [a, b]$ notwendigerweise $f'(x^*) = 0$ und alles wäre gezeigt.

Sei somit f nicht konstant. Dann nimmt wegen der Stetigkeit von f die Funktion ihr Minimum und Maximum auf [a,b] an. Daher existieren Werte x_1 (Minimum) und x_2(Maximum) in $[a, b]$ mit

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Da am Rand gilt $f(a) = f(b)$ muss einer der Werte vom Randpunkt verschieden sein. Also o.B.d.A. $x_1 \notin \{a, b\}$. Dann ist dort aber ein lokales Extremum, da sonst kein Minimum bzw. Maximum vorläge. Dort gilt aber

$$f'(x_1) = 0$$

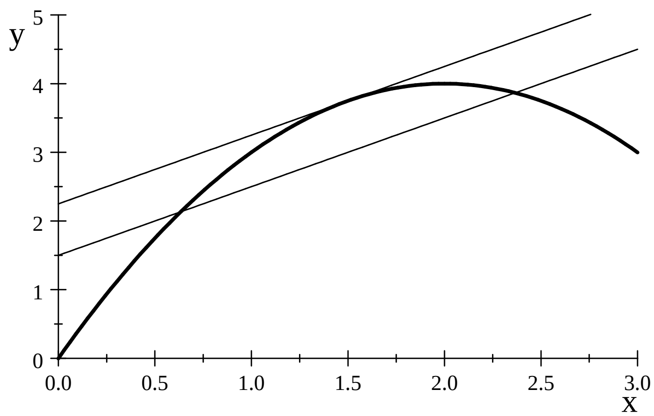
Mit $x^* = x_1$ ist damit die gesuchte Stelle gefunden.
q.e.d.

Bem.: Dies bedeutet, dass eine Funktion $f(x)$ zwischen a und b mit $f(a) = f(b)$ falls diese nicht konstant ist, ein lokales Extremum auf dem Intervall $[a, b]$ haben muss.

Nun gilt weiterhin der

Satz 166 *Mittelwertsatz: Sei $f \in C[a, b]$ und in (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $x^* \in (a, b)$ mit*

$$f'(x^*) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Bew.:
Sei
$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} g(b) &= f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a) \\ g(a) &= f(a) \end{aligned}$$

und es existiert nach dem Satz von Rolle

$$\begin{aligned} x^* &\in (a, b) \text{ mit} \\ g'(x^*) &= 0 \end{aligned}$$

Es ist aber
$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

und damit
$$f'(x^*) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

q.e.d.

Bem.: Häufig wird der Mittelwertsatz wie folgt benutzt: Betrachte $x^* \in (x_0, x_0 + h)$ dann ist
$$f'(x^*) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

also

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x^*) \cdot h$$

oder auch es existiert $\vartheta \in (0, 1)$ mit

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0 + \vartheta h) \cdot h$$

Anwendung:
Bei einem Körper werde festgestellt, dass es sich zum Zeitpunkt $t = 10\,\text{sec}$ auf dem Wegpunkt $s(10) = 50m$ befindet und zum Zeitpunkt $t = 20\,\text{sec}$ auf dem Wegpunkt $s(20) = 100m$. Der Mittelwertsatz besagt nun, dass sich nicht nur die Durchschnittsgeschwindigkeit

$$\overline{v} = \frac{100-50}{20-10}\frac{m}{\text{sec}} = 5\frac{m}{\text{sec}}$$

ergibt, sondern dass auch ein Punkt t^* existiert, dessen Momentangeschwindigkeit

$$v(t^*) = s'(t^*) = 5\frac{m}{\text{sec}}$$

war.
Schliesslich sei noch ein Resultat zur Stetigkeit erwähnt:

Satz 167 *Eine stetige Funktion mit beschränkter Ableitung ist Lipschitz stetig und damit auch gleichmässig stetig.*

Bew.: Sei $f(x) \in f(x) \in C^1(a_0, b_0)$ (auch : $a_0 = -\infty$ und/oder $b_0 = -\infty$) dann ist mit dem Mittelwertsatz $\forall a, b \in (a_0, b_0)$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x^*)$$

und damit für die Beträge

$$\left|\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right| = |f'(x^*)| \leq \max_{x \in (a_0, b_0)} |f'(x^*)|$$

Wir setzen die Lipschitzkonstante

$$L = \max_{x \in (a_0, b_0)} |f'(x^*)|$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right| &\leq L \\ |f(b) - f(a)| &\leq L\,|b - a| \end{aligned}$$

also Lipschitz Stetigkeit.

Bem.: Damit sind Funktionen mit stetiger Ableitung auf abgeschlossenen Intervallen Lipschitz-Stetig.

Satz 168 *Sei $f \in C[a, b]$ und in (a, b) differenzierbar. Gilt $f'(x) = 0\ \forall x \in (a, b)$, so ist $f(x)$ auf $[a, b]$ konstant.*

Bew.: Wir zeigen, dass alle Funktionswerte dem Wert am linken Rand, also $f(a)$, entsprechen: Sei $x \in (a,b]$ beliebig. Dann existiert ein $x_0 \in (a,x)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$$

und damit

$$f(x) = f(a)$$

Da $x \in (a,b]$ beliebig, ist f konstant auf $[a,b]$.

Satz 169 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar mit $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in (a,b)$. Dann existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x) + c$*

Bew.: Betrachte $h(x) = f(x) - g(x) \Longrightarrow h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ für alle x (Vorr)$\Rightarrow$ $h(x) = f(x) - g(x) = c$ und damit $f(x) = g(x) + c$.

4.7 Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Potenzreihen

Hier gilt ohne Beweis:

Satz 170 *Jede Potenzreihe ist stetig im Innern des Konvergenzbereiches. Die Potenzreihe $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist differenzierbar im Innern des Konvergenzbereiches und die Ableitung $p'(x)$ kann summandenweise berechnet werden zu*

$$\begin{aligned} p'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^n \end{aligned}$$

Allgemeiner gilt für beliebige x_0 :

Satz 171 *Für Potenzreihen $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ gilt innerhalb ihres Konvergenzradius*

$$\begin{aligned} p'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \cdot (n+1) \cdot (x - x_0)^n \end{aligned}$$

Bem.: Insbesondere bleibt beim Ableiten der Konvergenzradius unverändert. Ist (und existiert)

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

so ist auch

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n \cdot n}{a_{n+1} \cdot (n+1)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \cdot \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = r$$

Finden wir zu einer bekannten Funktion $p(x)$ deren Potenzreihe, so lässt sich einerseits die Funktion und andererseits die Potenzreihe ableiten und hier muss nun Gleichheit der Ableitungen gelten, z.B.

1. Die Reihe

$$e^x = p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

hat die Ableitung

$$\begin{aligned} p'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{n-1}}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \end{aligned}$$

2. Die Reihe

$$\cos(x) = p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

hat die Ableitung

$$\begin{aligned} p'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2(n+1)-1}}{(2(n+1)-1)!} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin(x) \end{aligned}$$

3. $p(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$$\begin{aligned} p'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \end{aligned}$$

Da wir andererseits bereits wissen, dass

$$p'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

ergibt sich

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

oder auch

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n + \frac{1}{1-x}$$

welches umgekehrt ergibt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} nx^n &= \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{1-(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Durch die Kenntnis, das Funktionen mit gleicher Ableitung sich nur um eine Konstante unterscheiden, lassen sich weitere bisher unbekannte Werte über Reihen berechnen.

Das Verfahren ist dabei in den folgenden Beispielen so:

1. Zu einer bekannten Funktion $f(x)$ berechnen wir die Ableitung $f'(x)$ mit einer bekannten Potenzreihe $f'(x) = p(x)$. Wir finden eine weitere Potenzreihe $g(x)$, welche ebenfalls erfüllt $g'(x) = p(x) = f'(x)$. Dann unterscheiden sich auch die ursprünglichen Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ nur um eine Konstante. Durch Berechnung von $f(x_0)$ und $g(x_0)$ wird dann noch die Konstante ermittelt.

So ist zu

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x) \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} \end{aligned}$$

Als geometrische Reihe ist nun für $|x| < 1$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

Andererseits gilt auch für

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

das gilt

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \cdot \frac{x^{n-1}}{n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = f'(x) \end{aligned}$$

Daher unterscheiden sich die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ nur um eine Konstante auf $(-1, 1)$.

Da $f(0) = g(0) = 0$ ist auch $c = 0$ und damit

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

Da weiterhin die Reihe auch für x=1 konvergiert, gilt auch

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$$

also der bisher unbekannte Grenzwert der alternierenden harmonischen Reihe.

Ein weiteres offenes Problem war noch die Berechnung von π. Bisher war nur die Berechnung von $\frac{\pi}{2}$ über die erste Nullstelle von $\cos(x)$ möglich. Da wir wissen, dass

$$0 = \cos(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = \cos^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 \frac{\pi}{4}$$

ist

$$\cos \frac{\pi}{4} = \pm \sin \frac{\pi}{4}$$

Weiterhin wissen wir aber, dass dort beide Funktionen positiv sind und damit gilt

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$$

Damit ist auch

$$\begin{aligned} \tan \frac{\pi}{4} &= 1 \\ \frac{\pi}{4} &= \arctan 1 \end{aligned}$$

Die Berechnung von $\frac{\pi}{4}$ kann nun wie folgt durchgeführt werden:
Zu

$$f(x) = \arctan x$$

ist

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)}$$

Als geometrische Reihe ist nun für $|x| < 1$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

Andererseits gilt auch für

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

das gilt

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n+1)\cdot\frac{x^{2n}}{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = f'(x) \end{aligned}$$

Daher unterscheiden sich die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ nur um eine Konstante auf $(-1,1)$. Da $f(0) = g(0) = 0$ ist auch $c = 0$ und damit

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Da weiterhin die Reihe auch für x=1 konvergiert, gilt auch

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$$

und damit

$$\pi = 4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

wobei der Abstand zu π wieder als Leibniz-Reihe kontrolliert werden kann.

4.8 Monotonie

Definition 172 *Eine Funktion heisst* ***monoton wachsend auf*** $[a,b]$***,*** *falls* $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ *mit* $x_1 < x_2$ *gilt* $f(x_1) \le f(x_2)$

Eine Funktion heisst ***streng monoton wachsend auf*** $[a, b]$***,*** *falls* $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ *mit* $x_1 < x_2$ *gilt* $f(x_1) < f(x_2)$

Eine Funktion heisst ***monoton fallend auf*** $[a, b]$***,*** *falls* $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ *mit* $x_1 < x_2$ *gilt* $f(x_1) \geq f(x_2)$

Eine Funktion heisst ***streng monoton fallend auf*** $[a, b]$***,*** *falls* $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ *mit* $x_1 < x_2$ *gilt* $f(x_1) > f(x_2)$

Es gilt

Satz 173 *Sei* $f \in C[a, b]$ *und in* (a, b) *differenzierbar. Gilt* $\forall x \in (a, b)$

1. $f'(x) \geq 0$, *so ist f monoton wachsend*
2. $f'(x) > 0$, *so ist f streng monoton wachsend*
3. $f'(x) \leq 0$, *so ist f monoton fallend*
4. $f'(x) < 0$, *so ist f streng monoton fallend*

Bew.: zu 2.: (Rest analog):

Wir betrachten $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Dann existiert ein $x^* \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x^*)$$

Da aber $x_2 > x_1$ und $f'(x^*) > 0$ ist

$$f(x_2) - f(x_1) > 0$$

also

$$f(x_2) > f(x_1)$$

Bem.: Gilt in einzelnen Punkte Gleichheit $f'(x_i) = 0$ so bleibt strenge Monotonie erhalten wenn ansonsten gilt $f'(x) > 0$. Als Beispiel veranschauliche man sich $f(x) = x^3$ mit der Ableitung $f'(x) = 3x^2$, welche in $x = 0$ zu Null wird, aber strenge Monotonie erfüllt.

Satz 174 *Ist eine Funktion streng monoton auf dem Intervall* $[a, b]$, *so nimmt sie jeden Funktionswert auf diesem Intervall höchstens einmal an.*

Bew.: Sei $f(x)$ streng monoton wachsend oder fallend. Wir nehmen an es existiere $x_1 < x_2$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Dann war die Funktion nicht streng monoton. q.e.d.

Folgerung:

Satz 175 *Sei* $f(x)$ *auf* $[a, b]$ *streng monoton wachsend oder fallend, dann hat die Funktion in diesem Intervall höchstens eine Nullstelle.*

Die Existenz einer Nullstelle kann ebenso mit dem Zwischenwertsatz gezeigt werden: Gilt für eine stetige Funktion $f : f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ (oder umgekehrt), so existiert mindestens eine Nullstelle.

Gilt somit strenge Monotonie und $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$, so existiert genau eine Nullstelle.

Bisher war die Monotonie etwas unhandlich zu zeigen. Die Herleitung über die Ableitung ermöglicht nun, insbesondere die Eindeutigkeit einer Nullstelle einer auf $[a, b]$ stetigen Funktion zu bestimmen, da hierzu gezeigt werden muss:

1. Die Funktion erfüllt $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$

2. Die Funktion ist streng monoton fallend, d.h. $f'(x) < 0$ auf (a, b)

oder analog:

1. Die Funktion erfüllt $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$
2. Die Funktion ist streng monoton wachsend, d.h. $f'(x) > 0$ auf (a, b)

Bsp: Die Funktion

$$f(x) = e^x - 2$$

hat eine Nullstelle im Bereich $[0, 1]$, da:

1. $f(0) = e^0 - 2 = -1 < 0, \;\; f(1) = e - 2 > 0$

2. $f'(x) = e^x > 0$ für $x \in (0, 1)$ und damit ist die Funktion streng monoton wachsend.

Als zweites Beispiel wollen wir die Eindeutigkeit der Nullstelle von $\cos(x)$ in $[0, 2]$ zeigen:

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...
\end{aligned}$$

Es ist für $n \geq 0$ und $0 \leq x \leq 2$:

$$\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} > \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{x}{2n+2} \cdot \frac{x}{2n+3} = \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

Daher ist für jedes x die Berechnung von $\sin(x)$ einen alternierende monoton fallende Nullfolge und es ist:

$$\begin{aligned}
\sin(x) &\geq x - \frac{x^3}{3!} \\
&= x \cdot (1 - \frac{x^2}{3!}) \\
&> 0
\end{aligned}$$

Mit

$$\cos(0) = 1$$

$$\cos(2) \leq -\frac{1}{3} < 0$$

ergibt sich, dass der Cosinus im Intervall $(0, 2)$ mindestens eine Nullstelle hat.

Wegen

$$f'(x) = -\sin(x)$$

und

$$\begin{array}{rcl} \sin(x) & > & 0 \\ \forall x & \in & (0, 2) \end{array}$$

ist die Funktion $\cos(x)$ streng monoton fallend, da dort gilt

$$f'(x) = -\sin(x) < 0$$

Daher wird jeder Funktionswert auf dem Intervall höchstens einmal angenommen.

Somit ist die Nullstelle eindeutig.

4.9 Die Grenzwertsätze von de L'Hospital

Satz 176 *(Zweiter Mittelwertsatz) Sei $f, g \in C[a, b]$ und in (a, b) differenzierbar. Weiterhin gelte $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$, dann ist $g(a) \neq g(b)$ und es existiert ein $x^* \in (a, b)$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x^*)}{g'(x^*)}$$

Bew.: Wir betrachten

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a))$$

Für diese Funktion gilt:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$$

$$\begin{array}{rcl} h(a) & = & f(a) \\ h(b) & = & f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a) \end{array}$$

also nach dem Satz von Rolle existiert ein $x^* \in (a,b)$ mit

$$0 = h'(x^*) = f'(x^*) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x^*)$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x) &= f'(x) \\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} &= \frac{f'(x^*)}{g'(x^*)} \end{aligned}$$

Die Beziehung $g(a) \neq g(b)$ gilt, da sonst nach Rolle ein $x_0 \in (a,b)$ existiert mit

$$g'(x_0) = 0$$

im Widerspruch zur Vorr. q.e.d
Hieraus folgt:

Satz 177 *(Regeln von de L'Hospital) Sei $f, g \in C[a,b]$ und in (a,b) differenzierbar mit $f(a) = g(a) = 0$. Weiterhin gelte $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$, und es existiert*

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

dann existiert auch

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

und es ist

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Bew.: Zunächst ist $g(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$ da sonst wegen $g(a) = g(x) = 0$ nach Rolle ein $x_0 \in (a,x)$ existiert mit

$$g'(x_0) = 0$$

im Widerspruch zur Vorr.
Damit ist also $\frac{f(x)}{g(x)}$ stets definiert und stetig. Damit gibt es dann für jede Stelle $b = x$ nach dem zweiten Mittelwertsatz ein $x^*(x) \in (a,x)$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(x^*)}{g'(x^*)}$$

Konvergiert nun x gegen a, so gilt dies auch für $x^* \in (a,x)$ und damit

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

q.e.d.

Bem. Die Vorr. $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in (a,b)$ braucht nur für Werte b nahe bei a erfüllt zu sein.

Bem: Die allgemeinen Grenzwertsätze von L'Hospital können ähnlich hergeleitet werden. Hierbei sind dann auch die Werte für $a = \pm\infty, b = \pm\infty$ zulässig und die gleichen Regeln gelten im Fall $\frac{\infty}{\infty}$, d.h. $f(a) = g(a) = \infty$.Wir betrachten

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$$

welche nach L'Hospital "0/0"konvergiert mit

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{g'(x)}{g^2(x)}}{-\frac{f'(x)}{f^2(x)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{f^2(x)}{g^2(x)} \cdot \frac{g'(x)}{f'(x)} = a^2 \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

Dies liefert

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} &= \lim_{x\to\infty} \frac{g'(x)}{f'(x)} \\ a &= \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

Bsp.:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1$$

Da für stetige Funktionen gilt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x) = f(x_0)$$

kann auch die Berechnung des Grenzwertes in die Funktion gezogen werden, z.B.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} x^x &= \lim_{x\to 0} e^{\ln(x^x)} \\ &= \lim_{x\to 0} e^{x\cdot\ln(x)} \end{aligned}$$

und falls der Grenzwert $\lim_{x\to 0} x \cdot \ln(x)$existiert, kann - da die Exponentialfunktion stetig ist - dies berechnet werden durch

$$e^{\lim_{x\to 0} x\cdot\ln(x)}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} x \cdot \ln(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x\to 0} -x = 0\end{aligned}$$

und daher

$$\lim_{x\to 0} x^x = e^0 = 1$$

Mehrfaches Anwenden ist ebenfalls zulässig. So ergibt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = ... \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = 0\end{aligned}$$

Betrachten wir die Grenzwerte von Folgen, so kann statt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a(n)$$

der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} a(x)$$

betrachtet werden. Der Grenzwert war definiert als Grenzwert jeder monoton wachsenden nicht beschränkten Folge. existiert dieser, so existiert auch der Grenzwert der speziellen Folge $x_n = n$. Die Umkehrung gilt jedoch nicht, so ist z.B.

$$\lim_{n\to\infty} \sin(n \cdot \pi) = 0$$

jedoch existiert der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \sin(x \cdot \pi)$$

nicht.

Anwendung:
Für eine Nullfolge $a_n = a(n)$ mit $\lim_{x\to\infty} a(x) = 0$ ist

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} (1 + c \cdot a(n))^{\frac{1}{a(n)}} \\ = &\lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln(1+c\cdot a(n))}{a(n)}}\end{aligned}$$

Und falls der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(1+c\cdot a(x))}{a(x)}}$$

existiert, ist dieser der gesuchte Grenzwert.

Es ist für eine Nullfolge auch

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+c\cdot a(x))}{a(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{ca'(x)\frac{1}{1+xa(x)}}{a'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{c}{1+ca(x)} = c$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} (1+c\cdot a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e^c$$

Bsp.:
$a_n = \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{c}{n}\right)^n = e^c$$

Schliesslich verwenden wir diese Technik noch, um den Grenzwert der Folge

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

zu beweisen.
Wir ersetzen die Folge durch eine stetige Funktion

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} &= \lim_{x\to\infty} x^{1/x} \\ &= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} \\ &= e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}} \\ &= e^{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}} \\ &= e^0 = 1 \end{aligned}$$

4.10 Krümmungseigenschaften

Definition 178 *Sei $f \in C^2(a,b)$ und ist $f''(x) > 0\ \forall x \in (a,b)$, so heisst $f(x)$* ***konvex oder linksgekrümmt****. Ist $f''(x) < 0\ \forall x \in (a,b)$, so heisst $f(x)$* ***konkav oder rechtsgekrümmt****.*

Bem.: Die zweite Ableitung gibt somit an, ob sich der Graph entlang der Funktion nach links oder rechts krümmt.

Definition 179 *Sei $f \in C^2(a,b)$ und wechselt die Funktion für $x^* \in (a,b)$ von einer links- zu einer rechtsgekrümmten Funktion (oder umgekehrt), so heisst x^* Wendepunkt der Funktion.*

Satz 180 *Ist x^* Wendepunkt und die $f \in C^2(a,b)$, so ist $f''(x) = 0$*

Bem. Ein Krümmungswechsel bedeutet also, dass die erste Ableitung streng monoton steigend links der Wendestelle und streng monoton fallend rechts davon ist (oder umgekehrt). Daher ist eine Wendestelle ein lokales Maximum oder Minimum der ersten Ableitung.

Wir bezeichnen ebenfalls den Punkt als Wendestelle, wenn die zweite Ableitung der Funktion nur in einer Umgebing von x^*, aber nicht in x^* selber definiert ist.

Bsp.:

$$f(x) = x \cdot |x|$$

Die Funktion ist stetig und dfifferenzierbar, jedoch ist die zweite Ableitung in diesem Punkt

$$\begin{array}{cc} -2 & x \leq 0 \\ \\ 2 & x > 0 \end{array}$$

Da die Funktion aber nun von Rechts- zur Linkskrümmung übergeht, ist dieser Punkt Wendepunkt.

4.11 MacLaurin- und Taylorreihenentwicklung

Wie kann nun zu einer beliebigen Funktion die Potenzreihe um x_0 - d.h. die Koeffizienten a_n - berechnet werden?

Dazu betrachten wir zunächst den Punkt $x_0 = 0$ und die Potenzreihe

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

zu einer (beliebigen) Funktion $f(x)$. Damit Funktion und Potenzreihe übereinstimmen, also $f(x) = p(x)$, betrachten wir zunächst den Funktionswert an der Stelle $x = 0$:

$$f(0) = p(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + ... = a_0$$

Nun betrachten wir die Ableitungen.Wegen $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 ...$ gilt:

$$\begin{aligned} p'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + ... \\ p''(x) &= 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + ... \\ p'''(x) &= 6a_3 + 24a_4 x + ... \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Ableitung der Potenzreihe und der Funktion im

Punkt $x = 0$

$$f'(0) = p'(0) = a_1$$

und weiteres differenzieren liefert

$$f''(0) = p''(0) = 2a_2$$

bzw.

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

Entsprechend für die dritte Ableitung

$$a_3 = \frac{f'''(0)}{6}$$

Allgemein ergibt sich

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Eingesetzt in die Potenzreihe

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\ x^n \\ &= f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + ... \end{aligned}$$

lässt sich nun zu einer beliebigen Funktion die Potenzreihe berechnen.

Beispiel: $f(x) = e^x$

Damit ist auch $f^{(n)}(x) = e^x$ und speziell $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

Also lautet die Potenzreihe

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\ x^n \tag{4.9}$$

Untersuchen wir die Konvergenz, so hatten wir Konvergenz für $|x| < r$ mit

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| && (4.10) \\ &= \lim_{n\to\infty} |\frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{f^{(n+1)}(0)}| && (4.11) \\ &= \lim_{n\to\infty} (n+1) \cdot |\frac{f^{(n)}(0)}{f^{(n+1)}(0)}| && (4.12) \end{aligned}$$

Beispiele:
1. $f(x) = e^x \Longrightarrow f^{(n)}(0) = 1$

$$r = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty \tag{4.13}$$

2. $f(x) = e^{-x} \Longrightarrow f^{(n)}(x) = (-1)^n$

$$r = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty \tag{4.14}$$

3
.$f(x) = \sin(x) \qquad f(0) = 0$
$f'(x) = \cos(x) \qquad f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin(x) \qquad f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos(x) \qquad f'''(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \sin(x) \qquad f^{(4)}(0) = 0$

u.s.w.

Damit gilt: Es tauchen nur ungerade Ableitungen auf mit

$$f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \tag{4.15}$$

und damit die Reihenentwicklung

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} \tag{4.16}$$

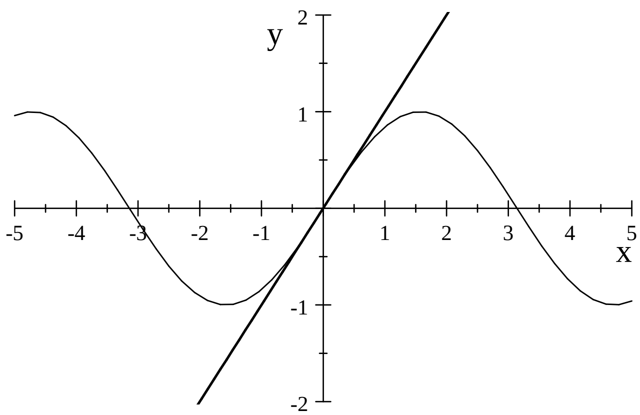
$$= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... \tag{4.17}$$

und Konvergenzradius (Beachte: Nur Folgenglieder $\neq 0$):

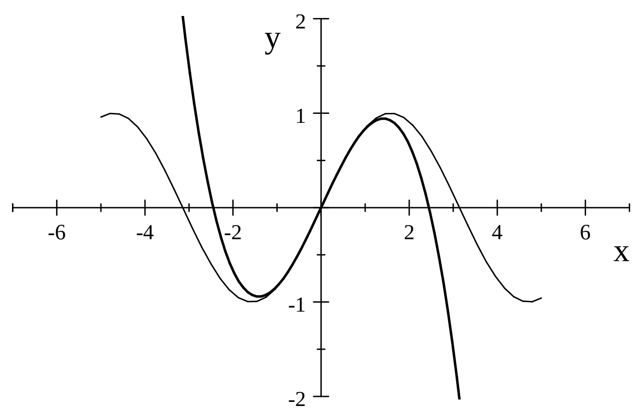
$$r = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} = \lim_{n\to\infty}(2n+3)\cdot(2n+2) = \infty \tag{4.18}$$

Visualisierung der Reihenentwicklung:

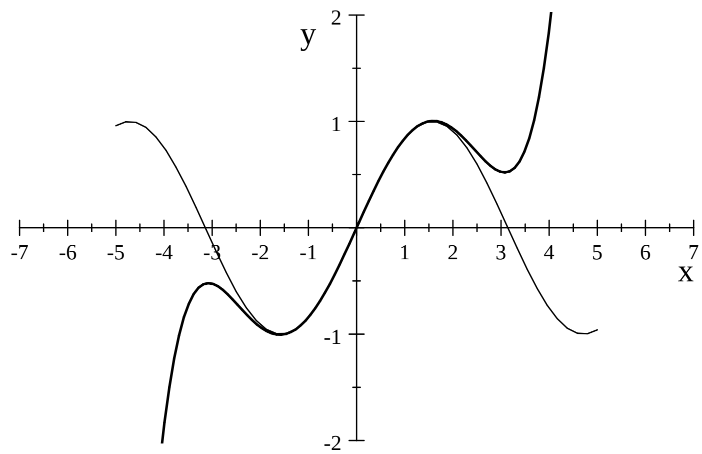
Wir vergleichen nun die Originalfunktion $\sin(x)$ mit ihrer Reihenentwicklung und ziehen immer weitere Terme hinzu:
$\sin(x) \approx x$



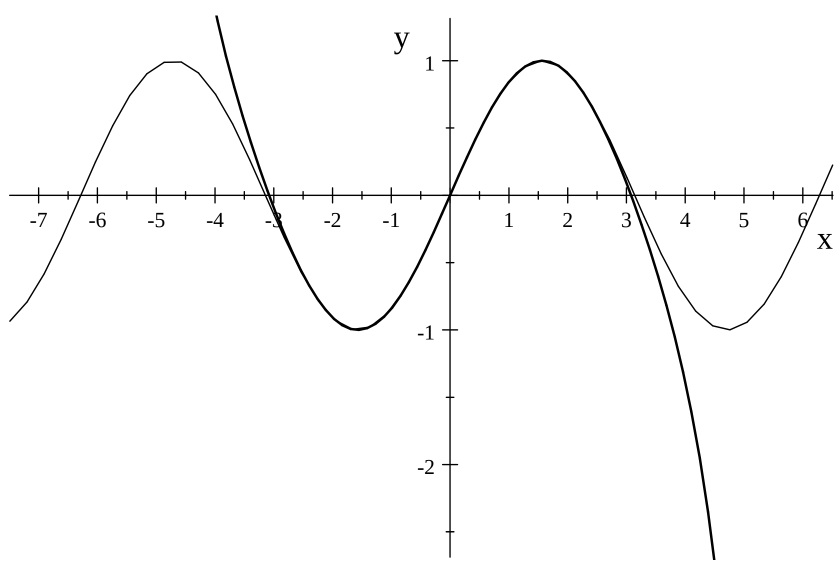
$\sin(x) \approx x - \frac{1}{6}x^3$



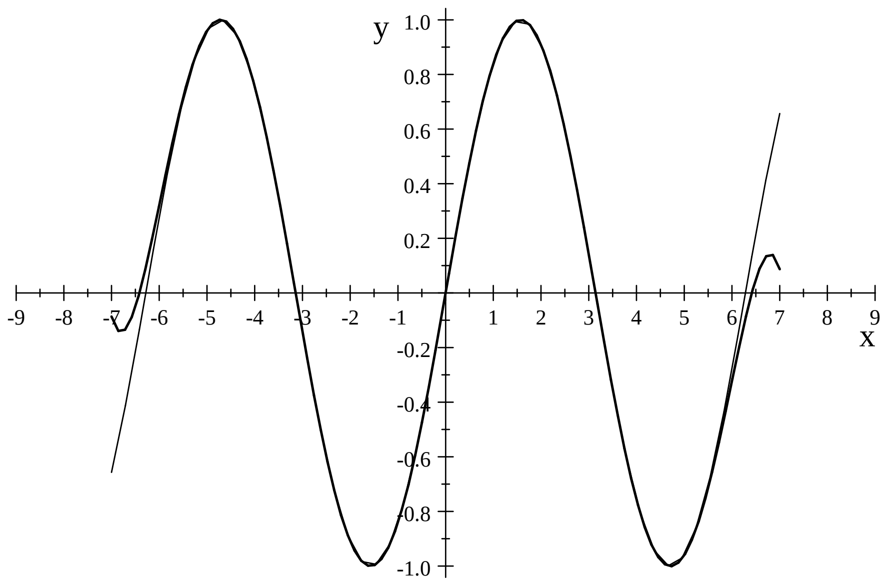
$\sin(x) \approx x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$



$\sin(x) \approx x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7$



$$\sin(x) \approx x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362\,880}x^9$$
$$-\frac{1}{39\,916\,800}x^{11} + \frac{1}{6227\,020\,800}x^{13} - \frac{1}{1307\,674\,368\,000}x^{15}$$



4.12 Die Taylorreihe

Betrachten wir allgemeiner die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{4.19}$$

so erhalten wir analog

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n} \tag{4.20}$$

Dabei heißt x_0 Entwicklungspunkt der Potenzreihe und die Reihe konvergiert für $|x - x_0| < r$ mit $r = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$

Betrachten wir nur einige Summanden, so können wir schreiben

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n (x - x_0)^n + R_{m+1}(x)$$

wobei zunächst $R_{m+1}(x)$ nur definiert sei gemäß

$$R_{m+1}(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{m} a_n (x - x_0)^n$$

4.12.1 Konvergenz der Taylorreihe

Notation: Wir betrachten nun beliebig hohe Ableitungen. Daher muss die Funktion beliebig oft differenzierbar sein und insbesondere sind damit auch die Ableitungen wieder stetige Funktionen.

Dies bezeichnen wir mit $f \in C^\infty[a, b]$.

Die erste sich zu stellende Frage ist, wann die Funktion mit dem Wert der Taylorreihe übereinstimmt. Dies ist für alle Punkte im Konvergenzradius der Fall, also insbesondere muss der Rest der Summe gegen Null gehen:

Satz 181 *Sei $f \in C^\infty[a, b], x_0 \in (a, b)$ der Entwicklungspunkt.Die Taylorreihe konvergiert dann für Punkte $x \in [a, b]$ innerhalb des Konvergenzradius gegen $f(x)$, also*

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \lim_{m\to\infty} R_{m+1}(x) = 0$$

Verbleibt die Frage, ob die Taylorreihen und die Potenzreihen unterschiedliche Funktionen sein können. Potenzreihen waren Summen der Art

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

und wir haben zum einen untersucht, wann diese Reihen konvergieren und für einige Funktionen ausgerechnet, wie - innerhalb des Konvergenzbereiches - der Funktionswert an einer Stelle x ist. Dass nun umgekehrt aus einer Funktion eine Potenzreihe ermittelt werden kann, erscheint offensichtlich. Sind dieses dann wieder die gleichen Funktionen?

Satz 182 *Sei $f \in C^\infty[a, b]$ eine Potenzreihe und $x_0 \in (a, b)$ der Entwicklungspunkt. Dann ist die Taylorreihe von f gleich der Potenzreihe.*

Insbesondere konvergieren Taylor- und Potenzreihe für die gleichen Werte.

4.12.2 Beispiele

Taylorreihen haben den Vorteil, dass man bessere Approximationen in der Nähe des Entwicklungspunktes erhält. Taylorreihen können ebenso angewandt werden, wenn z.B. der Wert in $x_0 = 0$ gar nicht definiert ist.

Bsp.: $f(x) = \ln(x), x_0 = 1$

$$\begin{array}{rcc} f(x) = \ln(x) & f(1) = 0 & a_0 = \frac{0}{1} \\ f'(x) = \frac{1}{x} & f'(1) = 1 & a_1 = \frac{1}{1} \\ f''(x) = -\frac{1}{x^2} & f''(1) = -1 & a_2 = \frac{-1}{2} \\ f'''(x) = \frac{2}{x^3} & f'''(1) = 2 & a_3 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ f^{(4)}(x) = \frac{-6}{x^4} & f^{(4)}(1) = -6 & a_4 = \frac{-6}{4!} = -\frac{1}{4} \end{array}$$

Allgemein

$$a_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = (-1)^{n+1}\frac{1}{n} \qquad \text{für } n > 0$$

und $a_0 = 0$ und damit

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}(x-1)^n \tag{4.21}$$

Der Konvergenzradius ist dabei

$$r = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1 \tag{4.22}$$

Für den Rand ergibt sich:
$x = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}(-1)^n = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ divergent}$$

$x = 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}(1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} \text{ konvergent}$$

und insbesondere erhalten wir den Wert der Reihe

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

4.12.3 Anwendung der Potenzreihen

Durch Abbruch der Taylorreihe kann eine Funktion durch Polynome (Geraden, Parabeln) angenähert werden.

$$f(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^{m} a_n(x-x_0)^n}_{f_m(x)} + R_{m+1}(x) \tag{4.23}$$

Linearisierung

Mit $m = 1$ erhalten wir

1.) für die MacLaurin-Reihe

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + R_1(x) && (4.24) \\ &= f(0) + f'(0) \cdot x + R_1(x) && (4.25) \end{aligned}$$

und damit als Näherung

$$f_1(x) = f(0) + f'(0) \cdot x \tag{4.26}$$

Dieses ist die Tangentengleichung in $x_0 = 0$.

2.) für die Taylorreihe

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + R_1(x) && (4.27) \\ &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + R_1(x) && (4.28) \end{aligned}$$

und damit als Näherung

$$f_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \tag{4.29}$$

Dieses ist die Tangentengleichung in x_0

Bem.: $f_1(x)$ ist eine Funktion, welche in x_0 den Wert $f(x_0)$ annimmt und die gleiche Steigung wie die Tangente in diesem Punkt hat $\Longrightarrow$ Die Taylorentwicklung liefert gerade die Tangentengleichung.

4.12.4 (*) Konvergenzgeschwindigkeit von Taylorreihen

Wir haben im vorigen Abschnitt gesehen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n (x - x_0)^n + R_{m+1}(x) \tag{4.30}$$

Die Frage stellt sich nach dem Restglied $R_{m+1}(x)$. Wenn wir eine Reihe abbrechen lassen (innerhalb ihres Konvergenzradius), wie groß ist dann der Fehler?

Hierzu gilt:

Satz 183 *Sei $m \in \mathbb{N}$ und $f_m(x)$ die aus der Taylorreihe gewonnene Entwicklung bis zur $m-$ten Potenz, also*

$$f_m(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{4.31}$$

dann gilt:

$$f(x) = f_m(x) + \frac{f^{(m+1)}(\overline{x})}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1} \tag{4.32}$$

mit $\overline{x} \in [x, x_0]$ bzw. $\overline{x} \in [x_0, x]$

Bew.: Später.

Für den Fehler gilt somit:

$$|R_{m+1}(x)| \leq |f(x) - f_m(x)| \leq \frac{\max_{\overline{x}\in[x_0,x]} \left|f^{(m+1)}(\overline{x})\right|}{(m+1)!} \left|x-x_0\right|^{m+1}$$

Bem.: Es ist somit

$$f_m(x_0+h) = \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n$$

Bem. Für die exakte Berechnung des Fehlers müsste $\overline{x}$ bekannt sein. I.a. wird aber nur durch den größtmöglichen Wert den $\overline{x}$ auf dem Intervall $[x_0, x]$ annimmt, abgeschätzt.

Beispiel: Betrachte $f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$. Wir möchten die eulersche Zahl $e = f(1)$ durch Berechnung der Taylorreihe um $x_0 = 0$ annähern. Wie gut ist die Näherung, wenn wir bis zur 5-ten Potenz die Summanden betrachten?

$$f_5(1) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2,71666 \tag{4.33}$$

Der Fehler kann mit $m = 5, x = 1$ abgeschätzt werden durch

$$R_6(1) = \frac{f^{(6)}(\overline{x})}{6!} 1^6 \tag{4.34}$$

Es ist $f^{(6)}(x) = e^x$ und damit $f^{(6)}(\overline{x}) < e < 3$ für $\overline{x} \in [0, 1]$. Damit gilt

$$|R_6(1)| \leq \frac{3}{6!} = \frac{1}{240} \approx 0,0042 \tag{4.35}$$

Also: Die Abweichung der Näherung von e ist maximal $\frac{1}{240}$ oder

$$e \in [2,71666 - \frac{1}{240}, 2,71666 + \frac{1}{240}] = [2,7125; 2,7209] \tag{4.36}$$

4.12.5 (*) Zusammenhang zwischen Taylorreihen und Extremwerten

Betrachten wir nun Punkte x in der Umgebung eines Entwicklungspunktes x_0, so kennzeichnen wir dieses mit

$$x = x_0 + h$$

wobei h klein sein sollte, aber auch negative Werte annehmen kann. Für diese Punkte kann die Taylorformel mit $\overline{x} \in [x_0, x_0 + h]$ und beliebiges m berechnet werden gemäß:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= f_m(x) + \frac{f^{(m+1)}(\overline{x})}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1} \end{aligned}$$

geschrieben werden als

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n \\ &= f_m(x_0+h) + \frac{f^{(m+1)}(\overline{x})}{(m+1)!}h^{m+1} \end{aligned}$$

Wir haben gesehen, dass im lokalen Extremum gilt

$$f'(x_0) = 0$$

Sind nun weitere Ableitungen gleich Null und

$$f^{(m+1)}(x_0) \neq 0$$

die erste von Null verschiedene Ableitung. Da $f^{(m+1)}(x)$ eine stetige Funktion ist, ist auch in einer Umgebung $U_h(x_0)$ gültig, dass $f^{(m+1)}(\overline{x}) \neq 0$ und das gleiche Vorzeichen hat. Es gilt da die Ableitungen bis zur $m-$ten verschwinden:

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f_m(x_0+h) + \frac{f^{(m+1)}(\overline{x})}{(m+1)!}h^{m+1} \\ &= \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \frac{f^{(m+1)}(\overline{x})}{(m+1)!}h^{m+1} \\ &= f(x_0) + \frac{f^{(m+1)}(\overline{x})}{(m+1)!}h^{m+1} \end{aligned}$$

Wir betrachten nun drei Fälle:

1. $m+1$ ist ungerade: Dann ist für positives $f^{(m+1)}(\overline{x})$ bzw. $f^{(m+1)}(x_0)$ erfüllt:

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &> f(x_0) \text{ für } h>0 \\ f(x_0+h) &< f(x_0) \text{ für } h<0 \end{aligned}$$

und somit liegt kein Extremum vor. Für negatives $f^{(m+1)}(\overline{x})$ entsprechend mit umgekehrten Vorzeichen.

2. $m+1$ ist gerade.

2a. Dann ist für positives $f^{(m+1)}(\overline{x})$ bzw. $f^{(m+1)}(x_0)$ erfüllt:

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &> f(x_0) \text{ für } h>0 \\ f(x_0+h) &> f(x_0) \text{ für } h<0 \end{aligned}$$

und somit liegt ein lokales Minimum vor.

2b.Dann ist für negatives $f^{(m+1)}(\overline{x})$ bzw. $f^{(m+1)}(x_0)$ erfüllt:

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &< f(x_0) \text{ für } h>0 \\ f(x_0+h) &< f(x_0) \text{ für } h<0 \end{aligned}$$

und somit liegt ein lokales Maximum vor.

Es ergibt sich der Algorithmus zur Suche lokaler Extrema:

Satz 184 *Sei f eine in (a,b) differenzierbare Funktion mit $f'(x_0)=0$. Sei $f^{(n)}(x_0)$ die erste von Null verschiedene Ableitung in x_0, dann gilt:*
Ist n ungerade, so existiert kein Extremum ("Sattelpunkt")
Ist n gerade:
Ist $f^{(n)}(x_0)>0$, so liegt ein Minimum vor
Ist $f^{(n)}(x_0)<0$, so liegt ein Maximum vor

Das Verfahren funktioniert also wie folgt:

1. Finden der Kandidaten für einen Extremwert: Bestimme $f'(x)$ und löse $f'(x)=0$
2. Bestimme für jeden Kandidaten die erste von Null verschiedene Ableitung $f^{(n)}(x)$
3. Ist n ungerade, so liegt kein Extremwert vor,
bei geraden n und $f^{(n)}(x_0)>0$ ein Minimum
bei geraden n und $f^{(n)}(x_0)<0$ ein Maximum

Beispiel: $f(x)=x^4$
1.Ableitung und Kandidat: $f'(x)=4x^3=0 \Rightarrow x_0=0$

2.$f''(x)=12x^2, f'''(x)=24x, f^{(4)}(x)=24$
3. Also: n gerade $(n=4)$ und $f^{(n)}(x_0)>0$ und damit Minimum. Wert: $f(0)=0$.

4.13 (*) Numerische Berechnung von Ableitungen

Wir betrachten den Fall eines Tachometers, der im Sekundentakt den zurückgelegten Weg aufzeichnet:

t	1	2	3	4	5	6
$s(t)$	4	7	9	10	10	12

Können wir Aussagen über die Geschwindigkeit machen ohne den Grenzwert $v(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{s(t)}{\triangle t}$ berechnen zu können? Ursprünglich sind wir ja auch bei der Geschwindigkeitsberechnung von zwei nicht zusammenliegenden Zeitpunkten ausgegangen.

In diesem Fall liesse sich die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 3$ näherungsweise durch die Sekante der Weg-Zeit-Funktion berechnen:

$$v(3) \approx \frac{s(4) - s(3)}{1} = 1$$

Aber warum sollte man nicht auch die Sekante "von links"betrachten? Dies wäre

$$v(3) \approx \frac{s(3) - s(2)}{1} = 2$$

Welcher Wert ist besser? Beide haben offensichtlich gleichermassen eine Existenzberechtigung. Die Idee ist nun den Mittelwert dieser beiden zu nehmen, um eine verbesserte Schätzung zu erhalten.

Dieser wäre dann

$$v(3) = 1,5$$

Weitere Fragen wären: Beschleunigen wir oder bremsen wir ab? Die Beschleunigung ist die Änderung der Geschwindigkeit, also die Ableitung der Geschwindigkeit bzw. die zweite Ableitung des Weges nach der Zeit. Wie kann diese nun berechnet werden? Eine Variante wäre die Geschwindigkeiten als neue Wertetabelle aufzuzeichnen und dann diese wie oben abzuleiten. Dabei werden ja leztlich wieder die oben stehenden Daten verwendet. Wir können wir dieses Problem also lösen?

Von vorne: Zur ersten Ableitung: Kann ich aus den Werten $f(x_0 + h)$ und $f(x_0)$ (und ggf. weiteren Werten) eine Näherung der Ableitung berechnen?

Wir betrachten nun nur Werte $h > 0$. Sofern wir uns links von der Stelle x_0 befinden, wird dies nun mit $x_0 - h$ gekennzeichnet. Gemäß Taylor gilt zunächst

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + ... \tag{4.37}$$

Betrachten wir Werte in der Umgebung von x_0 und bezeichnen diese mit $x = x_0 + h$ so ergibt sich

$$\begin{aligned} 1. \quad f(x_0+h) &= f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + ... && (4.38) \\ 2. \quad f(x_0-h) &= f(x_0) - f'(x_0)\cdot h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + ... && (4.39) \end{aligned}$$

Betrachten wir nun "kleine" Werte von h, so kann der Term in h^2 vernachlässigt werden und die erste Gleichung ergibt als Näherungswert für die erste Ableitung der rechtsseitgen Differenzenquotient:

$$\boxed{f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\triangle y}{\triangle x}} \qquad (4.40)$$

Analog lässt sich aus der zweiten Gleichung der "linksseitige Differenzenquotient" errechnen

$$\boxed{f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}} \qquad (4.41)$$

Schliesslich kann man durch Subtraktion der 2. Gleichung von der ersten Gleichung eine verbesserte Näherung erhalten, den "zentralen Differenzenquotient"

$$\boxed{f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}} \qquad (4.42)$$

Bem.: Wir haben bisher die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten betrachtet

$$f'(x_0) = y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad (4.43)$$

Beispiel:

$f(x) = e^x, x_0 = 1$ Gesucht:$f'(1)$ (exakt: e)

Wir wählen den rechtsseitigen Differenzenquotient mit $h = \triangle x = 0,1$ und erhalten

$$f'(1) = \frac{e^{1,1} - e^1}{0,1} = 2,86$$

Die Näherung liegt also etwa um 0,14 daneben.

Bem.: Eine verbesserte Näherung erhalten wir mit dem zentralen Differenzenquotienten. Dieser ist im Übrigen der Mittelwert aus rechtsseitigem und linksseitigem Diffenzenquotient

$$\begin{aligned} f'(x_0) &\approx \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} \end{aligned} \tag{4.44}$$

Im Beispiel

$$f'(1)\approx\frac{e^{1,1}-e^{0,9}}{0,2}=2,722$$

Numerische Berechnung der zweiten Ableitung

Aus der Taylorentwicklung

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(x_0)$$

und

$$f(x_0-h)=f(x_0)-hf'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(x_0)$$

folgt durch Addition der beiden Gleichungen

$$f(x_0+h)+f(x_0-h)=2\cdot f(x_0)+h^2f''(x_0)$$

und damit

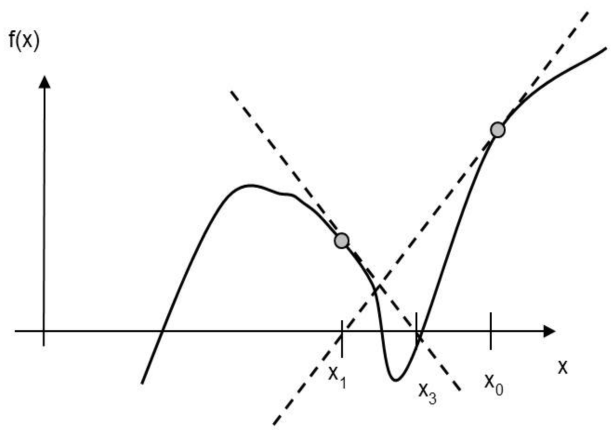
$$\boxed{f''(x_0)=\frac{f(x_0+h)-2\cdot f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}} \tag{4.45}$$

welches uns erlaubt, auch die zweite Ableitung nur aus den Funktionswerten, also ohne zuvor die erste Ableitung zu berechnen, zu ermitteln.

4.14 (*) Das Tangentenverfahren von Newton

Hier wird nun die Tangente verwendet, um die Nullstelle einer differenzierbaren Funktion zu berechnen

$$f(x)=0$$



Skizze:

Idee:
1. Starte bei vorgegebenem x_0
2. Berechne die Tangentengleichung $f_1(x)$ in x_0
3. Berechne die Nullstelle x_1 der Tangente, d.h. $f_1(x_1) = 0$
4. Berechne an x_1 die Tangente und deren Nullstelle u.s.w.
Also:

Geg.: $f(x), x_0$
Für i=0,1,2,...
    Berechne $f(x_i), f'(x_i)$
    $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
Next i

Beispiel: Berechnung von $x = \sqrt{2}, d.h.$ Lösung von $f(x) = x^2 - 2 = 0$

Startwert: $x_0 = 1, f'(x) = 2x$

i=1:
$f(x_0) = f(1) = -1$

$f'(1) = 2$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{-1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

i=2:
$f(x_1) = f(1,5) = 0,25$

$f'(1,5) = 3$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1,5 - \frac{1}{12} = 1,4167$$

usw.

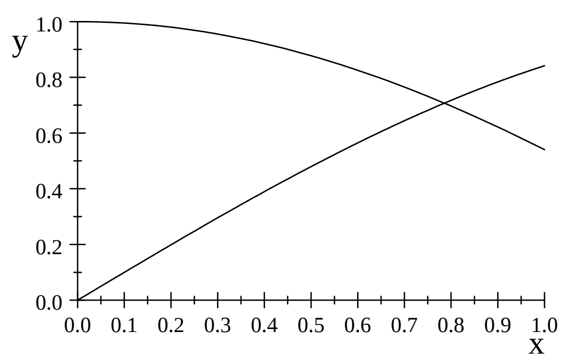
Es gilt: $f(x_2) = 0,0069$, der exakte Wert wäre x=1,4142. Kleiner werdende Funktionswerte und konvergierende x-Werte sind ein Indiz für ein funktionierendes Verfahren.

Wann kann dieses Verfahren fehlschlagen?

1.) $f'(x_i) \approx 0$

2.) Ping-Pong

Beispiele :
1. Wo wird $\sin(x) = \cos(x)$?



Nullstellenformulierung: $f(x) = \sin(x) - \cos(x) = 0$

Ableitung: $f'(x) = \cos(x) + \sin(x)$

Startwert: $x_0 = 0$

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
0	0	-1	1	$0 + 1 = 1$
1	1	$0,3$	$1,38$	$1 - \frac{0,3}{1,38} = 0,783$
2	$0,783$	$-0,0076$		

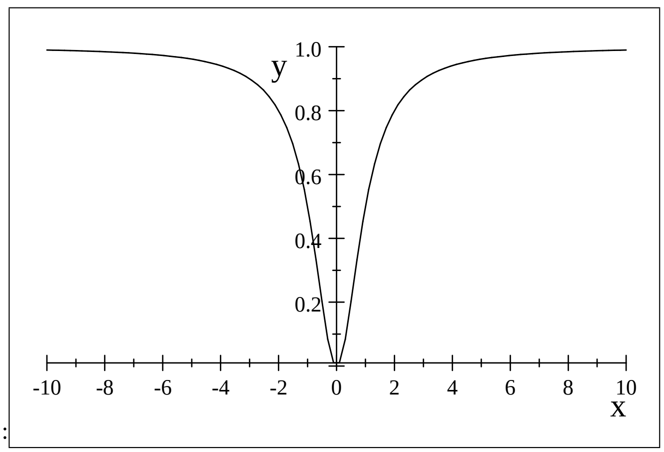
Also: Die Näherung ist $x = 0,783$
Beispiel für einen Problemfall:

Wir betrachten das Nullstellenproblem

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} = 0$$

welches von $x = 0$ offensichtlich gelöst wird.
Es gilt:

$$f(x) = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

Der Graph ist: 

Weiterhin gilt:

$$f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

Starten wir nun das Verfahren mit $x_0 = \sqrt{3}$, so ist

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{3} - \frac{1-\frac{1}{4}}{\frac{2\sqrt{3}}{16}} = \sqrt{3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{3} - 2\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 2\sqrt{3} = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

und dann

$$\begin{aligned} x_2 &= -\sqrt{3} - \frac{1-\frac{1}{4}}{\frac{-2\sqrt{3}}{16}} = -\sqrt{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{\sqrt{3}} \\ &= -\sqrt{3} + 2\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

und somit entsteht der oben beschriebene Ping-Pong-Effekt.

Kapitel 5

Integration

Deutschland hat ein Integrationsproblem (Schlagzeile in "Die Zeit")

5.1 Einleitung

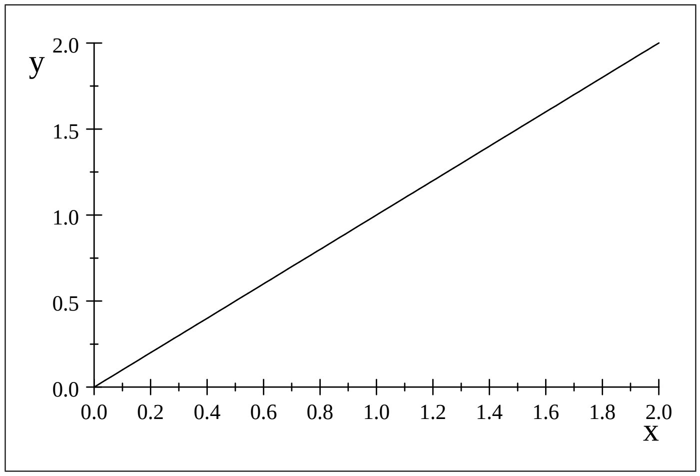
Betrachten wir zunächst Funktionen mit $f(x) \geq 0$. Eine klassisiche Disziplin der Mathematik ist die Berechnung von Flächen z.B. eines Kreises. Als einfachstes Beispiel betrachten wir die Fläche eines Rechtecks als Produkt der beiden Seitenlängen. In einem Funktionsgraph wir dies beschrieben durch eine konstante Höhe $f(x) = c$ und als Grundseite wird ein Intervall $[a, b]$ betrachtet. Die Fläche ergibt sich dann analog zu $I = c \cdot (b - a)$

Allgemein betrachten wir dann zu einer gegebenen begrenzenden Funktion $f(x)$ und einem Intervall $[a, b]$ die Menge der Punkte

$$M_f = \{(x, y) | a \leq x \leq b \text{ und } 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Betrachten wir nun das Intervall $[0, b]$ und die Fläche unter der Funktion

$$f(x) = x$$



also die Punkte

$$M_f = \{(x, y)|0 \leq x \leq b \text{ und } 0 \leq y \leq x\}$$

so wird diese Fläche die Hälfte der Fläche des Quadrates mit Seitenlänge b, also

$$I(M_f) = \frac{b^2}{2}$$

Diese bekannte Lösung soll aber nun allgemeiner hergeleitet werden, um ein analoges Verfahren auf beliebige Funktionen anwenden zu können. Hierzu zerlegen wir das Intervall $[0, b]$ in n Teilintervalle durch Einfügen der Punkte

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= \frac{b}{n} \\ x_2 &= 2\frac{b}{n} \\ &\dots \\ x_n &= n\frac{b}{n} = b \end{aligned}$$

oder allgemeiner

$$x_k = k\frac{b}{n}$$

Auf jedem der Intervalle nimmt die (monoton wachsende) Funktion Werte zwischen

$$\begin{aligned} f(x_{k-1}) &= x_{k-1} \\ &\text{und} \\ f(x_k) &= x_k \end{aligned}$$

an. Wählen wir nun als Fläche das Rechteck mit der Höhe x_{k-1} ,so werden wir einen kleineren als den wahren Wert der Fläche auf diesem Intervall

$[x_{k-1}, x_k]$ erhalten. Umgekehrt wird das Rechteck mit der Höhe x_k einen zu grossen Wert liefern.

Berechnen wir nun die Summe der zu kleinen Werte auf allen Teilintervallen so erhalten wir

$$U = f(x_0) \cdot (x_1 - x_0) + f(x_1) \cdot (x_2 - x_1) + ... + f(x_{n-1}) \cdot (x_n - x_{n-1})$$

Wegen

$$x_k - x_{k-1} = k\frac{b}{n} - (k-1)\frac{b}{n} = \frac{b}{n}$$

und

$$f(x_k) = x_k$$

ist dies

$$\begin{aligned} U &= x_0 \cdot \frac{b}{n} + x_1 \cdot \frac{b}{n} + ... + x_{n-1} \cdot \frac{b}{n} \\ &= \frac{b}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k = \frac{b}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot \frac{b}{n} \\ &= \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} = \frac{b^2}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \\ &= \frac{b^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Entsprechend ist für die zu grossen Werte

$$\begin{aligned} O &= x_1 \cdot \frac{b}{n} + x_2 \cdot \frac{b}{n} + ... + x_n \cdot \frac{b}{n} \\ &= \frac{b}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{b}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{b}{n} \\ &= \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{b^2}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \\ &= \frac{b^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

und für die gesuchte Fläche wird gelten

$$U \leq I \leq O$$

also

$$\frac{b^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq I \leq \frac{b^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Der erste Teil der Ungleichung liefert

$$\frac{b^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq I$$

Die Folge $\frac{b^2}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)$ ist somit monoton wachsend und beschränkt und daher besitzt sie ein Supremum. Dieses ist

$$\sup\{\frac{b^2}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\} = \lim_{n\to\infty}\{\frac{b^2}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\} = \frac{b^2}{2}$$

Der zweite Teil

$$I \leq \frac{b^2}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

liefert eine nach unten beschränkte monoton fallende Folge und es gilt

$$\inf\{\frac{b^2}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\} = \lim_{n\to\infty}\{\frac{b^2}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\} = \frac{b^2}{2}$$

Damit gilt:

$$\frac{b^2}{2} = \sup\{\frac{b^2}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\} \leq I \leq \inf\{\frac{b^2}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\} = \frac{b^2}{2}$$

und damit

$$I = \frac{b^2}{2}$$

Als zweites Beispiel betrachten wir die Funktion

$$f(x) = 2^x$$

und den Integrationsbereich [0,b].
Dort ist für die Untersumme bei der äquidistanten Diskretisierung wieder

$$\begin{aligned}
U_n &= \sum_{k=1}^{n} f((k-1)\cdot\frac{b}{n})\frac{b}{n} = \sum_{k=1}^{n} 2^{(k-1)\cdot\frac{b}{n}}\frac{b}{n} \\
&= \frac{b}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(2^{k\frac{b}{n}}\right) = \frac{b}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(2^{\frac{b}{n}}\right)^k \\
&= \frac{b}{n}\frac{\left(2^{\frac{b}{n}}\right)^n - 1}{2^{\frac{b}{n}}-1} = \frac{b}{n}\frac{2^b-1}{2^{\frac{b}{n}}-1}
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b}{n}\frac{2^b-1}{2^{\frac{b}{n}}-1} = b\cdot(2^b-1)\frac{1}{\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(2^{\frac{b}{n}}-1\right)}$$

Hier gilt in dem wir n durch reelles x ersetzen

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} x\cdot\left(2^{\frac{b}{x}}-1\right) \\
=\ &\lim_{x\to\infty}\frac{2^{\frac{b}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{b}{x^2}\ln(2)2^{\frac{b}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} \\
=\ &\lim_{x\to\infty} b\cdot\ln(2)\cdot 2^{\frac{b}{x}} = b\cdot\ln(2)
\end{aligned}$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \frac{b\cdot(2^b-1)}{b\cdot\ln(2)} = \frac{2^b-1}{\ln(2)}$$

Ähnlich lässt sich zeigen

$$\begin{aligned}
O_n &= \sum_{k=1}^{n} f((k)\cdot\frac{b}{n})\frac{b}{n} = \sum_{k=1}^{n} 2^{k\cdot\frac{b}{n}}\frac{b}{n} \\
&= \frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2^{k\frac{b}{n}}\right) = \frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2^{\frac{b}{n}}\right)^k \\
&= \frac{b}{n}\left(\frac{\left(2^{\frac{b}{n}}\right)^{n+1}-1}{2^{\frac{b}{n}}-1}-1\right) \\
&= \frac{b}{n}\left(\frac{\left(2^{\frac{b}{n}}\right)^{n+1}-2^{\frac{b}{n}}}{2^{\frac{b}{n}}-1}\right) \\
&= \frac{b}{n}\frac{2^b-1}{2^{\frac{b}{n}}-1}\cdot 2^{\frac{b}{n}}
\end{aligned}$$

und damit ebenfalls

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \frac{2^b-1}{\ln(2)}$$

Dieses Beispiel zeigt bereits die ein wenig komplexe Berechnung von Flächen. Für eine allgemeine Herleitung sei noch erwähnt, dass weder der linke Randpunkt bei der Null liegen muss, noch die Aufteilung der x_k in gleichmässigem Abstand erfolgen muss.

Definition 185 *Sei $a < b$. Eine Menge von Punkten mit $Z = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ heisst eine* ***Zerlegung*** *von $[a,b]$. Es entstehen dabei $n+1$ Punkte und n Intervalle. Eine Zerlegung in gleich lange Intervalle der Länge $\frac{b-a}{n}$ heisst äquidistante Zerlegung. Die Punkte sind dann $x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}, ..., x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b$*

Zur Einschränkung betrachten wir zunächst beschränkte Funktionen, so dass auf einem Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ stets Minimum und Maximum existieren. Sei

$$\begin{aligned}
m_k &= \min_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \\
M_k &= \max_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)
\end{aligned}$$

Dann lässt sich definieren:

Definition 186 *Sei f auf $[a,b]$ beschränkt, Z eine Zerlegung von $[a,b]$. Dann heisst*
$U(Z,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot (x_k - x_{k-1})$ ***Untersumme*** *von f bzgl. Z*
$O(Z,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot (x_k - x_{k-1})$ ***Obersumme*** *von f bzgl. Z*

Bem.: Für monoton wachsende Funktionen wird ihr Minimum am linken, ihr Maximum am rechten Rand angenommen und daher gilt dort:

$$\begin{aligned} U(Z,f) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k-1}) \\ O(Z,f) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

und speziell bei äquidistanter Zerlegung mit $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$

$$\begin{aligned} U(Z,f) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \cdot \frac{b-a}{n} \\ O(Z,f) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \frac{b-a}{n} \end{aligned}$$

Lemma 187 *Es ist stets $U(Z,f) \leq O(Z,f)$*

Denn es ist:

$$\begin{aligned} O(Z,f) - U(Z,f) &= \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot (x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot (x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) \geq 0 \end{aligned}$$

q.e.d.

Da jedoch auch für beliebige Zerlegungen Z und Z' und der Fläche I unter der Funktion stets gilt

$$U(Z,f) \leq I \leq O(Z',f)$$

gilt auch stets

$$U(Z,f) \leq O(Z',f)$$

Entsprechend können wir nun, da die Menge aller Untersummen nach oben beschränkt ist und die Menge alle Obersummen nach unten beschränkt ist definieren:

Es ist

$$\begin{aligned} O &:= \inf\{O(Z,f), Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\} \\ U &:= \sup\{U(Z,f), Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\} \end{aligned}$$

Im Fall dass die Werte gleich gross werden, nennen wir die Funktion integrierbar, also

Definition 188 *Sei f eine auf $[a,b]$ beschränkte Funktion mit $I = \inf\{O(Z,f), Z$ Zerlegung von $[a,b]\} = \sup\{U(Z,f), Z$ Zerlegung von $[a,b]\}$. Dann heisst f* ***integrierbar*** *über $[a,b]$ und wir nennen I das* ***Integral*** *von f über $[a,b]$.*

Notation:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

a heisst obere Integrationsgrenze, b untere Integrationsgrenze, x Integrationsvariable, f(x) Integrand.

Bem.: Eine nicht integrierbare Funktion ist beispielsweise die Dirichlet-Funktion

$$f(x) = \begin{matrix} 1 & \text{für } x \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \end{matrix}$$

auf $[0,1]$ da dort gilt U=0 und O=1.

Die Integrierbarkeit kann wie folgt gezeigt werden:

Satz 189 *(Riemann-Kriterium): Sei f eine auf $[a,b]$ beschränkte Funktion. f ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z_ε von $[a,b]$ gibt mit*

$$O(Z_\varepsilon, f) - U(Z_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

Bew.:Neunzert.

Bsp: Sei $p \in [a,b]$

$$f(x) = \begin{matrix} c & \text{für } x = p \\ 0 & \textit{sonst} \end{matrix}$$

Dann ist

$$U(Z,f) = 0 \text{ für jede Zerlegung}$$

Der Wert p liegt in genau einem Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ oder wenn er genau auf einer Intervallgrenze liegt ($p = x_k$) in Zweien und damit ist

$$O(Z,f) \leq c \cdot (x_{k+1} - x_{k-1})$$

Wir wählen nun die Zerlegung zu einem vorgegeben ε so, dass

$$x_{k+1} - x_{k-1} < \frac{\varepsilon}{c}$$

und damit ist

$$\begin{aligned} O(Z,f) - U(Z,f) &= c \cdot (x_{k+1} - x_{k-1}) \\ &< c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon \end{aligned}$$

Daher ist die Funktion integrierbar. Insbesondere ist das Integral der Wert der konstanten Untersumme $U(Z,f) = 0$

Wir sehen also, dass einzelne Punkte keine besondere Rolle beim Integrieren spielen. Wir können also die Funktionswerte in endlich vielen Stellen durch andere Werte ersetzen ohne den Wert des Integrals zu verändern.

Insbesondere sind auch nicht stetige Funktionen integrierbar.

Satz 190 *Jede auf [a,b] monotone Funktion ist integrierbar auf [a,b]*

Beweis für monoton wachsende Funktionen: Zu einem vorgegebenen ε suchen wir eine Zerlegung Z_ε mit

$$O(Z_\varepsilon, f) - U(Z_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

Wir zeigen, dass eine äquidistante Zerlegung existiert, also $x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$. Dann ist

$$\begin{aligned} O(Z,f) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \frac{b-a}{n} \\ U(Z,f) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \cdot \frac{b-a}{n} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} O(Z,f) - U(Z,f) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \frac{b-a}{n} - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \cdot \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) - f(x_{k-1}) \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot (f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

Ist nun ε vorgegeben, so wählen wir n so, dass

$$\frac{b-a}{n} \cdot (f(b) - f(a)) < \varepsilon$$

also

$$n > \frac{(b-a)\cdot(f(b)-f(a))}{\varepsilon}$$

Wir haben nun gesehen, dass wir zwar die Integrierbarkeit zeigen können, jedoch die Werte des Integrals können mit diesen Methoden nur sehr unhandlich berechnet werden.

Die eine Vorraussetzung ist nun, n gross genug zu wählen. Dies könnten wir erreichen, in dem wir die Anzahl der Punkte der Zerlegung beliebig gross werden lassen. Der Unterschied der Ober- und Untersumme könnte hierbei dennoch stets größer als ε sein, wenn die Punkte sich in einem Bereich konzentrieren. Dies können wir sicher stellen in dem wir zusätzlich fordern, dass der maximale Abstand zweier Punkte gegen Null gehen müssen, also

$$\lim_{n\to\infty} \max(x_{i+1}-x_i) = 0$$

In diesem Fall ist bei integrierbaren Funktionen das Integral der Grenzwert bei einer Zerlegung mit n Punkten ist, also für Zerlegungen mit $\lim_{n\to\infty} \max(x_{i+1}-x_i) = 0$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x)\cdot(x_{i+1}-x_i)$$

Hierbei werden die Intervalle im Übrigen immer kleiner, so dass auf einem Teilintervall schliesslich stets Monotonie gilt.

5.1.1 Das unbestimmte Integral

Definition 191 *Sei $f \in C[a,b]$. Eine differenzierbare Funktion $F(x)$ mit $F'(x) = f(x) \ \ \forall x \in [a,b]$ heisst eine* ***Stammfunktion von f.***

Bsp: Damit ist

1. $F(x) = e^x$ Stammfunktion zu $f(x) = e^x$ da $F'(x) = e^x = f(x)$
2. $F(x) = \cos(x)$ Stammfunktion zu $f(x) = \sin(x)$ da $F'(x) = \sin(x) = f(x)$
3. $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ Stammfunktion zu $f(x) = x^n$ da $F'(x) = \frac{1}{n+1}(n+1)x^n = x^n = f(x)$

Bem.: Die Stammfunktion ist somit nicht eindeutig, da mit einer Stammfunktion auch $G(x) = F(x) + c$ erfüllt $G'(x) = F'(x) = f(x)$. Andererseits gilt, wenn Funktionen die gleiche Ableitung haben, dass gilt

$$\begin{aligned} F'(x) &= G'(x) \\ F'(x) - G'(x) &= 0 \\ (F(x) - G(x))' &= 0 \\ (F(x) - G(x)) &= const \\ F(x) &= G(x) + const \end{aligned}$$

also hat JEDE Stammfunktion die Gestalt

$$F(x) + c$$

wobei $F(x)$ eine beliebige Stammfunktion ist.

Wir erhalten dann alle Stammfunktionen zu $f(x) = x^n$ mit $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$.
Umgekehrt haben nicht alle Funktionen Stammfunktionen, z.B. ist keine Stammfunktion zu $f(x) = e^{-x^2}$, also eine Funktion $F(x)$ mit $F'(x) = e^{-x^2}$, bekannt.

Aus Zusammenhängen die später noch ersichtlich werden, definieren wir

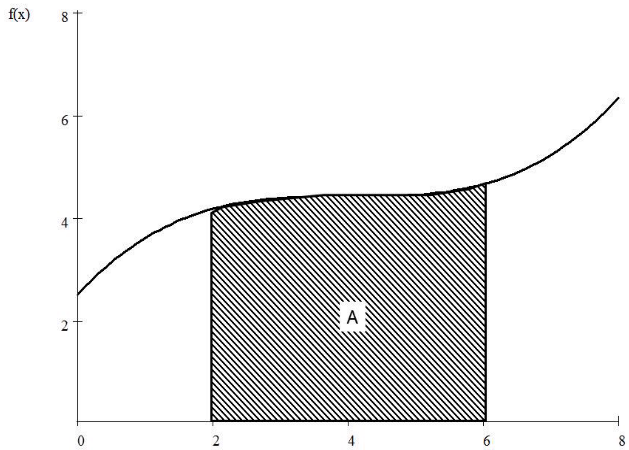
Definition 192 $F(x) = \int f(x)dx$ *heisst das* ***unbestimmte Integral*** *von* f.

Wir können daher von allen bekannten Ableitungen die Umkehrung bilden:

Eine Funktion $F(x)$	$f(x) = F'(x)$	Unbestimmtes Integral	
x	1	$\int 1dx = x + c$	
$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	x^n	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$n \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$	
-$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$	
e^x	e^x	$\int e^x dx = e^x + c$	

5.1.2 Das bestimmte Integral

Kehren wir nun zurück zum Problem die Fläche unter einer Kurve berechnen zu wollen.



Die Fläche unter dem Intervall $[a, b]$ haben wir bezeichnet mit

$$\int_a^b f(x)dx$$

Der Form halber werden wir nun die Integrationsvariable umbenennen müssen, da wir die Variable x für die obere Grenze verwenden wollen, also:

$$\int_a^b f(t)dt$$

Nun betrachten wir die Fläche unter dem Intervall $[a, x_0]$ und betrachten dieses als Funktion der rechten Intervallgrenze

$$F_a(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)dt$$

5.1.3 (*) Die Flächenfunktion

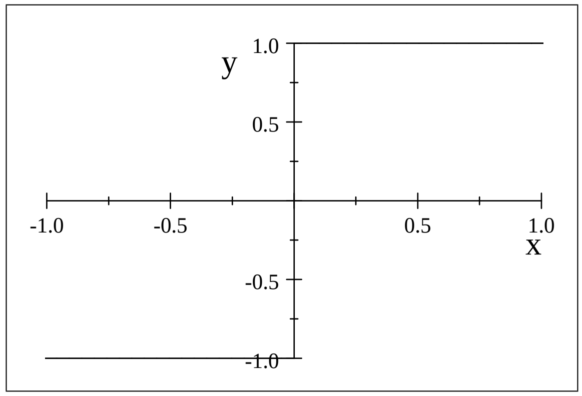
Ist eine Funktion Riemann-integrierbar, so existiert eine Flächenfunktion

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

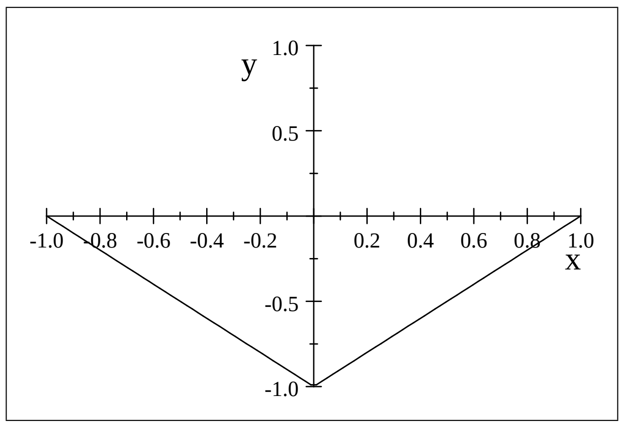
Ist der Integrand unstetig, so lässt sich auch diese Flächenfunktion nicht differenzieren und wir können keine Stammfunktion ermitteln.

z.B.

$$f(t) = \begin{matrix} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ -1 & -1 \leq t < 0 \end{matrix}$$



Die Flächenfunktion ist dann



und daher an der Stelle 0 nicht differenzierbar.

Andererseits gibt es Funktionen $F(x)$, die zwar differenzierbar sind, deren Ableitung jedoch nicht Riemann integrierbar sind.

Beispiel:

$$F(x) = \begin{array}{cc} x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x^2}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{array}$$

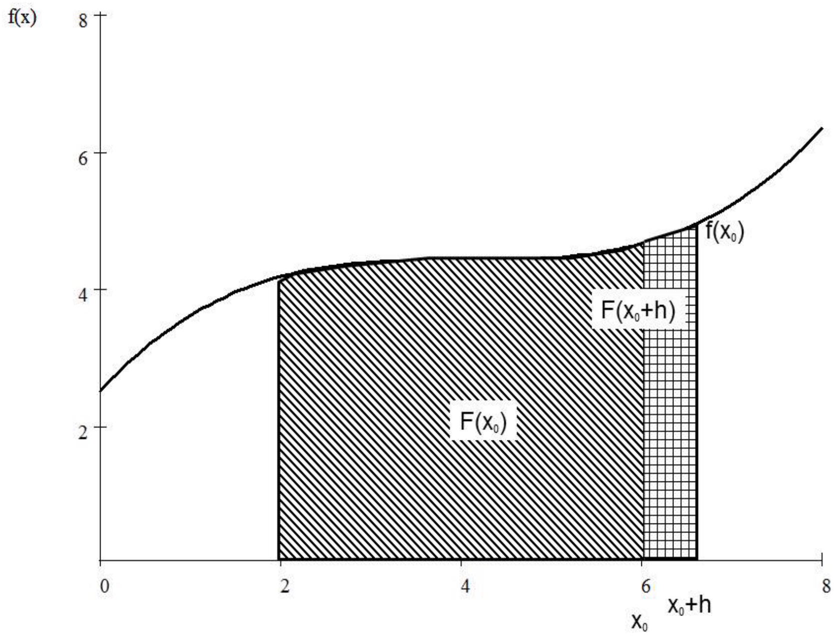
5.1.4 Stammfunktion und Flächenfunktion

Betrachten wir nun die Fläche bis zum Punkt $x_0 + h$, so ergibt sich

$$F_a(x_0 + h) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt$$

Schauen wir uns schliesslich den Flächenzuwachs an, so ist

$$F_a(x_0 + h) - F_a(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = A$$



Sei nun auf dem hinzugekommenen Streifen x_1 das Minimum auf $[x_0, x_0+h]$ und x_2 das Maximum, so gilt

$$h \cdot f(x_1) \leq A \leq h \cdot f(x_2)$$

und somit

$$f(x_1) \leq \frac{A}{h} \leq f(x_2)$$

Damit existiert gemäß Zwischenwertsatz auch ein $x^* \in [x_1, x_2]$ und damit insbesondere $x^* \in [x_0, x_0+h]$ mit

$$\frac{A}{h} = f(x^*)$$

oder

$$A = h \cdot f(x^*)$$

Damit gilt

$$F_a(x_0+h) - F_a(x_0) = h \cdot f(x^*)$$

bzw

$$\frac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h} = f(x^*)$$

mit $x^* \in [x_0, x_0+h]$

Im Grenzübergang $h \to 0$ wird damit $x^* = x_0$ und

$$\lim_{h\to 0} \frac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h} = f(x_0)$$

Also:

$$F'_a(x_0) = f(x_0)$$

also $F_a(x_0)$ ist eine Stammfunktion von $f(x_0)$! Welche - es gibt ja nur bis auf eine Konstante eindeutige - sei noch offen gelassen.

Es ergibt sich:

Satz 193 *(Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung): Sei $f \in C[a,b]$, dann ist*

$$\begin{aligned} F_a(x) &= \int_a^x f(t)dt \quad \textit{differenzierbar} \\ \textit{und es gilt} &: \quad F'_a(x) = f(x) \end{aligned}$$

Damit ist also:

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = F'_a(x) = f(x)$$

und

$$\int_a^x F'_a(t)dt = \int_a^x f(t)dt = F_a(x)$$

Teil 1 ist zu lesen: Integrieren und anschliessendes Differenzieren liefert die ursprüngliche Funktion, Teil 2 die Umkehrung.

Also: Differenzieren und Integrieren sind Umkehrungen.

Schliesslich wollen wir noch ermitteln, welche Stammfunktion nun die Fläche angibt.

Einige elementare Eigenschaften der Flächen seien zunächst aufgeführt, die sich aus der Definition des bestimmten Integrals aus Ober- und Untersumme ergeben:

Es gilt

$\int\limits_a^a f(x)dx = 0$ (Breite Null)

$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$ (negative Flächenbreiten)

$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$ (Zwischenpunkte)

$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$ (Konstanten können aus der Summe gezogen werden)

$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ (Summe kann zerlegt werden)

Für $a < b$ und $f(x) \leq g(x)$ ist auch

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Bew.: Rechenregeln für Summen. Es gilt dabei (s.o.) für Zerlegungen mit $\lim_{n\to\infty} \max(x_{i+1} - x_i) = 0$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

q.e.d.

Beschäftigen wir uns nun damit, wie wir die Fläche $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ berechnen können.

Wir wissen über die noch unbekannte Flächenfunktion

$$\begin{aligned} F_a(x) &= \int_a^x f(t)dt \\ F_a'(x) &= f(x) \\ F_a(a) &= 0 \end{aligned}$$

Nehmen wir irgend eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$, so gilt wegen $F_a'(x) = f(x) = F'(x)$:

$$F(x) + c = F_a(x)$$

speziell wegen $F_a(a) = 0$

$$\begin{aligned} F(a) + c &= 0 \\ c &= -F(a) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} F_a(x) &= \int_a^x f(t)dt \\ &= F(x) - F(a) \end{aligned}$$

für eine BELIEBIGE Stammfunktion $F(x)$!

Hieraus folgt speziell für $x = b$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{5.1}$$

für eine beliebige Stammfunktion F.

Es kommt also für alle Stammfunktionen der gleiche (richtige) Wert heraus. Daher kann **eine** Stammfunktion gewählt werden. In der Regel wählt man diejenige Funktion mit der Konstanten Null.

Es ergibt sich

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: F(x)|_{x=a}^b$$

Bsp.: Eine Stammfunktion zu $f(x) = x^2$ ist $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ und damit

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^2 dx &= \frac{1}{3}x^3|_{x=1}^2 \\ &= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}\end{aligned}$$

Es ist also zur Berechnung der Fläche die äquivalente Aufgabe zu lösen, eine Funktion zu finden, welche den Integrand zur Ableitung hat. Insbesondere gilt sowohl für bestimmte als auch für unbestimmte Integrale

$$\begin{aligned}\left(\int f(x)dx\right)' &= F'(x) = f(x) \\ \int F'(x)dx &= \int f(x)dx = F(x) + c\end{aligned}$$

Hieraus lassen sich nun aus den Rechenregeln für das Differenzieren welche für das Integrieren ableiten:

Faktorregel:

Wegen $(c \cdot F(x))' = c \cdot F'(x) = c \cdot f(x)$ gilt:

$$\begin{aligned}\int c \cdot f(x)dx &= \int (c \cdot F(x))' \, dx = c \cdot F(x) \\ &= c \cdot \int f(x)dx\end{aligned}$$

Summenregel:
Wegen $(F(x)+G(x))' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x)$ gilt:

$$\begin{aligned}\int f(x)+g(x)dx &= \int (F(x)+G(x))'\,dx = F(x)+G(x)+c\\ &= \int f(x)dx + \int g(x)dx\end{aligned}$$

Partielle Integration - (Umkehrung der Produktregel): Sei $F(x) = u(x)\cdot v(x)$, dann ist $F'(x) = u(x)\cdot v'(x) + u'(x)\cdot v(x)$ und damit

$$\begin{aligned}u(x)\cdot v(x)(+c) &= F(x)(+c)\\ &= \int F'(x)dx = \int u(x)\cdot v'(x) + u'(x)\cdot v(x)dx\\ &= \int u(x)\cdot v'(x)dx + \int u'(x)\cdot v(x)dx\end{aligned}$$

und damit

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)dx$$

Substitution - (Umkehrung der Kettenregel): Sei $F(g(x))$ gegeben, so ist $(F(g(x))' = F'(g(x))\cdot g'(x) = f(g(x))\cdot g'(x)$. Andererseits ist mit $u = g(x)$

$$F(g(x)) = F(u) = \int F'(u)du = \int f(u)du$$

und

$$F(g(x)) = \int (F(g(x))'\,dx = \int f(g(x))\cdot g'(x)dx$$

Also:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)dx = \int f(u)du$$

Ebenfalls kann die Substitution angewendet werden, in dem wir das Integral von rechts nach links lesen, also u und x vertauschen und mit einer beliebigen Funktion $x = h(u)$ substituieren:

$$\int f(x)dx = \int f(h(u))\cdot h'(u)du$$

Nach der Lösung des Integrals auf der rechten Seite muss schliesslich rücksubstituiert werden mit $u = h^{-1}(x)$.

Beispiele:

Zur Substitution:
1. $\int 2x\sin(x^2)dx = \int \sin(u)du = -\cos(u) + C = -\cos(x^2) + C$

2.$\int \cos(x)e^{\sin(x)}dx = \int e^u du = e^u + C = e^{\sin(x)} + C$

3.$\int x \cdot e^{x^2} dx = \int \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int 2x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

4.$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}.\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}.\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln(u) + c = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$

5. ($x = \sin(u)$ bzw. u=arcsin(x)) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 u}}\cos(u)du = \int \frac{1}{\sqrt{\cos^2(u)}}\cos(u)du = \int 1du = u + c = \arcsin(x) + c$

Zur partiellen Integration:
1. $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$

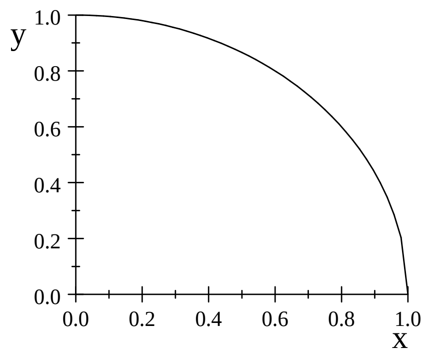
2. $\int x^2e^x dx = x^2e^x - \int 2xe^x dx = x^2e^x - 2\cdot((x-1)e^x + \widetilde{C}) = x^2e^x - 2\cdot(x-1)e^x + C$
3.$\int \sin^2(x)dx = \int \sin(x)\cdot\sin(x)dx = -\sin(x)\cos(x) + \int \cos^2(x)dx = -\sin(x)\cos(x) + \int 1 - \sin^2(x)dx = -\sin(x)\cos(x) + x - \int \sin^2(x)dx$

und damit:

$$\begin{aligned} 2\int \sin^2(x)dx &= -\sin(x)\cos(x) + x \text{ bzw.} \\ \int \sin^2(x)dx &= \frac{-\sin(x)\cos(x) + x}{2} + C \end{aligned}$$

4. Berechnung der Fläche des Viertelkreises mit Radius 1 (exakt: $\frac{\pi}{4}$)

Skizze



Substituiere $\sqrt{1-x^2}$ mit $x = \cos(u)$ und damit $u = \arccos(x)$
$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1-\cos^2(u)}(-\sin(u))du$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(u)du = \dfrac{-\sin(u)\cos(u)+u}{2}|_0^{\frac{\pi}{2}}$
$= \dfrac{1}{2}(-\sin(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2}) + \dfrac{\pi}{2} - (-\sin(0)\cos(0)+0))$
$= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{4}$

Weiteres Beispiel: Durch mehrfaches Anwenden der partiellen Integration können Integrale der Form $\int x^n \cdot e^x dx, \int x^n \cdot \cos(x)dx, \int x^n \cdot \sin(x)dx$ gelöst werden. Eine kleine Besonderheit ist bei Integralen der Form

$$\int x^n \cdot \ln(x)dx$$

zu beachten. Die Stammfunktion von $\ln(x)$ ist zunächst unbekannt (und auch bei Kenntnis dieser lässt sich das entstehende Integral nicht leichter lösen als das ursprüngliche), jedoch ist die Ableitung bekannt

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

Nun kann die partielle Integration angewendet werden, in dem man x^n integriert und $\ln(x)$ differenziert. Damit ist $u(x) = \ln(x)$ und $v'(x) = x^n$ und damit $u'(x) = \frac{1}{x}, v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$\begin{aligned}
\int x^n \cdot \ln(x)dx &= \ln(x) \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}dx \\
&= \ln(x) \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int x^n dx \\
&= \ln(x) \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C
\end{aligned}$$

Beispiel 5:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cdot \ln(x) dx &= \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} dx \\
&= \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^2}{3} dx \\
&= \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{9} x^3 + C
\end{aligned}$$

Bei bestimmten Integralen ist jedoch darauf zu achten, dass die Funktion auf dem Integrationsbereich umkehrbar ist, z.B: Substituieren wir im Folgenden $u = x^2$ also $du = 2xdx = 2\sqrt{u}dx$

$$\int_{x=-1}^{1} x^2 dx = \int_{u=1}^{1} \frac{u}{2\sqrt{u}} du = \int_{u=1}^{1} \frac{\sqrt{u}}{2} du$$

so erhalten wir ein bestimmtes Integral der Länge Null und damit ist auch der Wert des Integrals Null, welches eine falsche Lösung liefert. Richtig ist ja

$$\int_{x=-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

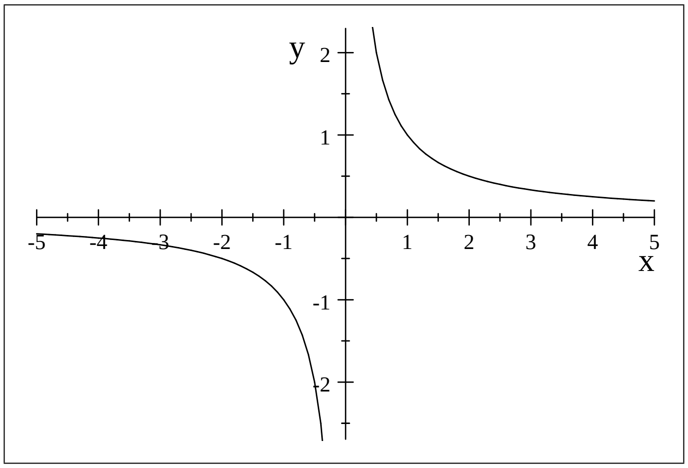
Auch im Fall der Substitution $x = h(u)$ benötigen wir ja bereits für das unbestimmte Integral $h^{-1}(x)$ und somit ebenfalls umkehrbare Funktionen.

Zur Übung: Zeigen Sie mit Hilfe der partiellen Integration (Hinweis: $t^2 = t^2 - 1 + 1$) den Zusammenhang zwischen Fläche und Umfang (s.o.)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = 2 \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$$

5.1.5 Die Stammfunktion von 1/x

Eine kleine Anmerkung sei noch gemacht zur Integration von $\frac{1}{x}$. Der Funktionsverlauf ist ja bekannt:



Interessieren wir uns für das bestimmte Integral über einen negativen Bereich, also für

$$\int_{-b}^{-a} \frac{1}{x} dx$$

so kann dies auch berechnet werden über

$$\begin{aligned} \int_{-b}^{-a} \frac{1}{x} dx &= -\int_{a}^{b} \frac{1}{x} dx \\ &= [-\ln(x)]_a^b = -\ln(b) + \ln(a) \\ &= \ln(a) - \ln(b) \\ &= [\ln|x|]_{-b}^{-a} \end{aligned}$$

verwenden können. Somit ist also allgemein die Stammfunktion von $\frac{1}{x}$ die Funktion

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

und analog hierzu die Stammfunktion von

$$\int \frac{1}{x - x_0} dx = \ln|x - x_0| + c$$

5.1.6 Partialbruchzerlegung

Wir betrachten nun die Integration gebrochen rationaler Funktionen.

Da jede unecht gebrochen rationale Funktion mittels Polynomdivision zerlegt werden kann in ein Polynom und eine echt gebrochen rationale Funktion, reicht es, die Integration echt gebrochen rationaler Funktionen zu betrachten, also

$$\int \frac{r(x)}{q(x)} dx$$

mit $\text{grad}(r(x)) < \text{grad}(q(x))$

Bsp:

$$\int \frac{x^2+x}{x-1}dx = \int x+2+\frac{2}{x-1}dx$$

Desweiteren betrachten wir zunächst Funktionen mit ausschliesslich reellen Nullstellen. Dann kann die Funktion zerlegt werden gemäß

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{r(x)}{(x-x_1)^{r_1}\cdot(x-x_2)^{r_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_n)^{r_n}}$$

Betrachten wir umgekehrt eine Summe von Brüchen - den Partialbrüchen -

$$\begin{aligned}&\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_{r_1}}{(x-x_1)^{r_1}}\\&+\frac{B_1}{x-x_2}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\ldots+\frac{B_{r_1}}{(x-x_2)^{r_2}}\\&+\ldots\end{aligned}$$

so ergibt sich nach Ausmultiplikation ein Bruch

$$\frac{r(x)}{(x-x_1)^{r_1}\cdot(x-x_2)^{r_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_n)^{r_n}}$$

und wir können umgekehrt versuchen, diesen Bruch wieder in die Partialbrüche zu zerlegen.

Bsp: Es ist zu finden

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2} = \frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}$$

Multiplikation mit dem Nenner der linken Seite liefert

$$2x+1 = A_1(x-1)+A_2$$

Diese Gleichung muss für beliebige $x-$Werte erfüllt sein. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned}x &= 1: \quad 3 = A_2\\ x &= 0: \quad 1 = -A_1+3\\ &\Longleftrightarrow \quad A_1 = 2\end{aligned}$$

und wir finden

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2} = \frac{2}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}$$

Für jeden der Summanden ist die Integration bekannt: $\int \frac{A_i}{(x-x_k)^r} dx = A_i \cdot \frac{1}{1-r} \frac{1}{(x-x_k)^{r-1}}$ für r$\neq 1$ und $A_i \cdot \ln|x - x_k|$ für $r = 1$

Zerlegen wir Funktionen mit unterschiedlichen Nullstellen, so verläuft das Verfahren ähnlich:

Bsp.: Die Funktion $\frac{1}{x^2-1}$:

Hierzu zerlegen wir das Polynom $x^2 - 1 = (x-1) \cdot (x+1)$ und versuchen den Ansatz

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1}$$

Multiplizieren wir die Gleichung mit $x^2 - 1 = (x-1) \cdot (x+1)$ erhalten wir

$$1 = A_1 \cdot (x+1) + A_2 \cdot (x-1)$$

Setzen wir nun die Nullstellen der Funktion ein ($x = 1$ und $x = -1$) erhalten wir:

x=1:

$$1 = 2 \cdot A_1$$

x=-1

$$1 = -2 \cdot A_2$$

welches die Werte für $A_1 = \frac{1}{2}$ und $A_2 = -\frac{1}{2}$ liefern

Damit ist

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}$$

und für das Integral

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2-1} dx &= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} dx \\ &= \frac{1}{2}(\ln(x-1) - \ln(x+1)) + C \end{aligned}$$

Wie können wir dieses Verfahren verallgemeinern?

Zunächst: Funktionen, die unecht gebrochen rational sind, lassen sich stets (durch Polynomdivision) in eine Summe eines Polynoms und eine echt gebrochen rationale Funktion umformen.

Beispiel: $f(x) = \dfrac{2x^3 + x^2 - 5x + 3}{(x-1)^2}$ zur späteren Berechnung von $\int f(x)dx$

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 5x + 3}{(x-1)^2} = \underbrace{2x+5}_{Polynom} + \underbrace{\frac{3x-2}{(x-1)^2}}_{\text{echt gebrochen rational}}$$

Beim Integrieren macht nun das Polynom kein Problem mehr und das Verfahren der Partialbruchzerlegung kann (muss) nur auf echt gebrochen rationale Funktionen angewendet werden.

Jede echt gebrochen rationale Funktion

$$f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$$

lässt sich nun wie folgt zerlegen:

1. Finde alle Nullstellen des Nennerpolynoms $q_m(x) : x_1, ..., x_m$
2. Bestimme ihre Vielfachheit, d.h. $q_m(x) = (x - x_k)^r \cdot g(x)$ mit $g(x_k) \neq 0$
3. Bilde zu jeder reellen Nullstelle x_k den Partialbruch mit
   einfache Nullstelle $\dfrac{A_1}{x - x_k}$
   zweifache Nullstelle $\dfrac{A_1}{x - x_k} + \dfrac{A_2}{(x - x_k)^2}$
   r-fache Nullstelle $\dfrac{A_1}{x - x_k} + \dfrac{A_2}{(x - x_k)^2} + ... + \dfrac{A_r}{(x - x_k)^r}$
4. Paarweise komplexe Nullstellen werden in die Form $(x - x_0)^2 + c$ gebracht und dann durch den Ansatz $\dfrac{Ax + B}{(x - x_0)^2 + c}$ gelöst.
5. Stelle die Gleichung auf (ursprüngliche echt gebrochen rationale Funktion = Summe der Partialbrüche)
6. Multipliziere die Gleichung mit $q_m(x)$ (faktorisiert) und kürze, wo möglich
7. Setze die Nullstellen ein und sofern nötig weitere Werte für x
8. Bestimme damit die A_i und integriere die einzelnen Partialbrüche

Bem: $\int \dfrac{A_i}{(x - x_k)^r} dx = A_i \cdot \dfrac{1}{1 - r} \dfrac{1}{(x - x_k)^{r-1}}$ für r$\neq$ 1 und $A_i \cdot \ln |x - x_k|$ für $r = 1$

Beispiel: $f(x) = \dfrac{-x}{(x-1)^2(x-2)}$ Ges.: $\int f(x)dx$

Ansatz: $\dfrac{-x}{(x-1)^2(x-2)} = \dfrac{A_1}{(x-1)} + \dfrac{A_2}{(x-1)^2} + \dfrac{A_3}{x-2}$

liefert

$$-x = A_1 \cdot (x-1) \cdot (x-2) + A_2 \cdot (x-2) + A_3 \cdot (x-1)^2$$

Einsetzen ergibt:

$x = 1 : -1 = -A_2 \Longrightarrow A_2 = 1$

$x = 2 : -2 = A_3 \Longrightarrow A_3 = -2$

$x = 3 : -3 = A_1 \cdot 2 + A_2 + 4A_3 = A_1 \cdot 2 + 1 - 8 \Longrightarrow 4 = 2A_1 \Longrightarrow A_1 = 2$

Also $\dfrac{-x}{(x-1)^2(x-2)} = \dfrac{2}{(x-1)} + \dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{2}{x-2}$

Integration liefert schliesslich

$$\begin{aligned}\int \frac{-x}{(x-1)^2(x-2)}dx &= \int \frac{2}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-2}dx \\ &= 2 \cdot \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - 2 \cdot \ln|x-2| + C\end{aligned}$$

Haben die Integrale nicht nur reelle Nullstellen, so sind die Gleichungen zu modifizieren. Dies sei hier nur an einem Beispiel angedeutet:

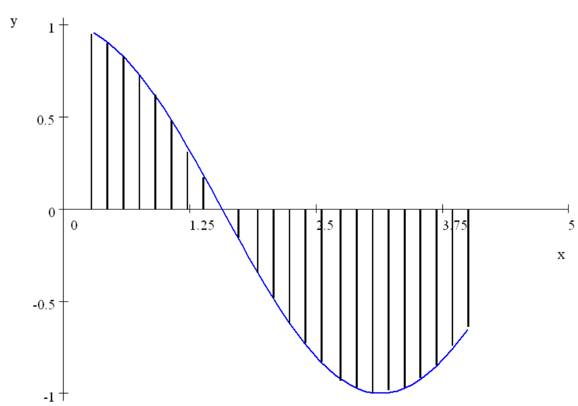
$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{x^2+1}dx &= \int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx \\ &= \int \frac{1}{u}du + \arctan(x) \\ &= \ln(x^2+1) + \arctan(x) + c\end{aligned}$$

oder an einem komplexeren Beispiel

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x^2+4x+8}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}dx - \int \frac{1}{x^2+4x+8}dx \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+8) - \int \frac{1}{(x+2)^2+4}dx \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+8) - \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1}dx \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+8) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1}\frac{1}{2}dx \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+8) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}du \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+8) - \frac{1}{2}\arctan(u) + c \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+8) - \frac{1}{2}\arctan(\frac{x+2}{2}) + c
\end{aligned}$$

5.2 Flächenberechnungen

Bisher hatten wir $\int\limits_a^b f(x)dx$ definiert als die Fläche zwischen $f(x)$ und der x-Achse:



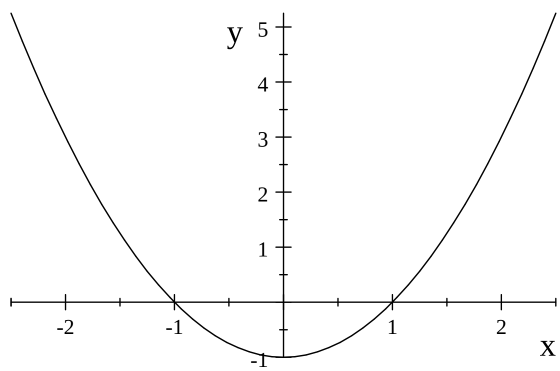
Dabei werden Flächen unterhalb der Achse einen negative Beitrag zur Masszahl liefern. Deshalb muß zur Berechnung des Integrals das Intervall aufgeteilt werden, in dem man zunächst die Nullstellen berechnet und Bereiche, in denen das Integral negativ wird, müssen subtrahiert werden.

Bsp.: Wie groß ist die Fläche, die $\sin(x)$ während einer Periode mit der x-Achse einschliesst?

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi} \sin(x)dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)dx \\ &= (-\cos(x)|_0^{\pi} - (-\cos(x)|_{\pi}^{2\pi} \\ &= 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

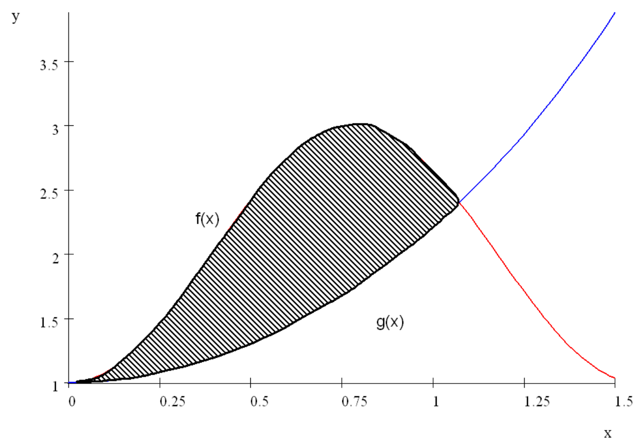
Im Allgemeinen müssen also zunächst die Nullstellen berechnet werden und dann die Teilflächen aus den mit den richtigen Vorzeichen versehenen Integralen berechnet werden.

Kontrolle: Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x^2 - 1$ und der x-Achse im Bereich $[-2, 2]$



5.3 Fläche und Integral zwischen zwei Funktionen

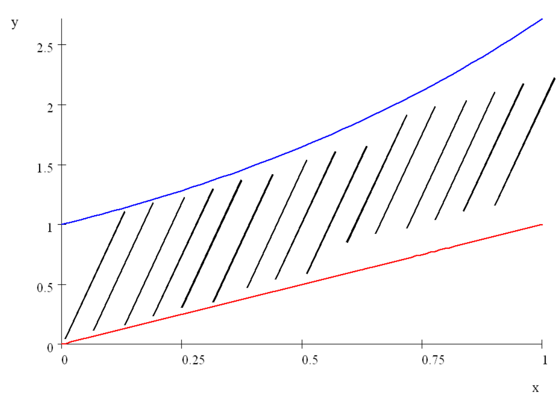
Wir betrachten nun die Fläche zwischen zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ mit $f(x) \geq g(x)$ auf dem Integrationsbereich $[a, b]$. Wie kann die Fläche zwischen f und g berechnet werden?



Es gilt

$$\begin{aligned} F &= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \\ &= \int_a^b f(x) - g(x)dx \end{aligned}$$

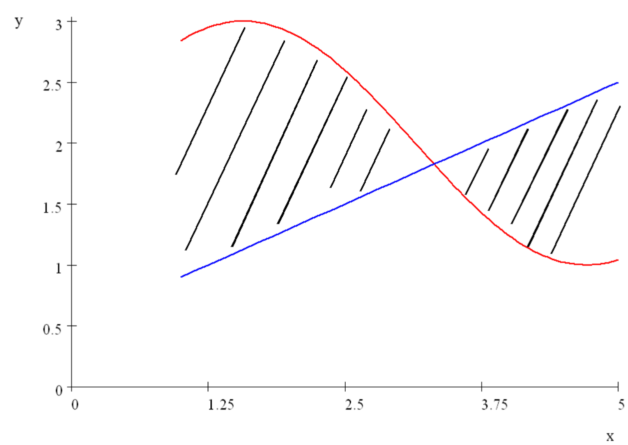
Beispiel: Welche Fläche liegt zwischen x und e^x im Intervall [0,1]



$$F = \int\limits_0^1 e^x - x dx = e^x - \frac{x^2}{2}|_0^1 = e - \frac{1}{2} - 1 = e - \frac{3}{2} = 1,21... \tag{5.2}$$

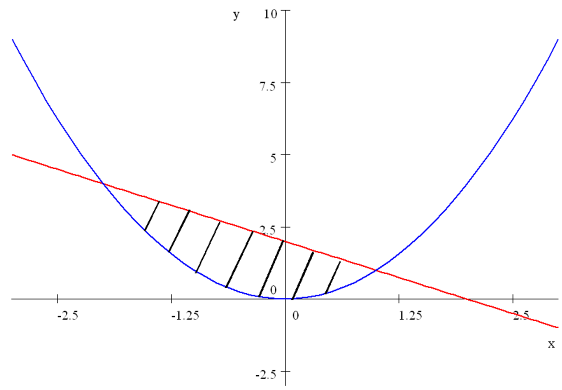
Wählt man die Funktionen "falsch herum", so kommt ein negatives Ergebnis heraus. Es ist also zunächst zu bestimmen welche Funktion "oberhalb" und welche "unterhalb" verläuft. Existieren Schnittpunkte, so ist das Intervall an diesen Grenzen aufzuteilen.

Bsp.:



$$F = \int\limits_a^{x_1} g(x) - f(x) dx + \int\limits_{x_1}^{b} f(x) - g(x) dx \tag{5.3}$$

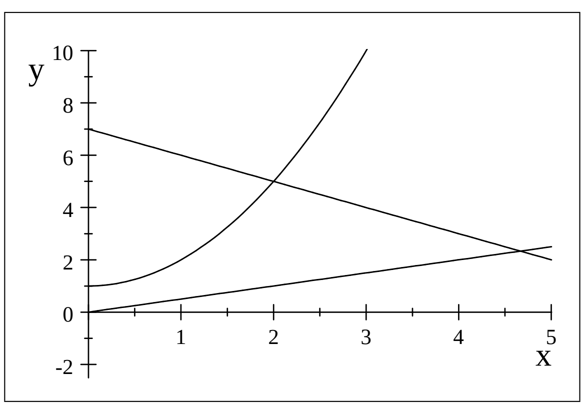
Kontrolle: Fläche zwischen $f(x) = x^2$ und $g(x) = 2 - x$ im Intervall [-3,3]



5.4 Integration zur Berechnung von Flächen zwischen mehreren Funktionen

Integrale geben wie bereits gesehen die Flächenmasszahl zwischen der Funktion und der Achse an. Ist die zwischen Funktionen eingeschlossene Fläche gesucht, so muss zwischen den einzelnen Schnittpunkten integriert werden und die obere Funktion jeweils ermittelt werden.

Bsp.: Welche Fläche wird von $f(x) = x^2 + 1, g(x) = 7 - x$ und $h(x) = \frac{1}{2}x$ für positive x eingeschlossen?



Zunächst sind die Schnittpunkte zu berechnen und wir erhalten $x_1 = 2$ und

$x_2 = \frac{14}{3}$ und die Fläche ergibt sich zu

$$\begin{aligned} F &= \int_0^2 x^2 - \frac{1}{2}xdx + \int_2^{\frac{14}{3}} 7 - x - \frac{1}{2}xdx \\ &= \frac{2^3}{3} - \frac{1}{4}2^2 + 7x - \frac{3}{4}x^2|_{x=2}^{\frac{14}{3}} \\ &= \frac{8}{3} - 1 + \frac{98}{3} - \frac{98}{6} - 11 = 7 \end{aligned}$$

5.5 Die Mittelwertsätze der Integralrechnung

Satz 194 *(Mittelwertsatz der Integralrechnung): Sei $f \in C[a,b]$, dann existiert ein $x^* \in (a,b)$ für das gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = f(x^*) \cdot (b-a)$$

Bew.: Wegen des Mittwertsatzes der Differentialrechnung existiert ein $x^* \in [a,b]$ mit

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(x^*)$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= F(b) - F(a) \\ &= \frac{F(b)-F(a)}{b-a}(b-a) \\ &= F'(x^*) \cdot (b-a) \\ &= f(x^*) \cdot (b-a) \end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 195 *(Allgemeiner Mittelwertsatz der Integralrechnung) Sei $f, g \in C[a,b]$, und $g(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$ so existiert ein $x^* \in (a,b)$ für das gilt:*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x^*) \cdot \int_a^b g(x)dx$$

Bew.: Da $f(x)$ stetig, existiert

$$\begin{aligned} k &= \min_{x \in [a,b]} f(x) \\ K &= \max_{x \in [a,b]} f(x) \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &\geq \int_a^b k\cdot g(x)dx = k\cdot\int_a^b g(x)dx\\ \int_a^b f(x)g(x)dx &\leq \int_a^b K\cdot g(x)dx = K\cdot\int_a^b g(x)dx\end{aligned}$$

also

$$k\cdot\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq K\cdot\int_a^b g(x)dx$$

Damit gibt es auch ein $c\in[k,K]=[\min f(x),\max f(x)]$ mit

$$c\cdot\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Da $f(x)$ stetig ist, existiert ein $x^*\in(a,b)$ mit $f(x^*)=c$ und damit

$$f(x^*)\cdot\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

q.e.d

5.6 (*) Das Restglied der Taylorreihe

Wir geben zwei Darstellungen zur Restgliedabschätzung an: Zunächst die Integrale Variante:

Satz 196 *Sei $f\in C^{n+1}[x_0,x]$. Es ist*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\cdot f^{(n+1)}(t)dt$$

Bew.: Per Induktion. Für $n=0$ ist

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{f(x_0)}{0!}+\int_{x_0}^{x} f^{'}(t)dt\\ &= f(x_0)+f(x)-f(x_0)=f(x)\end{aligned}$$

Gelte nun für n

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\cdot f^{(n+1)}(t)dt$$

Es ist:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t)dt \\
= & \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t)dt
\end{aligned}$$

Mit partieller Integration erhalten wir für den letzten Summanden

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t)dt \\
= & \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(-(x-x_0)^{n+1} \cdot f^{(n+1)}(x_0) - \int_{x_0}^{x} -(n+1) \cdot (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)dt \right) \\
= & -\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1} + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)dt
\end{aligned}$$

Eingesetzt ergibt dies

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1} \\
& + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t)dt \\
= & \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1} \\
& - \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1} + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)dt \\
= & \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)dt = f(x)
\end{aligned}$$

q.e.d.

Bsp: Wir berechnen den Funktionswert von $\sin(2)$ durch Entwicklung um den Punkt $x_0 = 0$. Wieviele Terme sind nötig, um den Wert mit einer Genauigkeit von 10^{-2} zu berechnen?

Es ist bei der Berechnung der ersten n Summanden

$$\begin{aligned}
\sin(x) \quad = \quad & x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
& + \underbrace{\frac{1}{(2n+1)!} \int_0^x (x-t)^{2n+1} \cdot \sin^{(2n+2)}(t)dt}_{R_{2n+2}(x)}
\end{aligned}$$

Da gilt

$$\left|\sin^{(2n+1)}(t)\right| \leq 1$$

ist

$$|R_{2n+2}(x)| = \left|\frac{1}{(2n+1)!}\int_0^x (x-t)^{2n+1}\cdot\sin^{(2n+2)}(t)dt\right| \leq \left|\frac{1}{(2n+1)!}\int_0^x (x-t)^{2n+1}dt\right|$$

Es ist weiterhin

$$\begin{aligned}\int_0^x (x-t)^{2n+1}dt &= \left[-\frac{(x-t)^{2n+2}}{2n+2}\right]_{t=0}^{t=x} \\ &= \frac{x^{2n+2}}{2n+2}\end{aligned}$$

Fordern wir nun

$$|R_{2n+2}(2)| \leq 10^{-2}$$

so liefert dies

$$\frac{1}{(2n+1)!}\frac{2^{2n+2}}{2n+2} = \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!} \leq \frac{1}{100}$$

$n = 3$. Daher kann $\sin(2)$ berechnet werden durch

$$\begin{aligned}\sin(2) &= 2 - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} - \frac{2^7}{7!} + R_8 \\ &= 0,908\end{aligned}$$

Der exakte Wert ist 0,9093...

Das Restglied kann auch ohne Integration abgeschätzt werden:

Zur Hilfe benötigt man den obigen Satz 195: Sei $f, g \in C[a,b]$, und $g(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$ so existiert ein $x^* \in (a,b)$ für das gilt:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x^*)\cdot\int_a^b g(x)dx$$

Satz 197 *(Lagrange): Es gilt für ein* $\overline{x} \in (x_0, x)$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\overline{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Bew.: Es ist

$$\begin{aligned}R_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\overline{x})}{n!}\int_{x_0}^x (x-t)^n dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\overline{x})}{n!}\cdot\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_{t=x_0}^{x} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\overline{x})}{n!}\cdot\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\overline{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\end{aligned}$$

Das Beispiel sin(2) zu berechnen, führt hier auf

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

und damit für $n = 7$

$$|R_8(x)| \leq \frac{2^8}{8!} \leq 0,01$$

Damit sind die ersten sieben Summanden (jeder zweite wird jedoch Null) zu berechnen und wir erhalten das gleiche Ergebnis wie im vorigen Abschnitt.

5.7 Längenberechnung

Bei der Einführung des Integrals haben wir den Grenzübergang $x_0 = a, x_n = b$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \triangle x = \int_a^b f(x)dx$$

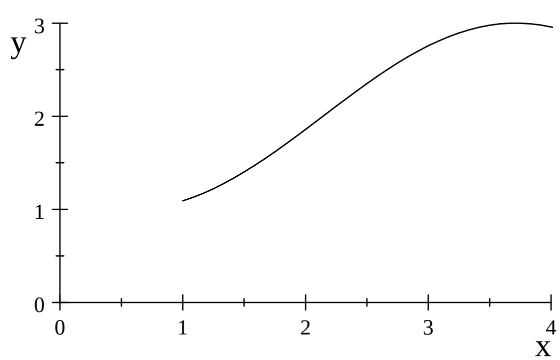
bzw.

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x^*) \cdot (x_{i+1} - x_i) \\ \text{mit } x^* \quad &\in \quad (x_i, x_{i+1}) \end{aligned}$$

betrachtet. Diese Überlegung kann aber nicht nur für Flächenberechnungen, sondern auch auf viele andere Probleme angewandt werden.

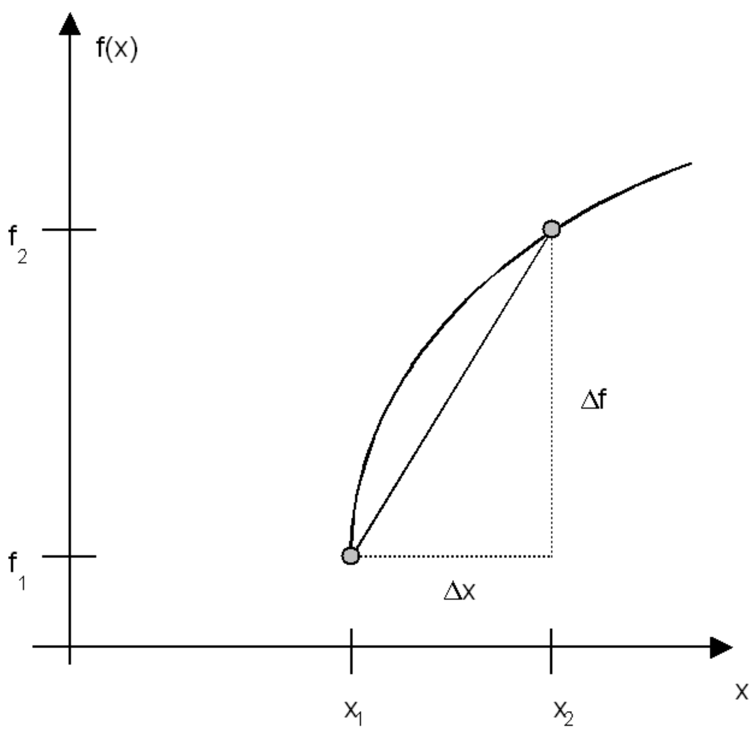
Gesucht ist z.B. die Länge der Kurve $f(x)$ auf dem Achsenabschnitt $[a, b]$. Kurz: $L_a^b(f)$

Skizze:



Idee: Bilde Zwischenpunkte und verbinde diese durch Geraden. Die Geradenlängen der Teilstücken werden schliesslich zur Gesamtlänge addiert.

Wie sieht eine solche Teilstücklänge aus?



Damit gilt für

$$\begin{aligned} \triangle f &= f(x_{i+1}) - f(x_i) \\ \triangle x &= x_{i+1} - x_i \end{aligned}$$

zunächst wegen des Mittelwertsatzes

$$\frac{\triangle f}{\triangle x} = f'(x^*)$$

$$\begin{aligned}
L_{x_i}^{x_{i+1}}(f) &= \sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle f)^2} && (5.4)\\
&= \sqrt{1 + (\frac{\triangle f}{\triangle x})^2} \cdot \triangle x \\
&= \sqrt{1 + (f'(x^*))^2} \cdot (x_{i+1} - x_i) && (5.5)
\end{aligned}$$

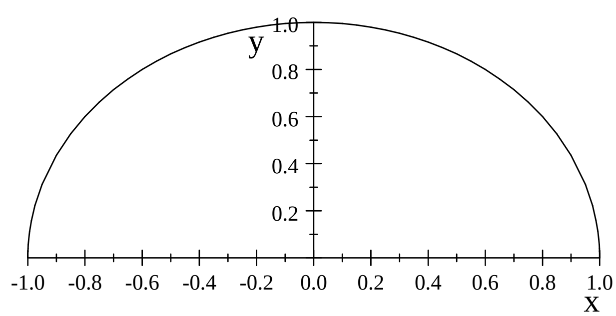
Berechnen wir nun die Gesamtlänge und beachten dass $x_0 = a, x_{n+1} = b$

$$\begin{aligned}
L_a^b(f) &\approx \sum_{i=0}^{n-1} L_{x_i}^{x_{i+1}}(f) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sqrt{1 + (f'(x^*))^2} \cdot (x_{i+1} - x_i)
\end{aligned}$$

Nun lassen wir die Anzahl Zwischenpunkte anwachsen bzw. bilden den Grenzwert $\triangle x \to 0$ und erhalten

$$\boxed{L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx} \qquad (5.6)$$

Beispiel: Bogenlänge des Halbkreises



$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{d}{dx}\sqrt{r^2 - x^2} = -\frac{x}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
1 + \left(f'(x)\right)^2 &= 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} \\
&= \frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}
\end{aligned}$$

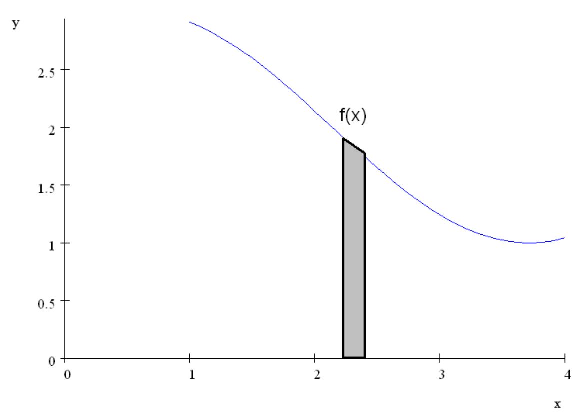
$\Longrightarrow$ Substitution $x = r \sin u, dx = r \cos u du, u = \arcsin(\frac{x}{r})$

$$\begin{aligned} L_a^b(f) &= \int\limits_{x=-r}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \\ &= \int\limits_{u=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r}{\sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 u}} r \cos u \; du \\ &= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r \; du = [ru]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} = \pi r \end{aligned}$$

Der Vollkreis hat somit einen Umfang von $4 \cdot \dfrac{\pi}{2} = 2\pi$

5.8 Mantelflächenberechnung

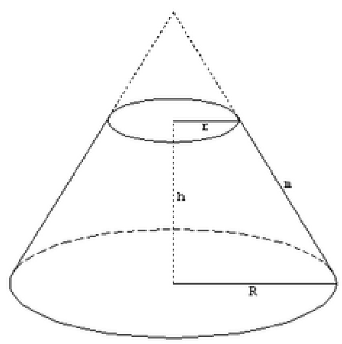
Wir betrachten wiederum eine Funktion



und lassen diese um die x-Achse rotieren. Wir interessieren uns nun für die Frage, welche Oberfläche und welches Volumen entsteht bei der Rotation?

Hierzu sind einige Vorüberlegungen von Nöten: Der entstehende Körper ist ein Kegelstumpf. Dieser hat die Höhe $\triangle x$, einen Grundflächenradius $f(x_i)$ und einen Deckflächenradius $f(x_{i+1})$.

Zu diesem benötigen wir zunächst Mantelfläche und später das Volumen. Bei entsprechender Gedächtnislücke lassen sich die Formeln beispielsweise in Wikipedia oder einer Standardformelsammlung wiederfinden:



$$M = (R + r) \cdot \pi \cdot m$$

mit

$$m = \sqrt{(R - r)^2 + h^2}$$

Dieser hat die Mantelfläche

$$\begin{aligned} M_{x_i}^{x_{i+1}}(f) &= (f(x_{i+1}) + f(x_i)) \cdot \pi \cdot \sqrt{\left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right)^2 + (\triangle x)^2} \\ &= (f(x_{i+1}) + f(x_i)) \cdot \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\triangle x}\right)^2 + 1} \cdot \triangle x \end{aligned}$$

also

$$M_{x_i}^{x_{i+1}}(f) = (f(x_{i+1}) + f(x_i)) \cdot \pi \cdot \sqrt{1 + (\frac{\triangle f}{\triangle x})^2} \cdot \triangle x$$

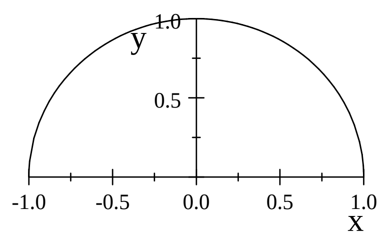
Insgesamt erhalten wir als Gesamtmantelfläche weiderum mit Hilfe des Mittelwertsatzes

$$M_a^b(f) \approx \sum_{i=0}^{n} (f(x_i) + f(x_{i+1})) \cdot \pi \cdot \sqrt{1 + (f'(x^*))^2} \cdot \triangle x$$

Bilden wir den Grenzübergang - für den wir dann $f(x_i) = f(x_{i+1}) = f(x)$ ersetzen können:

$$\boxed{M_a^b(f) = \int_a^b 2\pi f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx} \tag{5.7}$$

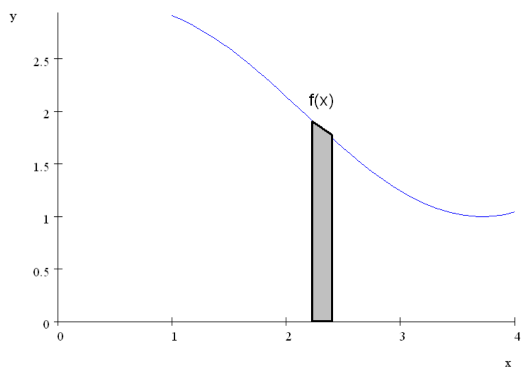
Beispiel: Mantel einer Kugel mit Radius r



$$\begin{aligned} M_{-1}^1(f) &= \int_{-r}^{r} 2\pi\sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \\ &= [2\pi r x]_{-r}^{r} = 4\pi r^2 \end{aligned}$$

5.9 Rotationsvolumen

Läßt man eine Funktion um die x-Achse rotieren und möchte nun das Volumen berechnen, so geschieht dies in dem man zunächst das Intervall in Streifen zerlegt und die Streifen werden rotiert.



Der Kegelstumpf hat nun das Volumen $V = \frac{h \cdot \pi}{3} \cdot (R^2 + Rr + r^2)$

also

$$V_{x_i}^{x_{i+1}}(f) = \frac{\pi}{3} \cdot (f(x_i)^2 + f(x_i) \cdot f(x_{i+1}) + f(x_{i+1})^2) \cdot \triangle x$$

und das Gesamtvolumen ist

$$V_a^b(f) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{\pi}{3} \cdot (f(x_i)^2 + f(x_i) \cdot f(x_{i+1}) + f(x_{i+1})^2) \cdot \triangle x$$

und beim Grenzübergang $\triangle x \to 0$

$$\boxed{V_a^b(f) = \int_a^b \tfrac{\pi}{3} \left(3 \cdot f(x)^2\right) dx = \int_a^b \pi \cdot f(x)^2 dx} \tag{5.8}$$

Beispiel: Wir rotieren den Halbkreis $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ um die x-Achse im Bereich [-r,r] und erhalten das Volumen einer Kugel mit Radius r:

$$\begin{aligned} V_{-r}^{r}(\sqrt{r^2 - x^2}) &= \int_{-r}^{r} \pi \cdot (r^2 - x^2) dx \\ &= \pi \cdot \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) |_{-r}^{r} = \pi \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot r^3 \\ &= \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

5.10 (*) Numerische Berechnung von Integralen

Nicht nur die Berechnung der Integrale des vorigen Kapitels bereiten schnell Schwierigkeiten. Berechnen wir z.B. die Länge der Funktion $f(x) = x^2$, so erhalten wir das Problem

$$L_a^b(x^2) = \int_a^b \sqrt{1+4x^2}dx$$

und für die Mantelfläche

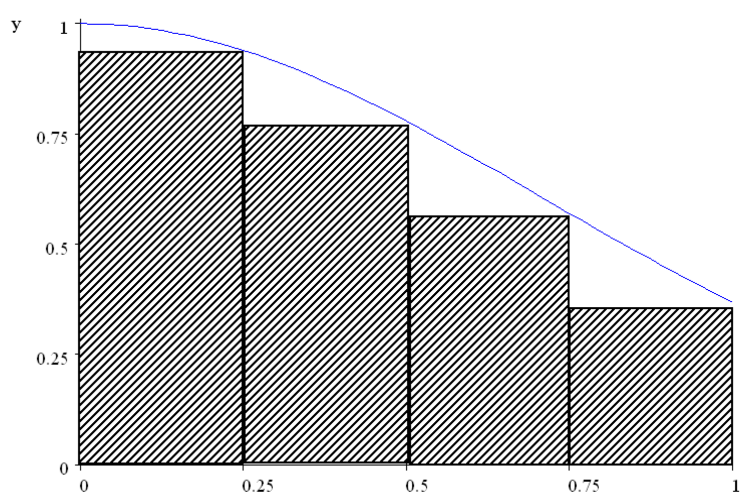
$$M_a^b(x^2) = \int_a^b 2\pi x^2\sqrt{1+4x^2}dx$$

welche nun bereits nicht mehr mit den bekannten Verfahren integriert werden können.

Es ist zu beachten, dass - während man die Ableitung von Funktionen praktisch immer analytisch bestimmen kann - dies für die Integration nicht gilt. Beispielsweise existiert keine Stammfunktion zu $f(x) = e^{-x^2}$.

Deshalb spielen bei der Integration Näherungsverfahren eine besondere Rolle. Wie kann man nun ein Integral näherungsweise berechnen?

Auch bei den Oberflächen, Längen und Rotationsvolumina können wir nun das Integral wieder interpretieren als eine Fläche unter der Funktion, die durch den Integranden gegeben ist (hier nicht die Fläche der ursprünglichen Funktion verwenden!) und wir stellen uns allgemein die Frage nach einer Näherungslösung für ein Integral. Betrachten wir zunächst unsere Herleitung des Integrals:



Wir haben hier Rechtecke unter die Funktion gelegt und erhielten als Grenzwert für die Streifenbreite

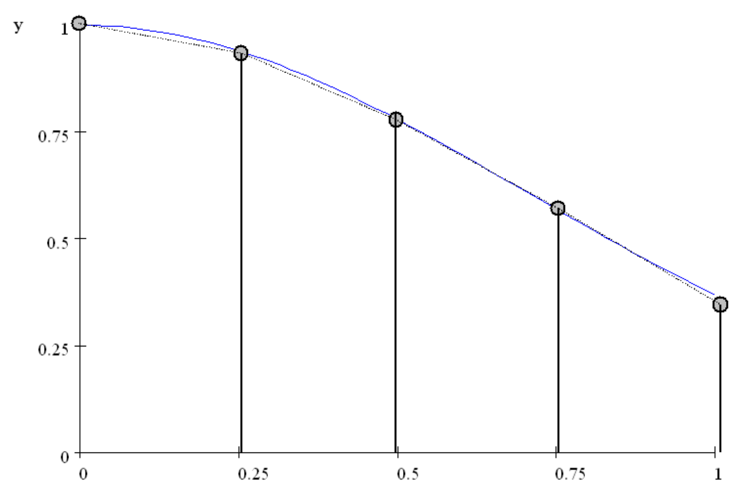
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\triangle x \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot \triangle x \tag{5.9}$$

Diesen Ansatz werden wir leicht verbessern, in dem wir statt Rechtecken Trapeze betrachten

Die Trapezfläche ist

$$T_i = (x_{i+1} - x_i) \cdot \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} \tag{5.10}$$

Praktisch wird statt der exakten Fläche somit der Polygonzug integriert.



Die Strecke [a,b] wird hierzu in n gleiche Intervalle zerlegt. Jedes hat die Länge $h = \dfrac{b-a}{n}$, also $x_{i+1} - x_i = \dfrac{b-a}{n}$.

Wir erhalten als Näherung für

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} h \cdot \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_{i+1}) + f(x_i)\right) \tag{5.11}$$

Betrachten wir die Summe etwas genauer

$$\begin{aligned} & \frac{h}{2} \cdot (f(x_1) + f(x_0) + f(x_2) + f(x_1) + f(x_3) + f(x_2) + \\ & ... + f(x_{n-1}) + f(x_{n-2}) + f(x_n) + f(x_{n-1})) \\ = & \frac{h}{2} \cdot (\underbrace{f(x_0)}_{f(a)} + 2f(x_1) + 2f(x_2) + ... + 2f(x_{n-1}) + \underbrace{f(x_n)}_{f(b)}) \\ = & h \cdot (\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)) \end{aligned}$$

Also

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)} \tag{5.12}$$

Beispiel:

a) $\int\limits_1^2 x^2 dx$ exakt: I$=\frac{7}{3} = 2,333$

Numerisch: n=5, h=0,2

x_i	$f(x_i) = x_i^2$
1	1
1,2	1,44
1,4	1,96
1,6	2,56
1,8	3,24
2	4

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^2 dx & \approx 0,2 \cdot \left(\frac{1+4}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) \\ & = 0,2 \cdot (2,5 + (1,44 + 1,96 + 2,56 + 3,24)) \\ & = 0,2 \cdot (2,5 + 9,2) \\ & = 2,34 \end{aligned}$$

b) $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$

Numerisch: n=5, h=0,2

x_i	$f(x_i) = e^{x_i^2}$
0	1
0,2	0,96
0,4	0,85
0,6	0,70
0,8	0,53
1	0,37

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x^2}dx &\approx 0,2\cdot\left(\frac{1,37}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)\\ &= 0,2\cdot 3,725\\ &= 0,745\end{aligned}$$

5.11 Differentiation von Integralen mit variablen Grenzen

Gegeben sei nun das Integral

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$$

wobei wir nun die Funktionen in den Grenzen $g(x)$ und $h(x)$ als stetige Funktionen und den Integrand ebenfalls als stetig vorraussetzen. In diesem Fall können wir über den Umweg über die unbekannte Stammfunktion zeigen:

$$\begin{aligned}\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt\right)' &= (F(h(x)) - F(g(x)))' = F'(h(x))\cdot h'(x) - F'(g(x))\cdot g'(x)\\ &= f(h(x))\cdot h'(x) - f(g(x))\cdot g'(x)\end{aligned}$$

Bsp.:

$$\left(\int_{\sqrt{x}}^{x}\cos(t)dt\right)' = \cos(x)\cdot 1 - \cos(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Insbesondere kann dies verwendet werden, um Quotienten aus Integralen gemäß L'Hospital zu berechnen, z.B.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^{x^2}\cos(t)dt}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\cos(x^2)\cdot 2x - \cos(1)\cdot 0}{2x} = \cos(1)$$

5.12 Parameterintegrale

Wir verallgemeinern nun den Sachverhalt variabler Grenzen

Definition 198 *Sei $f(x,t)$ eine von zwei reellen Parametern abhängige Funktion. Die Funktionen $g_1(x)$ und $g_2(x)$ seien stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b) sowie $f(x,t)$ integrierbar bzgl. t. Dann heißt*

$$F(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,t)dt$$

das Parameterintegral.

Es gilt:

Satz 199 *(Leibniz-Regel): Das Parameterintegral $F(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,t)dt$ ist differenzierbar und es ist*

$$F'(x) = \frac{dF}{dx} = f(x, g_2(x))g_2'(x) - f(x, g_1(x))g_1'(x) + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{df(x,t)}{dx} dt$$

Bem.: Insbesondere gilt:
1. Für konstante Grenzen $F(x) = \int_a^b f(x,t)dt$

$$F'(x) = \int_a^b \frac{df(x,t)}{dx} dt$$

also die Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation.
Bsp.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^b x^2 t dt \\ F'(x) &= \int_a^b 2xt\ dt \\ &= x(b^2 - a^2) \end{aligned}$$

Analog zum Ausrechnen

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^b x^2 t\ dt = x^2\frac{b^2}{2} - x^2\frac{a^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}x^2 \cdot (b^2 - a^2) \end{aligned}$$

mit

$$F'(x) = x(b^2 - a^2)$$

2. Für nicht von x abhängige Integranden $F(x)=\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)dt$ ist

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(g_2(x))g_2'(x) - f(g_1(x))g_1'(x) + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{df(t)}{dx}dt \\ &= f(g_2(x))g_2'(x) - f(g_1(x))g_1'(x) \end{aligned}$$

Bew. der Leibniz-Regel:

Es ist für x und $x+h \in [a,b]$

$$\begin{aligned} F(x+h)-F(x) &= \int_{g_1(x+h)}^{g_2(x+h)} f(x+h,t)dt - \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,t)dt \\ &= \int_{g_1(x+h)}^{g_1(x)} f(x+h,t)dt + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x+h,t)dt + \int_{g_2(x)}^{g_2(x+h)} f(x+h,t)dt \\ &\quad - \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,t)dt \\ &= \int_{g_2(x)}^{g_2(x+h)} f(x+h,t)dt - \int_{g_1(x)}^{g_1(x+h)} f(x+h,t)dt \\ &\quad + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x+h,t) - f(x,t)dt \end{aligned}$$

Nun ist wegen des Mittelwertsatzes der Integralrechnung bzw der Differentialrechnung für $t_1^* \in (g_2(x), g_2(x+h))\,, t_2^* \in (g_1(x), g_1(x+h))\,, x^* \in (x, x+h)$:

$$\begin{aligned} \int_{g_2(x)}^{g_2(x+h)} f(x+h,t)dt &= f(x+h,t_1^*) \cdot (g_2(x+h) - g_2(x)) \\ \int_{g_1(x)}^{g_1(x+h)} f(x+h,t)dt &= f(x+h,t_2^*) \cdot (g_1(x+h) - g_1(x)) \\ f(x+h,t) - f(x,t) &= h \cdot \frac{df(x^*,t)}{dx} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} & F(x+h) - F(x) \\ = \; & f(x+h,t_1^*) \cdot (g_2(x+h) - g_2(x)) - f(x+h,t_2^*) \cdot (g_1(x+h) - g_1(x)) \\ & + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} h \cdot \frac{df(x^*,t)}{dx}dt \end{aligned}$$

womit gilt:

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= f(x+h,t_1^*)\cdot\frac{(g_2(x+h)-g_2(x))}{h} - f(x+h,t_2^*)\cdot\frac{(g_1(x+h)-g_1(x))}{h}\\ &\quad + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{df(x^*,t)}{dx}dt\end{aligned}$$

für $h \to 0$ ist dies

$$\begin{aligned}F'(x) &= f(x,g_2(x))\cdot g_2'(x) - f(x,g_1(x))\cdot g_1'(x)\\ &\quad + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{df(x,t)}{dx}dt\end{aligned}$$

Bsp.:
1.

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{xt}}{t}dt$$

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dx} &= \int_0^1 \frac{d}{dx}\frac{e^{xt}}{t}dt\\ &= \int_0^1 e^{xt}dt = \frac{e^{xt}}{x}|_{t=0}^1\\ &= \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}\end{aligned}$$

2.

$$F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \frac{e^{xt}}{t}dt$$

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dx} &= \frac{e^{x\cdot x^2}}{x^2}\cdot 2x - \frac{e^{x\cdot\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + \int_{\sqrt{x}}^{x^2}\frac{d}{dx}\frac{e^{xt}}{t}dt\\ &= 2\frac{e^{x^3}}{x} - \frac{e^{x\cdot\sqrt{x}}}{2x} + \int_{\sqrt{x}}^{x^2} e^{xt}dt\\ &= 2\frac{e^{x^3}}{x} - \frac{e^{x\cdot\sqrt{x}}}{2x} + \frac{e^{xt}}{x}|_{t=\sqrt{x}}^{x^2}\\ &= 2\frac{e^{x^3}}{x} - \frac{e^{x\cdot\sqrt{x}}}{2x} + \frac{e^{x\cdot x^2}}{x} - \frac{e^{x\cdot\sqrt{x}}}{x}\\ &= 3\frac{e^{x^3}}{x} - \frac{3}{2}\frac{e^{x\cdot\sqrt{x}}}{x}\end{aligned}$$

5.13 Uneigentliche Integrale

Zur Wiederholung: Sei $f(x)$ beschränkt auf $[a, b]$ mit $-\infty < a \leq b < \infty$, so heißt die eindeutig bestimmte Zahl

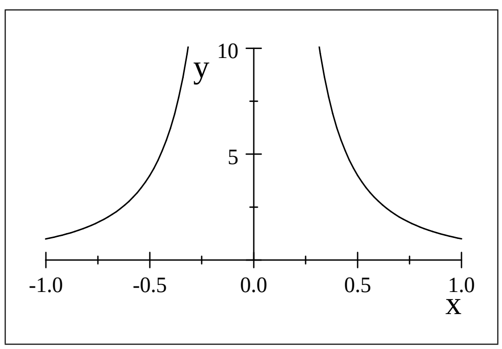
$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i$$

das bestimmte Integral von f über $[a, b]$. Dieses Integral ist eine Flächenmasszahl - zu beachten ist, dass sich positive und negative Flächen dabei auslöschen können. Ohne diese Grenzen suchen wir eine Funktion deren Ableitung $f(x)$ ist - eine Stammfunktion - und sprechen vom unbestimmten Integral.

Bestimmte und unbestimmte Integrale heissen **eigentliche Integrale**, da wir den Grenzübergang von Ober- und Untersummen bilden können. Wichtig ist also die Beschränktheit des Intervalls und der Funktion.

Die Theorie scheitert jedoch wenn eine oder beide dieser Voraussetzungen nicht erfüllt sind.

Bsp.: Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ auf dem Intervall $[-1, 1]$



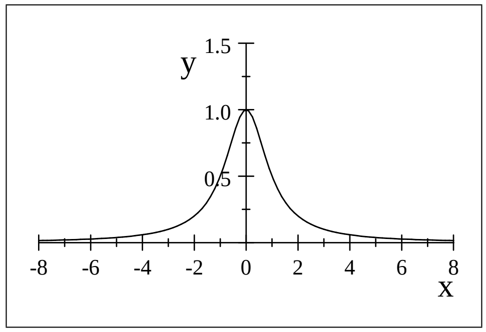
Für die offensichtlich nicht negative Fläche erhalten wir bei der Anwendung des bisher gelernten

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1 - (-(-1)) = -2$$

und somit ein unsinniges Ergebnis.

Den Fall der unbeschränkten Integrationsintervalle erhalten wir insbesondere bei der Berechnung von Gesamtflächen unter einer Funktion. Dies ist insbesondere auch in der Statistik von grosser Bedeutung.

Bsp.: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$



und es stellen sich die Fragen: Ist die Fläche endlich? Wie groß? Also: Ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx$$

endlich? Dies ist wiederum gleichbedeutend damit, dass beide Summanden endlich sind und das Problem reduziert sich auf die Frage, wie unendlich in einer Integrationsgrenze zu behandeln ist. Einsetzen in die Stammfunktion lässt sich dieser Wert so zumindest nicht.

Schliesslich ergibt sich der Fall, das beide oben beschriebenen Varianten zusammen auftreten. Z.B. um die Frage nach der Gesamtfläche unter der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

zu beantworten, also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

Alle diese Integralle heissen **uneigentliche Integrale** und es ergeben sich die Fälle

	$f(x)$ auf $[a, b]$ beschr.	$f(x)$ auf $[a, b]$ unbeschr.
$[a, b]$ endl.	Eigentl. Integral	B
$[a, b]$ unendl.	A	C

Wir betrachten zunächst die Fälle A: unendliche Integrationsintervalle und anschliessend B: unbeschränkte Integranden. Der Fall C wird schliesslich nur kurz als Kombination der beiden vorigen Fälle erläutert.

5.14 Unendliche Integrationsintervalle

Wurde bisher das Intervall in Teilintervalle aufgeteilt, so benutzen wir hier die Defintion

$$[a, \infty) := \lim_{R \to \infty} [a, R]$$

und damit

Definition 200 *Sei $f(x)$ beschränkt auf $\mathbb{R}$, dann definieren wir*

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)dx$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^b f(x)dx \quad &:= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^b f(x)dx \\ &= \lim_{R\to-\infty}\int_R^b f(x)dx\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx := \lim_{R\to\infty}\int_c^R f(x)dx + \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^c f(x)dx$$

c kann hierbei beliebig gewählt werden.

Definition 201 *Die Integrale heissen **konvergent**, wenn die Grenzwerte existieren (endlich sind), sonst heissen sie **divergent**.*

Im letzten Fall müssen **beide** Grenzwerte existieren.

Bem.: Ist $f(x) \geq 0$, so konvergiert $\int_a^\infty f(x)dx$ genau dann wenn $\int_a^R f(x)dx$ für jedes R nach oben beschränkt ist, also

$$\int_a^\infty f(x)dx < \infty$$

gilt.
Eine etwas schwächere Definition ist

Definition 202 *Der Wert $\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R f(x)dx$ heisst Cauchy-Hauptwert des Integrals.*

Beispiele:
1.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x}dx \quad &:= \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x}dx \\ &= \lim_{R\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^R = \lim_{R\to\infty} -e^{-R}+1 \\ &= 1\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \cos(x)dx \quad &:= \lim_{R\to\infty}\int_0^R \cos(x)dx \\ &= \lim_{R\to\infty}[\sin(x)]_0^R = \lim_{R\to\infty}\sin(R) \\ &\quad \text{ex. nicht}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x}dx \quad : &= \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x}dx \\ &= \lim_{R\to\infty}[\ln(x)]_1^R = \lim_{R\to\infty}\ln(R) \\ &\quad \text{ex. nicht}\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx \quad : &= \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^2}dx \\ &= \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^R = \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{R}+1 \\ &= 1\end{aligned}$$

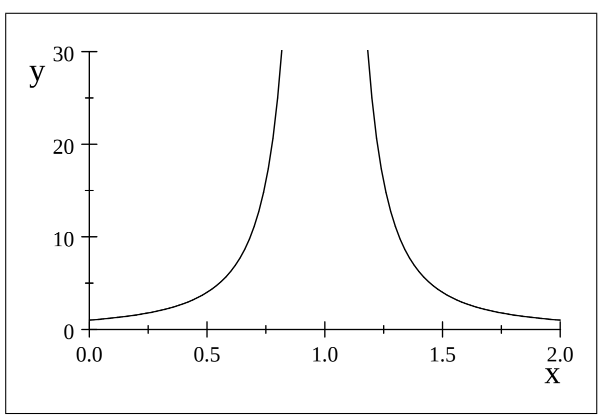
5.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \frac{2x}{1+x^2}dx &= \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{2x}{1+x^2}dx + \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^0 \frac{2x}{1+x^2}dx \\ &= \lim_{R\to\infty}\ln(1+R^2) - \lim_{R\to\infty}\ln(1+(-R)^2 \\ &\quad \text{ex. nicht}\end{aligned}$$

aber

$$\begin{aligned}\int_{-R}^R \frac{2x}{1+x^2}dx &= \ln(1+R^2)-\ln(1+(-R)^2)=0 \\ &\quad \text{und damit} \\ \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{2x}{1+x^2}dx &= 0 \text{ (Cauchy Hauptwert)}\end{aligned}$$

5.15 Unbeschränkte Integranden auf endlichen Integrationsintervallen



Unbeschränktheit bedeutet damit

$$\begin{aligned} \exists y &\in [a,b] \text{ mit} \\ f(y) &> M \quad \forall M \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Wir definieren das Integral, welches einen unbeschränkten Integranden hat, nun wie folgt:

Definition 203 *Sei $f(x)$ in $c \in [a,b]$ unbeschränkt, dann ist*

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + r - \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$$

falls die Grenzwerte existieren.
Der Wert

$$CHW := \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right)$$

heisst ***Cauchy-Hauptwert.***

Bem.: Liegt der Wert c am Rand des Intervalls, also $c \in \{a,b\}$, so braucht nur ein Grenzwert berechnet zu werden, also z.B. für $c = a$

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

Der Cauchy Hauptwert ist also ein schwächeres Kriterium, d.h. es kann ein Hauptwert existieren ohne dass das Integral konvergiert. Umgekehr wird, wenn der Hauptwert nicht existiert, aber das Integral nicht konvergieren können.

Bsp.: 1.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx &= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left[\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 = 1 - \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \sqrt{\varepsilon} = 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x}dx &= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} [\ln(x)]_\varepsilon^1 \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \ln(\varepsilon) \\ & \text{divergent} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^2} dx + \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x^2} dx \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left[-\frac{1}{x}\right]_{\varepsilon}^{1} \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \frac{1}{\varepsilon} - 1 + \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} - 1 + \frac{1}{\varepsilon} \\
& \text{divergent}
\end{aligned}$$

Cauchy-HW

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \frac{1}{\varepsilon} - 1 + -1 + \frac{1}{\varepsilon} &= -2 + \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{2}{\varepsilon} \\
& \text{existiert nicht}
\end{aligned}$$

4.

$$\int_{-2}^{1} \frac{1}{x} dx \text{ divergent, da } \int_{0}^{1} \frac{1}{x} dx \text{ divergent}$$

Cauchy-HW

$$\begin{aligned}
CHW &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left(\int_{-2}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x} dx \right) \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left([\ln|x|]_{-2}^{-\varepsilon} + [\ln|x|]_{\varepsilon}^{1} \right) \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} (\ln(\varepsilon) - \ln(2) - \ln(\varepsilon)) \\
&= -\ln(2)
\end{aligned}$$

5.16 Absolute Konvergenz

Wir erinnern uns zunächst an die absolute Konvergenz von Reihen:

Eine Reihe $\sum a_k$ hiess absolut konvergent, wenn $\sum |a_k|$ konvergiert. Analog definieren wir für Integrale:

Definition 204 *Sei $\int_a^b f(x)dx$ eigentliches oder uneigentliches Integral. Konvergiert*

$$\int_a^b |f(x)|\, dx$$

so heisst $\int_a^b f(x)dx$ ***absolut konvergent.***

Satz 205 *Ist $\int_a^b f(x)dx$ absolut konvergent, so ist $\int_a^b f(x)dx$ konvergent.*

Bew.: Es ist

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

also

$$0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|$$

und damit

$$0 \leq \int_a^b f(x) + |f(x)|\,dx \leq 2\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty$$

also ist

$$\int_a^b f(x) + |f(x)|\,dx < \infty$$

und damit

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x) + |f(x)|\,dx - \int_a^b |f(x)|\,dx < \infty$$

Beide Integrale haben einen nicht-negative Integranden und sind konvergent. q.e.d.

Die Umkehrung gilt jedoch nicht. Hierzu betrachten wir das uneigentliche Integral

$$\int_\pi^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx = \lim_{R\to\infty}\int_\pi^R \frac{\sin(x)}{x}dx$$

1. Das Integral ist konvergent, denn :

$$\begin{aligned} & \lim_{R\to\infty}\int_\pi^R \frac{\sin(x)}{x}dx \\ = & \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{\cos(R)}{R} + \frac{\cos(\pi)}{\pi}\right] - \int_\pi^R \frac{\cos(x)}{x^2}dx \\ = & -\frac{1}{\pi} - \lim_{R\to\infty}\underbrace{\int_\pi^R \frac{\cos(x)}{x^2}dx}_{I} \end{aligned}$$

Wir müssen nun noch zeigen, dass I konvergiert und zeigen dies in dem wir absolute Konvergenz zeigen:

Es ist

$$\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

eine konvergente Majorante und damit auch

$$\int_\pi^R \left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| dx \leq \int_\pi^R \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_\pi^R = -\frac{1}{R} + \frac{1}{\pi} \to \frac{1}{\pi}$$

und damit ist das Integral über $\frac{1}{x^2}$ konvergent, womit auch $\int_\pi^R \left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| dx$ absolut konvergiert und damit auch I.

2. Das Integral $\int_\pi^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$ ist jedoch nicht absolut konvergent, denn:

$$\begin{aligned} \int_\pi^\infty \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| dx &= \sum_{k=1}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| dx \\ &\geq \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(x)|\, dx \\ &= \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(k+1)\pi} \cdot 2 = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k} \\ &\quad \text{divergent} \end{aligned}$$

5.17 Weitere Konvergenzkriterien

5.17.1 Majoranten und Minorantenkriterium für unbeschränkte Integrationsintervalle

Satz 206 *a) Sei* $0 \leq |f(x)| \leq g_1(x)\ \forall x \in [a, \infty)$ *und konvergiert* $\int_a^\infty g(x)dx$, *dann konvergiert* $\int_a^\infty f(x)dx$ *und es gilt*

$$\left|\int_a^\infty f(x)dx\right| \leq \int_a^\infty |f(x)|\, dx \leq \int_a^\infty g(x)dx$$

b) Ist $0 \leq g(x) \leq f(x)\ \forall x \in [a, \infty)$ *und divergiert* $\int_a^\infty g(x)dx$, *so divergiert auch* $\int_a^\infty f(x)dx$

Bew.: zu a) Sei $|f(x)| \leq g(x) \Rightarrow$

$$\int_a^R |f(x)|\, dx \leq \int_a^R g(x)dx$$

$\Rightarrow$

$$\int_a^\infty |f(x)|\, dx \leq \int_a^\infty g(x)dx = M$$

$\Rightarrow$

$$\int_a^\infty |f(x)|\, dx \text{ konvergiert}$$

$\Rightarrow$
$$\int_a^\infty f(x)dx \text{ konvergiert (sogar absolut)}$$
zu b) Es ist zunächst $\int_a^\infty g(x)dx = \int_a^\infty |g(x)|\,dx$
Ann.: $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergiert $\Rightarrow \int_a^\infty g(x)dx = \int_a^\infty |g(x)|\,dx$ konvergiert

q.e.d.
Bsp:
$$\int_0^\infty \frac{x}{x^2+3x+7}dx$$
Es ist für $x \geq 7$
$$\frac{x}{x^2+3x+7} = \frac{1}{x+3+\frac{7}{x}} \geq \frac{1}{x+4}$$
und damit
$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x}{x^2+3x+7}dx &= \int_0^7 \frac{x}{x^2+3x+7}dx + \int_7^\infty \frac{x}{x^2+3x+7}dx \\ &\geq \underbrace{\int_0^7 \frac{x}{x^2+3x+7}dx + \int_7^\infty \frac{1}{x+4}dx}_{\text{divergent}}\end{aligned}$$

5.17.2 Majoranten und Minorantenkriterium für unbeschränkte Integranden

Entsprechend gilt:

Satz 207 *a) Sei $0 \leq |f(x)| \leq g(x)\ \forall x \in [a,b]$. Dann: Konvergiert $\int_a^b g(x)dx$, so gilt*
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b g(x)dx$$
b) Ist $0 \leq g(x) \leq f(x)\ \forall x \in [a,b]$ und divergiert $\int_a^b g(x)dx$, so divergiert auch $\int_a^b f(x)dx$

Bem.: Zum Vergleich werden i.A. die Funktionen $\frac{1}{x^\alpha}$ heran gezogen (unbeschränkt bei $x = 0$)

Dazu
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}dx \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left[\frac{1}{-\alpha+1}x^{-\alpha+1}\right]_\varepsilon^1 \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \varepsilon^{1-\alpha}\right)\end{aligned}$$

Fall 1: $\alpha < 1$:

$$\frac{1}{1-\alpha}\left(1-\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\varepsilon^{1-\alpha}\right) \text{ konvergent}$$

Fall 2: $\alpha > 1$:

$$\frac{1}{1-\alpha}\left(1-\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\varepsilon^{1-\alpha}\right) \text{ divergent}$$

Im Fall $\alpha = 1$ ist das Integral ebenfalls divergent

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x}dx &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\left[\ln|x|\right]_\varepsilon^1 \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\ln|\varepsilon|\right] \text{ divergent}\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{1}{x^\alpha}dx \text{ konvergiert für } \alpha &< 1 \\ \int_0^b \frac{1}{x^\alpha}dx \text{ divergiert für } \alpha &\geq 1\end{aligned}$$

Beachten Sie jedoch: Für Grenzwerte gebrochen ratioanler Funktionen gegen unendlich sind die höchsten Potenzen ausschlaggebend, bei Grenzwerte gegen Null die kleinsten Potenzen.

Beispiel:

$$\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}}dx \text{ konvergiert, da für } x \in [0,1]:$$

$$\frac{x+1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x+1}{x^{1/3}} \leq \frac{2}{x^{1/3}}$$

Also $\alpha = \frac{1}{3}$ und damit Konvergenz.

Beispiel 2:

$$\int_0^1 \frac{x+1}{x^4+x^3}dx$$

verhält sich in der Nähe der Null wie

$$\frac{1}{x^3}$$

und ist damit divergent.

Folgerung:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ divergiert stets bzw.} \\
&\int_0^\infty \frac{1}{(x-x_0)^\alpha} dx \text{ divergiert stets für } x_0 \geq 0
\end{aligned}$$

Für die Divergenz bezüglich unbeschränkter Integrationsintervalle gilt analog für $\alpha \neq 1$

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx &= \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x^\alpha} dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \right]_1^R \\
&= \lim_{R\to\infty} \left[\frac{1}{1-\alpha} R^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right]_1^R
\end{aligned}$$

Dieses konvergiert falls

$$\lim_{R\to\infty} R^{1-\alpha} < \infty$$

welches der Fall ist für

$$\begin{aligned}
1-\alpha &< 0 \\
\alpha &> 1
\end{aligned}$$

Divergenz liegt vor für

$$\alpha < 1$$

und für

$$\alpha = 1$$

Zusammenfassend ergibt sich

	$0 < \alpha < 1$	$\alpha = 1$	$\alpha > 1$
$\int_0^b \frac{1}{x^\alpha} dx$	Konv	Div	Div
$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$	Div	Div	Konv

Bem.: Eine besondere Rolle spielt die

Definition 208 *Gamma-Funktion:*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Es gilt:

Satz 209 $\Gamma(\alpha)$ *konvergiert stets für* $\alpha > 0$ *und es gilt*

$$\begin{aligned} \alpha &\in \mathbb{R} : \Gamma(\alpha+1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha) \\ n &\in \mathbb{N} : \Gamma(n) = (n-1)! \end{aligned}$$

Bem.: Die Gammafunktion ist also eine Verallgemeinerung der Fakultäten auf reelle Zahlen.

Bew.:

Bem.: Es ist zunächst für $\alpha > 0$ mit $\lfloor \alpha \rfloor = n$ und (n+1)-maligem Anwenden der Regeln von L'Hospital

$$\lim_{R\to\infty} \frac{R^\alpha}{e^R} = \lim_{R\to\infty} \frac{\alpha R^{\alpha-1}}{e^R} = ... = \lim_{R\to\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot ... \cdot R^{\alpha-n-1}}{e^R} = 0$$

Es ist für $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha+1) &= \int_0^\infty x^{\alpha+1-1} e^{-x} dx \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_1^R x^\alpha e^{-x} dx + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 x^\alpha e^{-x} dx \\ &= \lim_{R\to\infty} \left[-x^\alpha e^{-x}\right]_1^R + \alpha \lim_{R\to\infty} \int_1^R x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\ &\quad + \lim_{\varepsilon\to 0} \left[-x^\alpha e^{-x}\right]_\varepsilon^1 + \alpha \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\ &= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{R^\alpha}{e^R} + e^{-1}\right) + \alpha \int_1^R x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\ &\quad + \lim_{\varepsilon\to 0} \left(-e^{-1} + e^{-\varepsilon}\varepsilon^\alpha\right) + \alpha \int_\varepsilon^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\ &= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{R^\alpha}{e^R} + e^{-1}\right) + \alpha \int_1^R x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\ &\quad + - e^{-1} + \lim_{\varepsilon\to 0} \alpha \int_\varepsilon^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\ &= \lim_{R\to\infty} \alpha \int_1^R x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \lim_{\varepsilon\to 0} \alpha \int_\varepsilon^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\ &= \alpha \int_1^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \alpha \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\ &= \alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \alpha \cdot \Gamma(\alpha) \end{aligned}$$

und hiermit induktiv für $n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1 \text{ (s.o.)}$$

und

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!$$

q.e.d.
Wir definieren somit sinnvollerweise auch für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha! = \Gamma(\alpha + 1)$$

5.18 Das Integralkriterium zur Konvergenz von Reihen

Satz 210 *Sei f eine auf $[m-1, \infty)$ monoton fallende Funktion mit $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [m, \infty)$, dann ist die Reihe*

$$\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$$

genau dann konvergent, wenn

$$\int_m^\infty f(x) dx$$

existiert. Es gilt bei Konvergenz

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} f(n) \leq \int_m^\infty f(x) dx \leq \sum_{n=m}^{\infty} f(n) \leq \int_{m-1}^\infty f(x) dx$$

Bew.:
Zunächst ergibt sich aus der ersten Hälfte

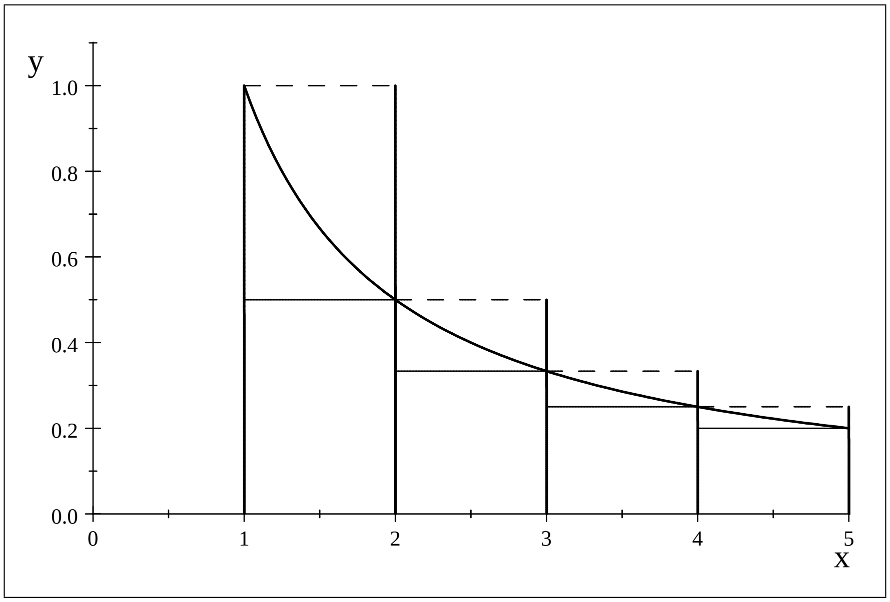
$$\sum_{n=m+1}^{\infty} f(n) \leq \int_m^\infty f(x) dx$$

durch eine Verschiebung des Indizes um 1 direkt

$$\sum_{n=m}^{\infty} f(n) \leq \int_{m-1}^\infty f(x) dx$$

Somit bleibt zu zeigen: $\sum_{n=m+1}^{\infty} f(n) \leq \int_m^\infty f(x) dx \leq \sum_{n=m}^{\infty} f(n)$

Anschaulich



Formal: Es ist zur Zerlegung $x_k = k$ die Untersumme

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{n=m}^{\infty} f(n+1)\cdot 1 = \sum_{n=m+1}^{\infty} f(n) \\ & \quad und \\ O_n &= \sum_{n=m}^{\infty} f(n)\cdot 1 = \sum_{n=m}^{\infty} f(n) \end{aligned}$$

1. Ist die Reihe $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$ divergent, so ist auch $\sum_{n=m+1}^{\infty} f(n)$ divergent. Wegen der Monotonie ist dies aber Gerade die Untersumme und auch das Integral muss somit divergent sein.

2. Ist die Reihe $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$ konvergent, so also die Obersumme und auch das Integral muss konvergieren.

Dies kann nun in beide Richtungen angewandt werden:

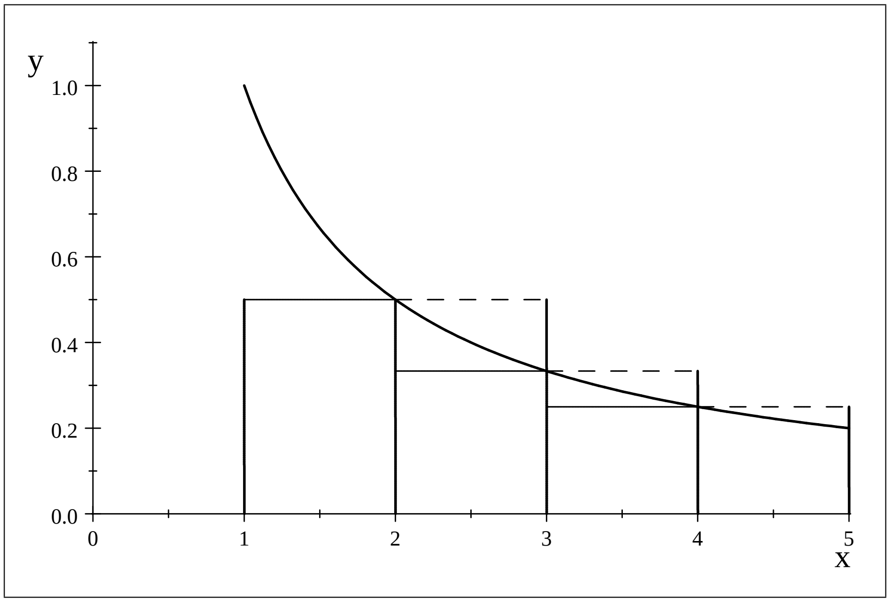
Bsp.:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \text{ ist divergent, da } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergiert}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ ist konvergent, da } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konvergiert}$$

oder eben umgekehrt.

Der Zusammenhang zwischen Folgen und Integralen kann nun auch für endliche Reihen - bei denen die unendliche Reihe divergiert - zur Beschreibung deren Konvergenzverhalten eingesetzt werden.



Wir betrachten in diesem Bild

$$\sum_{n=2}^{4} f(n)$$

und sehen:

$$\sum_{n=2}^{4} f(n) \leq \int_{1}^{4} f(x)dx$$

Andererseits gilt wie man an den gestrichelten Linien sieht:

$$\sum_{n=2}^{4} f(n) \geq \int_{2}^{5} f(x)dx$$

Dies lässt sich nun verallgemeinern:

Satz 211 *Sei f eine auf $[m-1, M+1]$ monoton fallende Funktion mit $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [m-1, M+1]$, dann gilt:*

$$\int_{m}^{M+1} f(x)dx \leq \sum_{n=m}^{M} f(n) \leq \int_{m-1}^{M} f(x)dx$$

Bew.: Es ist zunächst

$$\int_n^{n+1} f(x)dx \le f(n) \le \int_{n-1}^{n} f(x)dx$$

und damit

$$\begin{aligned} \sum_{n=m}^{M} \int_n^{n+1} f(x)dx &\le \sum_{n=m}^{M} f(n) \le \sum_{n=m}^{M} \int_{n-1}^{n} f(x)dx \\ \int_m^{M+1} f(x)dx &\le \sum_{n=m}^{M} f(n) \le \int_{m-1}^{M} f(x)dx \end{aligned}$$

q..e.d.
Bem.: Sofern dies hilft, gilt noch

$$\int_m^{M+1} f(x)dx = \int_{m-1}^{M} f(x+1)dx$$

und auch

$$\int_m^{M} f(x)dx \le \int_m^{M+1} f(x)dx$$

und somit z.B.

$$\boxed{\int_m^M f(x)dx \le \sum_{n=m}^{M} f(n) \le \int_{m-1}^{M} f(x)dx}$$

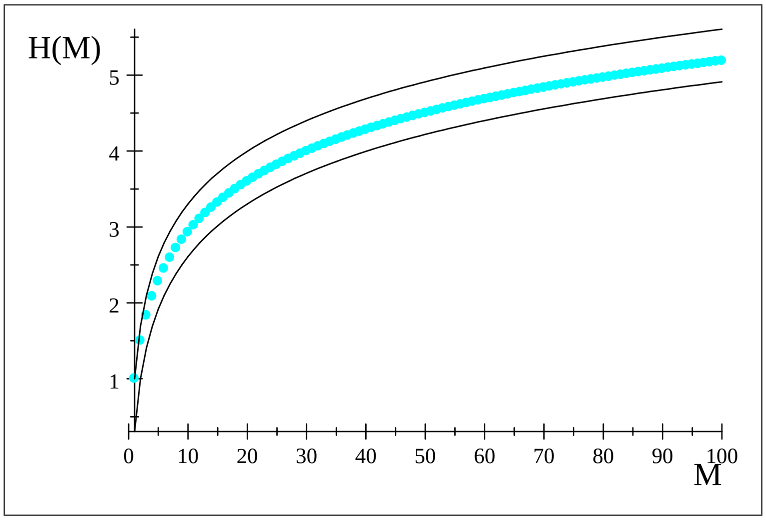
Bsp.: Es gilt somit für $f(k) = \frac{1}{k}, m = 2:$

$$\begin{aligned} \int_2^M \frac{1}{x}dx &\le \sum_{n=2}^{M} \frac{1}{n} \le \int_1^M \frac{1}{x}dx \\ \ln(M) - \ln(2) &\le \sum_{n=2}^{M} \frac{1}{n} \le \ln(M) \end{aligned}$$

und durch Addition einer 1

$$\ln(M) - \ln(2) + 1 \le \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n} \le \ln(M) + 1$$

also verhält sich die harmonische Reihe $H(M) = \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n}$ ungefähr wie $\ln(M) + 1$. Folgende Grafik zeigt die untere und obere Funktion sowie die eingeschlossene Funktion $H(M)$. Der Wert lässt sich somit durch $\ln(M) + 1$ mit einer maximalen Abweichung von $\ln(2)$ nach unten angeben.



Will man nun eine verbesserte Formel, so ist einsichtig, dass die wesentlichen Fehler zwischen Unter-/Obersumme und Funktion gerade bei den ersten Summanden gemacht werden. Dies kann verbessert werden, in dem man die Reihe zu Beginn für $m-1$ Summanden exakt berechnet, also

$$\sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n} + \sum_{n=m}^{M} \frac{1}{n}$$

und dann für den zweiten Summanden obige Ungleichung anwendet:

$$\begin{aligned} \int_m^M \frac{1}{x}dx &\leq \sum_{n=m}^{M} \frac{1}{n} \leq \int_{m-1}^{M} \frac{1}{x}dx \\ \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n} + \int_m^M \frac{1}{x}dx &\leq \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n} \leq \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n} + \int_{m-1}^{M} \frac{1}{x}dx \\ \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n} + \ln(M) - \ln(m) &\leq \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n} \leq \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n} + \ln(M) - \ln(m-1) \end{aligned}$$

welches ein Intervall der Länge

$$\ln(m) - \ln(m-1) = \ln(\frac{m}{m-1}) = \ln(1 + \frac{1}{m-1})$$

liefert. Ist gewünscht, dass der Wert eine Genauigkeit von ε erhält, so muss der Näherungswert in der Mitte des Intervalls weniger als ε vom Rand entfernt ist, also

$$\begin{aligned}
\ln(1+\frac{1}{m-1}) &< 2\varepsilon \\
1+\frac{1}{m-1} &< e^{2\varepsilon} \\
\frac{1}{m-1} &< e^{2\varepsilon}-1 \\
m &> \frac{1}{e^{2\varepsilon}-1}+1
\end{aligned}$$

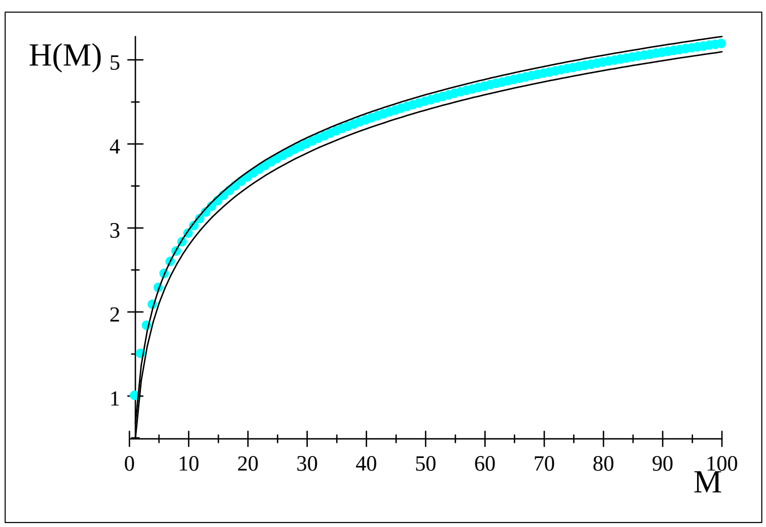
Dies ergibt z.B. für $\varepsilon = 0,1$:

$$m > \frac{1}{e^{0.2}-1}+1 = 5.52$$

und somit kann mit m=6 berechneten Summanden der Wert der harmonischen Reihe gemäß

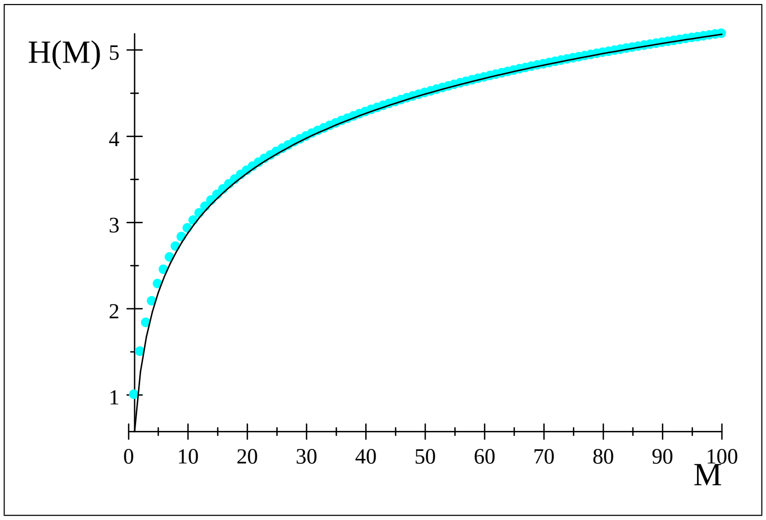
$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{5}\frac{1}{n}+\ln(M)-\ln(6) &\leq \sum_{n=1}^{M}\frac{1}{n} \leq \sum_{n=1}^{5}\frac{1}{n}+\ln(M)-\ln(5) \\
\ln(M)-\ln(6)+2.283\,3 &\leq \sum_{n=1}^{M}\frac{1}{n} \leq \ln(M)-\ln(5)+2.283\,3 \\
\ln(M)+0.4915 &\leq \sum_{n=1}^{M}\frac{1}{n} \leq \ln(M)+0.67386
\end{aligned}$$

berechnet werden, welches die Abweichung vom Mittelwert $\frac{1}{2}(\ln(M)+0.4915+\ln(M)+0.67386) = \ln(M)+0,58268$ zum wahren Wert nun auf unter 0.1 drückt



Wendet man das gleiche Verfahren nun auf die ersten 10.000 Summanden an, so erhält man analog:

$$H(M) \approx \ln(M) + 0.5772$$



Bem

1. Ein wenig erstaunlich ist dabei, dass diese Formel auch für wachsendens M seine Genauigkeit behält, der Fehler also für beliebig grosses M klein bleibt.

2. Wenn Sie also umgekehrt wissen wollen, wann die harmonische Reihe den Wert 100 überschreitet, so können wir lösen:

$$\begin{aligned} \ln(M) &= 100 - 0.5772 = 99.4228 \\ M &= e^{99.4228} \approx 1,5 \cdot 10^{43} \end{aligned}$$

Also nach $1,5 \cdot 10^{43}$ Summanden.

Beispiel:

Betrachten Sie

$$\sum_{k=1}^{M} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Ermitteln Sie zunächst ein Vertrauensintervall für

$$\sum_{k=a}^{M} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Ermitteln Sie hieraus ein a, so dass die Intervalllänge kleiner als 0,02 wird. Und berechnen Sie zu diesem dann eine Näherungsformel für $\sum_{k=1}^{M} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Lösung: Zunächst ist:

$$\begin{aligned}\int_a^M \frac{1}{\sqrt{x}}dx &= 2\sqrt{M} - 2\sqrt{a} \\ \int_{a-1}^M \frac{1}{\sqrt{x}}dx &= 2\sqrt{M} - 2\sqrt{a-1}\end{aligned}$$

also:

$$2\sqrt{M} - 2\sqrt{a} \leq \sum_{k=a}^{M} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{M} - 2\sqrt{a-1}$$

Das Intervall hat nun die Länge

$$2 \cdot \left(\sqrt{a} - \sqrt{a-1}\right) = 2\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}} \leq \frac{2}{\sqrt{a-1}}$$

Nun ist gesucht:

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{a-1}} &< 0,02 \\ a &> 10.001\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{10001} \frac{1}{\sqrt{k}} = 198,55$$

Damit für $M > 10001$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=10002}^{M} \frac{1}{\sqrt{k}} &\approx 2\sqrt{M} - 2\sqrt{10002} \\ &= 2\sqrt{M} - 200,02 \\ \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{\sqrt{k}} &= 2\sqrt{M} - 1,47\end{aligned}$$

Kapitel 6

(*) Beweise

Nicht alle Zusammenhänge wurden oben bewiesen oder gar erwähnt. Wer sich vertieft mit dem Themengebiet der Analysis auseinandersetzen möchte, findet hier einige (schöne) Beweise:

Lemma 212 *Es existieren Zahlen* $p, q \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *mit* $p^q \in \mathbb{Q}$

Bew.: Wir wissen, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ und betrachten

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$$

Es ist unklar, ob dieser Term rational ist oder nicht. Daher unterscheiden wir zwei Fälle:

1.

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$$

dann sind wir fertig mit $p = \sqrt{2}$ und $q = \sqrt{2}$.

2. Im Falle

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$$

nehmen wir $p = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ und $q = \sqrt{2}$ und erhalten in diesem Fall

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2 \in \mathbb{Q}$$

q.e.d.

Analog lässt sich zeigen:

Lemma 213 *Es existieren Zahlen* $p, q \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *mit* $p^q \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

Wir betrachten wieder $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Ist dieser Term aus $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, so sind wir bereits fertig. Ansonsten ist $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}$

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}+1} = \frac{a}{b}\sqrt{2}$$

und dies muss nicht rational sein, da sonst gelten würde

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}\sqrt{2} &= \frac{c}{d}\\ \sqrt{2} &= \frac{bc}{ad} \in \mathbb{Q}\end{aligned}$$

q.e.d.

Lemma 214 *Es gilt:*$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Zunächst kennen wir die Reihenentwicklung des Sinus:

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...\\ &= 1 \cdot x - \frac{1}{6}x^3 + ...\end{aligned}$$

Andererseits wissen wir, das der Sinus Nullstellen bei $k\pi$ hat, Somit existiert alternativ eine unendliche Zerlegung in Linearfaktoren:

$$\begin{aligned}\sin(x) &= a \cdot x \cdot (x - \pi) \cdot (x + \pi) \cdot (x - 2\pi) \cdot (x + 2\pi) \cdot ...\\ &= a \cdot x \cdot (x^2 - \pi^2) \cdot (x^2 - 4\pi^2) \cdot ...\end{aligned}$$

Damit wir den führenden"Koeffzienten zu x^1 der Reihenentwicklung erhalten, normieren wir zu:

$$\sin(x) = x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) \cdot ...$$

Betrachten wir den Koeffizienten in x^3 so ergibt der Vergleich mit der Reihenentwicklung

$$\begin{aligned}-\frac{1}{6} &= -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{2^2\pi^2} - \frac{1}{3^2\pi^2} -\\ \frac{1}{6} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\pi^2}\\ \frac{\pi^2}{6} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\end{aligned}$$

Betrachten wir nur die geraden Quadratzahlen, so ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{24}$$

Bem.: Erklären Sie: Die Summe der ungeraden Quadratzahlen ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Lemma 215 *Die eulersche Zahl e ist nicht rational.*

Bew.: Indirekt: Wäre

$$e = \frac{p}{q}$$

mit $p, q \in \mathbb{N}, q > 1$, so wäre

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \\
\frac{p}{q} - \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} &= \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} > 0 \\
p \cdot (q-1)! - \sum_{n=0}^{q} \frac{q!}{n!} &= \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)\cdot(q+2)} + ... \\
&< \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + ... \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{q+1}\right)^n = \frac{1}{1-(q+1)} = \frac{1}{q}
\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite steht eine Bruchzahl kleiner als Eins, die linke Seite $p \cdot (q-1)! - \sum_{n=0}^{q} \frac{q!}{n!}$ ist wegen $p \cdot (q-1)! - \sum_{n=0}^{q} \frac{q!}{n!} = \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!}$ zum Einen positiv, aber da

$$\begin{aligned}
p \cdot (q-1)! &\in \mathbb{N} \\
\sum_{n=0}^{q} \frac{q!}{n!} &\in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

auch ganzzahlig, also insbesondere grösser gleich 1. Somit ist

$$\begin{aligned}
p \cdot (q-1)! - \sum_{n=0}^{q} \frac{q!}{n!} &< \frac{1}{q} < 1 \\
p \cdot (q-1)! - \sum_{n=0}^{q} \frac{q!}{n!} &\geq 1
\end{aligned}$$

welches ein Widerspruch ist.

Der Zusammenhang zwischen der eulerschen Zahl als Folge und Reihe kann auch mit Hilfe der Integration bewiesen werden:

Lemma 216 *Es gilt:* $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

Bew.: Wir betrachten die Folge

$$a_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 t^n \cdot e^{-t} dt$$

Zunächst sei bemerkt, dass der Integrand zwischen Null und Eins liegt, also auch gilt

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{n!}$$

Für diese Folge gilt:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \int_0^1 e^{-t} dt = 1 - \frac{1}{e} \\
a_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 t^{n+1} \cdot e^{-t} dt \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(\left[-t^{n+1} \cdot e^{-t} \right]_0^1 + (n+1) \cdot \int_0^1 t^n \cdot e^{-t} dt \right) \\
&= -\frac{1}{(n+1)! \cdot e} + \frac{1}{n!}\int_0^1 t^n \cdot e^{-t} dt \\
&= -\frac{1}{(n+1)! \cdot e} + a_n
\end{aligned}$$

also sukzessive eingesetzt:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= -\frac{1}{(n+1)! \cdot e} - \frac{1}{n! \cdot e} - ... + \left(1 - \frac{1}{e}\right) \\
a_{n+1} &= 1 - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

bzw. analog

$$a_n = 1 - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

Wegen $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n!}$ gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und damit

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} &= 0 \\
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} &= 1 \\
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} &= e
\end{aligned}$$

q.e.d.
Die Irrationalität von π ist etwas aufwendiger - dennoch auch hierzu der Beweis:

Lemma 217 *Die Zahl π ist nicht rational.*

Bew.: Indirekt:

Der Beweis ist etwas komplex. Daher zunächst etwas Struktur:

Lemma 218 *Für positive Zahlen $c, d \in \mathbb{R}$ besitzt die Funktion $f(x) = d \cdot x^n \cdot (c-x)^n$ seinen maximalen Wert auf dem Intervall $[0, c]$ an der Stelle $x = \frac{c}{2}$.*

Bew.: $f(x) = d \cdot x^n \cdot (c-x)^n = d \cdot (x \cdot (c-x))^n$ ist differenzierbar mit

$$f'(x) = d \cdot n \cdot (x \cdot (c-x))^{n-1} \cdot (c - 2x)$$

Damit liegen lokale Extrema an den Stellen

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ x &= c \\ x &= \frac{c}{2} \end{aligned}$$

Wegen

$$f(0) = f(c) = 0$$

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \text{ für } [0, \frac{c}{2}] \\ f'(x) &< 0 \text{ für } [\frac{c}{2}, c] \end{aligned}$$

wird der maximale Funktionswert für $x = \frac{c}{2}$ angenommen.
q.e.d.
Wir nehmen an, π sei rational, also

$$\pi = \frac{a}{b}$$

mit $a, b \in \mathbb{N}$.

Dann zeigen wir für den Ausdruck

$$\int_0^\pi \frac{b^n}{n!} \cdot x^n \cdot (\pi - x)^n \cdot \sin(x) dx$$

dass er einerseits eine ganze Zahl sein wird, andererseits positiv und kleiner als $\frac{1}{2}$ ist.

Also: Da wir wissen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

lässt sich eine Zahl n finden, so dass

$$0 < \pi \cdot \frac{\left(\pi \cdot \frac{a}{4}\right)^n}{n!} < \frac{1}{2}$$

welches wir gegen Ende des Beweises benötigen.
Zu diesem n definieren wir die Funktion auf $x \in [0, \pi]$

$$f(x) = \frac{b^n}{n!} \cdot x^n \cdot (\pi - x)^n$$

Für diese Funktion gilt $f(x) = f(\pi - x)$ und damit insbesondere :

$$f(0) = f(\pi)$$

Maximal wird diese Funktion nach obigem Lemma für $x = \frac{\pi}{2}$ mit dem Funktionswert

$$\begin{aligned} f(\frac{\pi}{2}) &= \frac{b^n}{n!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} \\ &= \frac{1}{n!} \left(\pi \cdot \frac{a}{4}\right)^n \end{aligned}$$

und $f(x)$ ist auf dem Intervall $[0, \pi]$ nicht negativ.
In dem wir $f(x) = f(\pi - x)$ ableiten erhalten wir:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -f'(\pi - x) \\ f''(x) &= f''(\pi - x) \\ &\ldots \end{aligned}$$

und damit für alle geraden Ableitungen

$$f^{(2k)}(x) = f^{(2k)}(\pi - x)$$

und speziell für $x = 0$

$$f^{(2k)}(0) = f^{(2k)}(\pi)$$

Da in der Funktion $f(x)$ Potenzen von x^n bis x^{2n} auftauchen, gilt für die Ableitungen

$$\begin{aligned} f^{(k)}(0) &= 0 \text{ für } k = 0, ..., n-1 \\ f^{(k)}(0) &= 0 \text{ für } k > 2n \end{aligned}$$

und wegen

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{b^n}{n!}\cdot x^n\cdot(\pi-x)^n\\
&= \frac{b^n}{n!}\cdot x^n\cdot(\frac{a}{b}-x)^n\\
&= \frac{1}{n!}\cdot x^n\cdot(a-bx)^n\\
&= \frac{1}{n!}\cdot x^n\cdot\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n\\ k\end{pmatrix}\cdot a^{n-k}\cdot(-b)^k\cdot x^k\\
&= \frac{1}{n!}\cdot\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n\\ k\end{pmatrix}\cdot a^{n-k}\cdot(-b)^k\cdot x^{n+k}\\
&= \frac{1}{n!}\cdot\sum_{k=n}^{2n}\begin{pmatrix} n\\ k-n\end{pmatrix}\cdot a^{n-(k-n)}\cdot(-b)^{(k-n)}\cdot x^{n+(k-n)}\\
&= \frac{1}{n!}\cdot\sum_{k=n}^{2n}\begin{pmatrix} n\\ k-n\end{pmatrix}\cdot a^{2n-k}\cdot(-b)^{k-n}\cdot x^k
\end{aligned}$$

Wir betrachten somit ein Polynom der Form

$$f(x) = c_n x^n + ...c_{2n}x^{2n}$$

Man beachte: Differenzieren wir dieses weniger als $n-$mal oder mehr als $2n-$mal, so ist

$$f^{(k)}(0) = 0$$

Betrachten wir nun die Summanden, so ist die $k-te$ Ableitung an der Stelle Null für $n \leq k \leq 2n$ nur für einen Summanden verschieden von Null, nämlich

$$\frac{1}{n!}\cdot\begin{pmatrix} n\\ k-n\end{pmatrix}\cdot a^{2n-k}\cdot(-b)^{k-n}\cdot x^k$$

Somit gilt für die $k-$te Ableitung für $n \leq k \leq 2n$:

$$f^{(k)}(0) = k!\cdot\frac{1}{n!}\cdot\begin{pmatrix} n\\ k-n\end{pmatrix}\cdot a^{2n-k}\cdot(-b)^{k-n}$$

Da $k \geq n$ ist, sind alle diese Ableitungen ganzzahlig.
Nun betrachten wir die Funktion

$$g(x) = f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - ... + (-1)^n\cdot f^{(2n)}(x)$$

für die, da nur gerade Ableitungen auftauchen, nun gilt:

$$\begin{aligned}
g(x) &= g(\pi-x)\\
g(0) &= g(\pi)
\end{aligned}$$

Der Wert $g(0)$ ist weiterhin wegen der Ganzzahligkeit aller Ableitungen ebenfalls ganzzahlig.

Es gilt wegen $f^{(2n+2)}(x) = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(g'(x)\sin(x) - g(x)\cos(x)\right) &= g''(x)\sin(x) + g'(x)\cos(x) - g'(x)\cos(x) + g(x)\sin(x) \\
&= g''(x)\sin(x) + g(x)\sin(x) \\
&= \Big(f''(x) - f^{(4)}(x) - ... + (-1)^{n+1} \cdot f^{(2n+2)}(x)\Big)\sin(x) \\
&\quad + \Big(f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - ... + (-1)^{n} \cdot f^{(2n)}(x)\Big)\sin(x) \\
&= (-1)^{n+1} \cdot f^{(2n+2)}(x) \cdot \sin(x) + f(x) \cdot \sin(x) \\
&= f(x) \cdot \sin(x)
\end{aligned}$$

und damit

$$\int f(x) \cdot \sin(x) dx = g'(x)\sin(x) - g(x)\cos(x) + C$$

Damit ist:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi f(x) \cdot \sin(x) dx &= \left[g'(x)\sin(x) - g(x)\cos(x)\right]_0^\pi \\
&= g(\pi) + g(0)
\end{aligned}$$

Da alle Ableitungen ganze Zahlen sind, ist auch

$$g(\pi) + g(0) = 2 \cdot g(0) \in \mathbb{Z}$$

Weiterhin gilt für die ursprüngliche Funktion (s.o.)

$$f(x) = \frac{b^n}{n!} x^n (\pi - x)^n$$

dass Sie an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ maximal wird mit dem Funktionswert

$$\begin{aligned}
f(\frac{\pi}{2}) &= \frac{b^n}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} \\
&= \frac{1}{n!}\left(\pi \cdot \frac{a}{4}\right)^n
\end{aligned}$$

und $f(x)$ auf dem Intervall $[0, \pi]$ nicht negativ ist.

Damit gilt für das Integral

$$0 < \int_0^\pi f(x) \cdot \sin(x) dx < \pi \cdot \frac{1}{n!}\left(\pi \cdot \frac{a}{4}\right)^n$$

Wegen der oben gemachten Wahl für n mit

$$0 < \pi \cdot \frac{\left(\pi \cdot \frac{a}{4}\right)^n}{n!} < \frac{1}{2}$$

ist

$$0 < \int_0^\pi f(x) \cdot \sin(x) dx < \frac{1}{2}$$

Da das Integral aber auch ganzzahlig sein muss, erhalten wir den Widerspruch, somit ist $\pi \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Lemma 219 *Betrachten wir die harmonische Reihe $\sum \frac{1}{n}$ und verwenden nur Summanden $\frac{1}{n}$,die eine Ziffer nicht enthalten, so wird die Reihe konvergent.*

Bew.: Wir betrachten die Zahlen mit k Stellen und summieren diese auf und benennen diese mit S_k. Damit ist die zu untersuchende Reihe

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} S_k$$

Die Zahlen mit k Stellen sind alle größer als 10^{k-1}. Die Anzahl ist, da die Zahlen nur aus 9 Ziffern gebildet werden können, höchstens 9^k

Für die Reihe ist damit

$$S_k \leq \frac{1}{10^{k-1}} \cdot 9^k = 10 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^k$$

und damit für die gesamte Reihe

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{\infty} S_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} 10 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^k \\ &= 10 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{9}{10}} - 1\right) = 90 \end{aligned}$$

Damit ist die Reihe nach oben beschränkt und monoton wachsend, also konvergent.

Teil II

Übungen Analysis 1

Kapitel 7

Grundlagen

7.1 Mengen, Funktionen, Beweise

A1.1.1: Untersuchen Sie, ob die folgenden Relationen R von der Menge D in die Menge W Funktionen sind. Sind sie surjektiv und/oder injektiv?

a) $D = \{$Bürger in Deutschland$\}$, $W = \mathbb{N}$, $R = \{(x, y)|x \in D, y \in W, x$ hat den Personalausweis mit der Nummer $y\}$

b) $D = \{$Bürger in Deutschland$\}$, $W = \mathbb{N}$, $R = \{(x, y)|x \in D, y \in W, x$ hat die Postleitzahl $y\}$

c) $D = \{$Bundesligavereine$\}$, $W = \{1, ..., 18\}$, $R = \{(x, y)|x \in D, y \in W, x$ hat derzeit den Tabellenplatz (bei Punkt und Torgleichheit erhält der im Alphabet vorne stehende die höhere Position) $y\}$

d) $D = \{$MATSE aktueller Kurs$\}$, $W = \{$ m,w$\}$, $R = \{(x, y)|x \in D, y \in W, x$ hat das Geschlecht $y\}$

e) $D = \mathbb{N}$,$W = \mathbb{N}$, $R = \{(x, y)|x \in D, y \in W,$In der Postleitzahl x wohnt Person mit Personalausweisnummer $y\}$

A1.1.2: Untersuchen Sie folgende Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf ihre Beschränktheit und Symmetrie (gerade/ungerade)

a)

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

b)

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} + 1$$

A1.1.3: Beweisen Sie: Gegeben seien $x_i > 0$ mit $x_1 \cdot ... \cdot x_n = 1$. Dann ist

$$x_1 + ... + x_n \geq n$$

A1.1.4: Zeigen Sie $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &\geq 2\\ \left(1-\frac{1}{n}\right)^n &\geq 0\\ \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &\geq \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\end{aligned}$$

A1.1.5: Sei $|x| < 1$. Dann existiert ein $p > 0$, so dass

$$|x| = \frac{1}{1+p}$$

Zeigen Sie:

$$|x|^n < \frac{1}{np} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{p}$$

Was passiert, wenn Sie n groß wählen mit $|x|^n$?

7.2 Komplexe Analysis

A1.2.1: Finden Sie ein Polynom möglichst kleinen Grades, welches die Nullstellen $x_0 = 1 + i,\ \ x_1 = 1 + 2i$ und $x_2 = 1$ hat wobei
a) die Koeffizienten rell sind
b) die Koeffizienten komplex sind.

A1.2.2: Berechnen Sie alle Lösungen von

$$z^2 = 5 - 12i$$

Geben Sie das Ergebnis in kartesischer Form an und machen Sie mit diesen Zahlen die Probe.

A1.2.3: Berechnen Sie

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{35}$$

A1.2.4: Lösen Sie

$$z^2 - 2(1+i)z + (2-\sqrt{2})i - \sqrt{2} = 0$$

Kapitel 8

Folgen und Reihen

A2.1: Erstellen Sie ein Programm zur Berechnung folgender Werte und testen Sie diese mit $n = 100, 1000$ und 100000.

$$
\begin{aligned}
f1(n) &= (1+\frac{1}{n})^n \\
f2(n) &= (1-\frac{1}{n})^n \\
f3(n) &= (1+\frac{2}{n})^n \\
f4(n) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\
f5(n) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \\
f6(n) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \\
f7(n) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k \\
f8(n) &= \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{2}{3}\right)^k \\
f9(n) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
f10(n) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\frac{1}{k} \\
f11(n) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\frac{1}{\sqrt{k}} \\
f12(n) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}
\end{aligned}
$$

Welche dieser Folgen/Reihen wird wohl konvergieren? Abgabe: Source Code, Ergebnis

A2.2/A2.3

Ziel dieses Projektes wird es sein, eine Formel für

$$S(m) = \sum_{k=1}^{n} k^m$$

zu ermitteln. Wir wissen bereits aus der Vorlesung/letzten Übung:

$$\begin{aligned}
S(0) &= \sum_{k=1}^{n} k^0 = n \\
S(1) &= \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\
S(2) &= \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n
\end{aligned}$$

A2.2: Berechnen Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung

$$S(3) = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

A2.3: Wir betrachten nun $m \geq 1$:Beweisen Sie zunächst die folgenden Gleichungen

a)

$$(n+1)^{m+1} = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{m+1} - k^{m+1}$$

b)

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^{m+1} - k^{m+1} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} \binom{m+1}{i} k^i$$

c)

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} \binom{m+1}{i} k^i = 1 + \sum_{i=0}^{m} \binom{m+1}{i} \sum_{k=1}^{n} k^i$$

d)

$$1 + \sum_{i=0}^{m} \binom{m+1}{i} \sum_{k=1}^{n} k^i = 1 + (m+1)\cdot S(m) + \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m+1}{i} S(i)$$

e)

$$\begin{aligned}
S(0) &= n \\
S(m) &= \frac{1}{m+1} \left((n+1)^{m+1} - \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m+1}{i} S(i) - 1 \right)
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
S(0) &= n \\
S(m) &= \frac{1}{m+1} \left(n^{m+1} + (m+1)n^m + \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m+1}{i} \left(n^i - S(i)\right) - 1 \right)
\end{aligned}$$

A2.4: Schreiben Sie ein Programm mit Funktionen für folgende Polynom-operationen:

a) Berechnung des Binomialkoeffizienten

$$Binom(n,k) = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Arbeiten Sie hier auf Ganzzahligen Operationen und Kürzen Sie wie in der Vorlesung vorgestellt zeitig.

Jedes Polynom wird nur anhand seiner Koeffizienten gespeichert, also für Polynome $p(n) = a_0 + a_1 n + ... + a_m n^m$ vom Grad m

$$(a_0, ..., a_m)$$

b) Schreiben Sie nun eine Funktion, welche Polynome linear kombiniert, also

$$LinKombPol(a, p_1, b, p_2) = c \cdot p_1(n) + d \cdot p_2(n)$$

c) Schreiben Sie eine Funktion zur Berechnung von

$$Pot\_nPlus1(l) = (n+1)^l = \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} n^k$$

Das Ergebnis beider Funktionen $LinKombPol$ und $Pot\_nPlus1(l)$ sind wieder Polynome (die natürlich nur wieder durch Koeffzienten) berechnet werden.

A2.5: Berechnen Sie nun für $m = 1, 2, ..., 10$ die geschlossenen Formeln $S(m) = \frac{1}{m+1}\left((n+1)^{m+1} - \sum_{i=0}^{m-1}\binom{m+1}{i} S(i) - 1\right)$.

a) Schreiben Sie nun zur verbesserten Ausgabe noch eine Funktion $NiceView(p)$, die für ein Polynom $p(n)$ mit den Koeffizienten $(a_0, ..., a_m)$ wieder die kanonische Ausgabe

$$p(n) = a_0 + a_1 n + ... + a_m n^m$$

erzeugt.
b) Implementieren Sie noch die Funktionsauswertung

$$p(x)$$

mit dem Horner-Schema.

A2.6: Testen Sie nun ihr Programm für die Werte von $m = 1, ..., 10$ und $n = 10$.

Schreiben Sie eine Funktion, die die Werte bis $n = 10$ jeweils aufsummiert und mit den geschlossenen Formeln für $n = 10$ vergleicht (Polynomauswertung).

Ausgabe also:

$$\begin{aligned}
S(0) &= n \\
S(1) &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\
S(2) &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\
&\ldots \\
S(10) &= \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n
\end{aligned}$$

Vergleich für n=10:

$$\begin{aligned}
Exakt &: S(0) = 10 \\
Summiert &: 10 \\
\\
Exakt &: S(1) = 55 \\
Summiert &: 55 \\
\\
&\ldots \\
Exakt &: S(10) = 14\,914\,341\,925 \\
Summiert &: 14\,914\,341\,925
\end{aligned}$$

Kapitel 9

Konvergenz von Folgen, Reihen und Funktionen

A3.1: Welches sind min, max, sup, inf, limsup und liminf der Menge

$$A = \{(1 + (-1)^n) \cdot (1 + \frac{1}{n})\}$$

A3.2: Berechnen Sie die ersten 6 Folgenterme und min, max, sup, inf, limsup und liminf der Folge

$$a_n = (1 + (-1)^n) \cdot (1 + \frac{1}{n})$$

9.1 Konvergenz von Folgen

A3.1.1: Berechnen Sie einen Grenzwert a und ein n_0, so dass die Folge

$$\frac{-n^2 + 2n + 10}{4n^2 - 10n + 100}$$

stets innerhalb der $\varepsilon-$Umgebung von a liegt.

Wie groß wird n_0 für $\varepsilon = 0,1$ und $\varepsilon = 0,001$?

A3.1.2: Berechnen Sie

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n-3}$$
$$b)\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{20n}$$
$$c)\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n}$$
$$d)\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

A3.1.3: Zeigen Sie die Konvergenz der Folgen und berechnen Sie ein $n_0(\varepsilon)$ für $\varepsilon = 0,1$

a)

$$a_n = \sqrt{n^2+2} - n$$

b)

$$a_n = \frac{n^3 + \sqrt{n} - \frac{1}{n}}{3n^3 + n^2 - 2\sqrt{n} + 1}$$

A3.1.4: Zeigen Sie die Konvergenz mit dem Monotonieprinzip der Folge $\forall n \in \mathbb{N}_0$ und berechnen Sie den Grenzwert.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{2a_n - 3} + 1 \\ a_0 &= 6 \end{aligned}$$

A3.1.5: Berechnen Sie den Grenzwert von

$$a_n = \sqrt[n]{6^n + 7^n}$$

A3.1.6: Zeigen Sie die Cauchy Konvergenz der Folge

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2}$$

A3.1.7: Zeigen Sie die Konvergenz von

$$a_n = \frac{i \cdot n}{i + n}$$

A3.1.8: Zeigen Sie ohne Induktion und ohne Kenntnis des Grenzwertes die Konvergenz der Folge

$$a_n = \frac{n^2 - n + 2}{n^2}$$

A3.1.9: Wir haben gesehen

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ist monoton wachsend und konvergent mit

$$0 < a_n < e = \lim_{n \to \infty} a_n$$

und

$$b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

ist monoton wachsend und konvergent mit

$$0 < b_n < \frac{1}{e} = \lim_{n \to \infty} b_n$$

Ermitteln Sie hieraus eine Möglichkeit, die Zahl e zu approximieren. Geben Sie eine Tabelle aus, in der Sie a_n für $n = 10, 100, 10000$ berechnen und ein Intervall in dem dann e liegt. Geben Sie auch die Intervallbreite (Genauigkeit) an. Wie lautet somit e gerundet auf 3 Nachkommastellen? Berechnen Sie nun für n=10000 nun den Mittelwert aus a_n und $\frac{1}{b_n}$. Wie genau ist dieser Wert im Vergleich zum exakten Wert $e = 2,71828183...$

A3.1.10: Sie lassen einen Ball aus 1 m Höhe aufspringen. Nach dem Aufspringen erreicht er 80% (=0,8m) seiner ursprünglichen Höhe, fällt und springt wiederum bei 80% der letzten Höhe (also auf 0,64m) auf. Welchen Gesamtweg legt der Ball zurück?

9.2 Unendliche Reihen

A3.2.1: Zeigen Sie: Für zwei positive monoton fallende Folgen a_n und b_n ist auch $c_n = a_n \cdot b_n$ und $d_n = a_n + b_n$ eine positive monoton fallende Folge.

A3.2.2: Zeigen Sie die Konvergenz/Divergenz der Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \ln^2(n)}$$

A3.2.3: Zeigen Sie Konvergenz/Divergenz der Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}\ln^2(n)}$$

Konvergiert die Reihe auch absolut? Wieviele Summanden wären bei Konvergenz nötig, um den Grenzwert auf 0,1 genau zu berechnen? Wie lautet somit die Näherung für den Grenzwert?

A3.2.4: Berechnen Sie den Wert der Reihe
a)

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{4k}{(k^2-1)^2}$$

b)

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{k^2-3k+\frac{5}{4}}$$

A3.2.5: Konvergieren oder divergieren die folgenden Reihen

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3\sqrt{n}+2n}$$

b)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n^3-100n-1}$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}$$

d)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n^2}}$$

e)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(\ln n)^2}$$

f)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$$

g)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

h)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

9.3 Potenzreihen

A3.3.1 Berechnen Sie $\cos(1), \sin(1)$ und $\exp(-1)$ mit Hilfe der Reihendarstellung der Funktionen auf 2 Nachkommastellen genau.

A3.3.2: Überführen Sie

$$f(x) = \frac{3}{2+4x}$$

in eine Potenzreihe um $x_0 = 1$. Wo wird diese Reihe konvergieren? Liegt Konvergenz für $x = 0$ vor? Berechnen Sie in diesem Fall den Funktionswert über die Potenzreihe und über $f(x)$.

A3.3.3: Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}}(x-2)^n$$

A3.3.4:

a) Berechnen Sie aus der Potenzreihe von $exp(x)$ die Potenzreihe

$$\exp(-x)$$

b) Zeigen Sie anhand der Potenzreihen

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ g(x) &= \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Fertigen Sie nun einen Funktionsplot der Funktionen f und g für reelles x an.

c) Wir bezeichnen nun mit

$$\begin{aligned}\cosh(x) &:= \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}\\ \sinh(x) &:= \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}\end{aligned}$$

Zeigen Sie für komplexe Argumente die Beziehungen

$$\begin{aligned}\cosh(ix) &= \cos(x)\\ \sinh(ix) &= i\cdot\sin(x)\\ \cos(ix) &= \cosh(x)\\ \sin(ix) &= i\cdot\sinh(x)\end{aligned}$$

9.4 Grenzwerte von Funktionen

A3.4.1: Zeigen Sie für $x_0 > 0$ die Stetigkeit der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

mit dem Folgenkriterium und dem $\varepsilon - \delta-$Kriterium.

Berechnen Sie für das $\varepsilon - \delta-$Kriterium zu $x_0 = 4$ jeweils für die Werte $\varepsilon = 1$ und $\varepsilon = \frac{1}{8}$ die $\delta-$Werte. Wie gross ist die maximale Abweichung der Funktionswerte zu $f(x_0)$ im δ-Intervall?

Hinweis: Beschränken Sie δ so, dass $x > \frac{x_0}{2}$ bleibt.

A3.4.2: Bestimmen Sie a und b so dass die Funktion $f(x)$ stetig wird zu $f(x) = \left\{\begin{array}{c} 5x-2 \text{ für } x>1 \\ ax+b \text{ für } 0\le x\le 1 \\ 1-x^2 \text{ für } x<0 \end{array}\right\}$

A3.4.3: Zeigen Sie mit Hilfe geeigneter Folgen die Unstetigkeit in $x_0 = 2$ der Funktion

$$f(x) = \left\{\begin{array}{c} \frac{1}{x}+\frac{1}{2} \text{ für } x\le 2 \\ x \text{ für } x>2 \end{array}\right\}$$

A3.4.4: Zeigen Sie die Stetigkeit der Funktion

$$f(x) = |x|$$

für $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ mit Hilfe des $\varepsilon - \delta-$Kriteriums.

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $x_0 > 0, x_0 = 0, x_0 < 0$.

Bem.: Die Stetigkeit der Betragsfunktion über Folgen finden Sie im Skript.

A3.4.5: Zeigen Sie:

$$\begin{aligned}
\cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y)+\sinh(x)\sinh(y)\\
\sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y)+\cosh(x)\sinh(y)\\
\cosh^2(x)-\sinh^2(x) &= 1
\end{aligned}$$

A3.4.6:
a) Zeigen Sie $\forall\,|x|<1$ gilt:

$$|\sinh(x)| \leq 2\,|x|$$

b) Zeigen Sie: $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ sind stetig in 0 mit Hilfe der obigen Erkenntnisse.
c) Zeigen Sie: $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ sind stetig in x_0

A3.4.7
a) Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{3x} + 1$$

Zeigen Sie: Die Funktion ist auf dem Intervall [1,3] Lipschitz stetig. Wie lautet die Lipschitz Konstante?

b) Wir betrachten die Gleichung

$$x = \frac{1}{3x} + 1$$

Lösen Sie diese zeichnerisch und rechnerisch. Wie lautet die Lösung der Gleichung in [1,3]?
c) Zeigen Sie: Die Iteration

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \frac{1}{3x_n} + 1\\
x_0 &= 2
\end{aligned}$$

konvergiert. Welchen Grenzwert $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$ erwarten Sie? Sie wollen den Grenzwert auf $\varepsilon = 0,01$ ausrechnen. Ermitteln Sie aus den Iterierten x_0 und x_1 eine maximale Anzahl nötiger Iterationen n_0 (a-priori). Führen Sie nun diese Anzahl Iterationen durch und berechnen Sie $x_{n_0.}$ Wie genau ist ihre Lösung denn jetzt wirklich ? (a posteriori). Vergleichen Sie nun die Genauigkeit noch mit der in b) ermittelten Lösung.

A.3.4.8(*): Ermitteln Sie die Funktionswerte für $\cos(\frac{\pi}{4})$ und $\sin(\frac{\pi}{4})$.

A3.4.9(*): Zeigen Sie $f(x) = \sqrt{x}$ ist gleichmässig stetig in $[0,\infty)$. Hinweis: $\delta = \varepsilon^2$

Kapitel 10

Differentialrechnung

A4.1: Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{\sinh(h)}{h} &= 1 \\ \lim_{h\to 0}\frac{\cosh(h)-1}{h} &= 0 \end{aligned}$$

A4.2: Berechnen Sie mit Hilfe von Aufgabe 4.1 und mit Hilfe der Additionstheoreme die Ableitung von $f(x) = \cosh(x)$ und $g(x) = \sinh(x)$. Berechnen Sie diese anschliessend mit Hilfe der Definition über die Exponentialfunktion.

A4.3: Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $\operatorname{arccosh}(y)$

A4.4: Differenzieren Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten die Funktion

$$f(x) = \frac{12}{2x+3}$$

A4.5:Berechnen Sie die Ableitungen von
a) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ b) $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$
c) $f(x) = \cos^{10}(x)$ d) $f(x) = \sinh(\cosh(\sinh(x)))$

A4.6(*): Zeigen Sie :

$$\operatorname{arccosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

A4.7: Untersuchen Sie die Funktion $f(x)$ auf Stetigkeit, Monotonie, lokale Extrema, Krümmung und Wendestellen zu

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x^2 + x & \text{für } x \geq 0 \\ -x^2 + x & \text{für } x < 0 \end{array} \right\}$$

A4.8: Berechnen Sie
a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cosh(x) - 1}{\cos(x) - 1}$$

b)

$$\lim_{x \to 0} (\sin x)^{1/\ln(x)}$$

10.1 Die Taylorreihe

A4.1.1: Berechnen Sie zur Funktion

$$f(x) = \ln x \cdot e^{x-1}$$

die Taylorreihe bis zum quadratischen Term in $x_0 = 1$

A4.1.2: Um eine Gleichung

$$f(x) = 0$$

zu lösen, gehen wir nun analog zum Newton-Verfahren wie folgt vor:

Wir starten bei $x_0 = 0$. Wir berechnen dann in jedem x_n die Taylorentwicklung 2. Ordnung $f_2(x)$ (Parabel) mit x_n als Entwicklungspunkt und berechnen deren beiden Nullstellen. Die Nullstelle, welche weniger von der letzten Iterierten (also im ersten Fall von Null) abweicht, wird als neue Näherung genommen. Hierzu berechnen wir 4 Iterationen.

Um den Fall abzufangen, dass wir Parabeln ohne reelle Nullstellen erhalten, bauen wir als Sicherheitsmechanismus noch ein, dass Sie in diesem Fall statt der obigen Iteration einen Newtonschritt machen (Tangentenverfahren).

a) Wie lautet die Formel zur Berechnung von x_n, also der Nullstelle(n) der Taylorentwicklung 2. Ordnung?

b) Implementieren Sie obiges Verfahren, in dem Sie $f(x), f'(x)$ und $f''(x)$ "hart "kodieren (also zu im Code verdrahteten Beispielen). Testen Sie nun ihr Programm für

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x - 2 \\ f(x) &= \cos(x) \end{aligned}$$

c) Ersetzen Sie nun die Ableitungen wie folgt: Wir geben nur die Funktion ein. Die Ableitungen werden dann mit dem zentralen Differenzenquotienten für die erste und dem Differenzenquotienten für die zweite Ableitung angenähert. Als Schrittweite h verwenden wir 0,1.

d) Testen Sie nun ihr Verfahren die obigen Funktionen. Was könnte man im Verfahren mit den Differenzenquotienten verbessern ?

Kapitel 11

Integration

A5.1: Berechnen Sie die Integrale

a)

$$\int \sin(3x)\cos(5x)dx$$

b)

$$\int_{0,01}^{\pi^2/16} \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

c)

$$\int \frac{2x - 13x^2 + 9x^3 - 4x^4 + 2x^5 + 9}{(x^2+4)(x-1)^2}dx$$

A5.2: Berechnen Sie die Fläche die von den Funktionen

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ g(x) &= 1 - x^2 \end{aligned}$$

und den positiven Koordinatenachsen eingeschlossen wird.

A5.3: Berechnen Sie Länge, Rotationsvolumen und Mantelfläche der Funktion cosh(x) auf dem Intervall [0,1]

A5.4(*): Zeigen Sie durch die Umkehrung der Quotientenregel:

$$\int u\frac{v'}{v^2}dx = \int \frac{u'}{v}dx - \frac{u}{v}$$

Lösen Sie hiermit das Integral

$$\int \frac{2x^2}{x^4+2x^2+1}dx \left(= \int x \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx\right)$$

A5.5: Wir betrachten

$$f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x-2)^2}$$

a) Zeigen Sie $\forall x \in [0,3]$

$$f(x) > 0$$

Was bedeutet dies für das Integral unter der Funktion im Intervall [0,3] ?
b) Finden Sie die Stammfunktionen zu $f(x)$

c) Berechnen Sie hieraus

$$\int_0^3 \frac{2x+1}{(x^2+x-2)^2}dx$$

und interpretieren Sie das Ergebnis.

Uneigentliche Integrale

A7.1: Wie lautet der Cauchy Hauptwert von

$$\int_0^3 \frac{1}{x-2}dx$$

A7.2: Wie lautet der Cauchy Hauptwert von

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x)dx \quad b) \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)dx$$

A7.3: Konvergieren oder divergieren die Integrale?
$a) \int_3^\infty \frac{x^2-2x-1}{x^4+x-7}dx \qquad b) \int_9^\infty \frac{x}{x^2-x-7}dx \qquad c) \int_1^\infty \frac{5+\cos(x)-2\sin(x)}{x^2+x+2}dx$

A7.4: Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale falls Sie existieren.

$a) \int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx \qquad b) \int_2^\infty \frac{1}{1-x}dx \qquad c) \int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

A7.5:Wir möchten den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

auf 0,01= $\frac{1}{100}$ genau bestimmen. Wie groß muss m gewählt werden, damit

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2}$$

den Wert annähert?

Bem.: Die Vorr. und Konvergenz gemäß Integralvergleichskriterium brauchen Sie nicht zeigen.

Index

Teil III

Analysis 2

Kapitel 12

Funktionen mehrerer Veränderlicher

12.1 Grundbegriffe

Definition 220 *Das kartesische Produkt* $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{n-mal}$ *heißt* ***n-dimensionaler Vektorraum*** *und wird mit dem* $\mathbb{R}^n$ *bezeichnet. Die Elemente*

$$x = \vec{x} = (x_1, ..., x_n)^T$$

heißen ***Vektoren*** *des Raumes und* x_i *heißt die* ***i-te Komponente*** *des Vektors.*

Wir definieren die Summe

$$\begin{aligned} \vec{x} + \vec{y} &= (x_1, ..., x_n)^T + (y_1, ..., y_n)^T \\ : &= (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)^T \end{aligned}$$

und das Vielfache für $a \in \mathbb{R}$

$$a\vec{x} = (ax_1, ..., ax_n)^T$$

12.2 Rechnen in Vektorräumen

Folgende Gesetze gelten stets in Vektorräumen: Sind $\vec{x}, \vec{y}, z \in V, V$ Vektorraum, so gilt

1. $\vec{x} + \vec{y} \in V$ (Abgeschlossenheit)
2. $\vec{x} + (\vec{y} + z) = (\vec{x} + \vec{y}) + z$ (Assoziativität)
3. $\exists \vec{0}$ mit $\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$ (Nullelement)

4. $\forall \vec{x} \exists \vec{y}$ mit $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$ (Inverses Element)
5. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (Kommutativität)

Weiterhin gilt für die Multiplikation mit reellen Zahlen a, b (allgemein mit Elementen eines Körpers, über den der Vektorraum definiert wird):

1. $a \cdot \vec{x} \in V$
2. $a \cdot (b \cdot \vec{x}) = b \cdot (a \cdot \vec{x}) = (a \cdot b) \cdot \vec{x}$
3. $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$

und die Verknüpfungsgesetze

1. $a \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{y}$
2. $(a + b) \cdot \vec{x} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{x}$

Definition 221 *Der Ausdruck*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \vec{x}_k$$

heißt Linearkombination der Vektoren. Vektoren heißen linear abhängig, falls sich einer als Linearkombination der anderen darstellen läßt.

Definition 222 *Die Vektoren*

$$\vec{e}_k = (0, ..., 0, 1, 0...0)^T$$

(k-te Komponente 1) heissen kanonische Einheitsvektoren.

12.3 Metrische Räume

Metriken defineren Abstände im $\mathbb{R}^n$. Diese sollten nur Null werden, wenn die Punkte identisch sind und Umwege sind keine Abkürzungen - formal:

Definition 223 *Eine Funktion d auf einem Vektorraum V mit*

$$\begin{aligned} d \ : \ & V \times V \to \mathbb{R} \\ & d(\vec{x}, \vec{y}) \end{aligned}$$

heißt Metrik, falls gilt

$$\begin{aligned} d(\vec{x}, \vec{y}) &= 0 \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{y} \\ d(\vec{x}, \vec{y}) &\leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{y}, \vec{z}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V \\ & \text{(Dreiecksungleichung)} \end{aligned}$$

Bem.: 1. Die erste Gleichung bedeutet insbesondere

$$d(\vec{x}, \vec{x}) = 0$$

2. Ein Vektorraum und eine Metrik heissen zusammen metrischer Raum.

In einem metrischen Raum gilt stets

$$\begin{aligned} i)\ d(\vec{x}, \vec{z}) &\geq 0\ \forall \vec{x}, \vec{z} \in V \\ ii)\ d(\vec{x}, \vec{y}) &= d(\vec{y}, \vec{x})\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in V \\ iii)\ |d(\vec{x}, \vec{z}) - d(\vec{y}, \vec{z})| &\leq d(\vec{x}, \vec{y})\ \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in V \end{aligned}$$

Denn:
i)

$$\begin{aligned} 0 &= d(\vec{x}, \vec{x}) \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{x}, \vec{z}) = 2d(\vec{x}, \vec{z}) \\ \text{also} &: d(\vec{x}, \vec{z}) \geq 0 \end{aligned}$$

ii)
Es gilt gemäß Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} d(\vec{x}, \vec{y}) &\leq d(\vec{x}, \vec{x}) + d(\vec{y}, \vec{x}) = d(\vec{y}, \vec{x}) \\ d(\vec{y}, \vec{x}) &\leq d(\vec{y}, \vec{y}) + d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{x}, \vec{y}) \end{aligned}$$

iii) Für

$$\begin{aligned} d(\vec{x}, \vec{z}) - d(\vec{y}, \vec{z}) &\leq d(\vec{x}, \vec{y}) + d(\vec{z}, \vec{y}) - d(\vec{y}, \vec{z}) \\ &= d(\vec{x}, \vec{y}) + d(\vec{y}, \vec{z}) - d(\vec{y}, \vec{z}) \\ &= d(\vec{x}, \vec{y}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d(\vec{y}, \vec{z}) - d(\vec{x}, \vec{z}) &\leq d(\vec{y}, \vec{x}) + d(\vec{z}, \vec{x}) - d(\vec{x}, \vec{z}) \\ &= d(\vec{y}, \vec{x}) \\ &= d(\vec{x}, \vec{y}) \end{aligned}$$

und damit die Behauptung.

Metriken können dabei vielfältig definiert werden, z.B.

$$d(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$$

Summen-Metrik (Manhattan-Metrik)

$$d(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

eukl. Metrik

$$d(\vec{x},\vec{y}) = \max_{k=1,..,n} |x_k - y_k|$$

Maximum-Metrik

Bem. Für diese gebräuchlichen Metriken gilt

$$d(\vec{x},\vec{y}) = d(\vec{x}-\vec{y},\vec{0})$$

Exemplarisch wollen wir zeigen, dass die $d(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$ eine Metrik ist:
a) z.Z.:$d(\vec{x},\vec{y}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{y} \quad \forall x, y \in V$

$$\begin{aligned} d(\vec{x},\vec{y}) &= \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| = 0 \\ &\iff |x_k - y_k| = 0 \ \forall k \\ &\iff x_k = y_k \quad \forall k \\ &\iff \vec{x} = \vec{y} \end{aligned}$$

b) z.Z.: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$

$$\begin{aligned} d(\vec{x},\vec{z}) + d(\vec{y},\vec{z}) &= \sum_{k=1}^{n} |x_k - z_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k - z_k| \\ &= \sum_{k=1}^{n} |x_k - z_k| + |y_k - z_k| \\ &= \sum_{k=1}^{n} |x_k - z_k| + |z_k - y_k| \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| = d(\vec{x},\vec{y}) \end{aligned}$$

12.4 Normen im $\mathbb{R}^n$

Normen beschreiben Längen, haben also nur einen Vektor als Eingabe:

Definition 224 *Sei $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Eine Norm ist eine Funktion*

$$\begin{array}{rcl} \vec{x} & \to & \|\vec{x}\| \\ \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \end{array}$$

mit den Eigenschaften
1. $\|\vec{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
2.$\|\alpha \cdot \vec{x}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{x}\|$ für $\alpha \in \mathbb{R}$
3.$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (Dreiecksungleichung)

Folgerungen:
1. (aus 2. mit $\alpha = -1$)

$$\|\vec{x}\| = \|-\vec{x}\|$$

2.

$$\|\vec{x}\| \geq 0$$

denn:

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \|\vec{x} - \vec{x}\| \leq \|\vec{x}\| + \|-\vec{x}\| \\ & = & 2\,\|\vec{x}\| \end{array}$$

Die wichtigsten Normen sind

$$\begin{array}{rl} \text{Summen-Norm} \quad : & \|\vec{x}\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |x_k| \\ \text{Euklidische Norm:} & \|\vec{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \\ \text{Maximum-Norm:} & \|\vec{x}\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \end{array}$$

Bew. für die Maximum-Norm:
z.Z.
1. $\|\vec{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
2.$\|\alpha \cdot \vec{x}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{x}\|$ für $\alpha \in \mathbb{R}$
3.$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

zu 1)

$$\begin{array}{rcl} \vec{x} & = & \vec{0} \\ & \Longleftrightarrow & x_k = 0 \;\; \forall k \\ & \Longleftrightarrow & |x_k| = 0 \;\; \forall k \\ & \Longleftrightarrow & \max |x_k| = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \|\vec{x}\| = 0 \end{array}$$

zu 2)

$$\begin{aligned}
\|\alpha \cdot \vec{x}\| &= \max_{1\le k\le n} |\alpha \cdot x_k| \\
&= \max_{1\le k\le n} |\alpha| \cdot |x_k| \\
&= |\alpha| \max_{1\le k\le n} |x_k| \\
&= |\alpha| \cdot \|\vec{x}\|
\end{aligned}$$

zu 3)

$$\begin{aligned}
\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| &= \max_{1\le k\le n} |x_k| + \max_{1\le k\le n} |y_k| \\
&\geq \max_{1\le k\le n} |x_k| + |y_k| \\
&\geq \max_{1\le k\le n} |x_k + y_k| \\
&= \|\vec{x} + \vec{y}\|
\end{aligned}$$

Bem: Der Grund, weshalb die Betrachtung der Normen erst in diesem zweiten Teil der Analysis auftaucht, ist der folgende: Für $n = 1$ ist $\vec{x} = x$

$$\begin{aligned}
\|\vec{x}\|_2 &= \sqrt{x^2} = |x| \\
\|\vec{x}\|_\infty &= |x| \\
\|\vec{x}\|_1 &= |x|
\end{aligned}$$

Also ist dort jede Norm der Betrag der Zahl.

Im $\mathbb{R}^2$, also für

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ist

$$\begin{aligned}
\|\vec{x}\|_2 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \text{ (eukl. Abstand)} \\
\|\vec{x}\|_\infty &= \max(|x_1|, |x_2|) \\
\|\vec{x}\|_1 &= |x_1| + |x_2|
\end{aligned}$$

Eine Norm dient zur Bestimmung von Größen eines Vektors. Welcher Vektor der größte ist, ist damit jedoch auch normabhängig.

Bsp.: Betrachte

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \\
\vec{y} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

So ist:

in der euklidischen Norm

$$\|\vec{x}\|_2 = \|\vec{y}\|_2 = 5$$

in der Maximum-Norm

$$4 = \|\vec{x}\|_\infty < \|\vec{y}\|_\infty = 5$$

und in der Summen-Norm

$$7 = \|\vec{x}\|_1 > \|\vec{y}\|_1 = 5$$

Satz 225 *Jeder Vektorraum mit einer Metrik d ist normierbar (d.h. dort gibt es eine Norm), falls*

$$d(a \cdot \vec{x}, \vec{0}) = |a| \cdot d(\vec{x}, \vec{0})$$

und

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{x} - \vec{y}, \vec{0})$$

Eine Norm wird dann definiert gemäß

$$\|\vec{x}\| := d(\vec{x}, \vec{0})$$

Bew.: Es sind die Normeigenschaften zu überprüfen:
1. $\|\vec{x}\| = 0 \Longleftrightarrow d(\vec{x}, \vec{0}) = 0 \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
2. $\|\alpha \cdot \vec{x}\| = d(a \cdot \vec{x}, \vec{0}) = |a| \cdot d(\vec{x}, \vec{0}) = |\alpha| \cdot \|\vec{x}\|$ für $\alpha \in \mathbb{R}$
3. $\|\vec{x} + \vec{y}\| = d(\vec{x} + \vec{y}, \vec{0}) = d(\vec{x}, -\vec{y}) \leq d(\vec{x}, \vec{0}) + d(-\vec{y}, \vec{0}) = d(\vec{x}, \vec{0}) + d(\vec{y}, \vec{0}) = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (Dreiecksungleichung)

Definition 226 *Der Wert*

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| := d(\vec{x}, \vec{y})$$

*heißt **Abstand** von $\vec{x}$ und $\vec{y}$. Dieser Wert hängt von der gewählten Metrik ab.*

Im obigen Beispiel ist

$$\vec{x} - \vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

war der Abstand

$$\begin{aligned} \|\vec{x} - \vec{y}\|_2 &= \sqrt{90} \\ \|\vec{x} - \vec{y}\|_\infty &= 9 \\ \|\vec{x} - \vec{y}\|_1 &= 12 \end{aligned}$$

Dennoch sind Normen nicht willkürlich. Dies liefert

Definition 227 *Zwei Normen $\|\vec{x}\|_a$ und $\|\vec{x}\|_b$ heißen* ***äquivalent****, falls $\forall \vec{x}$ positive Konstanten m und M existieren (also unabhängig von $\vec{x}$), so daß*

$$m\,\|\vec{x}\|_a \leq \|\vec{x}\|_b \leq M\,\|\vec{x}\|_a$$

Satz 228 *Normenäquivalenz: Im $\mathbb{R}^n$ sind alle Normen äquivalent und es gilt insbesondere*

$$\begin{aligned} a)\ \|\vec{x}\|_\infty &\leq \|\vec{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|\vec{x}\|_\infty \\ b)\ \|\vec{x}\|_\infty &\leq \|\vec{x}\|_1 \leq n\,\|\vec{x}\|_\infty \\ c)\ \|\vec{x}\|_2 &\leq \|\vec{x}\|_1 \leq n\,\|\vec{x}\|_2 \end{aligned}$$

Bew. zu b)

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\|_\infty &= \max_{1\leq k\leq n} |x_k| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| = \|\vec{x}\|_1 \\ \|\vec{x}\|_1 &= \sum_{k=1}^n |x_k| \leq \sum_{k=1}^n \max_{1\leq k\leq n} |x_k| = n\,\|\vec{x}\|_\infty \end{aligned}$$

Bem.: in c) gilt sogar $\|\vec{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\cdot\|\vec{x}\|_2$. Der Beweis hierzu folgt etwas später.

12.5 Das Skalarprodukt

Definition 229 *Ein* ***Skalarprodukt*** *ist eine Funktion*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ \vec{x} \times \vec{y} &\to (\vec{x},\vec{y}) \end{aligned}$$

oder auch in der Notation

$$\vec{x} \times \vec{y} \to \vec{x}\cdot\vec{y}$$

mit

$$\begin{aligned} (\vec{x},\vec{y}) &= (\vec{y},\vec{x}) \\ (\alpha\vec{x},\vec{y}) &= \alpha(\vec{x},\vec{y}) \quad \textit{für } \alpha \in \mathbb{R} \\ (\vec{x}_1 \pm \vec{x}_2,\vec{y}) &= (\vec{x}_1,\vec{y}) \pm (\vec{x}_2,\vec{y}) \\ (\vec{x},\vec{x}) &\geq 0 \\ (\vec{x},\vec{x}) &= 0 \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{0} \end{aligned}$$

Bem.: Es ist stets

$$(\vec{x},\vec{0}) = (\vec{0},\vec{x}) = (\vec{x},\vec{x}-\vec{x}) = (\vec{x},\vec{x}) - (\vec{x},\vec{x}) = 0$$

Bsp.: Für $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ist

$$(\vec{x},\vec{y}) := \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k$$

ein (und auch das normalerweise stets verwendete) Skalarprodukt. Der Zusammenhang zur euklidischen Norm ist hier auch ersichtlich:

$$(\vec{x},\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \|\vec{x}\|_2^2$$

Das es sich hier um ein Skalarprodukt handelt, kann wie folgt gezeigt werden:
a)

$$(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k = \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot x_k = (\vec{y},\vec{x})$$

b)

$$(\alpha\vec{x},\vec{y}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha \cdot x_k \cdot y_k = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k = \alpha(\vec{x},\vec{y})$$

c)

$$\begin{aligned}
(\vec{x}_1 \pm \vec{x}_2,\vec{y}) &= \sum_{k=1}^{n} (x_{1k} \pm x_{2k}) \cdot y_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_{1k} \cdot y_k \pm x_{2k} \cdot y_k = \sum_{k=1}^{n} x_{1k} \cdot y_k \pm \sum_{k=1}^{n} x_{2k} \cdot y_k \\
&= (\vec{x}_1,\vec{y}) \pm (\vec{x}_2,\vec{y})
\end{aligned}$$

d)

$$(\vec{x},\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot x_k \geq 0$$

e)

$$\begin{aligned}
(\vec{x},\vec{x}) &= 0 \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot x_k = 0 \\
&\Longleftrightarrow x_k = 0 \ \forall k \\
&\Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{0}
\end{aligned}$$

Satz 230 *Schwarz Ungleichung Sei $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n, (\vec{x},\vec{y})$ Skalarprodukt, dann gilt*

$$(\vec{x},\vec{y}) \leq \sqrt{(\vec{x},\vec{x})} \cdot \sqrt{(\vec{y},\vec{y})}$$

bzw.

$$(\vec{x},\vec{y})^2 \leq (\vec{x},\vec{x}) \cdot (\vec{y},\vec{y})$$

Somit gilt im obigen Beispiel

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} \\ \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k\right)^2 &\leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k^2\end{aligned}$$

Speziell ist für

$$y_1 = y_2 = ... = y_n = 1$$

und die Folge der Beträge $|x_k|$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \cdot n$$

Und damit für die oben erwähnte Normenäquivalenz

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |x_k| &\leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \\ \|\vec{x}\|_1 &\leq \sqrt{n} \cdot \|\vec{x}\|_2\end{aligned}$$

Bew.: Ist $\vec{x} = \vec{0}$ oder $\vec{y} = \vec{0}$ so ist nichts zu zeigen. Sei nun $\vec{x} \neq \vec{0}$ und damit $((\vec{x}, \vec{x}) > 0)$. Dann existiert

$$a = -\frac{(\vec{x}, \vec{y})}{(\vec{x}, \vec{x})}$$

und es gilt

$$\begin{aligned}0 &\leq (a\vec{x} + \vec{y}, a\vec{x} + \vec{y}) = a^2(\vec{x}, \vec{x}) + 2a(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) \\ &= \frac{(\vec{x}, \vec{y})^2}{(\vec{x}, \vec{x})^2}(\vec{x}, \vec{x}) - 2\frac{(\vec{x}, \vec{y})}{(\vec{x}, \vec{x})}(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) \\ &= \frac{(\vec{x}, \vec{y})^2}{(\vec{x}, \vec{x})} - 2\frac{(\vec{x}, \vec{y})^2}{(\vec{x}, \vec{x})} + (\vec{y}, \vec{y}) \\ &= -\frac{(\vec{x}, \vec{y})^2}{(\vec{x}, \vec{x})} + (\vec{y}, \vec{y})\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}(\vec{y}, \vec{y}) &\geq \frac{(\vec{x}, \vec{y})^2}{(\vec{x}, \vec{x})} \\ (\vec{y}, \vec{y}) \cdot (\vec{x}, \vec{x}) &\geq (\vec{x}, \vec{y})^2\end{aligned}$$

Ist $(\vec{x}, \vec{y}) < 0$, so gilt sowieso

$$(\vec{x}, \vec{y}) \leq \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})} \cdot \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$$

und für $(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0$ enthält obige Gleichung nur positive Größen und die Wurzel erhält die Relation

$$(\vec{x}, \vec{y}) \leq \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})} \cdot \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$$

q.e.d.
Bem.:
1. Eigentlich gilt damit sogar

$$|(\vec{x}, \vec{y})| \leq \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})} \cdot \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$$

2. Wie wir später noch benutzen, ist ja sogar

$$0 < \ (a\vec{x} + \vec{y}, a\vec{x} + \vec{y})$$

falls

$$a\vec{x} + \vec{y} \neq \vec{0}$$

d.h.

$$\vec{y} \neq -a\vec{x} = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{(\vec{x}, \vec{x})}\vec{x}$$

und in diesem Fall gilt:

Satz 231 *Strenge Schwarz Ungleichung Sei* $\vec{x} \neq \vec{0}, \vec{y} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n, (\vec{x}, \vec{y})$ *Skalarprodukt,* $\vec{y} \neq \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{(\vec{x}, \vec{x})}\vec{x}$, *dann gilt*

$$(\vec{x}, \vec{y}) < \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} \cdot \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})}$$

bzw.

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 < \quad (\vec{x}, \vec{x}) \cdot (\vec{y}, \vec{y})$$

Es sei noch bemerkt, dass ein Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst keine Norm ist, denn

$$(a\vec{x}, a\vec{x}) = a^2(\vec{x}, \vec{x})$$

während bei Normen gilt

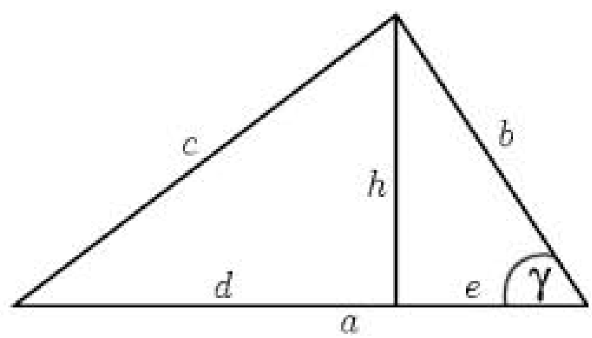
$$\|a\vec{x}\| = |a| \cdot \|\vec{x}\|$$

Aber es gilt:

Satz 232 *Für ein beliebiges Skalarprodukt ist*

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$$

eine (durch das Skalarprodukt induzierte) Norm.



Für diese Norm lautet dann die Schwarz Ungleichung

$$(\vec{x}, \vec{y}) \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

Bem. Es gilt weiterhin - hier im $\mathbb{R}^2$ - für das euklidische Skalarprodukt der

Satz 233 *Cosinussatz*

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cos\gamma$$

wobei γ der Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ist und die Norm die vom euklidischen Skalarprodukt induzierte ist.

Bew.:

Teil 1: Wir betrachten zunächst das (nicht vektorielle) Dreieck mit $\gamma < 90^0$, für $\gamma = 90^0$ist dies der Satz des Pythagoras. (Übung: Wie ändert sich der Beweis für $\gamma > 90^0$? Bem.: Es ist $\cos(180^0 - \gamma) = -\cos(\gamma)$)

Hier gilt:

$$\begin{aligned} h^2 &= b^2 - e^2 \\ d^2 &= (a-e)^2 \\ c^2 &= d^2 + h^2 \\ &= (a-e)^2 + b^2 - e^2 \\ &= a^2 - 2ae + e^2 + b^2 - e^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2ae \end{aligned}$$

Wg.

$$\begin{aligned} \cos\gamma &= \frac{e}{b} \\ e &= b\cos\gamma \end{aligned}$$

und damit

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Teil 2: Nun betrachten wir die Grössen als Vektoren ($\vec{c}$ und $\vec{a}$ starten links unten, $\vec{b}$ endet im Winkel γ) und sehen: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$. Damit ist obige Gleichung:

$$\left\|\vec{a} - \vec{b}\right\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \left\|\vec{b}\right\|^2 - 2\,\|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cos\gamma$$

andererseits ist

$$\begin{aligned} \left\|\vec{a} - \vec{b}\right\|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{a}) - 2(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{b}) \\ &= \|\vec{a}\|^2 + \left\|\vec{b}\right\|^2 - 2(\vec{a}, \vec{b}) \end{aligned}$$

und damit

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cos\gamma$$

q.e.d.

Also fassen wir für den euklidischen Fall zusammen:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cos\gamma$$

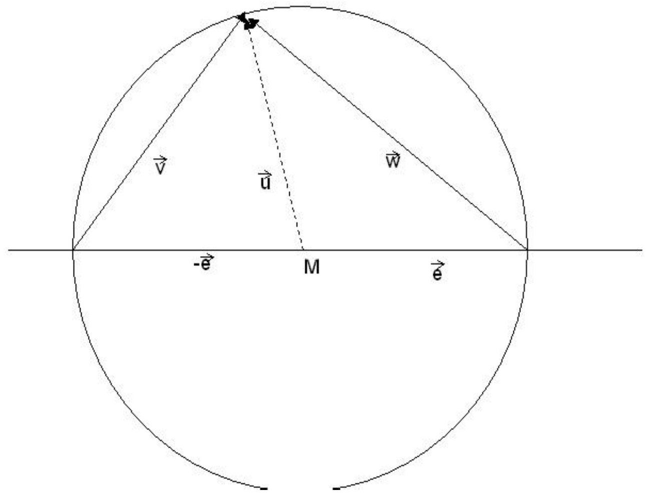
Insbesondere ist für $\vec{x} \neq \vec{0} \neq \vec{y}$

$$(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{y}$$

Wir sehen weiterhin, wenn wir Vektoren fester Länge betrachten und deren Winkel (im Bogenmass) zueinander verändern:

1. Der größte Wert des Skalarproduktes wird erreicht, wenn $\gamma = 0$ ist. Der Wert wird $(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$
2. Der kleinste Wert entsprechend bei $\gamma = \pi$ wird $(\vec{x}, \vec{y}) = -\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$
3. Bei $\gamma = \frac{\pi}{2}$ oder $\gamma = \frac{3}{2}\pi$ stehen die Vektoren senkrecht und das Skalarprodukt wird Null.

Bsp.(*): Der Satz des Thales: Wir betrachten einen Kreis mit Radius $r = \|\vec{e}\| = \|\vec{u}\|$



Es ist

$$\begin{aligned} \vec{e} + \vec{w} &= \vec{u} \\ -\vec{e} + \vec{v} &= \vec{u} \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{u} - \vec{e} \\ \vec{v} &= \vec{u} + \vec{e} \end{aligned}$$

und für das Skalarprodukt gilt

$$\begin{aligned} (\vec{v}, \vec{w}) &= (\vec{u} + \vec{e}, \vec{u} - \vec{e}) \\ &= (\vec{u}, \vec{u}) - (\vec{e}, \vec{e}) \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \vec{u}) &= \|\vec{u}\|^2 = r^2 \\ (\vec{e}, \vec{e}) &= \|\vec{e}\|^2 = r^2 \end{aligned}$$

und damit

$$(\vec{v}, \vec{w}) = r^2 - r^2 = 0$$

Als kleine Zusammenfassung der Begriffe sei erwähnt:

1. Für jede Metrik $d(\vec{x},\vec{y})$, welche zusätzlich erfüllt $d(a\cdot\vec{x},0)=|a|\cdot d(\vec{x},0)$ und $d(\vec{x},\vec{y})=d(\vec{x}-\vec{y},\vec{0})$, ist $d(\vec{x},\vec{0})$ eine Norm.

2. Für jedes Skalarprodukt ist $\sqrt{(\vec{x},\vec{x})}$ eine Norm.

Als Beispiel:
1.

$$d(\vec{x},\vec{y})=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|$$

ist eine Metrik, welche obige Bedingungen erfüllt. Damit ist

$$d(\vec{x},\vec{0})=\sum_{k=1}^{n}|x_k|$$

die induzierte Norm.

2.

$$(\vec{x},\vec{x})=\sum_{k=1}^{n}x_k^2$$

ist das euklidische Skalarprodukt. Daher ist

$$\|\vec{x}\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}$$

die hieraus induzierte Norm.

12.6 Mengen im $\mathbb{R}^n$

12.6.1 Offene Mengen

Definition 234 *$\varepsilon-$Umgebung: Sei $\|.\|$ Norm im $\mathbb{R}^n$, dann heißt*

$$U_\varepsilon(\vec{x}_0):=\{\vec{x}\mid \|\vec{x}-\vec{x}_0\|<\varepsilon\}$$

die ε-Umgebung von $\vec{x}_0$ bzgl. der Norm $\|.\|$.

Einerseits sind damit zwar ε-Umgebungen normabhängig, andererseits gilt im $\mathbb{R}^n$ wegen der Äquivalenz aller Normen Normunabhängigkeit in sofern, dass die Elemente einer $\varepsilon-$Umgebung in einer Norm in einer ε^*-Umgebung mit $\varepsilon^*=k\varepsilon$ bzgl einer zweiten Norm liegen.

Bsp.: Wir betrachten nun den $\mathbb{R}^2=(x,y)$ und $U_1(\vec{0})=\{\vec{x}\mid \left\|\vec{x}-\vec{0}\right\|=\|\vec{x}\|<1\}$

1. $\|\vec{x}\|_2$:

$$\begin{aligned} U_1(\vec{0}) &= \left\{\sqrt{x^2+y^2} < 1\right\} \\ &= \left\{x^2+y^2 < 1\right\} \end{aligned}$$

2.$\|\vec{x}\|_\infty$:

$$U_1(\vec{0}) = \{\max(|x|, |y|) < 1\}$$

3. $\|\vec{x}\|_1$:

$$U_1(\vec{0}) = \{|x| + |y| < 1\}$$

Wir definieren analog zum $\mathbb{R}^1$

Definition 235 *Sei D Menge, $\|.\|$ Norm. Dann:*
*1. $\vec{x}_0$ heißt **innerer Punkt** von D, falls $\exists\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon(\vec{x}_0) \in D$.*
*2. D heißt **offene Menge**, falls alle Punkte von D innere Punkte sind.*

12.6.2 Abgeschlossene Mengen

Definition 236 *Sei D Menge, $\|.\|$ Norm. Dann:*
*1. $\vec{x}_0$ heißt **Häufungspunkt** von D, falls $\forall\varepsilon > 0$ $U_\varepsilon(\vec{x}_0)$ einen Punkt $\vec{x} \neq \vec{x}_0$ enthält.*
*2. D heißt **abgeschlossene Menge**, falls Sie alle Häufungspunkte von D enthält.*

12.6.3 Beschränktheit und Ordnung

Definition 237 *Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **beschränkt**, falls es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt mit*

$$\|\vec{x}\| < M \quad \forall\vec{x} \in D$$

*Existiert eine solche Schranke nicht, so heißt die Menge **unbeschränkt**.*

12.7 Folgen im $\mathbb{R}^n$

Definition 238 *1. Sei $\vec{X}_1, \vec{X}_2, ... \in \mathbb{R}^n$, dann heißt $\vec{X}_n$ **Folge im $\mathbb{R}^n$**, kurz: $< \vec{X}_n >$*
*2. $< \vec{X}_n >$ heißt **konvergent** gegen $\vec{X}$ (den **Grenzwert**), falls $\forall\varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon)$ so dass $\forall n > n_0(\varepsilon)$ gilt:*

$$\left\|\vec{X}_n - \vec{X}\right\| < \varepsilon$$

*3.$< \vec{X}_n >$ heißt **Cauchy-Folge** gegen $\vec{X}$, falls $\forall\varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon)$ so dass $\forall n, m > n_0(\varepsilon)$ gilt:*

$$\left\|\vec{X}_m - \vec{X}_n\right\| < \varepsilon$$

Bem.:

1. Da im $\mathbb{R}^n$ alle Normen äquivalent sind, reicht Konvergenz für eine Norm zu zeigen.

2. Folgen im $\mathbb{R}^n$ bedeuten Folgen in jeder Vektorkomponente. Konvergenz bedeutet dann, dass alle Komponenten konvergieren.

3. Cauchy-Folgen bedeuten entsprechend Cauchy-Folgen in allen Komponenten.

Bsp.: $\vec{X}_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ 1 + \frac{1}{n^2} \\ \frac{\sin(n)}{n} \end{pmatrix}$ ist konvergent gegen $\vec{X}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bei der Berechnung des n_0 kann je nach verwendeter Norm etwas anderes heraus kommen.

Dazu:

Wir betrachten die Folge

$$\vec{X}_n = \begin{pmatrix} 5 - \frac{10}{n} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

und bestimmen den Grenzwert $\vec{X}$ dieser Folge. Anschliessend interessiert uns das n_0 zu $\varepsilon = 0,1$, so dass gilt

$$\left\| \vec{X}_n - \vec{X}_0 \right\| < \varepsilon$$

Es ist der Grenzwert

$$\vec{X}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

denn:

Es ist für die Maximumnorm

$$\begin{aligned} \left\| \vec{X}_n - \vec{X}_0 \right\| &= \left\| \begin{pmatrix} -\frac{10}{n} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} \right\| \\ &= \frac{10}{n} < \varepsilon = 0,1 \\ n &> 100 \end{aligned}$$

$$n_0 = 101$$

Für die Summennorm ist:

$$
\begin{aligned}
\left\|\vec{X}_n - \vec{X}_0\right\| &= \left\|\begin{pmatrix} -\frac{10}{n} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}\right\| \\
&= \frac{11}{n} < \varepsilon = 0,1 \\
n &> 110 \\
n_0 &= 111
\end{aligned}
$$

Für die euklidische Norm:

$$
\begin{aligned}
\left\|\vec{X}_n - \vec{X}_0\right\| &= \left\|\begin{pmatrix} -\frac{10}{n} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}\right\| \\
&= \sqrt{\frac{100}{n^2} + \frac{1}{n^2}} < \varepsilon = 0,1 \\
\frac{\sqrt{101}}{n} &< 0,1 \\
n &> 10 \cdot \sqrt{101} = 100,5 \\
n_0 &= 101
\end{aligned}
$$

Definition 239 *Eine Folge heißt* ***beschränkt****, wenn die Menge aller Folgenglieder in jeder Komponente beschränkt ist.*

Bem.: Damit ist auch jede Norm der Folge beschränkt.

Definition 240 $\vec{X} \in \mathbb{R}^n$ *heißt* ***Häufungspunkt*** *von* $< \vec{X}_n >$, *falls* $\forall \varepsilon > 0$ *unendlich viele* $\vec{X}_n$ *in der* ε*-Umgebung von* $\vec{X}$ *liegen.*

Weiterhin gelten analog zum $\mathbb{R}^1$:

Satz 241 *(Bolzano-Weierstraß für Folgen):*
1. *Jede unendliche beschränkte Folge besitzt mind. einen Häufungspunkt*
2. *Jede unendliche beschränkte Folge besitzt mind. eine konvergente Teilfolge*

Satz 242 *Jede unendliche beschränkte Folge ist genau dann konvergent, wenn Sie genau einen Häufungspunkt besitzt.*

Satz 243 *Jede Cauchy-Folge ist konvergent.*

Wir betrachten nun Funktionen

$$
\vec{f}: \begin{array}{ccc} D & \to & W \\ \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \end{array}
$$

Kurz: $\vec{f}(\vec{X})$

Diese Funktionen haben Sie in linearer Form bereits in der linearen Algebra kennengelernt (A sei $m \times n, \vec{X}$ sei $n \times 1$ und $\vec{b}$ $m \times 1$)

$$\vec{f}(\vec{X}) = A \cdot \vec{X} + \vec{b}$$

Häufig ist der Fall $m = 1$ vorkommend, also in Abhängigkeit von n Eingabewerten wird ein (skalarer) Wert $f(\vec{X})$ berechnet. Damit ist

$$f : \quad \mathbb{R}^n \quad \to \quad \mathbb{R}$$

12.8 (*) Darstellungsformen der Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Anschaulich darstellbar sind die Fälle $n = 1$ (Analysis 1), $n = 2$ (Analysis 2) und mit Einschränkungen $n = 3$.

Zur Notationsvereinfachung betrachten wir nun Vektoren

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

bzw

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und können somit mit den Komponenten des Vektors rechnen.

Betrachten wir also den Fall $n = 2$:

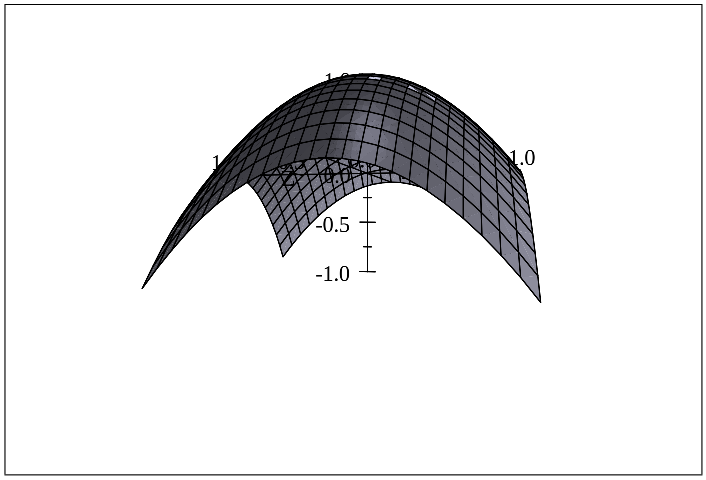
$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \to & z \end{array}$$

Definition 244 *Die Menge $G(f) = \{(x, y, z)|\ z = f(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ heisst* ***Graph*** *der Funktion.*

Gezeichnet wird dieses in dem wir 2 Koordinatenachsen als Definitionsbereich verwenden und die dritte als Funktionsachse betrachten. Wir erhalten somit ein Oberflächendiagramm.

Beispiel: Sei

$$\begin{aligned} D &= \mathbb{R}^2 \\ f(x, y) &= z = 1 - x^2 - y^2 \end{aligned}$$



Eine weitere übliche Darstellung für Funktionen der Gestalt $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Verwendung von Höhenlinien (Isobaren). Hierzu werden diejenigen Punkte (x, y) dargestellt, die einen festen Funktionswert $z_0 = f(x, y)$ annehmen.

Im obigen Fall sind dies also alle Punkte, die erfüllen

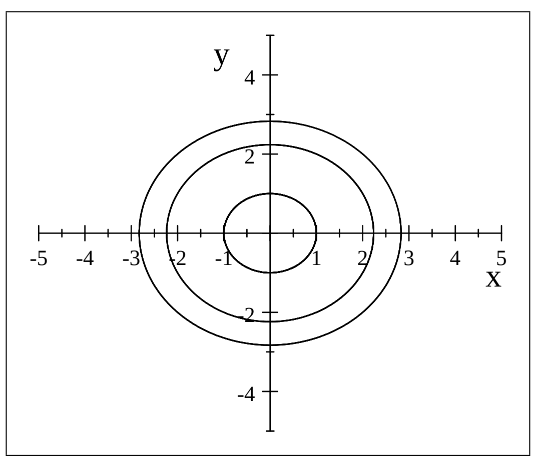
$$z_0 = 1 - x^2 - y^2$$

Betrachten wir beispielsweise die Höhenlinie zu $z_0 = 0$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - x^2 - y^2 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

und damit den Einheitskreis. Zu beliebigem z_0 erhalten wir analog

$$x^2 + y^2 = 1 - z_0$$



also den Kreis mit Radius $\sqrt{1 - z_0}$ um den Ursprung.

Ein Höhenlinienbild liefert also eine Konturdarstellung in einem zweidimensionalen Koordinatensystem.

Allgemein erhalten wir die Höhenlinien aus dem Oberflächendiagramm durch einen Schnitt in Höhe z_0 durch die Funktion. Diese Schnittkontur wird dann in ein zweidimensionales Diagramm übertragen.

12.9 Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$

12.9.1 Grenzwerte im $\mathbb{R}^n$

Definition 245 *Wir bezeichnen mit dem Grenzwert g*

$$g = \lim_{\vec{X} \to \vec{X}_0} f(\vec{X})$$

den Grenzwert jeder gegen $\vec{X}_0$ konvergenten Folge $\vec{X}_n$, falls dieser existiert und damit insbesondere eindeutig ist.

Alternativ:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon &> 0 \exists \delta(\varepsilon, \vec{X}_0), \\ \text{so dass } \forall \left\| \vec{X} - \vec{X}_0 \right\| &< \delta \text{ gilt} \\ \left| f(\vec{X}) - f(\vec{X}_0) \right| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Die beliebige Annäherung an die Stelle $\vec{X}_0$ bedeutet, dass wir uns auf einem beliebigen Pfad dem Punkt annähern.

12.9.2 Schnittfunktionen (Partielle Funktionen)

Tragen wir die Oberfläche $z = f(x, y)$ auf, so können wir die Funktion in z-Richtung schneiden und erhalten die Höhenlinien der Funktion. Schneiden wir entlang der Koordinatenachsen entweder entlang der x-Achse oder der y-Achse, so erhalten wir ebenfalls Funktionen - die Schnittfunktionen - in x oder y, also

Definition 246 *Sei $U \subset \mathbb{R}^2, f : U \to \mathbb{R}$*

$$f_1 : x \to g(x) = f(x, y_0)$$

*heißt **Schnittfunktion** bei $y = y_0$ durch x.*
und entsprechend

$$f_2 : y \to h(y) = f(x_0, y)$$

***Schnittfunktion** bei $x = x_0$ durch y.*

Allgemeiner:

Definition 247 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n, f : U \to \mathbb{R}$*

$$f_i : x_i \to g_i(x_i) = f(x_1^{(0)}, ..., x_{i-1}^{(0)}, x_i, x_{i+1}^{(0)}, ...x_n^{(0)})$$

*heißt **Schnittfunktion** durch x_i.*

Bsp.: Sei

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 5x_1 + x_2 \cdot x_3 \\ x_1^{(0)} &= 2 \\ x_2^{(0)} &= 3 \\ x_3^{(0)} &= 5 \end{aligned}$$

Die Schnittfunktionen sind

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= f(x_1, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = 5x_1 + 15 \\ f_2(x_2) &= f(x_1^{(0)}, x_2, x_3^{(0)}) = 10 + 5x_2 \\ f_3(x_3) &= f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3) = 10 + 3x_3 \end{aligned}$$

12.9.3 Partielle Ableitungen

Offensichtlich können wir nun im obigen Beispiel die (Schnitt-)Funktionen eindimensional differenzieren, also z.B.

$$f_2(x_2) = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 5$$

Zur gegebenen Funktion gibt es somit jedoch nicht nur eine erste Ableitung, sondern gleich drei erste Ableitungen.

Daher definieren wir

Definition 248 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge, $f : U \to \mathbb{R}, \vec{X}_0 = (x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)})^T \in U$, f heißt in $\vec{X}_0$ **partiell differenzierbar nach** x_i wenn*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^{(0)}, ..., x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + h, x_{i+1}^{(0)}, ...x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)})}{h}$$

*existiert. Der Wert $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ heisst dann die **partielle Ableitung von f nach x_i**.*

Bem.:

1. Alternativ kann mit

$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \text{ i-te Konponente} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

verwendet werden

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{X}_0 + h\vec{e}_i) - f(\vec{X}_0)}{h}$$

2. Die partielle Ableitung ist also die Ableitung der Schnittfunktion in x_i und gibt die Steigung der Tangente in x_i-Richtung an.

3. Es gibt somit allgemein n erste Ableitung einer Funktion in n Unbekannten.

4. Wir schrieben auch

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i}$$

Definition 249 *Eine Funktion heißt (partiell)* ***differenzierbar*** *wenn alle partiellen Ableitungen existieren.*

Beispiel 1:

$$f(x, y, z) = x^2 y + z^3 + 2$$

ist differenzierbar mit

$$\begin{aligned} f_x(x, y, z) &= 2xy \\ f_y(x, y, z) &= x^2 \\ f_z(x, y, z) &= 3z^2 \end{aligned}$$

Beispiel 2: Mit $\vec{X} = (x_1, ..., x_n)^T \neq (0, ..., 0)^T$

$$\begin{aligned} f(x_1, ..., x_n) &= \left\| \vec{X} \right\|_2 \\ &= \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} \end{aligned}$$

ist f differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}} \\ &= \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}} = \frac{x_i}{\left\| \vec{X} \right\|_2} \end{aligned}$$

12.9.4 Differentiation komplexer Zahlen

Bei der Differentition komplexer Zahlen kann dieses nun als Differentiation im $\mathbb{R}^2$ betrachtet werden. So werden Real- und Imaginärteil getrennt differenziert und das Ergebnis ist dann wiederum eine komplexe Zahl, die ggf. wieder in eine der Standardformen transformiert werden muß.

Also ist $z(x) = f(x) + i \cdot g(x)$, so ist $z'(x) = f'(x) + i \cdot g'(x)$
Beispiel:
$$z(x) = e^x + i \cdot \cos(x)$$
hat die Ableitung
$$z'(x) = e^x + i \cdot (-\sin(x))$$

Mit den bekannten Rechenregeln kann differenziert werden, in dem man die imaginäre Einheit als Konstante behandelt. So ist damit die Ableitung der Funktion

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{ix} \\ &= \cos(x) + i \cdot \sin(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'(x) &= i \cdot e^{ix} \\ &= i \cdot (\cos(x) + i \cdot \sin(x)) \\ &= -\sin(x) + i \cdot \cos(x) \end{aligned}$$

Vergleichen wir dies mit der komponentenweise Ableitung, so erhalten wir die bekannten Rechenregeln

$$(\cos(x))' = -\sin(x) \tag{12.1}$$
$$(\sin(x))' = \cos(x) \tag{12.2}$$

12.9.5 Stetigkeit

Wir definieren analog zum eindimensionalen

Definition 250 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge, $f : U \to \mathbb{R}$, $\vec{X}_0 = (x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)})^T \in U$, f heißt in $\vec{X}_0$* ***stetig,*** *wenn*

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{X} \to \vec{X}_0} f(\vec{X}) &= f(\vec{X}_0) \\ &= f(\lim_{\vec{X} \to \vec{X}_0} \vec{X}) \end{aligned}$$

wobei $\lim_{\vec{X} \to \vec{X}_0} f(\vec{X})$ Grenzwert jeder gegen $\vec{X}_0$ konvergenten Folge $\vec{X}_n$ ist. Formal:
$$\lim_{\vec{X} \to \vec{X}_0} f(\vec{X}) := \lim_{n \to \infty} f(\vec{X}_n)$$

Definition 251 *f heißt **stetig in U**, wenn die Funktion für jedes $\vec{X}_0 = (x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)})^T \in U$ stetig ist.*

Bem.:
1. Stetigkeit bedeutet somit insbesondere Stetigkeit in allen Komponenten.
2. Eine Verkettung stetiger Funktionen ist wie im $\mathbb{R}^1$ wieder stetig.

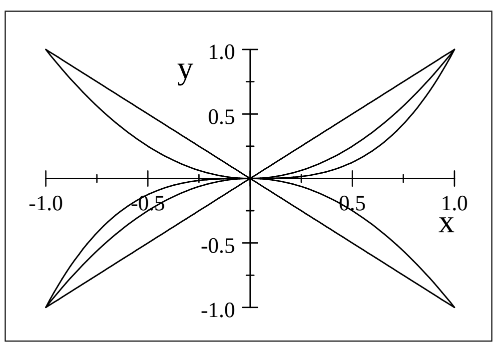
Bsp.:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 - \sin(y^2) \text{ ist stetig} \\ f(x,y) &= \sin(x+y) \text{ ist stetig} \\ f(x_1,...,x_n) &= \left\|\vec{X}\right\|_2 = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} \text{ ist stetig} \end{aligned}$$

Bem.:
1. Um Stetigkeit nachzuweisen muss man sich dem Punkt $\vec{X}_0$ aus allen Richtungen annähern, nicht nur wie im $\mathbb{R}^1$ von links und rechts.
2. Wegen

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{X}\to\vec{X}_0} f(\vec{X}) &= f(\vec{X}_0) \\ &\iff \lim_{\vec{X}\to\vec{X}_0} f(\vec{X}) - f(\vec{X}_0) = 0 \\ &\iff \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} f(\vec{X}_0 + \vec{h}) - f(\vec{X}_0) = 0 \\ &\iff \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} g(\vec{h}) = 0 \end{aligned}$$

reicht es die Stetigkeit von g im Ursprung zu zeigen.
Dazu betrachten wir beispielsweise den Ursprung $\vec{X}_0 = (0,0)^T$



Eine Folge ist dann

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \\ \text{mit } \lim_{n\to\infty} x_n &= 0 = \lim_{n\to\infty} y_n \end{aligned}$$

Bsp.:Sei

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ für } (0,0) \end{array} \right\}$$

Dann ist mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 = \lim_{n\to\infty} y_n$

$$\vec{X}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

nun zum Aufzeigen der Unstetigkeit **eine** Folge gesucht, deren Grenzwert nicht $f(0,0) = 0$ ist.

Also: Betrachte nun

$$\vec{X}_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Dann ist $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 = \lim_{n\to\infty} y_n$, aber

$$\lim_{n\to\infty} f(\vec{X}_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

Stetigkeit im $\mathbb{R}^2$ über Polarkoordinaten

Alternativ können wir die Folge in polaren Koordinaten beschreiben. Dann hat ein Punkt (x, y) die Darstellung

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} x_n &= r_n\cos\varphi_n \\ y_n &= r_n\sin\varphi_n \end{aligned}$$

Damit wir gegen den Ursprung konvergieren, muss gelten

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

Umgekehrt gilt auch dass für beliebige φ_n für Folgen mit $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ die Folge gegen den Ursprung konvergiert.

Damit gilt:

1. f ist in $\vec{X}_0 = (0,0)^T$ stetig, falls

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - f(0,0) &= 0 \\ \text{bzw. } \lim_{r\to 0} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) &= f(0,0) \end{aligned}$$

2.Umgekeht ist für die Unstetigkeit zu zeigen, dass wir uns auf einem Pfad dem Ursprung nähern können, wo eben nicht gilt $\lim_{r\to 0} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = f(0,0)$, also f ist in $\vec{X}_0 = (0,0)^T$ unstetig, falls

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - f(0,0) = h(\varphi) \neq 0$$

z.B. wenn wir uns auf einer Geraden, also mit einem konstanten Winkel φ uns dem Ursprung nähern und dabei gilt $\lim_{r\to 0} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - f(0,0) = h(\varphi) \neq 0$

Bsp.: Sei

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ für } (0,0) \end{array} \right\}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - f(0,0) &= \lim_{r\to 0} \frac{r^2 \cos\varphi \sin\varphi}{r^2} \\ &= \lim_{r\to 0} \cos\varphi \sin\varphi \\ &= \cos\varphi \sin\varphi \end{aligned}$$

und damit beispielsweise für $\varphi = \frac{\pi}{4}$

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - f(0,0) = \frac{1}{2}$$

und damit Unstetigkeit.

Andererseits ist

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ für } (0,0) \end{array} \right\}$$

stetig, da

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - f(0,0) &= \lim_{r\to 0} \frac{r^3 \cos^2\varphi \sin\varphi}{r^2} \\ &= \lim_{r\to 0} r\cos^2\varphi \sin\varphi \\ &= 0 \end{aligned}$$

Weitere Methoden zum Nachweis von Stetigkeit und Unstetigkeit sind:
1. Unstetigkeit: Grenzwerte entlang der Kurven:
Wir nähern uns dem Ursprung nun aus verschiedenen Richtungen
Entlang der y-Achse: $x = 0, \lim_{y\to 0} f(0,y)$
Entlang der x-Achse $y = 0, \lim_{x\to 0} f(x,0)$
Entlang einer oder mehreren Funktionen mit $g(0) = 0 : y = g(x), \lim_{x\to 0} f(x, g(x))$

Existiert einer der Grenzwerte nicht oder erhält man zwei verschiedene Grenzwerte, so ist die Funktion unstetig.

Bsp.:

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ für } (x,y) = (0,0) \end{array} \right\}$$

Betrachte die Annäherung auf verschiedenen Geraden:
$y = x$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$y = 2x$

$$\lim_{x\to 0} f(x,2x) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{5x^2} = \frac{2}{5}$$

und damit Unstetigkeit.

2. Stetigkeit: Abschätzung durch eine stetige Funktion. Hierbei schätzen wir mit $\varepsilon - \delta -$Kriterium den Betrag durch eine stetige Funktion ab. z.B.

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{xy^2}{x^4+y^2} \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ für } (x,y) = (0,0) \end{array} \right\}$$

Dann ist

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{xy^2}{x^4+y^2} \right| < \left| \frac{xy^2}{y^2} \right| = |x|$$

Wg $x \to 0$ ist auch $|x| \to 0$ und dies liefert die Stetigkeit.

12.9.6 Gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz Stetigkeit

Definition 252 *Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt **gleichmässig stetig**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ (aber unabhängig von $\vec{X}_0$) gibt, so dass*

$$\left| f(\vec{X}) - f(\vec{X}_0) \right| < \varepsilon$$

$\forall \left\| \vec{X} - \vec{X}_0 \right\| < \delta$

Gleichmässige Stetigkeit ist wegen der Unabhängigkeit von $\vec{X}_0$ insbesondere Stetigkeit im gesamten Definitionsbereich D.

Es gilt:

Satz 253 *Ist eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beschränkt und abgeschlossen, so ist f gleichmässig stetig.*

Definition 254 *Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt **Lipschitz-stetig**, wenn es eine Konstante L gibt (unabhängig von $\vec{X}_0$), so dass*

$$\left| f(\vec{X}) - f(\vec{X}_0) \right| \leq L \cdot \left\| \vec{X} - \vec{X}_0 \right\|$$

*Ist in einer Norm $L < 1$ so heisst die Abbildung **Kontraktion**.*

Bem: Für $\vec{Y} = \vec{X}_0$ lautet die Bedingung

$$\left| f(\vec{X}) - f(\vec{Y}) \right| \leq L \cdot \left\| \vec{X} - \vec{Y} \right\|$$

Bsp.: Sei

$$\begin{aligned} \vec{X}_1 &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ \vec{X}_2 &= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ f(\vec{X}) &= x^2 + y^2 \\ D &= [0,2] \times [0,2] \end{aligned}$$

Dann ist f Lipschitz stetig auf D, denn

$$\begin{aligned} \left| f(\vec{X}_1) - f(\vec{X}_2) \right| &\leq \left| x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 \right| \\ &\leq \left| x_1^2 - x_2^2 \right| + \left| y_1^2 - y_2^2 \right| \\ &= |x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2| + |y_1 - y_2| \cdot |y_1 + y_2| \\ &\leq 4 \cdot (|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) \\ &= 4 \cdot \left\| \vec{X}_1 - \vec{X}_2 \right\| \end{aligned}$$

mit der Lipschitz-Konstante L=4.

Satz 255 *Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, dann ist f auf D gleichmässig stetig und in jedem Punkt stetig.*

12.9.7 Fixpunkte im $\mathbb{R}^n$

Definition 256 *Ein Punkt $\vec{X}_0 \in D$ heißt **Nullstelle** einer Funktion $\vec{f}$, falls*

$$\vec{f}(\vec{X}_0) = \vec{0}$$

Damit ergibt sich

Definition 257 *Ein Punkt $\vec{X}^* \in D$ heißt **Fixpunkt** einer Funktion $\vec{\varphi}$, falls*

$$\vec{\varphi}(\vec{X}^*) = \vec{X}^*$$

Damit gilt analog zum $\mathbb{R}^1$

Satz 258 *(Fixpunktsatz von Banach) Sei $\vec{\varphi} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit*

$$\left\| \vec{\varphi}(\vec{X}) - \vec{\varphi}(\vec{Y}) \right\| \leq L \left\| \vec{X} - \vec{Y} \right\|$$

und $L < 1$, dann hat $\vec{\varphi}$ genau einen Fixpunkt.

Zusammenhang Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Während im $\mathbb{R}^1$ alle differenzierbaren Funktionen auch stetig waren, gilt dies im $\mathbb{R}^n$ nicht.

Bsp.: $f(x,y) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ für } (0,0) \end{array} \right\}$. Wir betrachten die partiellen Ableitungen in $(0,0)$. Dort gilt zunächst $f(x,0) = f(0,y) = 0 = f(0,0)$

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 \\ f_y(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 \end{aligned}$$

Aber die Funktion ist wie oben gesehen dort unstetig.
Eine Verschärfung der Differenzierbarkeit liefert damit:

Definition 259 *f heißt **stetig partiell differenzierbar**, wenn alle partiellen Ableitungen in x_i stetige Funktionen (und insbesondere beschränkt) sind.*

Denn in diesem Fall gilt (ohne Beweis):

Satz 260 *Ist f in U partiell differenzierbar und in $\vec{X}_0 \in U$ stetig partiell differenzierbar, so ist f in $\vec{X}_0$ stetig.*

12.9.8 Der Gradient

Wir haben bereits kennengelernt, das ein Vektor in n Unbekannten n erste Ableitungen hat. Diese Ableitungen werden in einem Vektor zusammengefasst:

Definition 261 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge, $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, $\vec{X}_0 = (x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)})^T \in U$, dann heißt*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) \end{pmatrix} &= : \nabla f(x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) \\ &= \operatorname{grad} f(x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) \end{aligned}$$

*der **Gradient von f in** $\vec{X}_0$.*

Der Operator ∇f heißt der **Nabla-Operator**. Kurz: Nabla f.

Bsp.: Sei $\vec{X}_0 = (1,2,3)^T$, $f(x,y,z) = x^2y + z^3 + 2$, dann ist

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \\ 3z^2 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\operatorname{grad} f(1,2,3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 27 \end{pmatrix}$$

Satz 262 *Rechenregeln für Gradienten: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge, $f, g : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} grad(f+g) &= grad(f) + grad(g) && (12.3) \\ grad(\alpha f) &= \alpha \cdot grad(f) && (12.4) \\ grad(f \cdot g) &= g \cdot grad(f) + f \cdot grad(g) && (12.5) \end{aligned}$$

Bew.:
a) Für die i-te Komponente des Gradienten gilt

$$\begin{aligned} (\operatorname{grad}(f+g))_i &= \frac{\partial}{\partial x_i}(f(x)+g(x)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) + \frac{\partial}{\partial x_i} g(x) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(f+g) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) + \frac{\partial}{\partial x_1} g(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} f(x) + \frac{\partial}{\partial x_2} g(x) \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) + \frac{\partial}{\partial x_n} g(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} f(x) \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} g(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} g(x) \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} g(x) \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{grad}(f) + \operatorname{grad}(g) \end{aligned}$$

b) Für die i-te Komponente des Gradienten gilt

$$\begin{aligned} (\operatorname{grad}(\alpha f))_i &= \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha f(x)) \\ &= \alpha \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \end{aligned}$$

und damit

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad}(\alpha f) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\alpha f(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\alpha f(x) \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_n}\alpha f(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha\frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \\ \alpha\frac{\partial}{\partial x_2} f(x) \\ \dots \\ \alpha\frac{\partial}{\partial x_n} f(x) \end{pmatrix} \\
&= \alpha \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} f(x) \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) \end{pmatrix} \\
&= \alpha \operatorname{grad}(f)
\end{aligned}
$$

c) Für die i-te Komponente des Gradienten gilt

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{grad}(f \cdot g))_i &= \frac{\partial}{\partial x_i}(f(x) \cdot g(x)) \\
&= g(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) + f(x) \frac{\partial}{\partial x_i} g(x)
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad}(f \cdot g) &= \begin{pmatrix} g(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) + f(x) \frac{\partial}{\partial x_1} g(x) \\ g(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} f(x) + f(x) \frac{\partial}{\partial x_2} g(x) \\ \dots \\ g(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) + f(x) \frac{\partial}{\partial x_n} g(x) \end{pmatrix} \\
&= g(x) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} f(x) \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) \end{pmatrix} + f(x) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} g(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} g(x) \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} g(x) \end{pmatrix} \\
&= g \cdot \operatorname{grad}(f) + f \cdot \operatorname{grad}(g)
\end{aligned}
$$

12.9.9 Die Tangentialebene

Wir betrachten nun wieder eine Funktion in zwei Unbekannten $z = f(x, y)$ sowie einen festen Punkt $z_0 = f(x_0, y_0)$. Wir gehen weiterhin davon aus, dass f stetig partiell differenzierbar ist. Betrachten wir nun in (x_0, y_0, z_0) alle Tangenten, so haben diese alle den gleichen Normalenvektor und bilden somit eine Ebene

$$
T = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \vec{v}_1 + \mu \cdot \vec{v}_2
$$

wobei $\vec{v}_i$ nun zwei beliebige, verschiedene Tangentenvektoren sind. Betrachten wir die Tangenten entlang der Koordinatenachsen so erhalten wir

$$T = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Statt der vektoriellen Darstellung können wir auch den Ansatz verwenden

$$T(x, y) = a + b \cdot (x - x_0) + c \cdot (y - y_0)$$

Die Tangentialebene hat zunächst den gleichen Funktionswert

$$z_0 = f(x_0, y_0) = T(x_0, y_0) = a$$

und die gleiche Steigung in die Koordinatenrichtungen

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0) &= T_x(x_0, y_0) = b \\ f_y(x_0, y_0) &= T_y(x_0, y_0) = c \end{aligned}$$

und damit erhalten wir die Gleichung der Tangentialebene

$$T(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Bsp.: Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y) = 4x^2y + xy^2 + 1$$

und den Punkt

$$(x_0, y_0) = (1, 2)$$

Die Tagentialebene ergibt sich aus den Werten

$$\begin{aligned} z_0 &= f(x_0, y_0) = 8 + 4 + 1 = 13 \\ f_x(x, y) &= 8xy + y^2 \\ f_x(x_0, y_0) &= 16 + 4 = 20 \\ f_y(x, y) &= 4x^2 + 2xy \\ f_y(x_0, y_0) &= 4 + 4 = 8 \\ T(x, y) &= 13 + 20 \cdot (x - 1) + 8 \cdot (y - 2) \end{aligned}$$

bzw vektoriell

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Tangentialebene im $\mathbb{R}^n$ wird einer Funktion in $\vec{X} = (x_1, ..., x_n)^T$ mit

$$f(\vec{X}) = f(x_1, ..., x_n)$$

an der Stelle

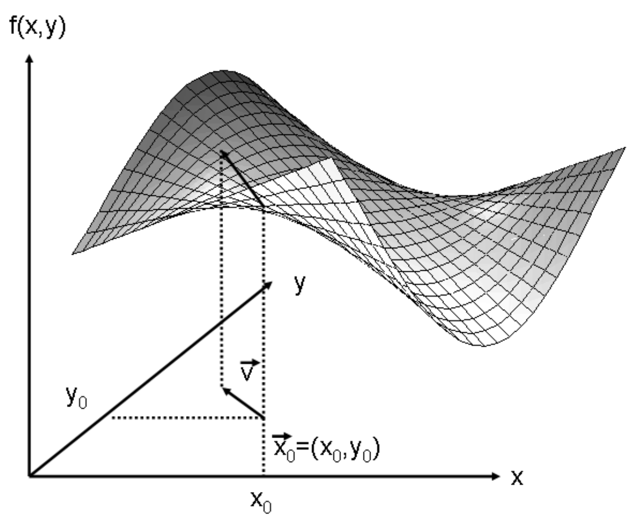
$$\vec{X}_0 = (x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)})^T$$

analog definiert durch

$$\begin{aligned} T(\vec{X}) &= f(\vec{X}_0) + f_{x_1}(\vec{X}_0) \cdot (x_1 - x_1^{(0)}) + f_{x_2}(\vec{X}_0) \cdot (x_2 - x_2^{(0)}) + ... + f_{x_n}(\vec{X}_0) \cdot (x_n - x_n^{(0)}) \\ &= f(\vec{X}_0) + \sum f_{x_k}(\vec{X}_0) \cdot (x_k - x_k^{(0)}) \\ &= f(\vec{X}_0) + \nabla f \cdot (\vec{X} - \vec{X}_0) \end{aligned}$$

12.9.10 Die Richtungsableitung

Bisher betrachten wir Schnitte und damit auch die Steigungen nur entlang der Koordinatenachsen. Also beispielsweise war f_x die Steigung in Richung des ersten Einheitsvektors $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Entsprechend f_y die Steigung in Richung des zweiten Einheitsvektors $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sei nun $\vec{v} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ ein Vektor der Länge 1, d.h. $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1$, dann sprechen wir ebenfalls von einem Einheitsvektor. Nun schneiden wir entlang dieses Vektors die Funktion un beobachten den Anstieg der Funktion in dieser Richtung.



Und wir definieren:

Definition 263 *Die Ableitung in Richtung des Vektors $\vec{v} = (e_1, ..., e_n)^T$ mit $\|\vec{v}\| = 1$ heißt* ***Richtungsableitung*** *$D_v(f)$ von f in Richtung von $\vec{v}$. Es ist*

$$\begin{aligned} D_v(f) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{X} + h\vec{v}) - f(\vec{X})}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + he_1, ..., x_n + he_n) - f(x_1, ..., x_n)}{h} \end{aligned}$$

Häufig wird die Richtungsableitung auch notiert mit

$$D_v(f) =: \frac{\partial f}{\partial v}$$

Falls die vorgegebene Suchrichtung nicht die Länge eins hat, lässt sich zu einem beliebigen Vektor $\vec{w} \neq \vec{0}$ der Vektor $\vec{v} = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$ ein Vektor mit gleicher Richtung (da er nur mit einem positiven Skalar multipliziert wird) und der Länge

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| &= \left\| \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} \right\| \\ &= \frac{1}{\|\vec{w}\|} \|\vec{w}\| = 1 \end{aligned}$$

erzeugen.
Bsp.: Wir betrachten

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 - y \\ x_0 &= y_0 = 1 \\ \vec{w} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} D_v(f) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h/\sqrt{2}, y_0 + h/\sqrt{2}) - f(x_0, y_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(1 + \frac{h}{\sqrt{2}})^2 - (1 + \frac{h}{\sqrt{2}}) - 0}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(1 + \frac{h}{\sqrt{2}})(1 + \frac{h}{\sqrt{2}} - 1)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \frac{h}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Diese Berechnung erweist sich i.A. als umständlich. Daher werden wir eine alternative Berechnung herleiten.

Wir betrachten nun die Zerlegung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ und die Tangentialebene im Punkt (x_0, y_0)

$$T = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Also liegen zunächst einmal die Vektoren $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ und $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ in der Ebene. Weiterhin aber auch der Vektor $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ D_v(f) \end{pmatrix}$.
Da die drei Vektoren in einer Ebene liegen, muss gelten

$$(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \cdot \vec{u}_3 = 0$$

also wegen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_x(x_0, y_0) \\ -f_y(x_0, y_0) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} -f_x(x_0, y_0) \\ -f_y(x_0, y_0) \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ D_v(f) \end{pmatrix} \right) = -f_x(x_0, y_0) \cdot e_1 - f_y(x_0, y_0) \cdot e_2 + D_v(f) = 0$$

bzw.

$$\begin{aligned} D_v(f) &= f_x(x_0, y_0) \cdot e_1 + f_y(x_0, y_0) \cdot e_2 \\ &= \left(\begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \operatorname{grad} f(x_0, y_0) \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

Also im obigen Beispiel:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f &= \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \end{pmatrix} \\ \operatorname{grad} f(x_0, y_0) &= \operatorname{grad} f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ D_v(f) &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Damit lässt sich nun zu jeder vorgegebenen Suchrichtung $\vec{v}$ der Länge 1 - bei anderen Suchrichtung muss zunächst normiert werden - berechnen, wie groß die Steigung in dieser Suchrichtung ist. Hier stellt sich nun die Frage, welche Suchrichtung diejenige mit der größten Steigung ist. Hier hilft eine andere Definition des Skalarproduktes. Es ist zum einen mit der Scharz-Ungleichung

$$D_v(f) = \operatorname{grad} f \cdot \vec{v} \leq \|\operatorname{grad} f\| \cdot \|\vec{v}\| = \|\operatorname{grad} f\|$$

oder mit Hilfe des Cosinus-Satz noch genauer

$$\begin{aligned} D_v(f) &= \operatorname{grad} f \cdot \vec{v} \\ &= \|\operatorname{grad} f\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\varphi \\ &= \|\operatorname{grad} f\| \cdot \cos\varphi \end{aligned}$$

wobei φ der Winkel zwischen $\operatorname{grad} f$ und $\vec{v}$ ist.

Damit wird der Wert maximal für $\cos\varphi = 1$, d.h. $\varphi = 0$. Dies bedeutet aber das Suchrichtung und Gradient in die gleiche Richtung zeigen und sich nur in der Länge unterscheiden. Also muß dann gelten

$$\vec{v} = \frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}$$

und der maximale Wert ist dann

$$D_v(f) = \|\operatorname{grad} f\|$$

Andererseits wird die Steigung minimal - also der größtmögliche Abfall der Funktion - für $\cos\varphi = -1$, d.h. $\varphi = \pi$.
Dort ist dann

$$\vec{v} = -\frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}$$

und der maximale Wert ist dann

$$D_v(f) = -\|\operatorname{grad} f\|$$

Ist die Suchrichtung senkrecht zum Gradienten, so ist der $\cos\varphi = 0$ und damit $D_v(f) = 0$, welches bedeutet, dass wir uns auf gleichem Niveau, also entlang der Höhenlinie bewegen.

Insgesamt gilt falls wir nur die Richtung - also ohne Normierung - betrachten:

$\boxed{\vec{v} = \frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|} \text{ ist die Richtung des steilsten Anstiegs von } f}$

und ebenso umgekehrt:

$\boxed{\vec{v} = -\frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|} \text{ ist die Richtung des steilsten Abstiegs von } f}$

und schliesslich

$\boxed{\text{für } \vec{v} \perp \operatorname{grad} f \text{ ist die Richtung der Höhenlinie}}$

Bsp.: $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^3 \qquad in\ x_0 = 1, y_0 = 1$

In welcher Richtung wächst die Funktion im gewählten Punkt am stärksten an?

$$f_x(x,y) = 2x + 2y \qquad \Longrightarrow f_x(1,1) = 4$$
$$f_y(x,y) = 2x + 3y^2 \qquad \Longrightarrow f_y(1,1) = 5$$

$\Longrightarrow grad\ f = \begin{pmatrix} 2x+2y \\ 2x+3y^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow grad\ f(1,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ also ist

$$\vec{v} = \frac{gradf(1,1)}{\|gradf(1,1)\|} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{41}} \\ \frac{5}{\sqrt{41}} \end{pmatrix}$$

die Richtung des stärksten Anstiegs.

Bem.: Aus zwei bekannten Richtungsableitungen kann im Übrigen auch der Gradient oder die partiellen Ableitungen ohne Kenntnis der Funktion berechnet werden. Sei $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} D_{v_1}(f) &= e_1 \cdot f_x + e_2 \cdot f_y \\ D_{v_2}(f) &= e_3 \cdot f_x + e_4 \cdot f_y \end{aligned}$$

erhalten wir ein lineares Gleichungssystem in den beiden Unbekannten f_x und f_y.

Besipiel: Habe eine Funktion im Punkt (1,1) die Richtungsableitung

$$\begin{aligned} D_{v_1}(f) &= 3 \text{ für } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ & \text{und} \\ D_{v_2}(f) &= 2 \text{ für } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned} 3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot f_x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot f_y \\ 2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot f_x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot f_y \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} 5 &= 2\frac{1}{\sqrt{2}} f_y = \sqrt{2} \cdot f_y \\ \text{also} &: \quad f_y(1,1) = \frac{5}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 1 &= 2\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot f_x \\ \text{also:} \qquad & f_x(1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

12.10 Das vollständige Differential

Wir betrachten nun wieder die Gleichung der Tangentialebene

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0,y_0) \cdot (y - y_0) \tag{12.6}$$

bzw.

$$z - z_0 = f(x,y) - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0,y_0) \cdot (y - y_0) \tag{12.7}$$

$$\triangle z = f_x(x_0,y_0) \cdot \triangle x + f_y(x_0,y_0) \cdot \triangle y \tag{12.8}$$

Definition 264 *Unter dem **vollständigen Differential** der Funktion $z = f(x,y)$ im Punkt (x_0,y_0) versteht man den Ausdruck*

$$dz = f_x(x_0,y_0) \cdot dx + f_y(x_0,y_0) \cdot dy \tag{12.9}$$

Also: Ändert sich der Input-Wert x_0 zu x ($\triangle x = x - x_0$) und y_0 zu y ($\triangle y = y - y_0$), so ändert sich der Funktionswert von $z = f(x_0,y_0)$ um $\triangle z$. Damit ist der neue Funktionswert (der Tangentialebene) $z + \triangle z$.

Bsp: $f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad x_0 = 3;\ y_0 = 2$

$z = f(x_0,y_0) = 9 + 4 = 13$

$f_x = 2x \Longrightarrow f_x(x_0,y_0) = 6$
$f_y = 2y \Longrightarrow f_y(x_0,y_0) = 4$

(Tangentialebene: $f_1(x,y) = 13 + 6 \cdot (x - 3) + 4 \cdot (y - 2)$)

Differential: $\qquad dz = 6dx + 4dy$

Wie wird sich der Funktionswert ändern, wenn man zum Punkt $x_1 = 2,5$, $y_1 = 2,5$ geht?

Damit $dx = -0,5\ dy = 0,5$ und damit $dz = 6 \cdot (-0,5) + 4 \cdot 0,5 = -1$

Näherung: $z + dz = 13 - 1 = 12$

Exakt: $z = 12,5$

Definition 265 *Unter dem **vollständigen Differential** einer Funktion $f(x_1, ..., x_n)$ versteht man*

$$dz = \sum_{i=1}^{n} f_{xi} \cdot dx_i \tag{12.10}$$
$$= f_{x_1} \cdot dx_1 + f_{x_2} \cdot dx_2 + f_{x_3} \cdot dx_3 + ... + f_{x_n} \cdot dx_n \tag{12.11}$$

Bem.: Schreibweise als Skalarprodukt

$$dz = \left(\begin{pmatrix} f_{x_1} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} \right) = \left(grad\ f, \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} \right) \tag{12.12}$$

12.10.1 Anwendung: Fehlerrechnung

Betrachten wir das Differential

$$dz = f_{x_1} \cdot dx_1 + f_{x_2} \cdot dx_2 + f_{x_3} \cdot dx_3 + ... + f_{x_n} \cdot dx_n$$

und kennen für die Fehler dx_i nur den Bereich ohne Vorzeichen, z.B. $\pm 0,01$, so wird stets der ungünstigste Fall aufsummiert, in dem nur die Beträge betrachtet werden. Da auch die Ableitungen negativ werden können, müssen auch hier die Beträge gebildet werden:

$$\triangle\ z_{\max} \leq |f_{x_1}| \cdot |\triangle\ x_1| + |f_{x_2}| \cdot |\triangle\ x_2| + ... + |f_{x_n}| \cdot |\triangle\ x_n|$$

Beispiel: Die Hypotenusenlänge eines Dreiecks mit den Kathetenlängen x und y werde berechnet gemäß

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Wir messen mit einer Genauigkeit von 0,1cm die Werte

$$x = 4cm$$
$$y = 3cm$$

Die berechnete Kathetenlänge ist 5cm. Wie genau ist dieser Wert angesichts der Eingabefehler?

Es ist

$$\triangle\ z_{\max} \leq |f_x| \cdot |\triangle\ x| + |f_y| \cdot |\triangle\ y|$$

mit

$$|\triangle\ x| = |\triangle\ y| = 0,1cm$$

und

$$f_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$f_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

also

$$\begin{aligned} f_x(4,3) &= \frac{4}{5} \\ f_y(4,3) &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Also

$$\triangle\ z_{\max} \leq \frac{4}{5} \cdot 0,1 + \frac{3}{5} \cdot 0,1 = 0,14$$

Der wahre Wert liegt somit im Intervall $[4,86; 5,14]$

12.10.2 Der relative Fehler

Wir haben im vorigen Abschnitt die Größe $\triangle\ z_{\max}$ berechnet - den absoluten Fehler. Eine weitere wichtige Größe ist der relative Fehler

$$\frac{\triangle\ z}{z}$$

anhand der möglichen relativen Eingabefehler

$$\frac{\triangle\ x}{x}, \frac{\triangle\ y}{y}$$

Hier kann kein allgemeingültiges Verfahren angegeben werden Jedoch am Beispiel wird klar, was zu tun ist:

Sei $z = f(x,y) = x^2y^3$. Dann ist $f_x(x,y) = 2xy^3$ und $f_y(x,y) = 3x^2y^2$. Es ist $\triangle z \leq \left|2xy^3\right| |\triangle x| + \left|3x^2y^2\right| |\triangle y|$ und daher

$$\begin{aligned} \frac{\triangle z}{z} &\leq \frac{\left|2xy^3\right| \cdot |\triangle x| + \left|3x^2y^2\right| \cdot |\triangle y|}{|x^2y^3|} \\ &= \frac{2}{|x|} |\triangle x| + \frac{3}{|y|} |\triangle y| \\ &= 2\left|\frac{\triangle\ x}{x}\right| + 3\left|\frac{\triangle\ y}{y}\right| \end{aligned}$$

Dieses Verfahren lässt sich auf Funktionen der Gestalt

$$z = f(x,y) = c \cdot x^a \cdot y^b$$

verallgemeinern und dort gilt

$$\frac{\triangle z}{z} \leq a\left|\frac{\triangle\ x}{x}\right| + b\left|\frac{\triangle\ y}{y}\right|$$

Beispiel: Sie möchten das Volumen eines Quaders mit den Seitenlängen a,b und c, welche mit relativen Meßfehlern $\frac{\triangle a}{a} = \frac{\triangle b}{b} = \frac{\triangle c}{c} = \varepsilon$ behaftet sind, mit einer Genauigkeit von $\left|\frac{\triangle z}{z}\right| \leq 0,01 = 1\%$ berechnen gemäß $z = a \cdot b \cdot c$. Wie groß darf der Eingangfehler ε maximal sein ?

Es ist

$$\begin{aligned} z &= f(a,b,c) = a \cdot b \cdot c \\ f_a &= b \cdot c \\ f_b &= a \cdot c \\ f_c &= a \cdot b \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \triangle & \quad z \leq |f_a| \cdot |\triangle a| + |f_b| \cdot |\triangle b| + |f_c| \cdot |\triangle c| \\ &= |b \cdot c| \cdot |\triangle a| + |a \cdot c| \cdot |\triangle b| + |a \cdot b| \cdot |\triangle c| \\ \frac{\triangle z}{z} &\leq \frac{|\triangle a|}{|a|} + \frac{|\triangle b|}{|b|} + \frac{|\triangle c|}{|c|} = \left|\frac{\triangle a}{a}\right| + \left|\frac{\triangle b}{b}\right| + \left|\frac{\triangle c}{c}\right| \leq 3\varepsilon \leq 0,01 \end{aligned}$$

Also ist zulässig

$$\varepsilon \leq \frac{0,01}{3}$$

12.10.3 Parametrische Funktionen

Bsp.: Wir möchten nun alle Punkte des Einheitskreises, also alle Punkte mit

$$x^2 + y^2 = 1$$

als Funktion beschreiben. Auflösen dieser Gleichung nach y liefert

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

und wir erhalten zwei (algebraische) Funktionen. Die Berechnung erscheint etwas umständlich und es ist auch uneinsichtig, warum gerade y in Abhängigkeit von x und nicht umgekehrt gezeichnet wurde. Einsichtiger wäre das Zeichnen des Einheitskreises als eine zeitliche Funktion, bei der zu jedem Zeitpunkt t der Stift sich an einer Koordinate $(x(t), y(t))$ befindet. Somit liesse sich ein beliebiger Pfad durch die $x - y-$Ebene beschreiben und man wäre nicht an den engen Funktionsbegriff $y = f(x)$ gebunden. Dies liefert:

Definition 266 *Seien $x(t)$ und $y(t)$ in t stetige Funktionen. Die Menge*

$$\{(x,y)|x = x(t), y = y(t), t \in \mathbb{R} \text{ (oder } t \in [a,b])\}$$

*heißt **Kurve**. Die Darstellung $t \to \mathbb{R}^2$*

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Parameterdarstellung der Kurve.
Analog wird eine Kurve im $\mathbb{R}^3$ beschrieben durch

$$\{(x, y, z)|x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in \mathbb{R} \textit{ (oder } t \in [a, b]\textit{)}\}$$

Bem. Aus dem Endresultat - dem Graphen der Kurve - erkennt man jedoch nicht wie schnell die Kurve gezeichnet wurde, also wie die Ableitung der Funktion nach der Zeit ist.

Übung: Skizzieren Sie hierzu den Graphen

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

an den Zeitpunkten $t = 0, 1, 2$

Bem.: Die Funktionen $y = f(x)$ erhalten wir aus der Abbildung

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Schliesslich sei nun noch bemerkt wie der Einheitskreis beschrieben wird:

$$\begin{aligned} \vec{X}(t) &= \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \\ t &= [0, 2\pi] \end{aligned}$$

denn es ist zu jedem Zeitpunkt $x^2 + y^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$

12.10.4 Die Kettenregel

Betrachten wir nun Funktionen $x = x(t), y = y(t)$ und $z = f(x(t), y(t)) = g(t)$ so liefert das Differential

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Division durch dt liefert nun

$$\frac{dz}{dt} = g'(t) = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Bem.: Die Kettenregel lässt sich somit auch auf beliebig viele Unbekannte erweitern.

Bsp.:

$$\begin{aligned} z &= f(x, y) = x^2 y + y^2 + 1 \\ x(t) &= e^t \\ y(t) &= t^2 \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= 2xy \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= x^2 + 2y \\
\frac{dx}{dt} &= e^t \\
\frac{dy}{dt} &= 2t
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= 2xy \cdot e^t + (x^2 + 2y) \cdot 2t \\
&= 2e^t t^2 + (e^{2t} + 2t^2) \cdot 2t \\
&= 2t^2 e^{2t} + 2te^{2t} + 4t^3
\end{aligned}$$

Bem.: Das gleiche Ergebnis erhalten wir auch, wenn wir zunächst einsetzen und dann differenzieren

$$\begin{aligned}
z &= f(x, y) = x^2 y + y^2 + 1 \\
&= e^{2t} t^2 + t^4 + 1 \\
\frac{dz}{dt} &= 2e^{2t} t^2 + 2te^{2t} + 4t^3 \\
&= 2t^2 e^{2t} + 2te^{2t} + 4t^3
\end{aligned}$$

Allgemein lautet damit die Kettenregel im $\mathbb{R}^n$

Satz 267 *Sei $z = f(\vec{X}) = f(\vec{X}(t)), \vec{X}(t)$ stetig in jeder Komponente x_k. Dann ist*

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt}$$

Bsp.: Sei $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, x(t) = t^2, y(t) = e^t, z(t) = 5t$, dann ist

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= 2x \cdot 2t + 2y \cdot e^t + 2z \cdot 5 \\
&= 2t^2 \cdot 2t + 2e^t \cdot e^t + 2 \cdot 5t \cdot 5 \\
&= 4t^3 + 2e^{2t} + 50t
\end{aligned}$$

12.10.5 Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern

Analog erhalten wir für Funktionen

$$\begin{aligned}
& f(x, y) \\
x &= x(u, v) \\
y &= y(u, v)
\end{aligned}$$

durch das Differential - in dem wir durch du und dv dividieren -

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\end{aligned}$$

bzw in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Bsp.: Sei $z = f(x,y) = x^2y^3, x = x(u,v) = u^2 - v, y = y(u,v) = v^2 + 2u$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\\ &= 2xy^3 2u + 3x^2y^2 2\\ &= 4(u^2 - v)(v^2 + 2u)^3 u + 6(u^2 - v)^2(v^2 + 2u)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\\ &= 2xy^3(-1) + 3x^2y^2 2v\\ &= -2(u^2 - v)(v^2 + 2u)^3 + 6(u^2 - v)^2(v^2 + 2u)^2 v\end{aligned}$$

Bem. Beim Übergang einer Funktion zu Polarkoordinaten ergibt sich somit für eine Funktion $f(x,y)$ mit

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Diese Umrechnung ist auch für Punkte ausserhalb des Ursprungs - also $r > 0$ - eindeutig da

$$\det \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

ist.

Analog lässt sich für Funktionen in 3 Unbekannten $f(x, y, z)$ durch Einführung von Kugelkoordinaten r, φ, θ (φ Drehwinkel,θ Kippwinkel) mit

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\sin\theta \\ y &= r\sin\varphi\sin\theta \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

berechnen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \\ -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & 0 \\ r\cos\varphi\cos\theta & r\sin\varphi\cos\theta & -r\sin\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

12.10.6 Anwendung: Implizite Differentiation

Betrachte die Funktion $z = F(x, y(x)) = 0$ als Höhenlinie einer zweidimensionalen Funktion $F(x, y)$ zum Wert 0 und einen Punkt auf dieser Höhenlinie mit $z_0 = F(x_0, y_0) = 0$, dann gilt gemäss Kettenregel

$$\frac{dz}{dx} = 0 = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \tag{12.13}$$

$$= F_x \cdot \frac{dx}{dx} + F_y \cdot \frac{dy}{dx} \tag{12.14}$$

und insbesondere in (x_0, y_0)

$$0 = F_x(x_0, y_0) + F_y(x_0, y_0) \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'} \tag{12.15}$$

$$y' = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} \tag{12.16}$$

Bem.: Häufig wird auch die folgende Schreibweise verwendet

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}$$

Beispiel: Geg.$x^2 + y^2 = 1 \Longrightarrow F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

Wie lautet die Tangentensteigung in $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$?

Zeige zunächst: Der Punkt erfüllt die Vorraussetzung $F(x, y) = 0$:

$$(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (-\frac{1}{\sqrt{2}})^2 - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0 \tag{12.17}$$

Dann:

$$F_x(x_0, y_0) = 2x_0 = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$F_y(x_0, y_0) = 2y_0 = \frac{2}{-\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow y' = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} = -\frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = 1$$

Bem.:

1. Die implizite Differentiation kann also insbesondere angewendet werden, wenn sich eine Funktion $F(x, y) = 0$ nicht oder nicht einfach nach y auflösen lässt.
2. Die Funktion muss ggf. auf die Form $F(x, y) = 0$ gebracht werden.
3. Es ist immer zu testen, ob der vorgegebene Punkt die Bedingung $F(x, y) = 0$ erfüllt.
4. Die Rechnung kann an einem beliebigen Punkt (x_0, y_0) durchgeführt werden und somit auch eine Ableitungsfunktion berechnen.

Anwendungsbeispiel:

Wir betrachten die Van-der-Waals-Gleichung

$$(p + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT \tag{12.18}$$

als Funktion von p und V (der Rest sei hier konstant).

1. Wie lautet der Wert $\dfrac{\partial p}{\partial V}$?
Wir betrachten die Gleichung

$$F(p, V) = (p + \frac{a}{V^2})(V - b) - RT = 0 \tag{12.19}$$

und differenzieren implizit:

$$\frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial V}}{\frac{\partial F}{\partial p}} \tag{12.20}$$

mit

$$\frac{\partial F}{\partial V} = -(V-b)\frac{2a}{V^3} + p + \frac{a}{V^2} \tag{12.21}$$

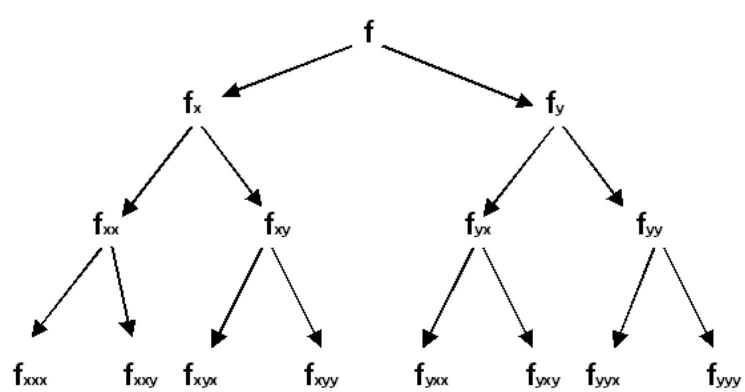
$$\frac{\partial F}{\partial p} = V - b \tag{12.22}$$

und damit

$$\frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{-(V-b)\frac{2a}{V^3} + p + \frac{a}{V^2}}{V-b} \tag{12.23}$$

12.11 Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Analog zum eindimensionalen Fall kann eine Funktion mehrmals hintereinander differenziert werden ($f, f', f'', f^{(3)}, ...$). Die Anzahl der Ableitungen wird mit der Ordnung der Ableitung bezeichnet. Die partiellen Ableitungen höherer Ordnung erhält man durch mehrmaliges partielles differenzieren. Es gibt jedoch mehrere partielle Ableitungen einer bestimmten Ordnung (so gibt es nicht EINE zweite Ableitung, sondern man kann entweder zweimal nach x, zweimal nach y, oder je einmal nach x und y differenzieren).



Ist es dabei von Bedeutung, ob zuerst nach x und dann nach y differenziert wird oder umgekehrt?

Beispiel: $f(x,y) = x^2y + 3y - x + y^2$

1. Ordnung: $f_x = 2xy - 1 \qquad f_y = x^2 + 3 + 2y$

2. Ordnung: $f_{xx} = 2y \qquad f_{xy} = 2x \qquad f_{yx} = 2x \qquad f_{yy} = 2$

Wir sehen hier $f_{xy} = f_{yx}$ Zufall?

Satz 268 *Satz von Schwarz: Sind die partiellen Ableitungen k-ter Ordnung einer Funktion stetige Funktionen, so darf die Reihenfolge der Differentiation beliebig vertauscht werden.*

D.h.: $f_{xy} = f_{yx} \qquad f_{xxxyy} = f_{yxyxx} \qquad f_{xyz} = f_{zyx}$

Bew.: für 2 Unbekannte und die zweite Ableitung:
Es ist

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

und damit - Vertauschbarkeit der Grenzwerte ist erlaubt, da alle Grenzwerte existieren:

$$\begin{aligned}
f_{xy}(x_0, y_0) &= \lim_{l \to 0} \frac{f_x(x_0, y_0 + l) - f_x(x_0, y_0)}{l} \\
&= \lim_{l \to 0} \frac{1}{l} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + l) - f(x_0, y_0 + l)}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \\
&= \lim_{l \to 0} \frac{1}{l} \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (f(x_0 + h, y_0 + l) - f(x_0, y_0 + l) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0)) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \lim_{l \to 0} \frac{1}{l} \left(f(x_0 + h, y_0 + l) - f(x_0 + h, y_0) - (f(x_0, y_0 + l) - f(x_0, y_0) \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \lim_{l \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + l) - f(x_0 + h, y_0)}{l} - \frac{f(x_0, y_0 + l) - f(x_0, y_0)}{l} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \lim_{l \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + l) - f(x_0 + h, y_0)}{l} - \lim_{l \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + l) - f(x_0, y_0)}{l} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f_y(x_0 + h, y_0) - f_y(x_0, y_0)}{h} = f_{yx}(x_0, y_0)
\end{aligned}$$

12.11.1 Divergenz und Rotation

Wir betrachten nun Funktionen

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

also

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \vec{f}$$

Wir bezeichnen nun mit dem Nabla Operator (oder dem Gradienten ohne Argument)

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe dieser Notation können wir definieren:

Definition 269 *Wir bezeichnen mit*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{f} \quad : &= \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} f_1(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial y} f_2(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial z} f_3(x,y,z) \end{aligned}$$

die Divergenz von $\vec{f}$ *und mit*

$$\begin{aligned} rot\ \vec{f} \quad : &= \vec{\nabla} \times \vec{f} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} f_3(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial z} f_2(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial z} f_1(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial x} f_3(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial y} f_1(x,y,z) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

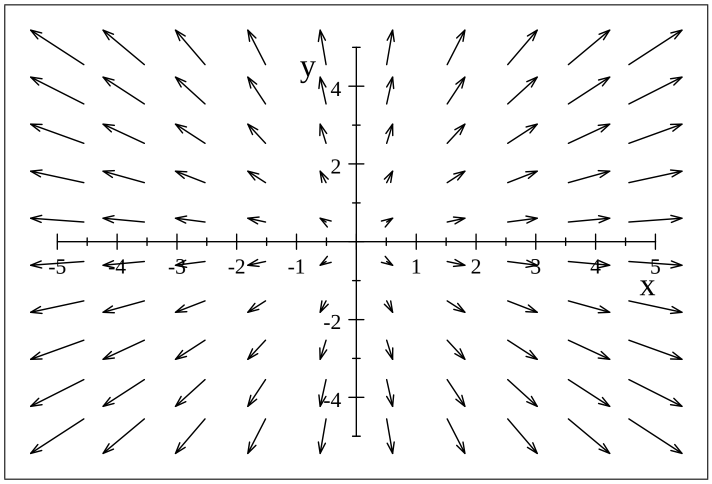
die ***Rotation von*** $\vec{f}$

Bem.: Die Divergenz ist also ein Skalar, die Rotation ein Vektor.

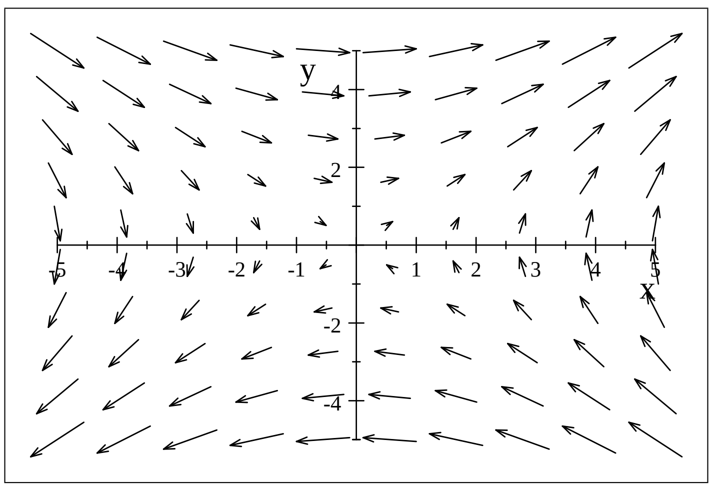
Definition 270 *Die Punkte mit* $\operatorname{div} \vec{f} > 0$ *heißen* ***Quellen*** *des Vektorfeldes,* $\operatorname{div} \vec{f} < 0$ *heißen* ***Senken.*** *Gilt stets* $\operatorname{div} \vec{f} = 0$*, so heißt die Funktion quellenfrei.Gilt rot* $\vec{f} = \vec{0}$*, so heisst das Feld wirbelfrei.*

Physikalisch bedeutet dies: Ist in einem Punkt $\operatorname{div} \vec{f} > 0$, so wird in diesem Punkt die vorhandene Menge nicht erhalten, sondern zusätzlich zugeführt, bei Senken verschwindet diese Grösse. Die Rotation beschreibt hingegen, ob und wie schnell sich ein mitschwimmender Körper drehen würde. Da das Ergebnis vektoriell ist, gibt dieser auch die Drehachse mit an.

Besipiele: 1. Wirbelfreies Gradientenfeld mit Quellen



2. Wirbel im Magnetfeld



Bem. Es ist

1.
$$rot\,\mathrm{grad}\, f = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}(f) = \vec{0}$$

2.
$$\mathrm{div}\, rot\ \vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{f}\right) = 0$$

Bem.: Es ist als Berechnungshilfe für die Rotation mit den i-ten Einheitsvektoren geeignet:

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1(x,y,z) & f_2(x,y,z) & f_3(x,y,z) \end{pmatrix} \\ = \ & rot\ \vec{f} \end{aligned}$$

Definition 271 *Die Matrix*

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

heisst Jacobi-Matrix von $\vec{f}$.

Bem. Die Jacobi-Matrix beinhaltet alle Werte, die zur Berechnung der Rotation und Divergenz nötig sind.

Bsp.:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \begin{pmatrix} x^2 - yz \\ xyz \\ x^2 - y^2 - z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dann ist

$$J = \begin{pmatrix} 2x & -z & -y \\ yz & xz & xy \\ 2x & -2y & -1 \end{pmatrix}$$

Die Divergenz ist die Summe der Diagonalkomponenten, also

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{f} &:= \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} f_1(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial y} f_2(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial z} f_3(x,y,z) \\ &= 2x + xz - 1 \end{aligned}$$

und schliesslich die Rotation

$$\begin{aligned} rot\ \vec{f} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} f_3(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial z} f_2(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial z} f_1(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial x} f_3(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial y} f_1(x,y,z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2y - xy \\ -y - 2x \\ yz + z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

12.12 Die Taylorentwicklung für $f(x,y)$

Zur Erinnerung:

12.12.1 Eindimensional

Zur Wiederholung:

Stelle eine Funktion $f(x)$ als Polynom um einen vorgegeben Entwicklungspunkt x_0 dar, also:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + a_4(x - x_0)^4 + \dots$$

Es gilt:

$$a_0 = f(x_0)$$

Nun berechnet man die Ableitungen $f^{(k)}(x)$ und wertet diese an der Stelle x_0 aus.

$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x_0)^3 + \dots$

und somit

$$a_1 = f'(x_0)$$

Weiterhin:

$f"(x) = 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + 12a_4(x - x_0)^2 + \dots$ und damit
$f''(x_0) = 2a_2$ bzw.

$$a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$$

$f^{(3)}(x_0) = 6a_3$ bzw. $a_3 = \dfrac{f^{(3)}(x_0)}{6}$ usw.

Allgemein gilt:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

und damit für die Reihenentwicklung:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}$$

Besonders gut geeignet sind die Taylorreihenentwicklungen in der Nähe von x_0. Daher betrachten wir nun $x = x_0 + h$ und es ergibt sich:

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k$$

Insbesondere ergibt sich bei Abbruch der Reihe nach dem quadratischen Glied die oben verwendete Formel:

$$\boxed{f_2(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0)}$$

12.12.2 Zweidimensional

Völlig analog zum eindimensionalen Fall wird die Funktion $f(x, y)$ als Polynom in x und y um einen Entwicklungspunkt (x_0, y_0) beschrieben.

$$\begin{aligned} f(x,y) = a_{00} \quad & +a_{10}(x-x_0) + a_{01}(y-y_0) \\ & +a_{20}(x-x_0)^2 + a_{11}(x-x_0)(y-y_0) + a_{02}(y-y_0)^2 \\ & +a_{30}(x-x_0)^3 + a_{21}(x-x_0)^2(y-y_0) \\ & \qquad +a_{12}(x-x_0)(y-y_0)^2 + a_{03}(y-y_0)^3 \\ & +\dots \end{aligned}$$

und damit:

$$f(x_0, y_0) = a_{00}$$

$f_x(x,y) = a_{10} + 2a_{20}(x-x_0) + a_{11}(y-y_0) + 3a_{30}(x-x_0)^2 + \dots$

$\Rightarrow$

$$f_x(x_0, y_0) = a_{10}$$

analog:

$$f_y(x_0, y_0) = a_{01}$$

$f_{xx}(x,y) = 2a_{20} + 6a_{30}(x-x_0) + \dots$
$\Longrightarrow f_{xx}(x_0, y_0) = 2a_{20}$ bzw.

$$a_{20} = \frac{f_{xx}(x_0, y_0)}{2}$$

Wiederum analog:

$$a_{02} = \frac{f_{yy}(x_0, y_0)}{2}$$

und für die gemischte Ableitung:

$f_{xy}(x,y) = a_{11} + 2a_{21}(x-x_0) + 2a_{12}(y-y_0) + \dots$
$\Longrightarrow$

$$f_{xy}(x_0, y_0) = a_{11}$$

Es ergibt sich die Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^2$

Satz 272 *Für $f(x,y)$ ist die quadratische Approximation*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)\\ &\quad+\frac{f_{xx}(x_0,y_0)}{2}\cdot(x-x_0)^2+f_{xy}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0)+\frac{f_{yy}(x_0,y_0)}{2}(y-y_0)^2 \end{aligned}$$

Wiederum für Werte in der Nähe $x=x_0+h$ und $y=y_0+l$:

$$\begin{aligned} f(x_0+h,y_0+l) &= f(x_0,y_0)+h\cdot f_x(x_0,y_0)+l\cdot f_y(x_0,y_0)\\ &\quad+\frac{h^2}{2}f_{xx}(x_0,y_0)+h\cdot l\cdot f_{xy}(x_0,y_0)+\frac{l^2}{2}f_{yy}(x_0,y_0)\ +... \end{aligned}$$

Bsp.: Approximieren Sie die Funktion $f(x,y)=\cos(x)\cdot e^y$ im Punkt $x_0=0, y_0=0$ bestmöglich durch eine quadratische Funktion.

Ansatz: $f_2(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)+\frac{f_{xx}(x_0,y_0)}{2}\cdot(x-x_0)^2+f_{xy}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0)+\frac{f_{yy}(x_0,y_0)}{2}\cdot(y-y_0)^2$

Also sind die Größen $f(x_0,y_0), f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0), f_{xx}(x_0,y_0), f_{xy}(x_0,y_0)$ und $f_{yy}(x_0,y_0)$ zu bestimmen.

a) $f(0,0)=1$

b)$f_x(x,y)=-\sin x\cdot e^y\Rightarrow f_x(0,0)=0$
c)$f_y(x,y)=\cos x\cdot e^y\Longrightarrow f_y(0,0)=1$
d)$f_{xx}(x,y)=-\cos x\cdot e^y\Rightarrow f_{xx}(0,0)=-1$
e)$f_{xy}(x,y)=-\sin x\cdot e^y\Rightarrow f_{xy}(0,0)=0$
f)$f_{yy}(x,y)=\cos x\cdot e^y\Rightarrow f_{yy}(0,0)=1$

Und damit: $f_2(x,y)=1+1\cdot y-\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{1}{2}\cdot y^2$

Bem.: Betrachtet man

$$f_1(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) \tag{12.24}$$

so erhält man die Gleichung der Tangentialebene. Im obigen Beispiel ist die Tangentialebene im Ursprung gegeben durch $f(x,y)=1+y$.

Weiteres Beispiel: $f(x,y)=x^2\cos y+x+y^2, x_0=1, y_0=\frac{\pi}{2}$

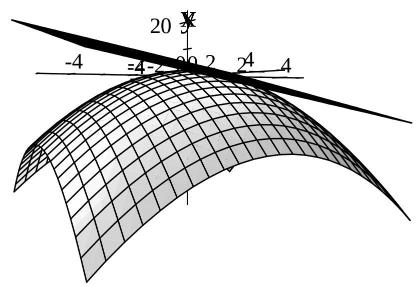
$f(1,\frac{\pi}{2})=1+\frac{\pi^2}{4}$

$f_x = 2x\cos y + x \qquad f_x(1, \frac{\pi}{2}) = 1$

$f_y = -x^2 \sin y + 2y \qquad f_y(1, \frac{\pi}{2}) = -1 + \pi$

Tangentialebene: $f_1(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = 1 + \frac{\pi^2}{4} + 1 \cdot (x - 1) + (\pi - 1) \cdot (y - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{4}\pi^2 + x + (\pi - 1)\left(y - \frac{1}{2}\pi\right)$

Folgende Graphen zeigt die Tangentialebene im Punkt $(1, 1)$ und die Funktion $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$



12.13 Relative Extremwerte ohne Nebenbedingungen

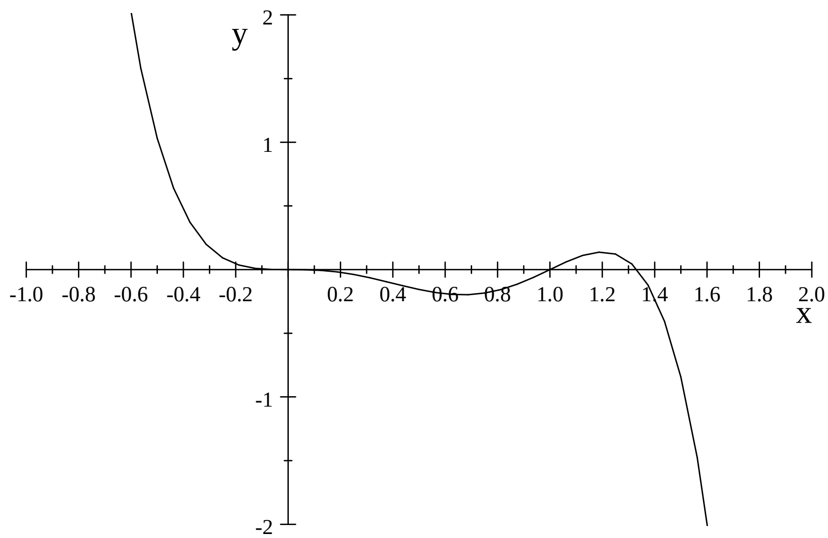
12.13.1 Der eindimensionale Fall

Wir erinnern uns zunächst an den eindimensionalen Fall:

x_0 ist ein lokales Minimum (Maximum) von f, wenn in einer Umgebung von x_0 f immer größer (kleiner) als der Wert $f(x_0)$ ist. Formal:

Finde eine Stelle x_0 und ein $\varepsilon > 0$

so daß $f(x_0) < f(x_0 + h) \quad \forall \quad |h| < \varepsilon$



Wenn solche Funktionen Kosten oder Gewinne beschreiben, liefert die Lösung solcher Optimierungsverfahren geeignete Konstellationen, um den Gewinn zu maximieren bzw. die Kosten zu minimieren. Die Lösung wissen wir bereits:

Algorithmus 273 *Lokales Minimum von $f(x)$*

1. Berechne $f'(x)$ und suche diejenigen Stellen x_0 mit $f'(x_0) = 0$.

*Diese Stellen sind die **Kandidaten** für lokale Minima.*

2. Berechne für jeden Kandidaten x_0 die Ableitung $f''(x_0)$.
a. Ist $f''(x_0) > 0$, so ist in x_0 ein lokales Minimum
b.Ist $f''(x_0) < 0$, so ist in x_0 ein lokales Maximum
c. Ist $f''(x_0) = 0$, so muß die erste von Null verschiedene Ableitung $f^{(k)}(x_0)$ berechnet werden.
c1. Ist k ungerade so liegt ein Sattelpunkt vor.
c2. Ist k gerade und $f^{(k)}(x_0) > 0$, so ist x_0 Minimum
c3. Ist k gerade und $f^{(k)}(x_0) < 0$, so ist x_0 Maximum

12.13.2 Lokale Extrema bei zwei Unbekannten

In diesem Fall hängt die Funktion nun von zwei Variablen z.B. x und y ab. "Berge" und "Täler" werden in sofern realistischer, da wir eine Darstellung in drei Dimensionen erhalten $(x, y, f(x, y))$. Formal ist nun ein lokales Extremum definiert als:

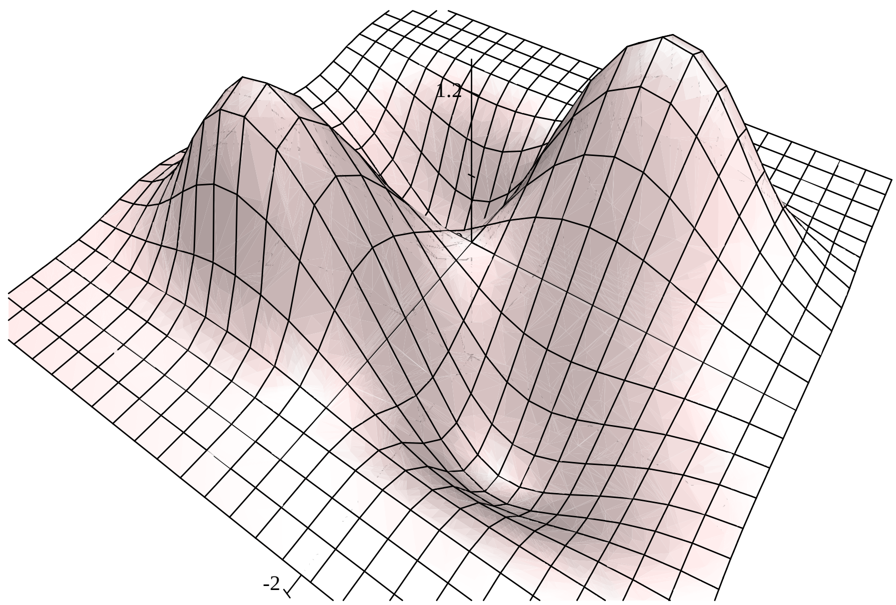
Minimiere $f(x, y)$, d.h. finde eine Stelle (x_0, y_0), sowie ein $\varepsilon > 0$,

so daß $f(x_0, y_0) < f(x_0 + h, y_0 + l) \quad \forall \quad |h| < \varepsilon \wedge |l| < \varepsilon$

Leider darf man sich hierbei nicht auf den Fall $h = l$ beschränken, also $f(x_0+h, y_0+h)$, da man in diesem Fall nur auf einer Geraden Richtung (x_0, y_0) die Funktion analysiert und nicht in ihrem gesamten Umkreis um diesen Punkt.

Beispiel:

$f(x, y) = x \cdot y \cdot \exp(-x^2 - y^4) + 1$



Lokale Extrema von $f(x, y) = x \cdot y \cdot \exp(-x^2 - y^4) + 1$

Kommen wir zunächst wieder zu den notwendigen Voraussetzungen für ein lokales Extremum.

Damit wir ein lokales Extremum vorliegen haben, ist insebsondere von Nöten, dass es keine Richtung gibt, in der die Funktion noch wächst oder fällt. Daher muss in diesen Stellen der Gradient der Funktion zum Nullvektor werden, also analog zum eindimensionalen Fall:

$$\boxed{f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0; \qquad f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0}$$

Bem.:

1. Wie im eindimensionalen Fall ist also notwendige Vorraussetzung, daß die Tangentialebene horizontal verläuft.

2. Das Auffinden der Kandidaten führt in der Regel zur Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems von 2 Gleichungen in 2 Unbekannten:

$$\begin{aligned} f_x &= 0 \\ f_y &= 0 \end{aligned}$$

Hier können keine, eine, mehrere oder sogar unendlich viele Lösungen entstehen, welche alle separat zu untersuchen sind.

Auch hier betrachten wir nun die Taylorreihe

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+l) \quad &\approx \quad f(x_0,y_0) + h \cdot f_x(x_0,y_0) + l \cdot f_y(x_0,y_0) \\ &+ \frac{h^2}{2} f_{xx}(x_0,y_0) + h \cdot l \cdot f_{xy}(x_0,y_0) + \frac{l^2}{2} f_{yy}(x_0,y_0) \end{aligned} \tag{12.25}$$

und im Kandidaten gilt hier

$$f(x_0+h, y_0+l) \approx f(x_0,y_0) + \frac{h^2}{2} f_{xx}(x_0,y_0) + h \cdot l \cdot f_{xy}(x_0,y_0) + \frac{l^2}{2} f_{yy}(x_0,y_0)$$

Hinreichend für ein Minimum ist in diesem Fall:

$$\frac{h^2}{2} f_{xx}(x_0,y_0) + h \cdot l \cdot f_{xy}(x_0,y_0) + \frac{l^2}{2} f_{yy}(x_0,y_0) > 0 \qquad \forall |h| < \varepsilon, |l| < \varepsilon$$

Für ein Maximum muß entsprechend gelten:

$$\frac{h^2}{2} f_{xx}(x_0,y_0) + h \cdot l \cdot f_{xy}(x_0,y_0) + \frac{l^2}{2} f_{yy}(x_0,y_0) < 0 \qquad \forall |h| < \varepsilon, |l| < \varepsilon$$

Beachte hierbei, daß die Ableitungen für festes (x_0, y_0) Konstanten sind und h und l variabel. Die Frage ist nun, ob für gegebene Konstanten die quadratische Funktion in h und l immer positiv bzw. negativ ist. Betrachtet werde im Folgenden vorerst nur der Fall ">0", also den des Minimums. Die Gleichung vereinfacht sich bei Multiplikation mit $2/l^2$ zu:

$$(\frac{h}{l})^2 \cdot \underbrace{f_{xx}(x_0,y_0)}_{A} + 2 \cdot \frac{h}{l} \cdot \underbrace{f_{xy}(x_0,y_0)}_{B} + \underbrace{f_{yy}(x_0,y_0)}_{C} > 0 \qquad \forall |h| < \varepsilon, |l| < \varepsilon$$

Mit $z := \dfrac{h}{l}$ verbleibt nun eine quadratische Ungleichung in einer Unbekannten:

$$A \cdot z^2 + 2 \cdot B \cdot z + C > 0 \qquad \forall z \in R$$

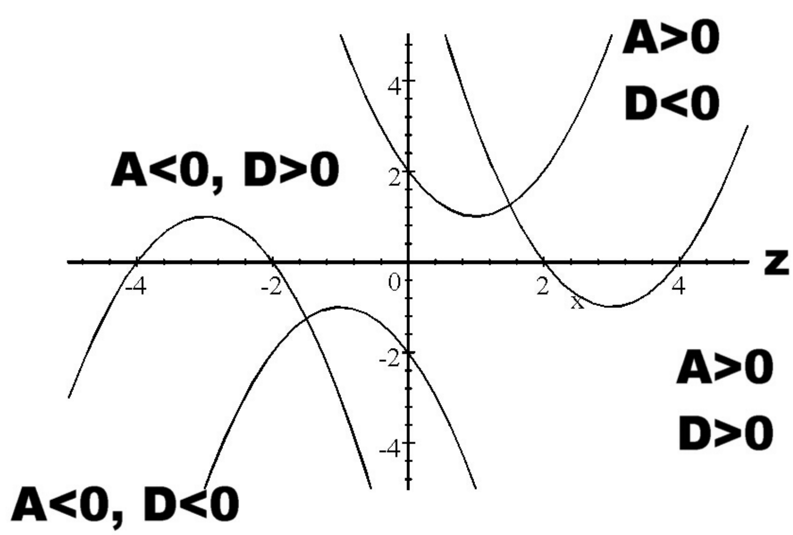
Es verbleibt die Frage:
Für welche Zahlen A,B und C ist $A \cdot z^2 + 2 \cdot B \cdot z + C$
a) eine nach oben geöffnete Parabel und
b) stets positiv; d.h. es existieren keine reellen Nullstellen?

Einfach ist der Teil a): Für A>0 ist die Parabel nach oben geöffnet.

Zu Teil b) müssen über die quadratische Ergänzung/p-q-Formel die Nullstellen berechnet werden.
Die Nullstellen sind:

$$z_{1,2} = -\frac{B}{A} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{B^2}{A^2} - \frac{C}{A}}_{D}}$$

Die Diskriminante D gibt Aufschluß über die Anzahl der Nullstellen:



Keine reellen Nullstellen gibt es für $D < 0$, da dann der Wert unter Wurzel negativ wird.

Eine weitere Umformung ergibt:

$$\begin{aligned} D &< 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{B^2}{A^2} - \frac{C}{A} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{B^2 - AC}{A^2} < 0 \\ &\Leftrightarrow AC - B^2 > 0 \end{aligned}$$

Also:

Hinreichend für ein Minimum ist:

$$\begin{aligned} A \quad &: \quad = f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \\ AC - B^2 \quad &: \quad = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0 \end{aligned}$$

Analog ergibt sich für

$$A := f_{xx}(x_0, y_0) < 0,$$

$$AC - B^2 := f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0$$

ein lokales Maximum.

Zusammengefaßt ergibt sich:

Algorithmus 274 *Lokales Minimum von $f(x, y)$*

1. Berechne $f_x(x,y)$ und $f_y(x,y)$ und suche diejenigen Stellen (x_0,y_0) mit

$$\boxed{f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0}$$

Diese Stellen sind die ***Kandidaten*** *für lokale Minima.*

2. Berechne für jeden Kandidaten (x_0,y_0) die Werte
$f_{xx}(x_0, y_0),\ f_{yy}(x_0, y_0),\ f_{xy}(x_0, y_0)$
und daraus den Wert

$$\boxed{d := f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2}$$

a) Ist $f_{xx}(x_0, y_0) > 0,\ d > 0$ $\Rightarrow$ ***Lokales Minimum***
b) Ist $f_{xx}(x_0, y_0) < 0,\ d > 0$ $\Rightarrow$ ***Lokales Maximum***
c) Ist $d < 0$ $\Rightarrow$ ***Sattelpunkt***
d) Ist $d = 0$ $\Rightarrow$ ***Höhere Ableitung entscheidet***

Bemerkt sei, daß d hier gerade das entgegengesetzte Vorzeichen der eben verwendeten Diskriminante D hat. Im Vergleich zum eindimensionalen gilt: Für eine positives d sind die Extrema in x- und y-Richtung gleichgerichtet (Beides Maxima oder beides Minima) und wir können die Kriterien nur für x wie im eindimensionalen Fall betrachten. Ist $d < 0$, so liegt ein Minimum in der einen Koordinate und ein Maximum in der anderen vor und es entsteht ein Sattelpunkt. Die unten stehende Grafik zeigt, woher der Name stammt.

Beispiel:

$f(x,y) = y^2 - x^2$

1. Kandidaten

$$\begin{aligned} f_x &= -2x \overset{!}{=} 0 \\ f_y &= 2y \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

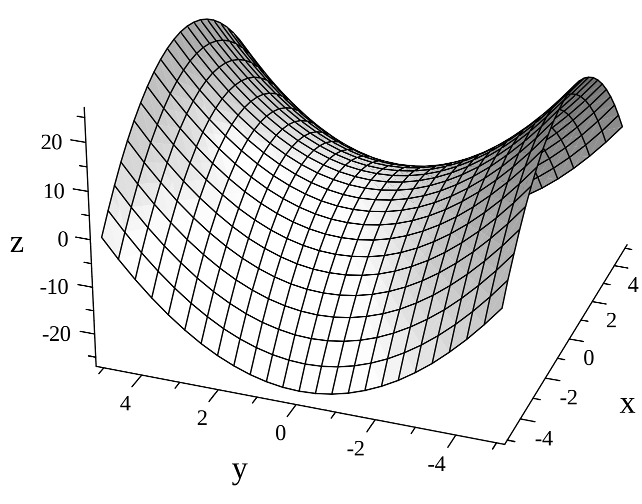
liefert $x_0 = 0, y_0 = 0$

2. Berechne für den Kandidaten

In (0,0) gilt:

$f_{xx}(0,0) = -2,\ f_{yy}(0,0) = 2,\ f_{xy}(0,0) = 0$

und somit $d := -4 < 0$ (Fall 2c), also existieren keine Extremwerte.



$f(x,y) = y^2 - x^2$

(woran die Bedeutung des Wortes Sattelpunkt ersichtlich wird).

12.13.3 Schreibweise als Hesse-Matrix

Um sich die Bedingungen leichter merken zu können (und um die Erkenntnisse auch auf mehr als zwei Unbekannte erweitern zu können), kann man die Hesse-Matrix zu Hilfe ziehen:

$$\boxed{\mathrm{H}=\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}}$$

Es gilt: $d = \det H$

Satz 275 *Ist H positiv definit, so liegt ein Minimum vor, ist H negativ definit ein Maximum und bei indefinitem H ein Sattelpunkt.*

Dabei entsprechen die Definitionen von positiv definit, negativ definit und indefinit gerade oben stehenden Bedingungen:
H ist negativ definit $\Longleftrightarrow f_{xx}(x_0,y_0) < 0, \det H > 0$
H ist positiv definit $\Longleftrightarrow f_{xx}(x_0,y_0) > 0, \det H > 0$
H ist indefinit $\Longleftrightarrow \det H < 0$

Weitere Beispiele:
$f(x,y) = 8 - x^2 - y^2$

1. Kandidaten

$$\begin{aligned} f_x &= -2x \stackrel{!}{=} 0 \\ f_y &= -2y \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

liefert $x_0 = 0, y_0 = 0$

2. Hesse Matrix

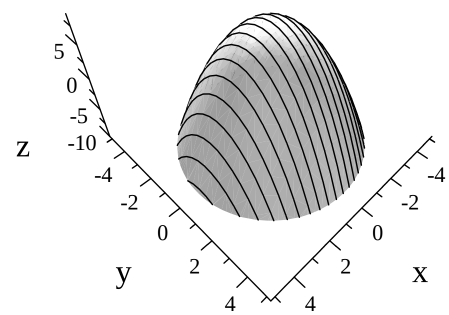
$f_{xx} = -2, f_{yy} = -2, f_{xy} = 0$ und damit

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

mit $d := \det H = 4$

3. Es ist $f_{xx} < 0$ und $\det H > 0$, somit liegt in $(0,0)$ ein lokales Maximum vor.
Wert: $f(0,0) = 8$

Graph:



Weiteres Beispiel:
$f(x,y) = y^2 - 2y + x^3 - 3x$
1. Kandidaten

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2 - 3 \stackrel{!}{=} 0 \Longrightarrow x = 1 \text{ oder } x = -1 \\ f_y(x,y) &= 2y - 2 \stackrel{!}{=} 0 \Longrightarrow y = 1 \end{aligned}$$

liefert 2 Kandidaten:

A) $x_0 = 1, y_0 = 1$

B) $x_0 = -1, y_0 = 1$

Zu A)
2. Hesse Matrix

$f_{xx}(1,1) = 6x_0 = 6,$
$f_{yy}(1,1) = 2$
$f_{xy}(1,1) = 0$
und damit

$$H = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mit $d := \det H = 12$

3. Es ist $\det H > 0$, somit liegt in $(1,1)$ ein lokales Minimum vor.
Wert: $f(1,1) = 1 - 2 - 1 - 3 = -3$

Zu B)

2. Hesse Matrix

$f_{xx}(-1,1) = 6x_0 = -6$,
$f_{yy}(-1,1) = 2$
$f_{xy}(-1,1) = 0$
und damit

$$H = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mit $d := \det H = -12$

3. Es ist $f_{xx} > 0$ und $\det H < 0$, somit liegt in $(-1,1)$ ein Sattelpunkt vor.

12.13.4 Extremwerte im $\mathbb{R}^n$

Im $\mathbb{R}^n$ wird die Kandidatensuche (auch: Kritische Punkte) völlig analog durchgeführt. Kandidaten sind diejenigen Stellen $(x_1, ..., x_n)$, an denen die erste Ableitung verschwindet. Hinreichend zur Bestimmung von Extremwerten sind dann für Minima die positiv Definitheit, für Maxima die negativ Definitheit der Hesse-Matrix

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_n} & & \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

Wobei die Positiv Definiheit bedeutet, dass alle Unterdeterminanten links oben beginnend stets positiv sind. Negativ definit ist die Matrix, falls die Unterdeterminanten stets abwechselndes Vorzeichen, beginnend mit einem negativen, besitzen.

Bsp.:

$$H = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

ist hinreichend für ein Maximum, da

$$\begin{aligned} D_1 &= -3 < 0 \\ D_2 &= 6 > 0 \\ D_3 &= -24 < 0 \end{aligned}$$

12.13.5 Weitere Verfahren zur Analyse der Kandidaten

Nicht immer muss oder kann die zweite Ableitung herangezogen werden, um die Extrema zu analysieren. Hier helfen weitere Verfahren:

1. Analyse der Umgebung: Wir betrachten den Funktionswert am Kandidaten $\vec{X}_0 = (x_0, y_0)^T$

$$f(x_0, y_0)$$

und Punkte in einer kleinen Umgebung, also Punkte mit $\vec{X} = (x, y)^T$

$$\left\|\vec{X} - \vec{X}_0\right\| \leq \varepsilon$$

und betrachten die Änderung der Funktion

$$f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

Ist der Ausdruck für alle Werte positiv (negativ), so liegt ein Minimum (Maximum) vor. Gibt es jedoch in jeder Umgebung noch eine Richtung, z.B. entlang der Koordinatenachsen, wo es sowohl positive als auch negative Änderungen gibt, so ist der Punkt Sattelpunkt.

Bsp.:

1.

$$f(x, y) = y^4 - x^3 + 1$$

Der Kandidat ist

$$(0, 0)$$

mit

$$f(0, 0) = 1$$

Die Hesse Matrix hilft hier nicht weiter, da

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für jede beliebig kleine Umgebung gilt jedoch

$$\begin{aligned} f(\varepsilon, 0) - f(0, 0) &= -\varepsilon^3 < 0 \\ f(-\varepsilon, 0) - f(0, 0) &= \varepsilon^3 > 0 \end{aligned}$$

Daher ist der Punkt Sattelpunkt.

Andererseits:

1.

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + 1$$

Es ist für jeden Punkt in der Umgebung

$$f(x, y) - f(0, 0) = x^4 + y^4 > 0$$

und daher liegt ein lokales Minimum vor.

Bem.: Wichtig ist noch zu erwähnen, dass stetig differenzierbare Funktionen, die ein lokales Extremum haben im $\mathbb{R}^n$ an dieser Stelle nicht zwangsläufig auch den global kleinsten Wert annehmen.

In der Anwendung entstehen hierbei häufig bereits Problem im Auffinden der Kandidaten. Abschliessend hier noch zwei Anwendungsbeispiele:

12.13.6 (*) Beispiel 1: Nektar sammelnde Bienen

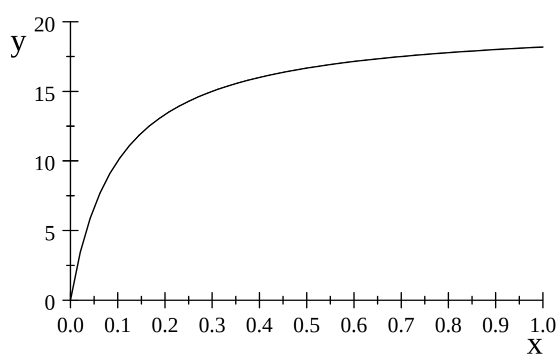
Die Nektarmenge, die eine Biene in einer Zeit x an einer Trachtstelle sammelt, sei gegeben durch die Michaelis-Menten Funktion

$$f(x) = k \cdot \frac{x}{x+K}$$

Insbesondere gilt $f(0) = 0$; f ist monoton steigend und die Sättigung (also die max. Ertragsmenge) ist: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = k$

k ist hierbei eine von der Ertragsstelle abhängige Konstante, K ist für alle (verschiedenen) Ertragsstellen gleich. k, K sind hier stets positive Größen.

Die Funktion sieht für $K = 0.1, k = 20$ wie folgt aus:



Michaelis Menten Funktion

Hat nun die Biene wiederum eine Zeiteinheit zur Verfügung, jedoch drei gleiche (Ergiebigkeit k) Sammelstellen so ergibt sich als Ertragsfunktion:

$$g(x,y,z) = k \cdot \frac{x}{x+K} + k \cdot \frac{y}{y+K} + k \cdot \frac{z}{z+K} \quad \text{mit} \quad x+y+z=1$$

Wegen $z = 1 - x - y$ läßt sich die Funktion in zwei Unbekannten schreiben. Mit $\frac{x}{x+K} = \frac{x+K-K}{x+K} = 1 - \frac{K}{x+K}$ ist :

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= k \cdot \frac{x}{x+K} + k \cdot \frac{y}{y+K} + k \cdot \frac{(1-x-y)}{1-x-y+K} \\
&= k \cdot (1 - \frac{K}{x+K} + 1 - \frac{K}{y+K} + 1 - \frac{K}{1-x-y+K}) \\
&= k \cdot \left(3 - K \cdot \left(\frac{1}{x+K} + \frac{1}{y+K} + \frac{1}{1-x-y+K}\right)\right)
\end{aligned}
$$

mit $x, y \geq 0, x + y \leq 1$
Führen wir die oben erarbeiteten Schritte durch:

Ableitung in x-Richtung =0

$$
f_x(x,y) \quad = k \cdot K \cdot \left(\frac{1}{(x+K)^2} - \frac{1}{(1-x-y+K)^2}\right) \stackrel{!}{=} 0
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow (x+K)^2 = (1-x-y+K)^2 \Longrightarrow 2x = 1-y \\
\Longrightarrow \quad \boxed{\mathbf{y = 1 - 2x}}
\end{aligned}
$$

Ableitung in y-Richtung =0

$$
f_y(x,y) \quad = k \cdot K \cdot \left(\frac{1}{(y+K)^2} - \frac{1}{(1-x-y+K)^2}\right) \stackrel{!}{=} 0
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow (y+K)^2 = (1-x-y+K)^2 \\
\Longrightarrow \quad \boxed{\mathbf{2y = 1 - x}}
\end{aligned}
$$

Bestimmung des/der Kandidaten
$\Longrightarrow 2 \cdot (1 - 2x) = 1 - x$
$\Longleftrightarrow 2 - 4x = 1 - x \Longleftrightarrow 1 = 3x \Longleftrightarrow$ $\boxed{\mathbf{x} = \frac{1}{3} \Longrightarrow \mathbf{y} = \frac{1}{3} \Longrightarrow \mathbf{z} = \frac{1}{3}}$

Berechnung der zweiten partiellen Ableitungen im Kandidaten liefert im Kandidaten $x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{3}, z = 1 - x - y = \frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= k\cdot K\cdot\left(-2\cdot\frac{1}{(x+K)^3}+(-2)\cdot\frac{1}{(1-x-y+K)^3}\right)\\
f_{xx}(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) &= \frac{-4k\cdot K}{\left(\frac{1}{3}+K\right)^3}\\
f_{yy}(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) &= \frac{-4k\cdot K}{\left(\frac{1}{3}+K\right)^3}\\
f_{xy}(x,y) &= k\cdot K\cdot\left((-2)\cdot\frac{1}{(1-x-y+K)^2}\right)\\
f_{xy}(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) &= \frac{-2k\cdot K}{\left(\frac{1}{3}+K\right)^3}
\end{aligned}$$

Analyse von A und d

$A := f_{xx} < 0;$
$d := f_{xx}\cdot f_{yy} - f_{xy}\cdot f_{xy} = 16\frac{k^2\cdot K^2}{\left(\frac{1}{3}+K\right)^6} - 4\frac{k^2\cdot K^2}{\left(\frac{1}{3}+K\right)^6} = 12\frac{k^2\cdot K^2}{\left(\frac{1}{3}+K\right)^6} > 0$

Damit hat die Funktion ein lokales Maximum.
Die Biene erwirtschaftet also den optimalen Ertrag, wenn Sie an jeder Trachtstelle ein Drittel ihrer Zeit verbringt.

Der Gesamtertrag ist dabei $\frac{k}{K+\frac{1}{3}}$. Würde die Biene die gesamte Zeit an einer Stelle verbringen, so wäre der Ertrag $\frac{k}{K+1}$.

12.13.7 (*) Beispiel 2: Zugvögel (ohne Happy End)

C.J. Pennycuick gab für den Energieverbrauch von Zugvögeln, die mit der Geschwindigkeit x gegen die umgebende Luft fliegen, die Formel

$$E(x,y) = x^3\cdot A\cdot y + \frac{G^2}{Bxy}$$

an. G ist die Masse des Vogels, y die Luftdichte, A und B Konstanten, die von Gestalt und Physiologie des Vogels abhängen.

Der Term $x^3 \cdot A \cdot y$ ist die Energie, die zur Aufrechterhaltung der Fluggeschwindigkeit x nötig ist, der zweite Term ist die Energie die zur Beibehaltung der Höhe nötig ist.

Der erste Term ist somit die Energie, um den Gegenwind zu überwinden: Steigende Reibung bei steigender Geschwindigkeit führt zum Term x^3. Da die Reibung mit der Luftdichte ansteigt, ist auch hier ein Faktor y vorhanden. Die Aufrechterhaltung der Höhe verbraucht desto mehr Energie desto kleiner die Geschwindigkeit ist (wg. fallendem Auftrieb) und ist auch umgekehrt proportional zur Luftdichte, da mit höherer Luftdichte der Auftrieb höher und die Energie somit kleiner wird.

Folgende Fragen mögen von Interesse sein:

a) Gibt es zu einer vorgegeben Geschwindigkeit x eine optimale Höhe/Luftdichte y, bei der der Energie bedarf am geringsten ist?

b) Gibt es bei einer gegebenen Luftdichte eine optimale Geschwindigkeit, bei der der Energie bedarf am geringsten ist?

c) Gibt es ein lokales Minimum, d.h. eine Konstellation bei der ein Geschwindigkeit-Luftdichte-Konzentration optimal ist?

Die ersten beiden Fragen können mit Hilfe der eindimensionalen Ableitungen berechnet werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial y} &= x^3 \cdot A - \frac{G^2}{Bxy^2} = 0 \Longrightarrow G^2 = x^4 \cdot A \cdot B \cdot y^2 \qquad (12.26) \\ &\Longrightarrow \quad y = \sqrt{\frac{G^2}{A \cdot B \cdot x^4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} &= 3x^2 \cdot A \cdot y - \frac{G^2}{Bx^2y} = 0 \Longrightarrow G^2 = 3x^4 \cdot A \cdot B \cdot y^2 \qquad (12.27) \\ &\Longrightarrow \quad x = \sqrt[4]{\frac{G^2}{3A \cdot B \cdot y^2}} \end{aligned}$$

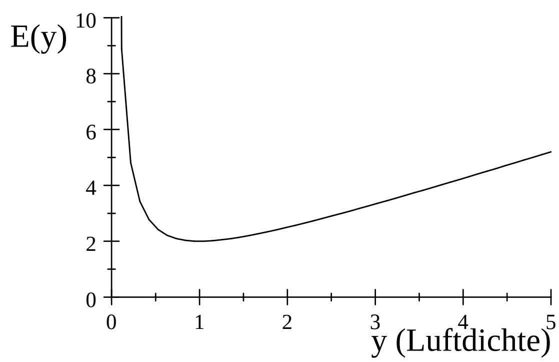
Die zweiten Ableitungen in x und y sind positiv

$$E_{yy} = \frac{2G^2}{Bxy^3} \qquad (12.28)$$

$$E_{xx} = 6xAy + \frac{2G^2}{Bxy^3} \qquad (12.29)$$

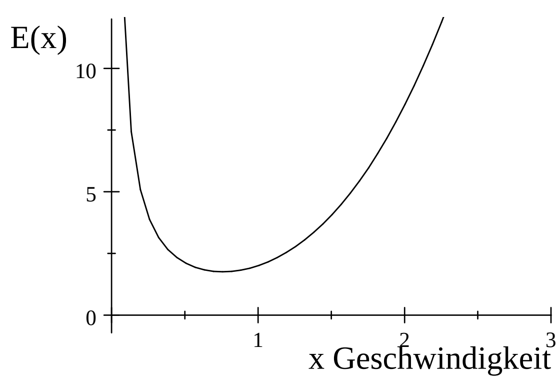
Somit lassen sich a) und b) positiv beantworten und die optimalen Werte angeben.

Zunächst kann für festes x das Optimum berechnet werden (zur Vereinfachung sind in den folgenden Grafiken alle Konstanten zu eins gesetzt, da Sie keinen Einfluß auf die Charakteristik, sondern nur auf die Lage einiger Parameter haben): In der folgenden Grafik wäre derjenige Wert, bei der die Funktion den minimalen Wert annimmt, das Optimum. Zu einer vorgegebenen Geschwindigkeit kann somit der Vogel seine Flughöhe/Luftdichte y so wählen, daß sein Energieverbrauch minimal ist.



Anpassung der Höhe (Luftdichte)

Ebenso kann für festes y (Flughöhe/Luftdichte) eine optimale Geschwindigkeit berechnet werden. An dieser Stelle x hätte der Vogel seine optimale Fluggeschwindigkeit, also zu seiner Physiologie und in seiner gewählten Luftdichte (Flughöhe) den minimalen Energieverbrauch.



Anpassung der Geschwindigkeit

Wie verändert sich nun die Aufgabenstellung, wenn der Vogel gleichzeitig Flughöhe und Geschwindigkeit anpassen könnte? Gibt es ein Optimum, also eine bevorzugte Konstellation aus Geschwindigkeit und Höhe, bei der sein Energieverbrauch ein lokales Minimum annimmt?

Um ein lokales Minimum zu erhalten, müßten beide partiellen Ableitungen Null werden. Da aber nun nach (12.26) und (12.27) gleichzeitig

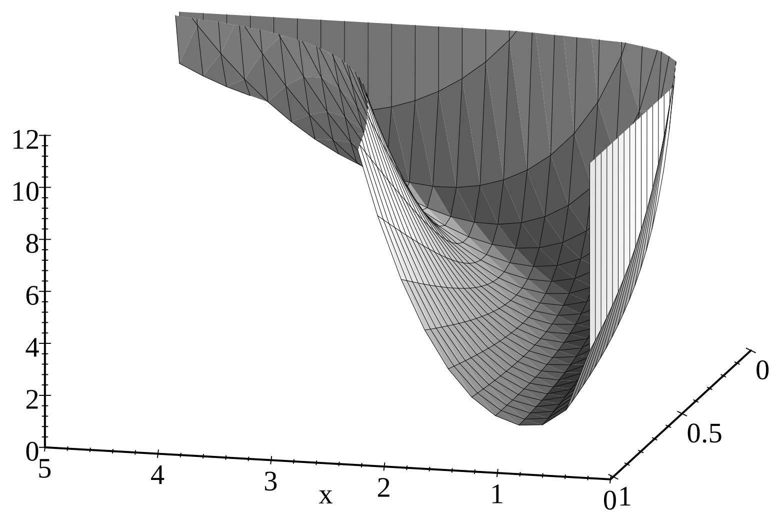
$$G^2 = x^4 \cdot A \cdot B \cdot y^2$$

und

$$G^2 = 3x^4 \cdot A \cdot B \cdot y^2$$

gelten müßte, ist dies ein Widerspruch (Gewicht gleich Null sei ausgeschlossen).

Wir wollen uns grafisch veranschaulichen, warum dies so ist:



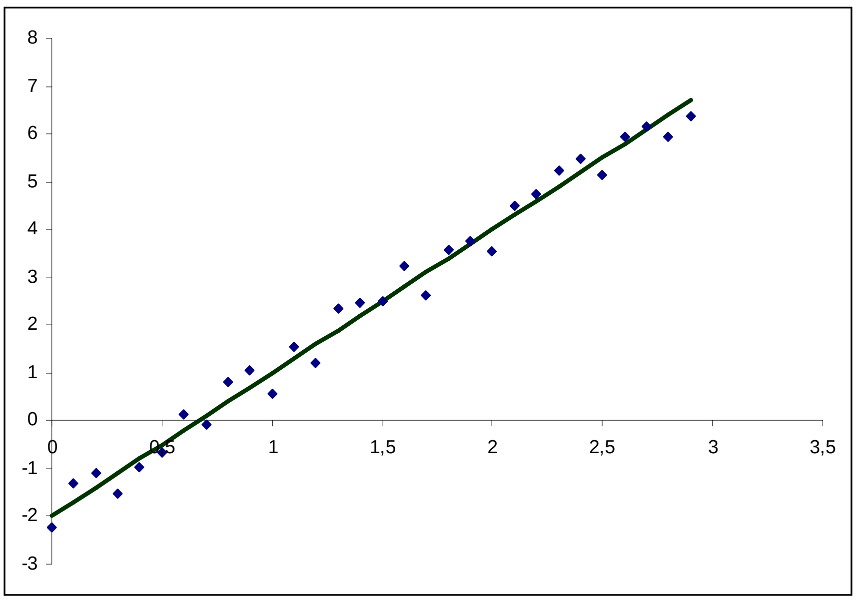
Diese "Bobbahn" zeigt: Obwohl es bei Schnitten jeweils ein Optimum in $x-$ bzw. $y-$Richtung gibt, gibt es kein "Tal" bei der ein lokales Minimum erreicht wird.

12.13.8 Anwendung der Extremwertberechnung: Regressionsanalyse

Vorgegeben sind nun n Meßwerte $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ und der Zusammenhang dieser Meßwerte wird als linear angenommen, d.h. bis auf Meßfehler oder äußere Einflüsse ist der Zusammenhang von x und y gegeben durch

$$y = a + bx \tag{12.30}$$

wobei jedoch die Parameter der Geraden zwar fest aber unbekannt sind.



Dabei sind a und b so zu berechnen, dass die Abstände zur Geraden möglichst minimal werden. Hier wird die Methode der kleinsten Fehlerquadrate verwandt, d.h. die Abstände werden zunächst quadriert und dann alle Abstände aufsummiert.

Der Abstand (Fehler) am Meßwert x_k ist dabei die Differenz aus Meßwert und Geradenwert an dieser Stelle:

$$\varepsilon_k = a + bx_k - y_k \tag{12.31}$$

und damit ist das Fehlerquadrat (damit nur positive Werte addiert werden) gegeben durch

$$F_k(a, b) = \varepsilon_k^2 = (a + bx_k - y_k)^2$$

Der Gesamtfehler F ist dann

$$\begin{aligned} F(a,b) &= \sum_{k=1}^{n} F_k(a,b) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a + bx_k - y_k)^2 \end{aligned} \tag{12.32}$$

Je nach Wahl von a und b ändert sich der Gesamtfehler. Welches ist nun die optimale Wahl dieser Parameter, d.h. wann wird dieser Gesamtfehler minimal?

Hierzu muß das lokale Extremum von $F(a,b)$ bestimmt werden. Aber Achtung: Die "Unbekannten" sind hier NICHT x und y, sondern a und b.

1. Finden der Kandidaten. Notwendige Bedingung:

Teil 1: $F_a(a,b) = \dfrac{\partial F}{\partial a} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a} &= \sum_{k=1}^{n} 2(a + bx_k - y_k) \\ &= 2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a + \sum_{k=1}^{n} bx_k - \sum_{k=1}^{n} y_k \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dies bedeutet

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a + \sum_{k=1}^{n} bx_k &= \sum_{k=1}^{n} y_k \\ a \cdot n + b \sum_{k=1}^{n} x_k &= \sum_{k=1}^{n} y_k \end{aligned}$$

Teil 2: $F_b(a,b) = \dfrac{\partial F}{\partial b} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial b} &= \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot 2(a + bx_k - y_k) \\ &= 2 \left(\sum_{k=1}^{n} x_k a + \sum_{k=1}^{n} bx_k^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} x_k a + \sum_{k=1}^{n} b x_k^2 &= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\
a \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k + b \sum_{k=1}^{n} x_k^2 &= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k
\end{aligned}$$

Somit ist zu lösen:

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{k=1}^{n} x_k \\ \sum_{k=1}^{n} x_k & \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} y_k \\ \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \end{pmatrix} \tag{12.33}$$

Bem.:

Damit ist auch $F_{aa}(a,b) = 2 \cdot (\sum_{k=1}^{n} 1) = 2n > 0$. Zur Entscheidung ob Minimum oder Maximum müssen nun weitere Ableitungen berechnet werden:

$$\begin{aligned}
F_{bb}(a,b) &= 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \\
F_{ab}(a,b) &= 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k
\end{aligned}$$

und für ein lokales Minimum muss gelten

$$2n \cdot 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(2 \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = 4 \cdot \left(n \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2\right) > 0$$

also ist z.Zeigen für $n \geq 2$:

$$n \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 > 0$$

Bew.: Voraussetzung ist zunächst dass wir mind. 2 verschiedene x-Koordinaten in unserer Messreihe haben.

Die strenge Schwarz Ungleichung lautet falls $\vec{y} \neq -a\vec{x}$ (und beides keine Nullvektoren):

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 < \quad (\vec{x}, \vec{x}) \cdot (\vec{y}, \vec{y})$$

Die strenge Ungleichung gilt, da wir nun den Vektor

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

betrachten und somit die Bedingung

$$\vec{y} \neq -a\vec{x}$$

stets erfüllt ist, da sonst auch der Vektor $\vec{x}$ nur aus Konstanten bestünde. Haben wir 2 verschiedene x-Werte kann dies nicht sein.

Also gilt für das euklidische Skalarprodukt:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k\right)^2 < \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k^2$$

Somit gilt

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 < \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} 1^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot n$$

und damit:

$$n \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 > 0$$

Beispiel:

x_k	1	2	9
y_k	1	3	8

Damit:
$n = 3$,
$\sum_{k=1}^{n} x_k = 1 + 2 + 9 = 12$
$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1 + 4 + 81 = 86$
$\sum_{k=1}^{n} y_k = 1 + 3 + 8 = 12$
$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 9 \cdot 8 = 79$

Zu Lösen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 12 & 86 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 79 \end{pmatrix}$$

Liefert: $a = \frac{14}{19}, b = \frac{31}{38}$

Damit ist die Regressionsgerade

$$y = \frac{14}{19} + \frac{31}{38}x$$

Wenn die Werte jedoch nicht linear zusammenhängen, muß ein anderer Ansatz gewählt werden.

Wie sieht die Matrix bei einem beliebigen Funktionenansatz $y = a + b \cdot f(x)$ aus? Fast wörtlich kann obige herleitung übernommen werden:

Der Abstand (Fehler) am Meßwert x_k ist dabei die Differenz aus Meßwert und Funktionswert an dieser Stelle:

$$\varepsilon_k = \tag{12.34}$$

und damit ist das Fehlerquadrat (damit nur positive Werte addiert werden) gegeben durch

$$F_k(a,b) = \varepsilon_k^2 = (a + b \cdot f(x_k) - y_k)^2$$

Der Gesamtfehler F ist dann

$$\begin{aligned} F(a,b) &= \sum_{k=1}^{n} F_k(a,b) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a + b \cdot f(x_k) - y_k)^2 \end{aligned} \tag{12.35}$$

1. Finden der Kandidaten. Notwendige Bedingung:

Teil 1: $F_a(a,b) = \dfrac{\partial F}{\partial a} = 0$

$\dfrac{\partial F}{\partial a} = \sum_{k=1}^{n} 2(a + b \cdot f(x_k) - y_k)$
$= 2(\sum_{k=1}^{n} a + \sum_{k=1}^{n} b \cdot f(x_k) - \sum_{k=1}^{n} y_k) = 0$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a + \sum_{k=1}^{n} b \cdot f(x_k) &= \sum_{k=1}^{n} y_k \\ a \cdot n + b \sum_{k=1}^{n} f(x_k) &= \sum_{k=1}^{n} y_k \end{aligned}$$

Teil 2: $F_b(a,b) = \dfrac{\partial F}{\partial b} = 0$

$\dfrac{\partial F}{\partial b} = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k)) \cdot 2(a + b \cdot f(x_k) - y_k)$
$= 2 \cdot (\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot a + \sum_{k=1}^{n} b \cdot f(x_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot y_k) = 0$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot a + \sum_{k=1}^{n} b \cdot f(x_k)^2 &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot y_k \\ a \cdot \sum_{k=1}^{n} f(x_k) + b \sum_{k=1}^{n} f(x_k)^2 &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot y_k \end{aligned}$$

Somit ist zu lösen:

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \\ \sum_{k=1}^{n} f(x_k) & \sum_{k=1}^{n} f(x_k)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} y_k \\ \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot y_k \end{pmatrix} \tag{12.36}$$

12.13.9 Approximation von Funktionen

Motivation: Welche Gerade $g(x) = a + bx$ approximiert die Funktion $h(x) = \sqrt{x}$ im Intervall $[0; 1]$ bestmöglich? Im Gegensatz zum vorigen Beispiel sind hier nicht diskrete Meßwerte gegeben, sondern der Abstand der Funktion soll nun kontinuierlich gemessen werden. Daher verwenden wir hier als Maß das Integral des quadratischen Abstandes zwischen den Funktionen

$$F(a,b) = \int_0^1 \underbrace{(a + bx - \sqrt{x})^2}_{f(a,x) \text{ bzw. } f(b,x)} dx$$

Das Minimum erhalten wir in dem wir zunächst die Kandidaten bestimmen. Nach der Leibniz Regel (s.o.) gilt für Integrale mit konstanten Grenzen das Differentiation und Integration vertuascht werden darf, also:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a} &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial a} dx \\ &= \int_0^1 2(a + bx - \sqrt{x}) dx \\ &= \left[2ax + bx^2 - 2 \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^1 \\ &= 2a + b - \frac{4}{3} = 0 \end{aligned}$$

entsprechend

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial b} &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial b} dx \\ &= \int_0^1 2x(a + bx - \sqrt{x}) dx \\ &= \ldots = a + \frac{2}{3} b - \frac{4}{5} = 0 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem liefert die Lösung

$$a = \frac{4}{15}, b = \frac{4}{5}$$

und damit die gesuchte Funktion

$$g(x) = \frac{4}{15} + \frac{4}{5}x$$

Verbleibt die Frage nach Minimum und Maximum. Es sind alle zweiten Ableitungen konstant (und entsprechen daher den Werten im Kandidaten)

$$\begin{aligned} F_{aa}(a,b) &= 2 \\ F_{ab}(a,b) &= 1 \\ F_{bb}(a,b) &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Damit gilt $\det(H) = 2 \cdot \frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3} > 0$
$F_{aa}(\frac{4}{15}, \frac{4}{5}) = 2 > 0$

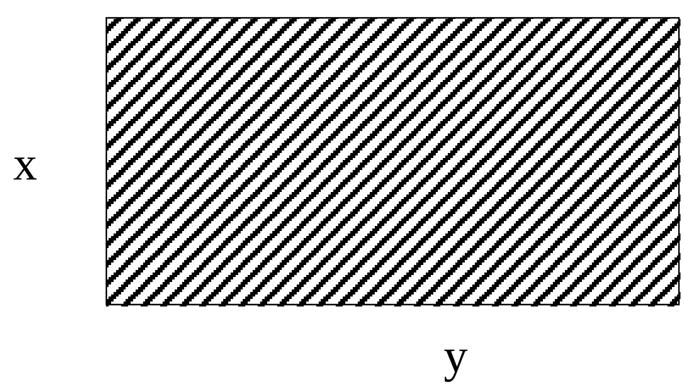
und damit liegt ein lokales Minimum vor.

12.14 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

Entgegen der im letzen Abschnitt behandelten "freien" Extremwertaufgaben, existieren in der Realität häufig Restriktionen - sog. "Nebenbedingungen" - z.B. physikalischer Art (positive Größen) oder Maximierung unter Einhaltung eines gewissen Materialvorrats.

Beispiel: Wir wollen mit einem Zaun der Länge 40m ein möglichst großes rechteckiges Gebiet abzäunen.

Skizze:



Maximiere $f(x,y) = x \cdot y$ (Fläche) unter der Nebenbedingung

$$2x + 2y = 40$$

bzw.

$$2x + 2y - 40 = 0$$

Während wir im bisherigen zur Lösung dieses Problems aus der Nebenbedingung y eliminiert haben und dies in f eingesetzt haben, geht dies bei komplexeren Zusammenhängen in der Regel nicht.

Eine allgemeine Methode zur Lösung solcher Probleme liefern die

12.14.1 Lagrange Multiplikatoren

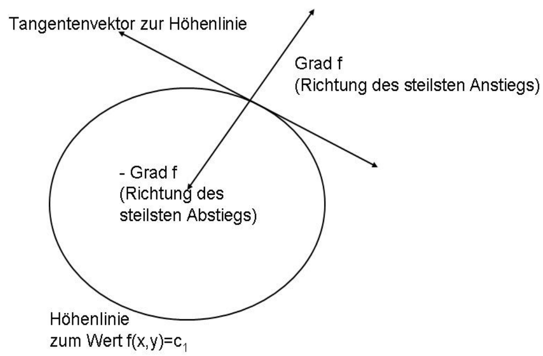
Zu Lösen:

- Maximiere oder Minimiere $f(x,y)$
- Für Werte, welche $g(x,y) = 0$ erfüllen

Zunächst beschäftigen wir uns noch einmal mit der Richtungsableitung

$$\begin{aligned} D_v(f) &= \operatorname{grad} f \cdot \vec{v} \\ &= \|\operatorname{grad} f\| \cos\varphi \end{aligned}$$

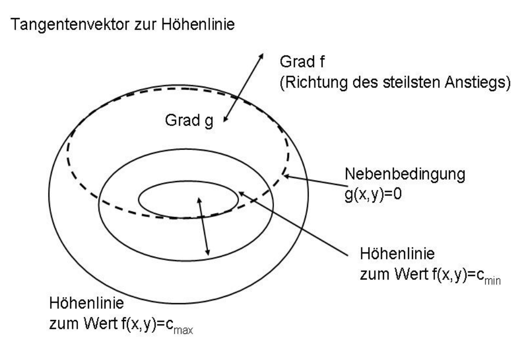
Wir hatten oben bereits gesehen, dass die Richtungsableitung dort maximal wurde, wo der Winkel zwischen Gradient und Richtung 0^0 ist und minimal bei 180^0. Wir sehen weiterhin, dass es auch stets zwei Richtungen mit der Richtungsableitung Null gibt, nämlich die Beiden zum Gradienten senkrechten Vektoren. Die Richtungsableitung Null bedeutet aber, dass wir uns in eine Richtung mit gleichem Funktionswert bewegen. In dieser Richtung verläuft also die Höhenlinie. Grafisch bedeutet dies, falls wir zunächst eine Höhenlinie zu $f(x,y) = c_1$ betrachten:



In Richtung des Gradienten verlaufen nun die Höhenlinien zu grösseren Funktionswerten, in Richtung von $-\operatorname{grad} f$ die Höhenlinien zu kleineren Funktionswerten. In der aussenliegenden Ebene müssen somit ale Funktionswerte anwachsen. Würde die Funktion an anderen Stellen fallen, gäbe es auch weitere Werte zur gleichen Höhenlinie.

Bem. Sollte der Gradient nach innen zeigen, dreht sich das Szenarion gerade um.

Nun betrachten wir die Höhenlinie zu $g(x, y) = 0$.



In einem maximalen (oder minimalen) Funktionswert dieser Punkte zur Funktion $f(x, y)$ müssen sich die Funktionen in einem Punkt berühren. und somit müssen die Tangenten parallel sein und damit für die Gradienten gelten

$$\operatorname{grad} f = \tilde{\lambda} \cdot \operatorname{grad} g$$

bzw. mit $\lambda = -\tilde{\lambda}$

$$\operatorname{grad} f + \lambda \cdot \operatorname{grad} g = \vec{0}$$

Zunächst sei ein Sonderfall erwähnt: Gibt es Punkte, deren Gradient von g zum Nullvektor wird und zusätzlich erfüllen, dass $g(x,y) = 0$ (also der Punkt die Nebenbedingung erfüllt), so ist dieser Punkt ebenfalls kritischer Punkt und muss gesondert betrachtet werden. Dies ist die sog. Nichterfüllung der Rangbedingung. Zeigen wir, dass die Punkte, in denen der $\operatorname{grad} g = \vec{0}$ wird, nicht die Nebenbedingung erfüllt, so sind wir dieses Problem bereits los (Rangbedingung wird erfüllt).

Für alle anderen Punkte gilt:

Der Wert λ heisst Lagrange-Parameter. Dies ist aber gerade die Ableitung der Funktion (Lagrange-Funktion) nach x und y

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y) \tag{12.37}$$

Leiten wir die Funktion nach λ ab, so erhalten wir zusätzlich gerade die Nebenbedingung

$$g(x,y) = 0$$

Andererseits gilt für Punkte, welche die Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ erfüllen, die Gleichheit von ursprünglicher Funktion und Lagrangefunktion

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) \tag{12.38}$$

für beliebiges λ.

Wir wenden nun das Verfahren wie folgt an:

Zunächst betrachten wir die Lagrange-Funktion $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)$ und bestimmen die Kandidaten wie in freien Optimierungen

$$grad\ L = \vec{0} \tag{12.39}$$

d.h.

$$f_x + \lambda \cdot g_x = 0 \tag{12.40}$$

$$f_y + \lambda \cdot g_y = 0 \tag{12.41}$$

$$g(x,y) = 0 \tag{12.42}$$

Die dritte notwendige Bedingung für die Kandidaten stellt sicher, daß bei der Lösung dieses Problemes nur Kandidaten herauskommen, welche auch die geforderte Nebenbedingung erfüllen. Da für solche Punkte aber $L(x,y,\lambda) = f(x,y)$

gilt, erhalten wir die optimale Lösung des ursprünglichen Problems. Die ersten beiden Bedingungen sorgen dafür, dass nur Punkte betrachtet werden, bei denen Funktion und Nebenbedingung parallele Gradienten haben.

Zur Entscheidung, ob ein Minimum oder Maximum vorliegt, ist die Hesse-Matrix für die drei Unbekannten aufzustellen.

Die "geränderte" Hesse-Matrix hat in diesem Fall die Gestalt:

$$H = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & g_x \\ L_{xy} & L_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{pmatrix} \tag{12.43}$$

und die Determinante dieser Matrix gibt Aufschluß über die Art des Extremums:

$$\begin{aligned} \det(H) &> 0 \Longrightarrow Maximum && (12.44)\\ \det(H) &< 0 \Longrightarrow Minimum && (12.45)\\ \det(H) &= 0 \Longrightarrow \text{ Keine Entscheidung möglich} && (12.46) \end{aligned}$$

Bem.: Erhalten wir eine Determinante stets ungleich Null, so ist insbesondere $\operatorname{grad} g \neq 0$, und damit der Eingangs erwähnte kritische Fall ausgeschlossen. Umgekehrt ist bei Nicht-Erfüllung der Rangbedingung keine Entscheidung mit Hilfe der geränderten Hesse Matrix möglich.

Wir haben somit die Optimierung bei 2 Unbekannten mit einer Nebenbedingung auf eine freie Optimierungsaufgabe in drei Unbekannten zurückgeführt. Der Parameter λ dient dabei nur als Hilfsmittel und wird hier nicht weiter benötigt.

Zurück zum Beispiel:

$f(x, y) = x \cdot y \qquad g(x, y) = 2x + 2y - 40 = 0$
Da gilt:

$$\operatorname{grad} g = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

wird die Rangbedingung erfüllt und es brauchen keine weiteren kritischen Punkte hierüber ermittelt zu werden.

Es ist:

$$\begin{aligned} L(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y) \\ &= xy + \lambda \cdot (2x + 2y - 40) \end{aligned}$$

Notwendig:

$$\begin{aligned} L_x &= y + 2\lambda = 0 \\ L_y &= x + 2\lambda = 0 \\ L_\lambda &= 2x + 2y - 40 = 0 \end{aligned}$$

liefert: $x = y = 10, \lambda = \frac{-y}{2} = -5$ (Kandidat)

Hesse Matrix:
$L_{xx} = L_{yy} = 0, L_{xy} = 1, g_x = 2, g_y = 2$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\det(H) = 4 + 4 = 8 > 0$

Also: Maximum mit Fläche $f(10, 10) = 100$ FE

Beispiel 2:
Welche lokalen Extrema hat die Funktion $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ unter der Nebenbedingung $x + y = 3$ bzw. $g(x, y) = x + y - 3 = 0$?

$$\begin{aligned} L(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y) \\ &= x^2 + 2y^2 + \lambda \cdot (x + y - 3) \end{aligned}$$

Notwendig:

$$\begin{aligned} L_x &= 2x + \lambda = 0 \\ L_y &= 4y + \lambda = 0 \\ L_\lambda &= x + y - 3 = 0 \end{aligned}$$

liefert: $x = 2, y = 1, \lambda = -4$ (Kandidat)

Hesse Matrix:
$L_{xx} = 2, L_{yy} = 4, L_{xy} = 0, g_x = 1, g_y = 1$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\det(H) = -2 - 4 = -6 < 0$

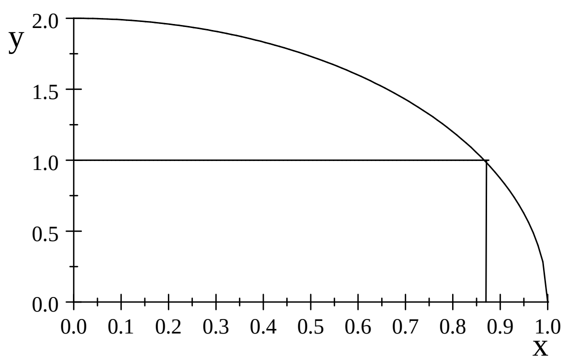
Also: Minimum mit $f(2,1) = 6$

Beispiel 3: Gesucht ist es das grösstmögliche Rechteck, welches in eine Ellipse um den Ursprung gezeichnet werden kann.

Die allgemeine Form der Ellipse ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Es reicht aus Symmetriegründen den ersten Quadranten zu betrachten, womit nur positive Größen für x, y, a und b zugelassen werden.



Für die Fläche des Rechtecks gilt

$$f(x, y) = x \cdot y$$

Und die Randbedingung ist für den Eckpunkt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Die Rangbedingung ist erfüllt, da $\operatorname{grad} g = \begin{pmatrix} \frac{2x}{a} \\ \frac{2y}{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $x = 0, y = 0$ und dort gilt: $g(0,0) = -1$.

Es ergibt sich als Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} L(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y) \\ &= x \cdot y + \lambda \cdot (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1) \end{aligned}$$

Es ergibt sich für den Kandidaten

$$\begin{aligned} L_x &= y + \frac{\lambda}{a^2} \cdot 2x = 0 \\ L_y &= x + \frac{\lambda}{b^2} \cdot 2y = 0 \\ L_\lambda &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$y = -\frac{\lambda}{a^2} \cdot 2x$$

bzw.

$$\lambda = -\frac{a^2 y}{2x}$$

Eingesetzt in die zweite Gleichung

$$\begin{aligned} x - \frac{a^2 y}{2x} \cdot \frac{2y}{b^2} &= 0 \\ x - \frac{a^2 y^2}{x b^2} &= 0 \\ x^2 b^2 &= a^2 y^2 \\ y &= \frac{b}{a} x \end{aligned}$$

Die dritte Gleichung liefert nun

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{\frac{b^2}{a^2} x^2}{b^2} - 1 \\ &= 2\frac{x^2}{a^2} - 1 = 0 \\ 2x^2 &= a^2 \\ x &= \frac{a}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

und damit

$$y = \frac{b}{a} x = \frac{b}{a} \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

Die Fläche im ersten Quadranten ergibt sich damit zu

$$xy = \frac{ab}{2}$$

Im Übrigen ist dann die Gesamtfläche des Rechtecks in allen vier Quadranten

$$F = 4\frac{ab}{2} = 2ab$$

Da $\lambda = -\frac{a^2 y}{2x}$ ist

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{a^2 y}{2x} \\ &= -\frac{a^2 \frac{b}{a} x}{2x} \\ &= -\frac{ab}{2} \end{aligned}$$

Ob sich nun ein Maximum oder Minimum einstellt, liefert die Hesse Mattrix:

$$H = \begin{pmatrix} \lambda \cdot \frac{2}{a^2} & 1 & \frac{2x}{a^2} \\ 1 & \lambda \cdot \frac{2}{b^2} & \frac{2y}{b^2} \\ \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Einsetzen des Kandidaten $\lambda = -\frac{ab}{2}, y = \frac{b}{\sqrt{2}}, x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ liefert

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{a} \\ 1 & -\frac{a}{b} & \frac{\sqrt{2}}{b} \\ \frac{\sqrt{2}}{a} & \frac{\sqrt{2}}{b} & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} -\frac{b}{a} & 1 \\ 1 & -\frac{a}{b} \\ \frac{\sqrt{2}}{a} & \frac{\sqrt{2}}{b} \end{matrix}$$

Mit der Determinante

$$\det H = \frac{2}{ab} + \frac{2}{ab} + \frac{2}{ab} + \frac{2}{ab} = \frac{8}{ab} > 0$$

erhalten wir, dass sich hier ein Maximum befindet.

Bem.: Sind absolute Extrema einer Funktion unter der Nebenbedingung der Form

$$\tilde{g}(x, y) \leq c$$

gesucht, so muss zunächst die Funktion auf lokale Extrema im Innern untersucht werden. Danach muss der Rand $\tilde{g}(x, y) - c = g(x, y) = 0$ betrachtet werden.

Bsp.: Gesucht sind die absoluten Extrema innerhalb des Einheitskreises der Funktion

$$f(x, y) = 4x^2 + 2y^2$$

Zunächst ergibt sich als lokales Extremum

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 8x = 0 \\ f_y(x, y) &= 4y = 0 \end{aligned}$$

nur ein Kandidat in $(0, 0)$.
Wegen

$$H = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ist dort ein lokales Minimum mit

$$f(0, 0) = 0$$

Auf dem Rand gilt schliesslich

$$L(x, y, \lambda) = 4x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{aligned} L_x &= 8x + 2\lambda x = 0 \\ x &= 0 \text{ oder } \lambda = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_y &= 4y + 2\lambda y = 0 \\ y &= 0 \text{ oder } \lambda = -2 \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Dies liefert die Kandidaten

$$\begin{aligned} &(0, 1, -2) \\ &(0, -1, -2) \\ &(1, 0, -4) \\ &(-1, 0, -4) \end{aligned}$$

Die geränderte Hesse Matrix ist

$$H = \begin{pmatrix} 8 + 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 4 + 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

Mit

$$\det H = -4x^2(4 + 2\lambda) - 4y^2(8 + 2\lambda)$$

Damit ist für die ersten beiden Kandidaten

$$\det H = -16 < 0$$

also ein Minimum auf dem Rand mit

$$f(0, \pm 1) = 2$$

Dieser Wert ist größer als das lokale Minimum und damit kein absolutes Minimum.

Für die anderen beiden ist

$$\det H = 16 > 0$$

und ein Maximum mit

$$f(\pm 1, 0) = 4$$

An diesen Stellen liegt damit auch der absolut grösste Wert.

Bem. Sind n Nebenbedingungen $g_1(x, y) = g_2(x, y) = ... = g_n(x, y) = 0$ gegeben, so wird die Lagrange-Funktion analog gebildet

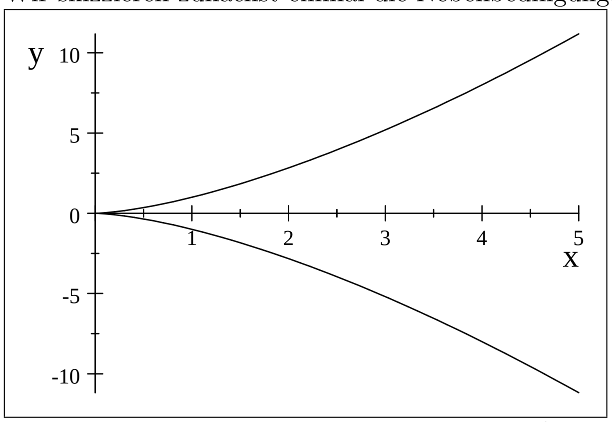
$$L(x, y, \lambda_1, ..., \lambda_n) = f(x, y) + \lambda_1 \cdot g_1(x, y) + \lambda_2 \cdot g_2(x, y) + ... + \lambda_n \cdot g_n(x, y)$$

Schliesslich sei noch ein Beispiel erwähnt, in dem die Rangbedingung eine Rolle spielt:

Wir betrachten

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x \\ g(x,y) &= y^2 - x^3 = 0 \end{aligned}$$

Wir skizzieren zunächst einmal die Nebenbedingung:



Versuchen wir zunächst diesen Wert mit Hilfe der Lagrange-Funktion zu finden:

$$L(x,y,\lambda) = x + \lambda(y^2 - x^3)$$

liefert

$$\begin{aligned} L_x &= 1 - 3x^2\lambda = 0 \\ L_y &= 2\lambda y = 0 \\ L_\lambda &= y^2 - x^3 = 0 \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung liefert $y = 0$ oder $\lambda = 0$. Für $\lambda = 0$ liefert dann die erste Gleichung den Widerspruch 1=0. Für $y = 0$ liefert die dritte dann $x = 0$, woraus wiederum ein Widerspruch in der verbleibenden ersten Gelichung entsteht (1=0). Somit existiert kein Kandidat/kritischer Punkt und das Minimum wird nicht gefunden.

Die Betrachtung der Rangbedingung liefert:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} g &= \begin{pmatrix} -3x^2 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x &= 0, y = 0 \end{aligned}$$

welches liefert

$$g(0,0) = 0$$

womit dieser Punkt zur Höhenlinie gehört und die Rangbedingung nicht erfüllt ist.

Daher muss dieser Punkt gesondert betrachtet werden. Die Höhenlinie verläuft für nicht-negative x-Werte und nimmt unter der Zielfunktion $f(x, y)$ an der Stelle $(0, 0)$ den kleinsten Funktionswert Null an.

12.15 Parametrische Funktionen und Kurvenintegrale

12.15.1 Der Tangentenvektor

Parametrische Funktionen beschreiben also nun einen zeitabhängigen Verlauf durch die x-y-Ebene. Wie können wir anhand einer parametrischen Funktion nun Bewegungsrichtung und die Geschwindigkeit der Bewegung beschreiben?

Die Geschwindigkeit ist ja bekanntlich die Änderung des Ortes. Hierzu betrachten wir die Aufenthaltspunkte zum Zeitpunkt $t_0 : \vec{X}(t_0)$ und $t_0 + h : \vec{X}(t_0 + h)$. Ggf bezeichnen wir auch $\triangle t := h$, um explizit auf die Änderung der Zeit hinzuweisen.

Die Richtung der Bewegung lässt sich nun ermitteln aus

$$\frac{\vec{X}(t_0 + h) - \vec{X}(t_0)}{h}$$

Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 ist

$$\begin{aligned} & \lim_{h \to 0} \frac{\vec{X}(t_0 + h) - \vec{X}(t_0)}{h} \\ = & \lim_{h \to 0} \begin{pmatrix} \frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h} \\ \frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{h} \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} =: \vec{X}'(t_0) \end{aligned}$$

Definition 276 *Der Vektor* $\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ *heißt* ***Tangentenvektor*** *der Kurve* $\vec{X}(t)$. *Die Gerade*

$$T(t) = \vec{X}(t) + \lambda \cdot \vec{X}'(t)$$

heißt ***Tangente****.*

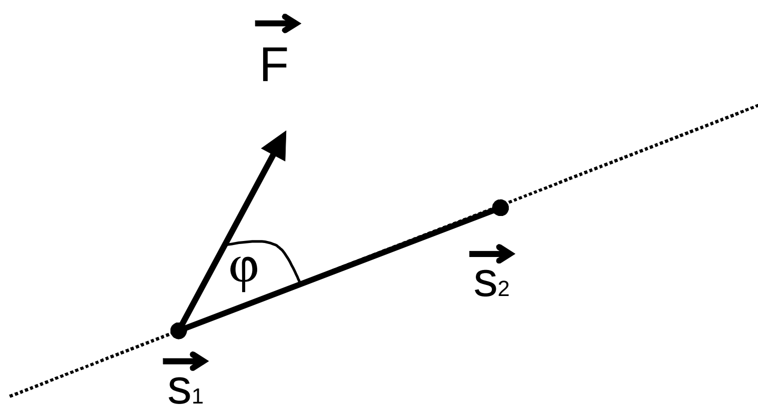
Bem.: $\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$ hat damit die Geschwindigkeit (Ableitung) $\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}$ und die Tangente ist

$$\begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}$$

12.15.2 Kurvenintegrale

Arbeit einer Kraft

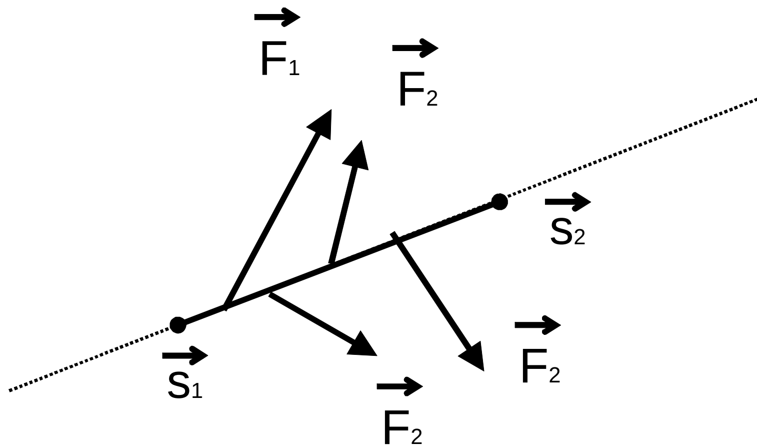
Skizze 1:



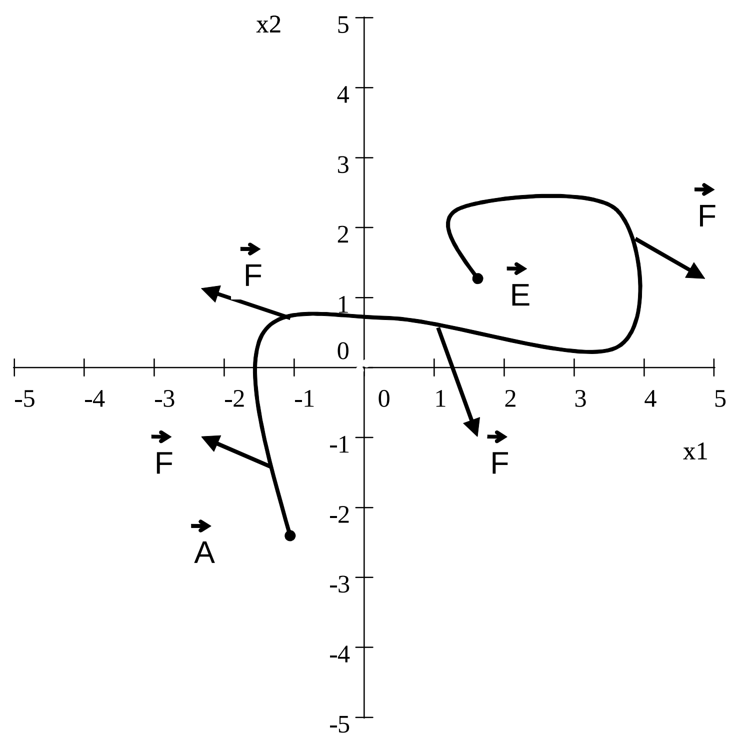
$\overrightarrow{F}$ greift an einem Punkt m in $\overrightarrow{s_1}$ an und bewegt den Massenpunkt zu $\overrightarrow{s_2}$. Welche Arbeit wird geleistet?

$$\begin{aligned} W &= \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{s} \\ &= \left\| \overrightarrow{F} \right\| \cdot \| \overrightarrow{s} \| \cdot \cos \varphi \\ &= \left\| \overrightarrow{F} \right\| \cdot \| \overrightarrow{s_2} - \overrightarrow{s_1} \| \cdot \cos \varphi \end{aligned}$$

Dieses Verfahren ist jedoch nicht anwendbar, wenn $\overrightarrow{F}$ nicht konstant und/oder der Weg nicht gradlinig ist.



Skizze:



Der Weg vom Anfangspunkt $\overrightarrow{A}$ zum Endpunkt $\overrightarrow{E}$ wird zunächst beschrieben durch $\overrightarrow{X} : t \;\to\; \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ für $t \in [a,b]$. Wenn die Funktion nun zum

Startzeitpunkt a im Punkt $\overrightarrow{A}$ und zum Endzeitpunkt b in $\overrightarrow{E}$ sein soll, so ist

$$\overrightarrow{X}(a) = \overrightarrow{A} \tag{12.47}$$

$$\overrightarrow{X}(b) = \overrightarrow{E} \tag{12.48}$$

Wir zerlegen nun das Zeitintervall in kleine Stücke

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b \tag{12.49}$$

und betrachten $\overrightarrow{F}$ auf jeder der zugehörigen Wegstrecken $\overrightarrow{X}(t_i) - \overrightarrow{X}(t_{i-1})$ als konstant zu $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{X}(t_{i-1}))$.

Für kleine Zeitdifferenzen (wir betrachten schliesslich den Grenzübergang $t \to 0$) ist weiterhin

$$\frac{\overrightarrow{X}(t_i) - \overrightarrow{X}(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \approx \overrightarrow{X}'(t_{i-1}) \tag{12.50}$$

Damit erhalten wir

$$\overrightarrow{X}(t_i) - \overrightarrow{X}(t_{i-1}) = \overrightarrow{X}'(t_{i-1}) \cdot (t_i - t_{i-1}) \tag{12.51}$$

Die Arbeit W_i auf dem Wegstück von t_{i-1} zu t_i ist dann

$$\begin{aligned} W_i &= \text{(Kraft)x(Weg)} \\ &= \overrightarrow{F}(\overrightarrow{X}(t_{i-1})) \cdot (\overrightarrow{X}(t_i) - \overrightarrow{X}(t_{i-1})) \\ &= \overrightarrow{F}(\overrightarrow{X}(t_{i-1})) \cdot \overrightarrow{X}'(t_{i-1}) \cdot (t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

Wir erhalten die Gesamtarbeit

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i=1}^{n} W_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F}(\overrightarrow{X}(t_{i-1})) \cdot \overrightarrow{X}'(t_{i-1}) \cdot \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{\triangle t} \end{aligned} \tag{12.52}$$

und durch den Übergang $\triangle t \to 0$

$$\boxed{W = \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{X}(t)) \cdot \overrightarrow{X}'(t)dt} \tag{12.53}$$

(Arbeit ist also das Kurvenintegral des Vektorfeldes entlang des Weges).

Die Vorgehensweise ist also wie folgt:

Gegeben ist
- ein Vektorfeld $\overrightarrow{F}(x,y)$ für jeden Punkt der Ebene (z.B. ein Magnetfeld)
- ein Weg $\overrightarrow{X}(t)$ vom Zeitpunkt $t=a$ bis $t=b$ durch dieses Vektorfeld.

Zur Berechnung der Arbeit (also gegen die Kräfte vom Punkt $\overrightarrow{X}(a)$ zu $\overrightarrow{X}(b)$ zu gelangen) ist zunächst zu berechnen:

1. die Ableitung des Weges nach der Zeit (Geschwindigkeit) $\overrightarrow{X}'(t)$ durch Ableiten der x- und y-Komponente nach t
Resultat: Vektor in t

2. Berechnung der Kraft zum Zeitunkt t durch Berechnung des Ortes in Abhängigkeit vom Zeitpunkt t und dann Einsetzen in das Kraftfeld $\overrightarrow{F}(x,y) = \overrightarrow{F}(\overrightarrow{X}(t))$
Resultat: Vektor in t

3. Berechnung des Skalarproduktes $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{X}(t)) \cdot \overrightarrow{X}'(t)$, also der in 1. und 2. berechneten Größen
Resultat: Skalare Funktion in t

4. Berechnung des Integrals $W = \int\limits_{t=a}^{b} \overrightarrow{F}(\overrightarrow{X}(t)) \cdot \overrightarrow{X}'(t)dt$ durch Einsetzen der Funktion aus 3. und des Start- und Endzeitpunktes.

Beispiel: $\overrightarrow{F}$ sei ein Kraftfeld, dessen Stärke im Punkt (x,y) gegeben ist durch

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 2y-x \\ 2+x \end{pmatrix} \tag{12.54}$$

Beachte: Dieses Feld ist in jedem Punkt definiert, die spezielle Kurve kommt nun:

Wir betrachten die Kurve

$$\overrightarrow{X} : t \quad \rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \tag{12.55}$$

und betrachten den Zeitraum $t=0$ bis $t=2$:

Die Kuve beginnt also in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und endet in $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Dort wirken beispielweise die Kräfte $\overrightarrow{F}(x=0,y=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{F}(x=2,y=4) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

Allgemein lässt sich die Kraft zum Zeitpunkt t ausrechnen (bedenken Sie, zum Zeitpunkt t befinden wir uns in $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$) :

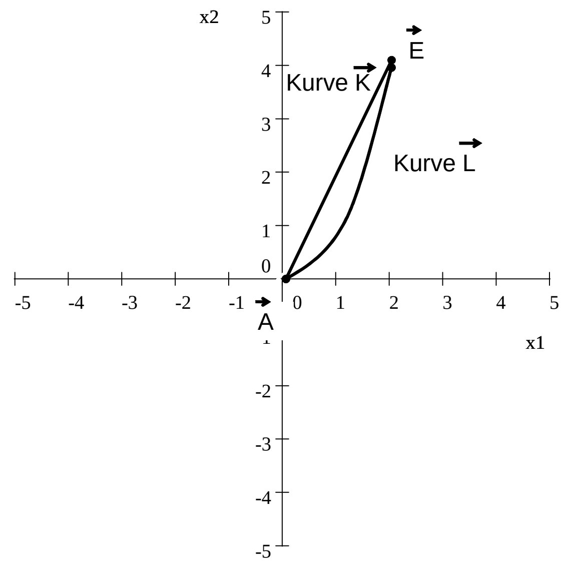
$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{X}(t)) = \overrightarrow{F}(x = t, y = t^2) = \begin{pmatrix} 2t^2 - t \\ 2 + t \end{pmatrix} \tag{12.56}$$

Zur exakten Berechnung brauchen wir weiterhin $\overrightarrow{X}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$ und können nun das Integral aufstellen

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{X}(t)) \cdot \overrightarrow{X}'(t) dt \qquad (12.57) \\ &= \int_{t=0}^{2} \begin{pmatrix} 2t^2 - t \\ 2 + t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{t=0}^{2} \left(2t^2 - t\right) \cdot 1 + (2 + t) \cdot 2t \; dt \\ &= \int_{t=0}^{2} 4t^2 + 3t dt \\ &= \left[\frac{4t^3}{3} + \frac{3t^2}{2}\right]_{t=0}^{2} = \frac{32}{3} + 6 = \frac{50}{3} \end{aligned}$$

Frage: Wann ist es von Interesse auf welchem Weg wir vom Anfangs- zum Zielpunkt kommen und wann nur, wo diese Punkte liegen?

Beispiel:



Wir betrachten also zwei Wege zum Ziel:

Die Zeitachse sei $t \in [0,2]$:

$$\overrightarrow{K} : t \quad \rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \tag{12.58}$$

$$\overrightarrow{L} : t \quad \rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \tag{12.59}$$

Beide Wege führen von $t = 0 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu $t = 2 : \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ - nur auf verschiedenen Wegen.

Wie sind die Resultate für die Arbeit wenn wir beispielsweise das Vektorfeld

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ xy \end{pmatrix} \tag{12.60}$$

betrachten?

Fall 1: $\overrightarrow{K}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{K}(t)) = \begin{pmatrix} 4t^3 \\ 2t^2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{K}(t)) \cdot \overrightarrow{K}'(t)dt \\ &= \int_{t=0}^{2} \begin{pmatrix} 4t^3 \\ 2t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{t=0}^{2} 4t^3 + 4t^2 dt = \left[4\frac{t^4}{4} + 4\frac{t^3}{3} \right]_{t=0}^{2} = 16 + \frac{32}{3} = \frac{80}{3} \end{aligned}$$

Fall 2: $\overrightarrow{L}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{L}(t)) = \begin{pmatrix} t^5 \\ t^3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{L}(t)) \cdot \overrightarrow{L}'(t)dt \\ &= \int_{t=0}^{2} \begin{pmatrix} t^5 \\ t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{t=0}^{2} t^5 + 2t^4 dt = \left[\frac{t^6}{6} + 2\frac{t^5}{5} \right]_{t=0}^{2} = \frac{2^6}{6} + 2\frac{2^5}{5} = \frac{352}{15} \end{aligned}$$

Die Arbeit hängt also in diesem Fall vom speziell zurückgelegten Weg ab.

Immer?
Bei gleichem Weg wird nun das Vektorfeld

$$\overrightarrow{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ 1 + x \end{pmatrix}$$

betrachtet:

Fall 1: $\overrightarrow{K}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \to \overrightarrow{K}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{K}(t)) = \begin{pmatrix} t + 2t \\ 1 + t \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{K}(t)) \cdot \overrightarrow{K}'(t)dt \\ &= \int_{t=0}^{2} \begin{pmatrix} 3t \\ 1 + t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{t=0}^{2} 3t + 2 + 2t dt = \left[2t + \frac{5t^2}{2} \right]_{t=0}^{2} = 4 + 10 = 14 \end{aligned}$$

Fall 2: $\overrightarrow{L}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \to \overrightarrow{L}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{L}(t)) = \begin{pmatrix} t+t^2 \\ 1+t \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{L}(t)) \cdot \overrightarrow{L}'(t)dt \\ &= \int_{t=0}^2 \begin{pmatrix} t^2+t \\ 1+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{t=0}^2 t^2+t+2t+2t^2 dt \\ &= \int_{t=0}^2 3t^2+3tdt \\ &= \left[t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_{t=0}^2 = 8+6=14 \end{aligned}$$

Also kommt in diesem Falle die gleiche Arbeit heraus. Zufall?

Oder anders gefragt: Wann ist ein Kurvenintegral unabhängig vom zurückgelegten Weg (sondern nur abhängig von Start und Ziel) ?

12.15.3 Die Potentialfunktion

Definition 277 *Sei $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. $\vec{f}$ heisst Gradientenfeld, wenn es eine skalare Funktion V gibt, mit*

$$\operatorname{grad} V = \vec{f}$$

Die Funktion V heisst dann Potentialfunktion (oder mehrdimensionale Stammfunktion) von $\vec{f}$,kurz:

$$V = \int \vec{f}$$

Beispiel: Zum Gradientenfeld

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ist eine entsprechende Potentialfunktion

$$V(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

da

$$\operatorname{grad} V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{f}$$

Satz 278 *Sei V:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Potentialfunktion von $\vec{f}$. Dann gilt:*

Im $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

Im $\mathbb{R}^3$:

$$rot(\vec{f}) = 0$$

Im $\mathbb{R}^n$ für die Jacobimatrix J

$$J = J^t$$

Bew.: Zu a) Da $V_x = f_1$ und $V_y = f_2$ ist auch

$$\begin{aligned} V_{xy} &= \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ V_{yx} &= \frac{\partial f_2}{\partial x} \end{aligned}$$

und wegen des Satzes von Schwarz Gleichheit

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

Zur Berechnung der Stammfunktion kann nun obige Gleichheit ausgenutzt werden:

Geg. sei nun

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$$

Zunächst zur Existenz der Potentialfunktion. Wir wissen nun, dass falls

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

gilt, eine Potentialfunktion $V(x,y)$ existiert mit

$$\mathrm{grad}\, V = \vec{f}$$

Weiterhin gilt nach Integration von $V_{xy} = \frac{\partial f_1}{\partial y}$ nach y und anschliessend nach x

$$\begin{aligned} V(x,y) &= \int f_1(x,y)dx \\ &= F_1(x,y) + c(y) \end{aligned}$$

Differentiation nach y liefert nun

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} &= f_2(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(F_1(x,y) + c(y)\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} F_1(x,y) + c'(y) \end{aligned}$$

woraus sich $c'(y)$ und damit $c(y)$ ergibt.
Bsp.:

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - 2y^2 \\ -4yx + y + 2 \end{pmatrix}$$

Die Existenz der Stammfunktion ist gesichert, da

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial y} &= -4y \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= -4y \end{aligned}$$

Die Stammfunktion selber lässt sich nun aus einem der beiden Komponenten ausrechnen.

$$\begin{aligned} V(x,y) &= \int f_1(x,y)dx = \int x^2 - 2y^2 dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - 2y^2 x + c(y) \end{aligned}$$

Die Konstante in y wird nun berechnet über

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} &= -4yx + c'(y) = f_2(x,y) = -4yx + y + 2 \\ c'(y) &= y + 2 \\ c(y) &= \int y + 2dy = \frac{1}{2}y^2 + 2y + c \end{aligned}$$

und damit

$$V(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - 2y^2 x + \frac{1}{2}y^2 + 2y + c$$

Satz 279 *Gibt es zu* $\overrightarrow{F}(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$ *ein Potential* $V(x,y)$ *mit*

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= f(x,y) \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= g(x,y) \end{aligned}$$

auf einem Weg von $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{X}(a)$ *nach* $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{X}(b)$*, dann ist*

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{X}(t)) \cdot \overrightarrow{X}'(t)dt \\ &= V(\overrightarrow{E}) - V(\overrightarrow{A}) \end{aligned}$$

also unabhängig vom speziellen Weg $\overrightarrow{X}(t)$*!*

Bew.: Sei $V(x,y)$ eine Funktion mit

$$\operatorname{grad} V = \overrightarrow{F}$$

Dann ist gemäß der mehrdimensionalen Kettenregel

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(x=x(t),y=y(t))}{\partial t} &= \frac{\partial V(x=x(t),y=y(t))}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial V(x=x(t),y=y(t))}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\\ &= \operatorname{grad} V(x=x(t),y=y(t))\cdot\overrightarrow{X}'(t)\\ &= \overrightarrow{F}(\overrightarrow{X}(t))\cdot\overrightarrow{X}'(t)\end{aligned}$$

Also nach Integration nach t

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{X}(t))\cdot\overrightarrow{X}'(t)dt &= [V(x=x(t),y=y(t))]_a^b\\ &= V(\overrightarrow{E})-V(\overrightarrow{A})\end{aligned}$$

Bem.: Die Funktion $V(x,y)$ ist im Gegensatz zur Funktion $\overrightarrow{F}(x,y)$ ein Skalar.

Insbesondere gilt dann auf jedem geschlossenen Weg ($\overrightarrow{E}=\overrightarrow{A}$):

$$W = V(\overrightarrow{E})-V(\overrightarrow{A}) = 0$$

Zum obigen Beispiel: Es war $\overrightarrow{F}(x,y)=\begin{pmatrix}x+y\\1+x\end{pmatrix}$ und wir benötigen eine Funktion, welche - wenn wir diese nach x differenzieren - die Ableitung $x+y$ hat und wenn wir als Unbekannte y wählen, die Ableitung nach y dann $1+x$ ist. Die Potentialfunktion existiert, da

$$\frac{\partial(x+y)}{\partial y} = 1 = \frac{\partial(1+x)}{\partial x}$$

Damit

$$V(x,y)=\int x+ydx=\frac{x^2}{2}+yx+c(y) \tag{12.61}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial y} &= x+c'(y)=f_2(x,y)=1+x\\ c'(y) &= 1\\ c(y) &= \int 1dy = y+c\end{aligned}$$

und damit als Potential

$$V(x,y) = \frac{x^2}{2} + yx + y$$

Da wir im obigen Beispiel die Arbeit vom Punkt $\overrightarrow{A} = (0,0)$ (Einsetzen des Startzeitpunktes in einen der Wege) zu $\overrightarrow{E} = (2,4)$ betrachtet haben, ergibt sich

$$\begin{aligned} W &= V(x=2, y=4) - V(x=0, y=0) \\ &= \frac{4}{2} + 2 \cdot 4 + 4 - 0 - 0 = 14 \end{aligned}$$

Beispiel: Potentielle Energie: Ein Körper werde von den Koordinaten $A = (x_0, y_0)$ um die Höhe h nach oben und l nach rechts bewegt, also in den Punkt $E = (x_0 + l, y_0 + h)$. Dabei werde ein reibungsfreies Szenario betrachtet, wo die einzige zu überwindende Kraft die Gewichtskraft mg (=const) ist. Wir haben somit ein Kraftfeld

$$\begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix}$$

und suchen für das Potential eine Funktion $V(x,y)$ mit $\frac{\partial V}{\partial x} = V'(x) = 0$. Integration liefert

$$\begin{aligned} V(x,y) &= c(y) && (12.62) \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= mg = c'(y) && (12.63) \end{aligned}$$

liefert die Lösung $c(y) = mgy$, also

$$V(x,y) = mgy \qquad (12.64)$$

Nun kann die Arbeit auf jedem beliebigem Weg berechnet werden, der von A zu E führt. Zunächst wird das Potential im Anfangs- und Endpunkt berechnet:

$$\begin{aligned} V(A) &= V(x_0, y_0) = mgy_0 && (12.65) \\ V(E) &= V(x_0 + l, y_0 + h) = mg(y_0 + h) && (12.66) \end{aligned}$$

und nun kann die Arbeit aus der Potentialdifferenz ermittelt werden:

$$W = V(E) - V(A) = mgh \qquad (12.67)$$

Dabei spielt also weder die Bewegung in x-Richtung noch der spezielle Weg vom Anfangs- zum Endpunkt eine Rolle.

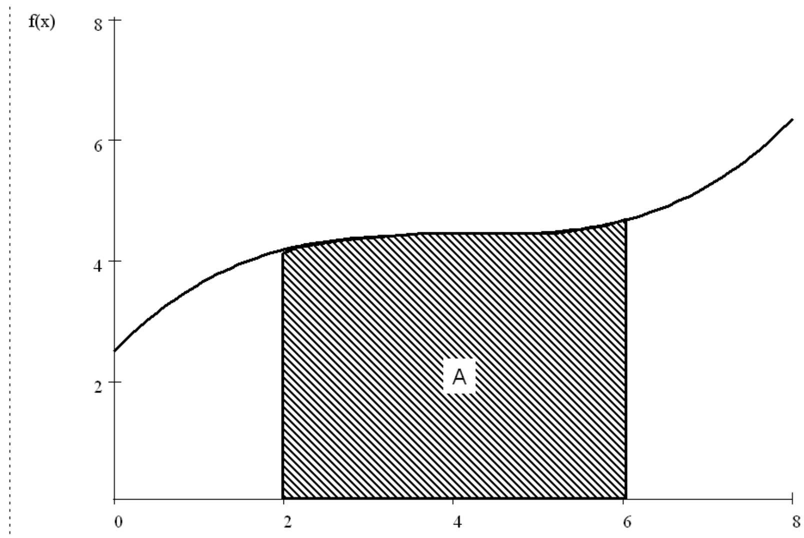
Kapitel 13

Mehrdimensionale Integration

Rechnen können viele, aber der Ingenieur, der fängt beim Integral an!

13.1 Einleitung

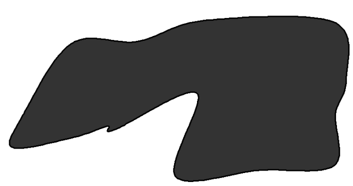
Zunächst wieder zur Erinnerung der eindimensionale Fall: Gesucht war die Fläche A unter der Funktion $f(x)$:



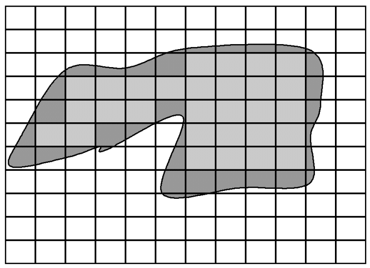
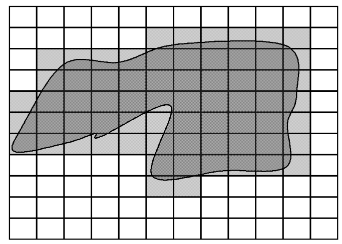
Die Fläche wurde nun bestimmt, in dem das Intervall $[a, b]$ in Streifen unterteilt wurde und in diesen Streifen die Funktionsfläche durch Rechtecke angenähert wurde.

Die Rechtecksumme ist damit $\sum f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$. Mit $dx = x_{i+1} - x_i$ erhält man beim Grenzübergang $n \to \infty$ den Wert $A = \int_a^b f(x)dx$.

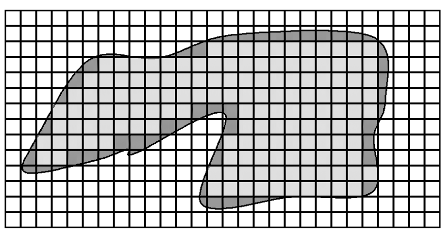
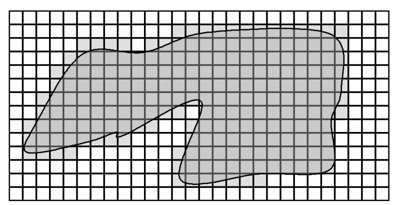
Wir betrachten zunächst das folgende Problem: Gesucht ist die Wassermenge des Sees im folgenden Bild. Hierzu betrachten wir die Kontur der Seeoberfläche und überdecken diese mit einem rechteckigen Gitter:



Wenn die Tiefe des Sees in einer Koordinate (x, y) durch $f(x, y)$ (in hinreichend kleinen Rechtecken nahezu konstant) gegeben ist, so ist die Wassermenge unterhalb dieses Rechteckes $f(x, y) \cdot dy \cdot dx$. Die Fläche des Rechteckes wird auch mit $dF = dy \cdot dx$ bezeichnet. Insgesamt ergibt sich die Wassermenge also als Summe dieser Wassermengen. Um nun zu entscheiden, welche Rechtecke Beiträge liefern, betrachtet wir als untere Schranke der Wassermenge die Summe der Rechtecke die komplett im See liegen (also vollständig grau sind) und als obere Schranke alle jene Rechtecke, die einen (evtl. noch so kleinen) See-Anteil enthalten.

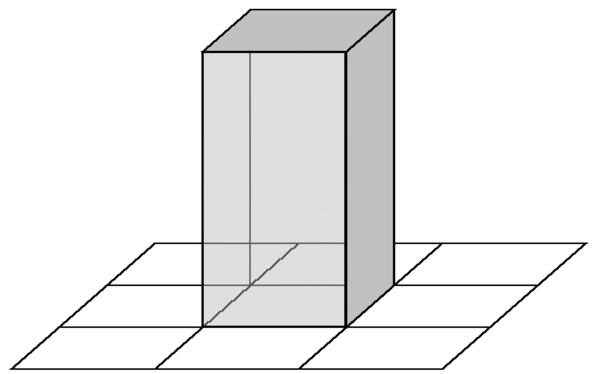



Um nun die Wasserfläche genauer bestimmen zu können, verkleinern wir die Abstände dx und dy :

Nachdem wir somit auch krummlinige Gebiete hinreichend annähern können, brauchen wir zur Berechnung der Wassermenge noch $f(x, y)$, also das Tiefenprofil des Sees.

Wir berechnen nun die Wassermenge auf den Rechecke durch Wassersäulen. Diese Wassersäulen haben das Volumen Rechteckfläche mal Tiefe an dieser Rechteckstelle.



Die Addition der Wassersäulen ergibt die gesuchte Wassermenge. Bei der oben beschriebenen Verfeinerung des Gitters wird nun die Wassermenge immer exakter approximiert.

Die Wassermenge der Säule bei x_i und y_j wird dabei angenähert durch

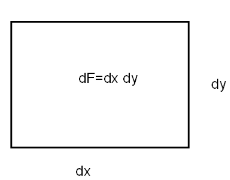
$$f(x_i, y_j) \cdot \triangle y \cdot \triangle x$$

Hat man insgesamt n Rechtecke, mit Funktionswerten $f_1, ..., f_n$ entspricht die Gesamtmenge

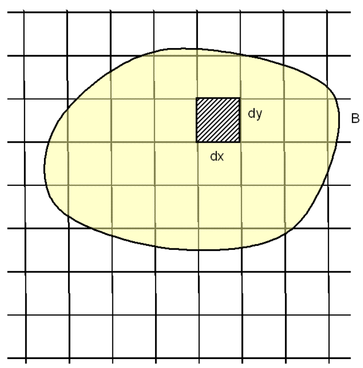
$$\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \triangle y \cdot \triangle x$$

Nun bilden wir wieder den Grenzübergang $n \to \infty$ und definieren

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \triangle y \cdot \triangle x = \int \int f(x,y) dy dx = \int f \quad dF$$



Spezialfall: Summieren wir nun nur die Flächenstücke auf, also $\sum_{i=1}^{n} \triangle y \cdot \triangle x$ so erhalten wir als Resultat des Integrals die Fläche des Gebietes. Also $\int\limits_B \int 1$ $dydx = \mathrm{B}$



13.2 Berechnung der Integrale

Bezeichnet A das Rechteck $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$, so ist

$$\int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} f(x, y) dydx = \int_A f \quad dA = \int \int_A f \ dA \tag{13.1}$$

Ist die Grundfläche nicht rechteckig, so wird die Grundfläche wie oben zerlegt in Gebiete $\triangle A_k$, die sich zum gesamten Gebiet zusammensetzen:

Definition 280 $\int_A f \quad dA = \lim\limits_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \cdot \triangle A_k$ *heißt das* ***Integral*** *von f über das Gebiet A. $\triangle A_k$ ist dabei eine Zerlegung der Grundfläche in "kleine" Rechtecke.*

13.2.1 Berechnung von Integralen in kartesischen rechteckigen Koordinaten

Die praktische Berechnung erfolgt durch zwei aufeinanderfolgende Integrationsschritte, bei der wie bei der Differentiation die jeweils andere Unbekannte festgehalten wird (als Konstante betrachtet wird).

Hierzu wird zunächst das innere Integral ausgewertet, danach dann das äußere Integral. Also:

1. $\int_{x_0}^{x_1} \underbrace{\int_{y_0}^{y_1} f(x,y)dy}_{h(x)} \, dx$

2. $\int_{x_0}^{x_1} h(x)dx$ wird dann - wie im eindimensionalen kennengelernt - berechnet.

Bsp.:
$\int_{x_0=0}^{x_1=1} \underbrace{\int_{y_0=1}^{y_1=2} x \cdot y \quad dy}_{h(x)} \, dx = \int_{x_0=0}^{x_1=1} \left[x\frac{y^2}{2}\right]_{y=1}^{2} dx = \int_0^1 2x - \frac{1}{2}xdx =$
$\int_0^1 \frac{3}{2}xdx = \left[\frac{3}{4}x^2\right]_{x=0}^{1} = \frac{3}{4}$

Bem.: Es ist bei rechteckigen Integrationsbereichen egal, in welcher Reihenfolge integriert wird:

$\int_{y_0=1}^{y_1=2} \underbrace{\int_{x_0=0}^{x_1=1} x \cdot y \quad dx}_{h(y)} \, dy = \int_{y_0=1}^{y_1=2} \left[y\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{1} dy = \int_1^2 \frac{y}{2}dy = \left[\frac{1}{4}y^2\right]_{y=1}^{2} =$
$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Dies liegt wie gesagt daran, dass der Integrationsbereich rechteckig war. Ist das Integrationsgebiet krummlinig, so darf die Integration i.A. nicht vertauscht werden.

Ist das Integrationsgebiet jedoch rechteckig und lässt sich weiterhin $f(x,y)$ als Produkt zweier Funktionen, die jeweils nur von x bzw. y abhängen, schreiben, also

$$f(x,y) = g(x) \cdot h(y) \tag{13.2}$$

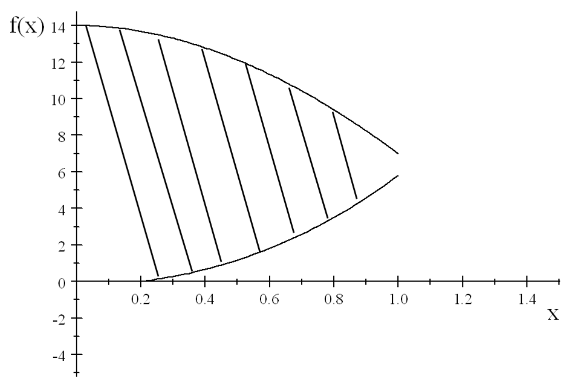
so ist

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} f(x,y)dydx = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} g(x)\cdot h(y)dydx$$
$$= \int_{x_0}^{x_1} g(x)dx \cdot \int_{y_0}^{y_1} h(y)dy \qquad (13.3)$$

13.2.2 Integration über kartesische krummlinige Bereiche

Betrachtet man den Fall, dass die Grundfläche sich nicht aus einem Rechteck ergibt, sondern beispielweise aus einer unteren und einer oberen Funktion ($f_u(x)$ und $f_o(x)$) ergibt, so wird zunächst auf der x-Achse wiederum von a bis b integriert, in der zweiten Dimension hängt der Integrationsbereich jedoch vom "aktuellen" x-Wert ab.

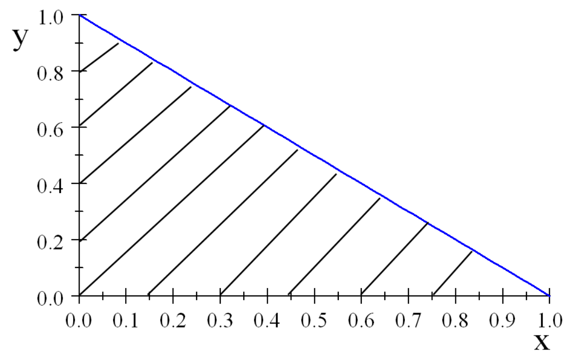
Skizze:



Das zu lösende Integral ist dann:

$$\int\limits_{x=a}^{b}\quad\int\limits_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} f(x,y)\ dydx$$

Beispiel: Wir betrachten das Gebiet zwischen x-Achse und der Geraden



D.h. $f_0(x) = 1 - x \qquad f_u(x) = 0$ und wir integrieren über die x-Werte von 0 bis 1:

$$\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1-x} f(x,y)dydx \tag{13.4}$$

Betrachten wir nun speziell $f(x,y) = 1$, so erhalten wir die Flächenmasszahl des beschriebenen Gebietes:

$$\begin{aligned} & \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1-x} 1dydx \\ = & \int_{x=0}^{1} [y]_{y=0}^{1-x} \quad dx = \int_{x=0}^{1} 1 - x \quad dx \\ = & \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

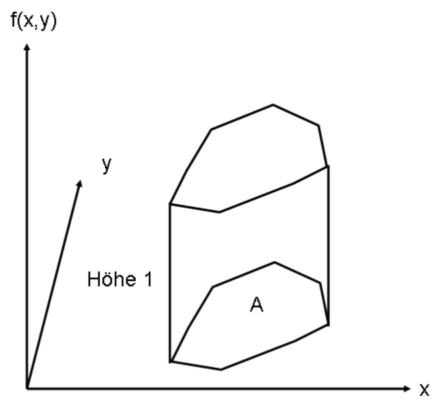
Bem.: Eine Vertauschung der Integrationsreihenfolge darf hier nicht vorgenommen werden:

$$\int_{y=0}^{1-x} \int_{x=0}^{1} \quad 1dxdy = \int_{y=0}^{1-x} [x]_0^1 \quad dy = \int_{y=0}^{1-x} 1 \quad dy = [y]_{y=0}^{1-x} = 1 - x \qquad ...?$$

13.2.3 Weitere Anwendungen

1. Wie oben bemerkt: Der Flächeninhalt F einer Grundfläche A ergibt sich durch Integration mit $f(x,y) = 1$,also

$$F = \int_{(A)} 1 dA \tag{13.5}$$

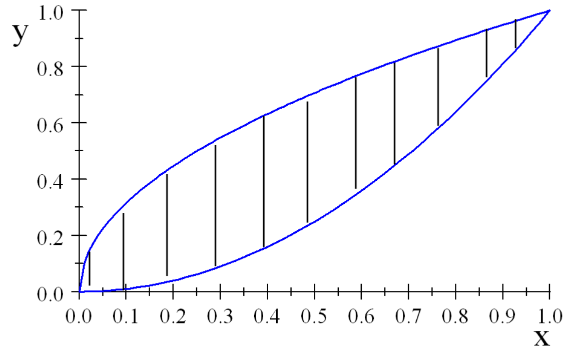


2. Der Schwerpunkt mit den Schwerpunktskoordinaten (x_s, y_s) einer Fläche mit homogener Dichte ergibt sich (mit F aus Teil 1) aus:

$$x_s = \frac{1}{F} \int_{(A)} x dA \tag{13.6}$$

$$y_s = \frac{1}{F} \int_{(A)} y dA \tag{13.7}$$

Beispiel: Wo liegt der Schwerpunkt der Fläche, die von $\sqrt{x}$ und x^2 eingeschlossen wird?



Zunächst die Flächenmasszahl:

$$\begin{aligned} F &= \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} 1 dy dx = \int_{x=0}^{1} [y]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_{x=0}^{1} \sqrt{x} - x^2 dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right]_{x=0}^{1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Damit ist $\frac{1}{F} = 3$. Nun die Koordinaten:

$$\begin{aligned} x_s &= 3 \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} x dy dx \\ &= 3 \int_{x=0}^{1} [xy]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = 3 \int_{x=0}^{1} x\sqrt{x} - x^3 dx \\ &= 3 \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4} x^4 \right]_{x=0}^{1} = 3 \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4} \right) = 3 \cdot \frac{3}{20} = \frac{9}{20} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} y_s &= 3\int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=x^2}^{\sqrt{x}} y dy dx \\ &= 3\int\limits_{x=0}^{1}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = 3\int\limits_{x=0}^{1}\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^4 dx \\ &= 3\left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{10}x^5\right]_{x=0}^{1} = 3\cdot\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10}\right) = 3\cdot\frac{3}{20} = \frac{9}{20} \end{aligned}$$

Die Schwerpunktskoordinaten lauten somit

$$(x_s, y_s) = (\frac{9}{20}, \frac{9}{20})$$

3. Berechnung der Masse eines inhomogenen Gebietes

Wir nun die spezifische Dichte eines Stoffes in der Koordinate (x, y) gegeben durch $\rho(x, y)$, so lässt sich die Masse einer Fläche A berechnen gemäß

$$M = \int\int_A \rho(x, y) dA$$

Beispiel: Sei

$$\rho\left(x, y\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

und betrachten wir

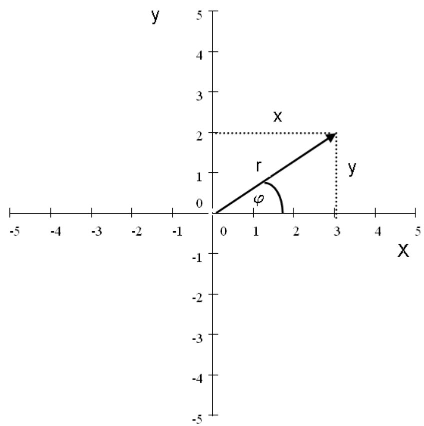
$$A = [1, 2]x[1, 3]$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} M &= \int_{x=1}^{2}\int_{y=1}^{3} \rho(x, y) dy dx \\ &= \int_{x=1}^{2}\int_{y=1}^{3} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} dy dx \\ &= \int_{x=1}^{2}\left[\frac{1}{x}y + \ln|y|\right]_{y=1}^{3} dx \\ &= \int_{x=1}^{2} \frac{2}{x} + \ln 3 dx \\ &= \left[2\ln|x| + \ln 3\cdot x\right]_1^2 \\ &= 2\ln 2 + \ln 3 \end{aligned}$$

13.2.4 Integration in Polarkoordinaten

Sind die Integrationsgebiete krummlinig (Kreise, Ellipsen, etc.) so kann zur Beschreibung der Gebiete in Polarkoordinaten gearbeitet werden.



Es gilt bei der Umrechnung

$$x = r \cdot \cos\varphi \quad (13.8)$$
$$y = r \cdot \sin\varphi \quad (13.9)$$

Es ist somit im Funktionsausdruck und in den Grenzen jedes x bzw. y mit den obigen Formeln zu substituieren.

Insbesondere wird der Integrand

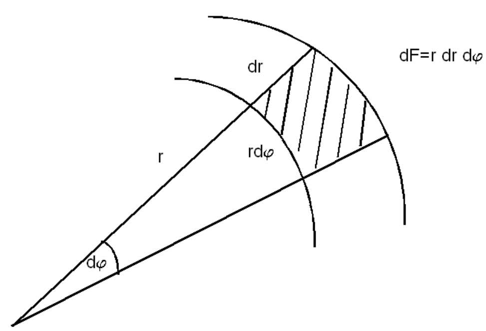
$$f(x, y) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \quad (13.10)$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + 2y^2 \\ &= (r\cos\varphi)^2 + 2(r\sin\varphi)^2 \\ &= r^2\cos^2\varphi + 2r^2\sin^2\varphi \\ &= r^2 \cdot (1 + \sin^2\varphi) \end{aligned}$$

Die zuvor rechteckigen Flächenelemente $dy \cdot dx$ werden nun zu krummlinigen Flächenelementen $drd\varphi$. Während die Größe der rechteckigen Elemente $dy \cdot dx$

war, ist dies bei den krummlinigen nicht der Fall. Eine Änderung des Drehwinkels um $d\varphi$ sowie die Änderung des Radius um dr ergibt nun ein Flächenelement, welches die Grundfläche $r\ drd\varphi$ hat (siehe Abbildung. Die Änderung in φ bewirkt eine Bogenlänge von $rd\varphi$). Beachte: Wir ersetzen also nicht $dy\ dx$ durch $drd\varphi$ sondern durch $r\ drd\varphi$.



Merke: Bei der Substitution muß also zusätzlich

$$dydx = r \cdot drd\varphi \tag{13.11}$$

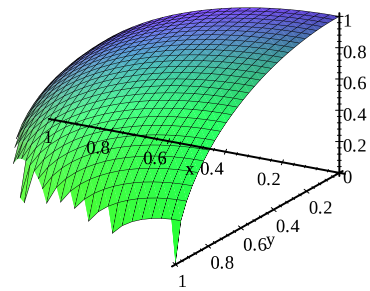
ersetzt werden.

!!! Häufig treten hier Ausdrücke der Form $x^2 + y^2$ auf. Diese sind zu ersetzen durch

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 \\ &= r^2 \end{aligned}$$

Bem.: Ist in der Aufgabenstellung bereits zu erkennen, daß die Grundfläche krummlinig ist, so kann die Grundfläche - also die Integrationsgrenzen - direkt in Polarkoordinaten beschrieben werden.

Beispiel: Volumen einer Halbkugel mit r=1, d.h. $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$



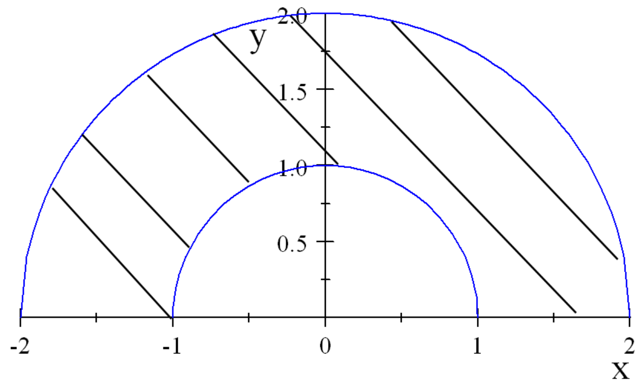
$$\begin{aligned}
\int\int \sqrt{1-x^2-y^2}dydx &= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} \sqrt{1-r^2}\cdot rdrd\varphi \\
&= \frac{-1}{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=1}^{0} \sqrt{z}dzd\varphi \\
&= \frac{1}{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right]_{z=0}^{1} d\varphi \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot[\varphi]_{\varphi=0}^{2\pi} = \frac{1}{3}\cdot 2\pi = \frac{2}{3}\pi
\end{aligned}$$

Damit ist das Volumen einer (Voll-)Kugel $V = \frac{4}{3}\pi$

Beispiel 2: Volumen eines Zylinders mit der Höhe h und Radius r_0

$$\begin{aligned}
&\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{r_0} h\cdot rdrd\varphi \\
=\ & h\cdot\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r_0} d\varphi \\
=\ & \left[h\frac{r_0^2}{2}\cdot\varphi\right]_{\varphi=0}^{2\pi} = 2\pi h\frac{r_0^2}{2} = \pi h r_0^2
\end{aligned}$$

Beispiel 3: Skizze: (Ring zwischen r_1 und r_2 auf der oberen Halbachse)



Integrieren wir beispielsweise die Funktion $f(r,\varphi) = \frac{1}{r^2} \cdot \varphi$:

$$\begin{aligned}
& \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \int\limits_{r=r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} \cdot \varphi \cdot r dr d\varphi \\
= & \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \int\limits_{r=r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \cdot \varphi dr d\varphi \\
= & \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} [\ln(r)]_{r=r_1}^{r_2} \cdot \varphi d\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} (\ln(r_2) - \ln(r_1)) \cdot \varphi d\varphi \\
= & (\ln(r_2) - \ln(r_1)) \cdot \left[\frac{\varphi^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} \cdot (\ln(r_2) - \ln(r_1))
\end{aligned}$$

Allgemein lässt sich eine Koordinatenntransformation im $\mathbb{R}^2$ wie folgt durchführen:

Satz 281 *Sei $x = x(u,v), y = y(u,v),$ dann ist*

$$\int\int_{(x,y)} f(x,y) dy dx = \int\int_{(u,v)} f(x(u,v), y(u,v)) \left|\det J\right| du dv$$

wobei J die Jacobi-Matrix zu

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$$

ist, also

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Beispiel: Die obige Transformation in Polarkoordinaten erhalten wir mit $u = r, v = \varphi$ und

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

und

$$J = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

womit

$$\det J = r = |\det J|$$

Für ein Beispiel wie eine Koordinatentransformation allgemein angewandt wird, betrachten wir nun das Integral

$$\int\int_B \frac{(x+y)^2}{x-y} dydx$$

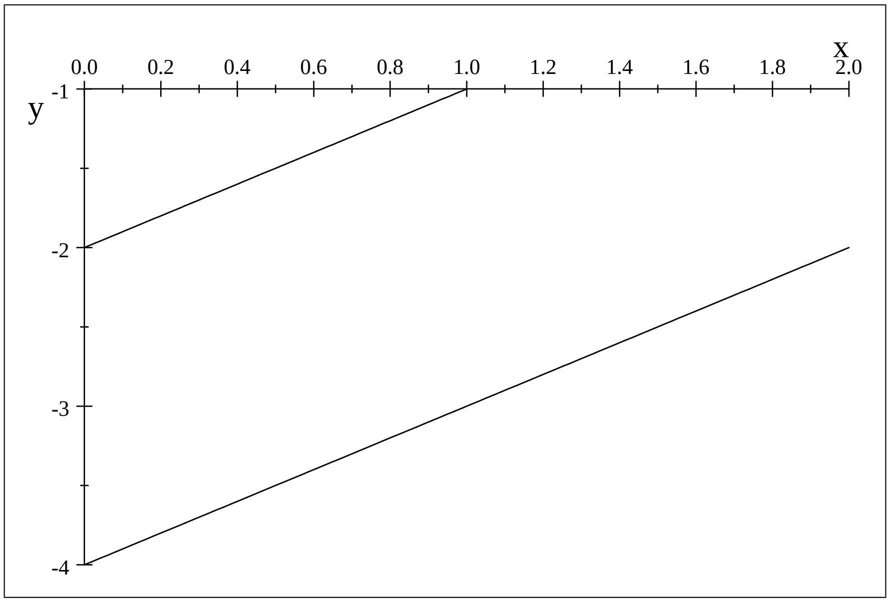
mit

$$B = \{(x,y)|x \geq 0, y \leq 0, y+2 \leq x \leq y+4\}$$

Gesucht ist im 4. Quadranten die Fläche zwischen

$$\begin{aligned} y &\leq x-2 \\ y &\geq x-4 \end{aligned}$$

also:



Wir substituieren naheliegender Weise

$$\begin{aligned} u &= x+y \\ v &= x-y \end{aligned}$$

Damit ist in der zweiten Gleichung

$$y = x - v$$

und eingesetzt in die erste Gleichung erhalten wir

$$u = 2x - v$$

und somit

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(u+v) \\ y &= \frac{1}{2}(u-v) \end{aligned}$$

Die Jacobi Matrix ist nun

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} \det J &= -\frac{1}{2} \\ |\det J| &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Das zu lösende Integral ist

$$\int\int \frac{u^2}{v}\frac{1}{2}dudv$$

Es verbleibt die Beschreibung des Integrationsbereiches:
Wegen

$$v = x - y$$

und

$$y + 2 \leq x \leq y + 4$$

ist

$$\begin{aligned} 2 &\leq x - y \leq 4 \\ 2 &\leq v \leq 4 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ \frac{1}{2}(u+v) &\geq 0 \\ u &\geq -v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &\leq 0 \\ \frac{1}{2}(u-v) &\leq 0 \\ u &\leq v \end{aligned}$$

also

$$-v \leq u \leq v$$

Damit

$$B_1 = \{(u,v)|2 \leq v \leq 4, -v \leq u \leq v\}$$

und wir können lösen:

$$\begin{aligned} \int_{v=2}^{4}\int_{u=-v}^{v} \frac{u^2}{v}\frac{1}{2}dudv &= \int_{v=2}^{4}\left[\frac{1}{3}u^3 \cdot \frac{1}{v}\right]_{u=-v}^{v}\frac{1}{2}dv \\ &= \int_{v=2}^{4}\frac{1}{3}v^2dv \\ &= \left[\frac{1}{9}v^3\right]_2^4 \\ &= \frac{56}{9} \end{aligned}$$

13.2.5 Uneigentliche Integrale

Häufig wird als Integrationsbereich die gesamte zweidimensionale Ebene benötigt. Alle möglichen Punkte werden dann durch

$$\begin{aligned} x &\in (-\infty, \infty) \\ y &\in (-\infty, \infty) \end{aligned}$$

beschrieben.

Wie im eindimensionalen Fall wird die Integration über Grenzwertbildung ermittelt:

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx := \lim_{M_1 \to -\infty} \lim_{M_2 \to \infty} \lim_{N_1 \to -\infty} \lim_{N_2 \to \infty} \int_{x=M_1}^{M_2} \int_{y=N_1}^{N_2} f(x,y)dydx \tag{13.12}$$

Der Übergang zu Polarkoordinaten kann auch hier weiterhelfen. Zunächst verdeutliche man sich, dass die Integration in Polarkoordinaten nun die Gestalt

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r \cdot drd\varphi \tag{13.13}$$

hat. In diesem Fall taucht der Grenzwert nur noch an einer Stelle - zuvor an 4 Stellen - auf.

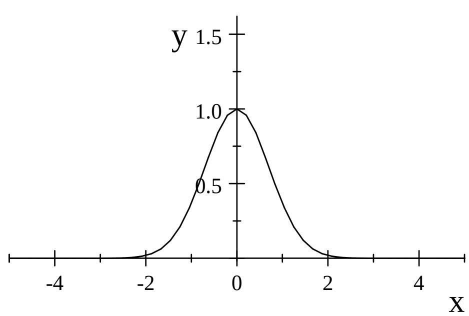
Beispiel:

Berechne

$$I = \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \tag{13.14}$$

Die Funktion hat keine Stammfunktion und daher ist die klassische Integration hier nicht anwendbar.

Der Funktionsverlauf ist im Übrigen eine Glockenkurve



Wir berechnen das Integral in dem wir zunächst das Integral quadrieren und dann durch Umbenennung der Variablen "künstlich" eine zweidimensionale Integration erzeugen, welche wir durch Transformation auf Polarkoordinaten - Bedenke $x^2 + y^2 = r^2-$ dann lösen können:

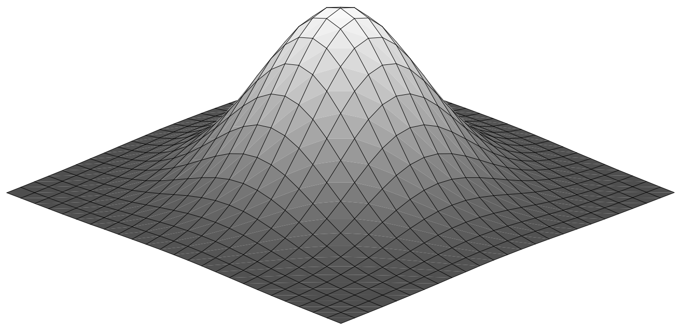
$$\begin{aligned}
I^2 &= \int\limits_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int\limits_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \\
&= \int\limits_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int\limits_{y=-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\
&= \int\limits_{x=-\infty}^{\infty} \int\limits_{y=-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dy dx \\
&= \int\limits_{x=-\infty}^{\infty} \int\limits_{y=-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dy dx = \int\limits_{x=-\infty}^{\infty} \int\limits_{y=-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy dx
\end{aligned}$$

Nun verwenden wir Polarkoordinaten und erhalten

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} \cdot r \; dr d\varphi = -\frac{1}{2} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} \cdot (-2r) \; dr d\varphi \\
&= -\frac{1}{2} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \lim_{M\to\infty} \int\limits_{r=0}^{M} e^{-r^2} \cdot (-2r) \; dr d\varphi = -\frac{1}{2} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \lim_{M\to\infty} \int\limits_{z=0}^{-M^2} e^{z} \; dz d\varphi \\
&= -\frac{1}{2} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \lim_{M\to\infty} e^{z} \;\Big]_{z=0}^{-M^2} \quad d\varphi = -\frac{1}{2} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \lim_{M\to\infty} (e^{-M^2} - 1) d\varphi \\
&= -\frac{1}{2} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} -1 d\varphi = \frac{1}{2} \; \varphi\Big]_{\varphi=0}^{2\pi} = \pi
\end{aligned}$$

und damit $I = \sqrt{\pi}$

Bem.: Wir haben also statt der oben angegebenen Funktion nun die folgende zweidimensionale Funktion $e^{-x^2-y^2}$ integriert



Wir können nun auch mit Hilfe der Gamma Funktion berechnen:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\right)! &= \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx \\
&= \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx \\
&= \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_\varepsilon^R \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx
\end{aligned}$$

Wir substituieren $u = \sqrt{x}$, $x = u^2$, $\frac{dx}{du} = 2u$ und erhalten

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_\varepsilon^R 2e^{-u^2} du \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-u^2} du \\
&= \int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

13.3 Dreifachintegrale

In Anwendungen reichen die oben eingeführten Doppelintegrale häufig noch nicht aus. Eine Summationsgröße über ein dreidimensionales "Gebilde" führt im nächsten Schritt auf die Dreifachintegrale. Substantiell ist dies jedoch nichts neues mehr, jedoch die anschauliche Vorstellung wird mit wachsender Anzahl der Integrale etwas schwieriger und wird hier nicht weiter verfolgt.

Definiert wird nun das Integral über einen dreidimensionalen Integrationsbereich statt der "Grundfläche" des letzten Abschnittes. Wir haben somit eine Funktion über den Ortskoordinaten

$$u = f(x, y, z) \tag{13.15}$$

Definition 282 $\int_V f \quad dV = \int\int\int f dV = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k) \cdot \triangle V_k$ *heißt das* ***Dreifach-Integral von*** f ***über das dreidimensionale Gebiet*** V*.*$\triangle V_k$ *ist dabei eine Zerlegung der Grundfläche in "kleine" Volumina.*

Die Berechnung des Dreifachintegrals erfolgt analog zur Berechnung der Doppelintegrale

$$\underbrace{\int\limits_{x=a}^{b} \underbrace{\int\limits_{y=v_u(x)}^{v_o(x)} \underbrace{\int\limits_{z=w_u(x,y)}^{w_0(x,y)} f(x, y, z)\, dz}_{g(x,y)}\, dy}_{h(x)}\, dx}_{Lösung} \tag{13.16}$$

Wir haben dabei drei Integrationsschritte (vom innersten Integral nach außen):

1. $\int\limits_{z=w_u(x,y)}^{w_0(x,y)} f(x, y, z)\ dz = g(x, y)$ wird berechnet, in dem nach z integriert wird und x bzw. y als konstant betrachtet werden. Das Ergebnis ist dann eine Funktion in den verbleibenden Unbekannten x und y.

2. $\int\limits_{y=v_u(x)}^{v_o(x)} g(x,y)dy = h(x)$ wird berechnet, in dem nach y integriert wird und x als konstant betrachtet wird. Das Ergebnis ist dann eine Funktion in der verbleibenden Unbekannten x.

3. $\int\limits_{x=a}^{b} h(x)dx$ wird als gewöhnliches eindimensionales Integral gelöst.

Beispiel:

$$\int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=-1}^{1} \int\limits_{z=0}^{2} e^x zy^2 dzdydx \tag{13.17}$$

1. Innere Integration:

$$\int\limits_{z=0}^{2} e^x zy^2 dz = e^x y^2 \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{2} = 2e^x y^2 \tag{13.18}$$

2. Mittlere Integration

$$\int\limits_{y=-1}^{1} 2e^x y^2 dy = 2e^x \left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=-1}^{1} = \frac{4}{3}e^x \tag{13.19}$$

3. Äußere Integration

$$\int\limits_{x=0}^{1} \frac{4}{3}e^x dx = \frac{4}{3}\left[e^x\right]_{x=0}^{1} = \frac{4}{3}(e-1) \tag{13.20}$$

13.3.1 Schwerpunktsberechnungen

Wir haben gesehen, daß der Schwerpunkt einer beliebigen Fläche über

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{1}{F}\int\int xdA \\ y_s &= \frac{1}{F}\int\int ydA \end{aligned}$$

berechnet werden kann. Dieses kann analog erweitert werden, um Schwerpunkte beliebiger dreidimensionaler Körper zu berechnen.

Auch hier wird der Integrand zur Volumenberechnung zu $f(x,y,z) = 1$ gesetzt und wir erhalten das Volumen eines Körpers V gemäß

$$V = \underset{(V)}{\int\int\int} 1dV \tag{13.21}$$

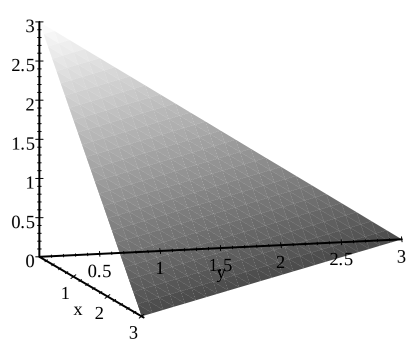
und den Schwerpunkt gemäß

$$x_s = \frac{1}{V}\underset{(V)}{\int\int\int} xdV \tag{13.22}$$

$$y_s = \frac{1}{V}\underset{(V)}{\int\int\int} ydV \tag{13.23}$$

$$z_s = \frac{1}{V}\underset{(V)}{\int\int\int} zdV \tag{13.24}$$

Anwendung: Volumen eines Tetraeders (dreiseitige Pyramide - Kantenlänge a=3). Beschrieben wird dieser durch $x + y + z \leq 3$



Zunächst: wodurch wird das Volumen beschrieben:
1. Die $x-$Werte durchlaufen die Zahlen von $x = 0 \ldots 3$
2. Die $y-$Werte auf der Grundfläche durchlaufen für festes x die Werte von $y = 0...3 - x$
3. Die $z-$Werte durchlaufen für festes x und y die Werte von $z = 0...3 - x - y$

und damit ist das Volumen

$$V = \int\limits_{x=0}^{3} \int\limits_{y=0}^{3-x} \int\limits_{z=0}^{3-x-y} 1dzdydx$$

1.
$$\int_{z=0}^{3-x-y} 1dz = [z]_{z=0}^{3-x-y} = 3-x-y$$

2.
$$\int_{y=0}^{3-x} 3-x-ydy = \left[(3-x)\cdot y - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{3-x} = (3-x)^2 - \frac{(3-x)^2}{2} = \frac{1}{2}(3-x)^2$$

3.
$$\begin{aligned}\int_{x=0}^{3} \frac{1}{2}(3-x)^2dx &= \frac{1}{2}\int_{x=0}^{3}(x-3)^2dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_{x=0}^{3} = \frac{1}{6}3^3 = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}\end{aligned}$$

Zur Übung: Berechnen Sie hieraus den Schwerpunkt des Tetraeders.

Auch im $\mathbb{R}^3$ hilft die Jacobi Matrix zur Koordinatentransformation. Dort ist:

Satz 283 *Sei $x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$ dann ist*

$$\int\int_{(x,y,z)} f(x,y,z)dzdydx = \int\int_{(u,v,w)} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|\det J|\,dwdudv$$

wobei J die Jacobi-Matrix zu

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w \end{pmatrix}$$

ist, also

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

Beispiel: Die Transformation in Zylinderkoordinaten erhalten wir mit

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

und

$$J = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

womit

$$\det J = r = |\det J|$$

Analog erhalten wir eine Transofrmation in Kugelkoordinaten. Dort wird eine Koordinate durch einen Radius, Dreh- und Kippwinkel mit

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\sin\theta \\ y &= r\sin\varphi\sin\theta \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

gegeben.

Dort gilt

$$|\det J| = \left|r^2\sin\theta\right|$$

und somit

$$\int\int\int f(x,y,z)dzdydx = \int\int\int f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\left|r^2\sin\theta\right| d\theta d\varphi dr$$

Kapitel 14

(*) Wachstums- und Zerfallsprozesse

Jede Wissenschaft bedarf der Mathematik, die Mathematik bedarf keiner.

Jakob Bernoulli

14.1 Grundlagen der Evolutionsgleichungen

Differenzen und Differentialgleichungen sind die Sprache der Mathematik zur Beschreibung dynamischer Prozesse, insbesondere zu Wachstum und Zerfall. Diese beruhen auf zeitlichen Entwicklungen, wie wir diese schon im Kapitel geometrische Folgen kennengelernt haben.

Wir stellen uns zur Motivation folgendes Szenario vor: Wir legen 1 Euro zu utopischen aber einfach zu berechnenden 100% Zinsen an. Die Bank zahlt uns also nach einem Jahr 2 Euro zurück (Stimmt das?). Was jedoch, wenn wir das Geld zuvor abheben? Gibt es dann gar keine Zinsen?

Betrachten wir stattdessen den Fall, dass wir das Geld bei der gleichen Bank nur ein halbes Jahr anlegen - zum gleichen Zinssatz: Ergebnis: 1,50 Euro und dann legen wir die 1,50 Euro noch einmal zu 100%/2 für das zweite Halbjahr an: Resultat: 2,25 Euro. Es erscheint klar, dass wenn wir statt des gesamten ersten halben Jahres nur zwei mal ein viertel Jahr anlegen der Zinszuwachs weiter steigen wird. Wenn wir den Zeitschritt weiter verkleinern: Sogar ins unermessliche? Gibt es einen Grenzwert? Wie sieht dieser aus?

Das gleiche Problem der Modellbildung entsteht bei chemischen Reaktionen, Radioaktiver Zerfall, Bakterienwachstum, etc.

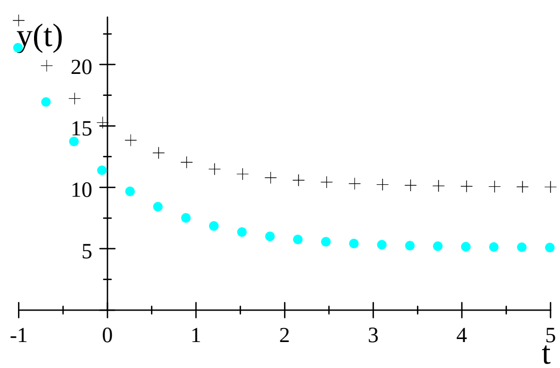
14.1.1 Einleitung: Die Evolutionsgleichung

Die Beschreibung des zeitlichen Verlaufs einer Zustandsgröße wie Radioaktivität, Temperatur, aber auch Geld oder Bevölkerungen wurde um 1800 mathematisch formuliert. Der englische Geistliche T. Malthus versuchte dabei ein Modell für die rasch wachsende Bevölkerungszahl in den Industrieregionen zu formulieren. Die hier auftretenden Phänomene lassen sich dann auch auf die anderen Zustandsgrößen übertragen.

Ziel ist es also eine zeitabhängige Funktion $y(t)$ oder y_n zu erhalten. Diese Funktion bezeichnen wir auch als **Prozessgleichung oder Evolutionsgleichung**. Wir erwarten bei Wachstum eine steigende, beim Zerfall eine abfallende Kurve.

Modelle, welche nun nur an den Zeitpunkten $n = 1, 2, ...$ die Funktionswerte $y_1, y_2, ..., y_n$ beschreiben, heissen "diskrete Modelle". Im Gegensatz hierzu beschreiben Funktionen der Gestalt $y(t)$, welche an jedem Zeitpunkt t auswertbar sind, "kontinuierliche Modelle".

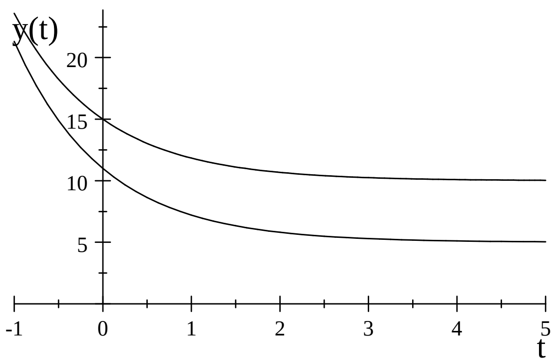
Ist der Bestand eine abzählbare Größe, deren Population nur diskrete Werte annimmt, so werden die Verläufe wie folgt aussehen:

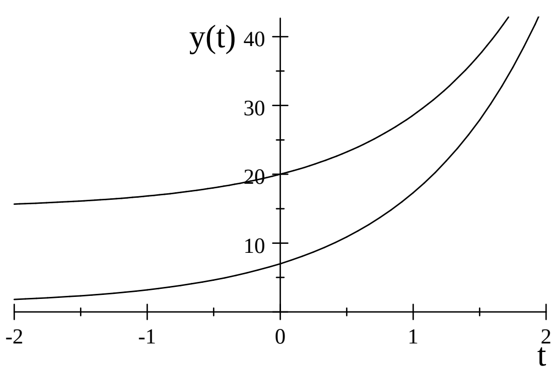


Das mathematische Modell im **diskreten** Fall ist

n	...	Anzahl der Iterationen bei der eine feste Zeit $\triangle t_0$ weitergegangen wird
y_n	...	Größe des Zustandes (Temperatur, etc.)

Im kontinuierlichen Modell haben wir einen der folgenden Funktionsverläufe:





Das mathematische Modell im **kontinuierlichen** Fall ist

t	...	Zeit
$y(t)$	...	Größe des Zustandes (Temperatur, etc.)

In beiden Modellen sei t_0 bzw. $n = 0$ der Startzeitpunkt, an dem der Startwert $y(t_0) = y_0$ bekannt ist.

Im diskreten Fall geben wir eine Schrittweite $\triangle t_0$ vor und berechnen mit n Iterationen den Wert

$$y_n = y(n \cdot \triangle t_0) = y(t)$$

Diskrete Modelle berechnen also die Zustände an den Zeitpunkten
$1 \cdot \triangle t_0,\ 2 \cdot \triangle t_0,\ 3 \cdot \triangle t_0, ...$

Es sei hier noch einmal der Zusammenhang zwischen dem Zeitschritt $\triangle t_0$, der Anzahl Iterationen n und dem Zeitpunkt t, an dem die Zustandsgröße berechnet wird, festgehalten:

$$n \cdot \triangle t_0 = t$$

Falls nötig, können wir diese Gleichung auch nach anderen Größen umstellen, z.B. für die Schrittweite gilt: $\triangle t_0 = \frac{t}{n}$.

Ziel ist es also, eine Funktion $y(t)$ bzw. y_n zu finden. Hierzu wird zunächst ein Modell aufgestellt, welches die **Änderung** der Zustandsgröße (pro Zeiteinheit) beschreibt, Ähnliches haben wir bereits bei der geometrischen Folge kennengelernt. Das Modell wurde hergeleitet, in dem wir eine Aussage über die Änderung der Zustandsgröße a_n gemacht haben:

$$\begin{aligned} \Delta a &= a_n - a_{n-1} = k \cdot a_{n-1} \\ & \quad a_0 \text{ geg.} \end{aligned}$$

Dies konnte nun exakt gelöst werden durch die Lösungsfunktion

$$a_n = a_0 \cdot (1+k)^n$$

Die Zeit, welche zwischen 2 Zuständen a_n und a_{n-1} vergeht, haben wir mit Δt_0 bezeichnet. Das Wachstum pro Einheit Bestand in dieser Zeiteinheit Δt_0 war der Parameter k. Insbesondere lag für

$$\begin{aligned} k &< 0 \text{ Zerfall} \\ k &> 0 \text{ Wachstum} \\ k &= 0 \text{ Konstante Werte } a_0 \end{aligned}$$

vor.

Im Folgenden werden nun die Werte $y(t)$ bzw. y_n als Funktion über die Zeit betrachtet - daher die Beschreibung mit dem Buchstaben y.

14.1.2 Diskret oder kontinuierlich ?

Ob nun das diskrete oder kontinuierliche Modell verwendet wird, hängt von dem zu modellierenden Prozess ab. So wird ein Zinsmodell eine Bestandsänderung zu festen Zeitpunkten bewirken und damit ein Sprung in der Funktion verursachen.Diese Modelle sind somit diskret. Auch die Größe von abzählbaren Populationen wie erkrankte Menschen, Kaninchenwachstum etc. wird in der Regel durch ein diskretes Modell beschrieben.

Findet ein Prozess kontinuierlich statt, wie z.B. die Erwärmung eines Körpers, die Änderung einer Konzentration, etc. ist das kontinuierliche Modell anzuwenden.

14.2 Ungebremstes Wachstum

14.2.1 Der diskrete Fall

Die Modellbildung eines solchen Prozesses unterliegt im diskreten Fall der bekannten Rekursion der geometrischen Folge

$$\begin{aligned}\triangle y &= y_n - y_{n-1} \\ &= k \cdot y_{n-1}\end{aligned}$$

Hier wird nicht weiter differenziert, wann die Erhöhung des Bestandes eintritt. Wir nehmen an, das just zum Zeitpunkt n ein Sprung in der Funktion existiert.

Die Lösung ist also durch die geometrische Reihe bereits gegeben:

Algorithmus 284 *(Diskretes ungebremstes Wachstum)*
Gegeben sei ein Wachstum k innerhalb einer (beliebigen) Zeiteinheit $\triangle t_0$, eine Startpopulation y_0 und eine Änderungsrate $\Delta y = y_n - y_{n-1} = k \cdot y_{n-1}$, dann ist die Lösungsfunktion

$$y_n = y_0 \cdot (1+k)^n$$

wobei $y_n = y(n \cdot \Delta t_0)$ den Zustand nach n Zeitschritten der Länge Δt_0 angibt.

Bsp.: Sie zahlen 5% eines zinsfreien Kredites monatlich zurück. Die Anfangsschuld betrug 1000 €. Welche Restschuld haben Sie nach einem Jahr? Wir wählen $\Delta t_0 = 1$ Monat, und damit ergibt sich $k = -0,05$ (Zerfall!)und $y_0 = 1000$ und das Modell für die Restschuld y_n nach n Monaten

$$\triangle y = y_n - y_{n-1} = -0,05 \cdot y_{n-1}$$

Die Lösung ist

$$\begin{aligned}y_n &= y_0 \cdot (1+k)^n \\ &= 1000 \cdot 0,95^n\end{aligned}$$

Der Wert nach einem Jahr ergibt sich aus 12 Zeitschritten mit $\Delta t_0 = 1$ Monat zu

$$\begin{aligned}y_{12} &= 1000 \cdot 0,95^{12} \\ &= 540,36\end{aligned}$$

14.2.2 Zeitteile

Das vorige Modell beruht auf dem sprunghaften Anstieg des Bestandes zu bestimmten Zeitpunkten. Dies birgt jedoch Gefahren, wie uns das folgende Beispiel zeigt:

Wir wenden das diskrete Modell nun auf unsere Spareinlage mit 1 Euro und k=1 pro Jahr ($\Delta t_0 = 1$ Jahr) an. Zunächst legen wir unser Geld für ein Jahr an und erhalten

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 \cdot (1+1)^1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Nun halbjährlich (2 Zeitschritte) - daher vermuten wir den halben Wachstumsfaktor für jedes der beiden Halbjahre, also $k = 1 \cdot \frac{1}{2}$ und $\Delta t_1 = \frac{1}{2}$ Jahr

$$\begin{aligned} y_2 &= 1 \cdot (1 + 1 \cdot \frac{1}{2})^2 \\ &= 1 \cdot (1 + 1 \cdot \frac{1}{2})^2 \\ &= 2,25 \end{aligned}$$

Legen wir das Geld monatlich an so ergibt sich

$$\begin{aligned} y_{12} &= 1 \cdot (1 + \frac{1}{12})^{12} \\ &= 2,61 \end{aligned}$$

Ein fairer Zins berücksichtigt somit kleinstmögliche Zeiträume. So rechnen Banken in der Regel mit Tagen, welches ergäbe

$$\begin{aligned} y_{365} &= 1 \cdot (1 + \frac{1}{365})^{365} \\ &= 2,714567 \end{aligned}$$

Was passiert bei weiterer Verkleinerung des Zeitschrittes $\triangle t$? Wir erhalten

$$y_\infty = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

Nun wollen wir dies verallgemeinern:
Praxisrelevant ist hier insbesondere das Modell, wo sich der Parameter k auf $\triangle t_0 = 1$ bezieht.

Gegeben sei also eine Zeitspanne $\triangle t_0 = 1$, in der eine Population um $k_{\triangle t_0}$ Anteile pro Einheit wächst.

Wir zerlegen nun die Zeitspanne in "kleine" Anteile (Bruchteile) $\triangle t$ und dort gilt

$$\begin{aligned}\triangle y &= k_{\triangle t} \cdot \triangle t \cdot y \\ &= k_{\triangle t} \cdot y \cdot \triangle t\end{aligned}$$

Dieser Parameter $k_{\triangle t}$ wird für kleine $\triangle t$ sich einem Wert k_{kont} annähern, also einen Grenzwert

$$k_{kont} = \lim_{\triangle t \to 0} k_{\triangle t}$$

haben. Dieser wird weiter unten berechnet.

Algorithmus 285 *(Diskretes ungebremstes Wachstum für Zeitteile)*

Gegeben sei ein Wachstum k innerhalb einer beliebigen Zeiteinheit $\triangle t_0 = 1$ und eine Änderungsrate $\Delta y = y_n - y_{n-1} = k_{\triangle t_0} \cdot y_{n-1}$. Betrachten wir nun einen Zeitteil Δt, dann ist das modifizierte Modell

$$\Delta y = y_n - y_{n-1} = k_{\triangle t} \cdot y_{n-1} \cdot \Delta t$$

*mit der Lösung (**Diskrete Evolutionsgleichung des ungebremsten Wachstums)***

$$y_n = y_0 \cdot (1 + k_{\triangle t} \cdot \Delta t)^n$$

wobei $y_n = y(n \cdot \Delta t)$ den Zustand nach n Zeitschritten der Länge Δt, also zum Zeitpunkt $t = n \cdot \triangle t$, angibt.

Dieses ist die explizite Evolutionsgleichung des diskreten Modells für Zeitbruchteile.

14.2.3 Grundsätzliches

Da das grundsätzliche Vorgehen entscheidend in den weiteren Kapiteln sein wird, noch einmal die zu bearbeitenden Schritte:

1. Modellbildung

Zunächst wird ein realer Vorgang abgebildet, in dem man die Änderung einer unbekannten Zustandsgröße $y(t)$ simuliert, also

$$\frac{\triangle y}{\triangle t} = f(y(t)) \tag{14.1}$$

bzw.

$$\frac{\triangle y}{\triangle t} = f(y_n) = f(y(n \cdot \triangle t)) \tag{14.2}$$

Die Änderungen liefern den exakten Funktionenverlauf, wenn wir den Bestand zum Startzeitpunkt ermitteln/kennen, also $y(0) = y_0$ gegeben ist.

2. Numerische Lösung

Dies reicht bereits aus, um den Vorgang mit einem Tool wie Excel zu modellieren. Wir berechnen zu diskreten Zeitpunkten die Ämderung der Bestandsgröße über $f(y_n)$ und addieren die Bestandsänderung zum aktuellen Bestand, um den Bestand des nächsten Zeitschritts zu ermitteln.

3. Exakte Lösung
Die hier ermittelten Lösungsfunktionen $y(t)$ lösen zu gegebenen Parametern und Startwerten y_0 die vorgegebene Differenzengleichung. Die exakte Funktion kann nun unter verschiedenen Gesichtspunkten ausgewertet werden, z.B. Ermittlung unbekannter Modellparameter etc.

Anmerkung: Im folgenden Abschnitt wird der Zeitschritt verkleinert und im Grenzwert geht die Gleichung

$$\frac{\triangle y}{\triangle t} = f(y(t)) \tag{14.3}$$

über in

$$y' = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle t} = f(y(t)) \tag{14.4}$$

und damit geht die Differenzengleichung über in eine Differentialgleichung.

Beispiel: Wir simulieren eine Bakterienkultur, die täglich um 5% (=0,05) wächst und zu Beginn 50 Einheiten groß sei.

1. Das Modell: Haben wir einen (unbekannten) Bestand y_n, so ändert sich dieser am nächsten Tag

$$\frac{\triangle y}{\triangle t} = 0,05 \cdot y_n \tag{14.5}$$

Zur vollständigen Modellbeschreibung gehört noch der Startbestand $y(0) = y_0 = 50$

2. Numerische Lösung

Hieraus kann bereits der zeitliche Verlauf berechnet werden:

Tag	*Bestand* y_n	*Änderung* $0,05 \cdot y_n$
0	50	2,5
1	52,5	2,6
2	55,1	2,8
3	57,9	2,9

3. Exakte Lösung:

Wir haben gesehen, dass das obige Problem gelöst wird durch die Funktion

$$\begin{aligned} y_n &= y_0 \cdot (1+k)^n \\ &= 50 \cdot 1,05^n \end{aligned}$$

(bitte rechnen Sie die obigen Werte nach - es sollten die gleichen Funktionenwerte herauskommen, z.B. $y_3 = 50 \cdot 1,05^3 = 57,9$)

Somit lässt sich nun auch direkt berechnen, wann sich der Bestand verdoppelt hat, wie groß er nach 100 Tagen ist, etc.

14.2.4 Der Übergang zum kontinuierlichen Modell

Wir betrachten nun wiederum das Modell mit $y(0) = y_0$. Betrachten wir statt der Zeiteinheit Δt_0 nur einen Anteil $\triangle t$, so ist

$$\triangle y = y_n - y_{n-1} = k_{\triangle t} \cdot \triangle t \cdot y_{n-1}$$

mit der Lösung

$$y_n = y_0 \cdot (1 + k_{\triangle t} \cdot \triangle t)^n$$

Nun lassen wir diese Anteile gegen Null laufen, um ein kontinuierliches Wachstum zu modellieren.

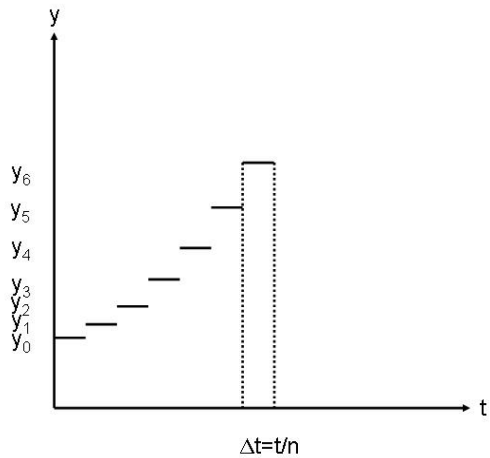
Gesucht ist hier nun der Funktionswert zu einem beliebigen festen Zeitpunkt t, also $y(t)$.

Wir verwenden nun als Zeitanteil den n-ten Teil der Intervalllänge [0,t]

$$\triangle t = \frac{t}{n} \tag{14.6}$$

Somit erreichen wir nach n Schritten

$$\begin{aligned} y_n &= y(n \cdot \triangle t) = y(t) \\ &= y_0 \cdot (1 + k \cdot \frac{t}{n})^n \end{aligned}$$



Nun vergrößern wir die Anzahl Teilintervalle bzw. verkleinern die Zeitspanne $\triangle t$ und bilden den Grenzübergang n$\rightarrow\infty$,der Wert des Wachstumsfaktors konvergiert dabei von $k_{\triangle t}$ zu k_{kont} und erhalten für den Grenzwert $y(t)$:

$$y(t) = \lim_{n\to\infty} y_0 \cdot (1 + k_{kont} \cdot \frac{t}{n})^n = y_0 \cdot \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{k_{kont} \cdot t}{n})^n \qquad (14.7)$$

Zur Lösung: Es ist wegen (**??**) mit $a = kt$:

Satz 286 *Es ist*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{kt}{n}\right)^n = e^{kt} \qquad (14.8)$$

Damit ergibt sich also das

Algorithmus 287 *(kontinuierliches Modell der Evolutionsgleichung)*
Zur Lösung der Modellgleichung

$$\lim_{\triangle t\to 0} \frac{\triangle y}{\triangle t} = k \cdot y$$

mit $y(0) = y_0$*,* k *kontinuierliches Wachstum und Populationseinheit, so ist die kontinuierliche Lösungsfunktion (*$\triangle t \rightarrow 0$*)*

$$\boxed{y(t) = y_0 \cdot e^{kt}}$$

Wegen $\triangle t \to 0$ ist dies gleichbedeutend zu

$$y'(t) = k \cdot y(t) \text{ mit } y(0) = 0$$

Ein solches Problem heisst Differentialgleichung mit Anfangswert oder Anfangswertproblem.

Dass $y(t) = y_0 \cdot e^{kt}$ das Problem löst, lässt sich wiederum überprüfen:

$$y(0) = y_0 \cdot e^0 = y_0$$

und

$$y'(t) = y_0 \cdot e^{kt} \cdot k = y(t) \cdot k \tag{14.9}$$

Zusammenfassung:
Die Prozessgleichung zu $\frac{\triangle y}{\triangle t} = k \cdot y$ mit $y(0) = y_0$ ist $y(t) = y_0 \cdot e^{kt}$.
1. Für $k < 0$ herrscht Zerfall mit dem Grenzwert $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$
2. Für $k = 0$ ist $\frac{\triangle y}{\triangle t} = 0$ und damit $y(t) = y_0$
3. Für $k > 0$ ist $\lim_{t\to\infty} y(t) = \pm\infty$ ($+\infty$ für $y_0 > 0, -\infty$ für $y_0 < 0$)

Es herrscht also stets exponentielles Wachstum oder exponentieller Zerfall.

14.2.5 Zusammenhang zwischen $k_{diskret}$ und k_{kont}

Haben wir in einem diskreten Modell zu einem festem Zeitschritt den Wachstumsparameter $k_{diskret}$ zu einer Zeitspanne Δt_0 (die Zeit, welche zwischen zwei Iterationsschritten vergeht) ermittelt, so können wir hieraus den entsprechenden Wachstumsparameter im kontinuierlichen Fall herleiten.

Hierzu betrachten wir die Funktion $y_n = y(n \cdot \Delta t_0)$ im diskreten und kontinuierlichen Fall:

$$\begin{aligned} y_n &= y_0 \cdot (1 + k_{diskret})^n \\ y(n \cdot \Delta t_0) &= y_0 \cdot e^{k_{kont} \cdot n \cdot \Delta t_0} \end{aligned}$$

Gleichheit gilt für

$$\begin{aligned} e^{k_{kont} \cdot n \cdot \Delta t_0} &= (1 + k_{diskret})^n \\ k_{kont} \cdot n \cdot \Delta t_0 &= n \cdot \ln(1 + k_{diskret}) \\ k_{kont} &= \frac{\ln(1 + k_{diskret})}{\Delta t_0} \end{aligned}$$

Satz 288 *Ist aus einem Modell der diskrete Wachstumsparameter $k_{diskret}$ zu einer Zeitspanne Δt_0 bekannt, so ist für das kontinuierliche Modell zu verwenden*

$$\boxed{k_{kont}=\frac{\ln(1+k_{diskret})}{\Delta t_0}} \tag{14.10}$$

Ist k_{kont} gegeben, so ergibt sich der Wachstumsparameter zu einem Zeitschritt Δt_0 entsprechend

$$\boxed{k_{diskret} = e^{k_{kont}\cdot\Delta t_0} - 1}$$

Bsp.:

1. Wir beobachten während eines Zeitraumes von 3 Std. eine Erhöhung einer Bakterienkultur um 5%. Damit ist $k_{Diskret} = 0,05$ zu $\Delta t_0 = 3$ *Std* und damit

$$k_{kont} = \frac{\ln(1 + k_{diskret})}{\Delta t_0} = \frac{\ln(1,05)}{3} = 0,0163$$

also 1,63% effektives (kontinuierliches) Wachstum pro Stunde.
2. Ein Effektivzins von 5% pro Monat bedeutet eine monatliche Verzinsung von

$$k_{diskret} = e^{0,05\cdot\frac{1}{12}} - 1 = 0,0418$$

also 4,18 %.
Bem.: Für Modelle mit $\Delta t_0 = 1$ ist

$$k_{kont} = \ln(1 + k_{diskret})$$

3. Hieraus können wir durch Zurückführung auf k_{kont} auch den Wachstumsparameter zu zwei verschiedenen Zeitschritten Δt_1 und Δt_0 umrechnen.Es ist

$$k_{kont} = \frac{\ln(1 + k_{\Delta t_1})}{\Delta t_1} = \frac{\ln(1 + k_{\Delta t_0})}{\Delta t_0}$$

Im Beispiel 1 können wir also auch das diskrete Wachstum pro Stunde ($\Delta t_1 = 1$) ausrechnen

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1 + k_{\Delta t_0})}{\Delta t_0} &= \frac{\ln(1,05)}{3} \\
&= 0,0163 = \frac{\ln(1 + k_{\Delta t_1})}{\Delta t_1} \\
&= \ln(1 + k_{\Delta t_1})
\end{aligned}$$

und damit

$$k_{\Delta t_1} = e^{0,0163} - 1 = 0,01643$$

14.3 Gebremstes Wachstum - Störung erster Ordnung

Häufig ist ein solch ungebremstes und damit exponentielles Wachstum nicht der Realität entsprechend, sondern es gibt eine bremsende Gegenbewegung, z.B. hinwegnehmen älterer Bestandteile oder durch nur beschränkte Lebensräume.

Fall 1: Die Vermehrung pro Kaninchen und Zeiteinheit betrage 0,3. Damit

$$\triangle y = 0,3 \cdot y \cdot \triangle t \tag{14.11}$$

Dem entgegen wirkt eine Absterberate durch Altersschwäche und Jagdopfern von 20 Tieren pro Zeiteinheit und dies korrigiert obige Formel zu

$$\begin{aligned} \triangle y &= 0,3 \cdot y \cdot \triangle t - 20 \cdot \triangle t & (14.12) \\ &= (0,3 \cdot y - 20) \cdot \triangle t & (14.13) \end{aligned}$$

also

$$\frac{\triangle y}{\triangle t} = 0,3 \cdot y - 20 \tag{14.14}$$

Wir beschreiben somit eine solche Funktion des Zuwachses mit Verlust durch

$$\boxed{\frac{\triangle y}{\triangle t} = k \cdot y - a} \tag{14.15}$$

wobei k der Zuwachs pro Einheit und Zeiteinheit, a die Abnahme (gesamt) pro Zeiteinheit beschreibt.

Fall 2: Eine Grippewelle erreiche eine Kleinstadt mit B Einwohnern. Im Modell werde keiner genesen und jeder Gesunde infiziere sich mit Wahrscheinlichkeit K. Dann ist

$$\begin{aligned} \triangle y &= K \cdot (B - y) \cdot \triangle t & (14.16) \\ & \boxed{\frac{\triangle y}{\triangle t} = K \cdot (B - y)} & (14.17) \end{aligned}$$

Die beiden Gleichungen gehen ineinander über, falls wir in der ersten Gleichung (14.15) $k = -K$ und $a = -K \cdot B$ setzen.

Diese Gleichungen heißen Wachstumsgleichungen mit Störungen 1. Ordnung.

Ein weiteres Beispiel ist die Abkühlung eines erhitzten Körpers gemäß

$$\frac{\triangle T}{\triangle t} = K \cdot (T_{Umgebung} - T(t)) \tag{14.18}$$

Gleichungen der Gestalt $\frac{\triangle y}{\triangle t} = k \cdot y - a$ beschreiben eine Abnahme des Wachstums durch "Parasiten" ("Parasitengesteuertes Wachstum"), Gleichungen der Form $\frac{\triangle y}{\triangle t} = K \cdot (B - y)$ beschreiben ein Wachstum mit beschränkten "Ressourcen" ("Ressourcenorientiertes Wachstum").

Nun zur Lösung der Gleichungen: Wir sehen, dass wir für $y = B$ in (14.16) bzw $y = \frac{a}{k}$ in (14.15) keine Änderung, also $\triangle y = 0$, erhalten. Starten wir mit eben diesen Werten, so bleibt die Funktion $y(t)$ eine Konstante.

Definition 289 *Die konstanten Werte (ermittelt durch $\triangle y = 0$) heißen stationäre Lösungen y_s.*

Wir betrachten nun der Einfachheit halber nur den Fall $\frac{\triangle y}{\triangle t} = k \cdot y - a$ mit der stationären Lösung $y_s = \frac{a}{k}$.

Nun betrachten wir die neue Größe

$$z(t) = y(t) - y_s \tag{14.19}$$

also die Abweichung zum Zeitpunkt t vom stationären Wert.

Für diese neue Funktion $z(t)$ gilt

1. $y(t) = z(t) + y_s$, also: die Funktionen unterscheiden sich nur um eine Konstante
2. $z_0 = z(0) = y(0) - y_s$, also: aus dem Startwert y_0 und der stationären Lösung $y = \frac{a}{k}$ lässt sich auch der Startwert für z berechnen.

Die Änderung von z ist dabei die gleiche wie die in y, da sich die Funktionsverläufe nur um eine Konstante unterscheiden. Somit ist $\triangle z = \triangle y$ und

$$\begin{aligned}
\frac{\triangle z}{\triangle t} &= \frac{\triangle y}{\triangle t} = k \cdot y(t) - a && (14.20)\\
&= k \cdot (z(t) + y_s) - a \\
&= k \cdot (z(t) + \frac{a}{k}) - a && (14.21)\\
&= k \cdot z(t)
\end{aligned}$$

welches die aus dem vorigen Paragraphen bekannte Wachstumsgleichung - nun in $z(t)$ - ohne Störung ist.

Die Lösung ist bekannt:

1. Das diskrete Modell: Wir betrachten den Zustand y_n zum Zeitpunkt $n \cdot \triangle t$, bzw. die gekoppelte Größe z_n. Es ist gemäß ungestörtem Wachstum

$$\begin{aligned} z_n &= z_0 \cdot (1 + k \cdot \triangle t)^n \\ &= (y(0) - y_s) \cdot (1 + k \cdot \triangle t)^n \end{aligned}$$

und damit

$$y_n = z_n + y_s \tag{14.22}$$

$$y_n = (y(0) - y_s) \cdot (1 + k \cdot \triangle t)^n + y_s \tag{14.23}$$

Algorithmus 290 *(Diskretes Modell des Wachstums mit Störung erster Ordnung)*

Die Lösung des Modells $\boxed{\triangle y = (k \cdot y - a) \cdot \triangle t}$ *mit* $y(0) = y_0$ *geg. (k Wachstumsparameter pro Zeiteinheit* Δt_0*,* Δt *Zeitteil, a Abnahme pro Zeiteinheit) ist*

$$\boxed{y_n = (y(0) - \frac{a}{k}) \cdot (1 + k \cdot \triangle t)^n + \frac{a}{k}}$$

Aus der Anfangsbedingung $y(0)$ ergibt sich das Vorzeichen von $(1 + k \cdot \triangle t)^n$. Ist $y(0) > \frac{a}{k}$, so herrscht Wachstum; für $y(0) < \frac{a}{k}$ Zerfall und für $y(0) = y_s = \frac{a}{k}$ Stagnation.

2. Das kontinuierliche Modell:

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0 \cdot e^{kt} \\ &= (y(0) - y_s) \cdot e^{kt} \end{aligned} \tag{14.24}$$

Aus $y(t) = z(t) + y_s$ folgt dann

$$y(t) = (y(0) - \frac{a}{k}) \cdot e^{kt} + \frac{a}{k} \tag{14.25}$$

Also:

Algorithmus 291 *(Kontinuierliches Modell des Wachstums mit Störung erster Ordnung)*

Die Lösung des Modells $\boxed{y' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle t} = k \cdot y - a}$ *mit* $y(0) = y_0$ *geg. (*k *kontinuierlicher Wachstumsparameter pro Zeiteinheit* $\Delta t_0 = 1$*,* a *kontinuierliche Abnahme pro Zeiteinheit) ist für* $\Delta t \to 0$

$$\boxed{y(t) = (y(0) - \frac{a}{k}) \cdot e^{kt} + \frac{a}{k}}$$

Aus der Anfangsbedingung $y(0)$ ergibt sich das Vorzeichen der Exponentialfunktion.

Bem: Zur Probe können wir die Gleichung differenzieren und erhalten

$$\begin{aligned} y'(t) &= (y(0) - \frac{a}{k}) \cdot e^{kt} \cdot k \\ &= (y(0) - \frac{a}{k}) \cdot e^{kt} \cdot k + k \cdot \frac{a}{k} - k \cdot \frac{a}{k} \\ &= k \cdot ((y(0) - \frac{a}{k}) \cdot e^{kt} + \frac{a}{k}) - \frac{a}{k} \\ &= k \cdot y(t) - a \end{aligned}$$

sowie für den Startwert

$$y(0) = y(0) - \frac{a}{k} + \frac{a}{k} = y(0)$$

q.e.d.
Der Funktionenverlauf kann wie folgt klassifiziert werden:
Fall 1: $k > 0$:

Ist $y(0) > \frac{a}{k}$, so herrscht exponentielles Wachstum;

für $y(0) < \frac{a}{k}$ exponentielle Abnahme und

für $y(0) = y_s = \frac{a}{k}$ Stagnation.

Fall 2: $k < 0$:
Damit nähert sich der Term e^{kt} der Null und damit ist der Grenzwert $\frac{a}{k}$.

Ist $y(0) > \frac{a}{k}$ so geschieht die Näherung "von oben",bei $y(0) < \frac{a}{k}$ von unten,

bei $y(0) = \frac{a}{k}$stagniert die Funktion wiederum.

Fall 3:$k = 0$:
Damit ist die Lösung der Differenzengleichung gegeben durch (L'Hospital)

$$y(t) = \lim_{k\to 0}(y(0) - \frac{a}{k}) \cdot e^{kt} + \frac{a}{k} = y(0) - a \cdot \lim_{k\to 0} \frac{(e^{kt} - 1)}{k} = y(0) - a \cdot \lim_{k\to 0} te^{kt} = y(0) - a \cdot t \tag{14.26}$$

Bem.: Übertragung auf die Modelle
1 . $\frac{\triangle y}{\triangle t} = K \cdot (B - y)$ bzw

2. $\frac{\triangle T}{\triangle t} = K \cdot (T_{Umgebung} - T(t))$

liefert gemäß $k = -K$ und $a = -K \cdot B$ bzw $a = -K \cdot T_{Umgebung}$ die Lösung:

Diskretes Modell:

1.

$$\begin{aligned} y(t) &= (y(0) - \frac{-K \cdot B}{-K}) \cdot (1 - K \cdot \triangle t)^n - \frac{-K \cdot B}{K} \\ &= (y(0) - B) \cdot (1 - K \cdot \triangle t)^n + B \end{aligned}$$

bzw. 2.

$$T(t) = (T(0) - T_{Umgebung}) \cdot (1 - K \cdot \triangle t)^n + T_{Umgebung} \tag{14.27}$$

Kontinuierliches Modell:
1.

$$\begin{aligned} y(t) &= (y(0) - \frac{-K \cdot B}{-K}) \cdot e^{-Kt} - \frac{-K \cdot B}{K} \\ &= (y(0) - B) \cdot e^{-Kt} + B \end{aligned}$$

bzw. 2.

$$T(t) = (T(0) - T_{Umgebung}) \cdot e^{-Kt} + T_{Umgebung} \tag{14.28}$$

Beispiel: a) Sie legen eine Flasche Bier der Temperatur 21°C in einen Kühlschrank der Temperatur 5°C. Nach 10 Minuten messen Sie einen Wert von 15°C. Ihre Lieblingstrinktemperatur beträgt 9°C. Wie lange müssen Sie noch warten?

Zunächst zur Modellierung: Hier gilt ja das gebremste Wachstum für die Bierflaschentemperatur $T(t)$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta T}{\Delta t} &= K \cdot (T_{Umgebung} - T(t)) \\ &= K \cdot (5 - T(t)) \\ T(0) &= 21\end{aligned}$$

Für den zeitlichen Verlauf der Biertemperatur gilt nach obigen Erkenntnissen die Gleichung

$$T(t) = (T(0) - T_{Umgebung}) \cdot e^{-Kt} + T_{Umgebung}$$

mit $T_{Umgebung} = 5^oC$ und $T(0) = 21^oC$. Zu bestimmen ist noch der Koeffizient K, welchen wir zur Einheit "pro Minute" berechnen. Aus der Messung ergibt sich

$$\begin{aligned}15 &= T(10) = (21 - 5) \cdot e^{-K \cdot 10} + 5 \\ &= 16 \cdot e^{-K \cdot 10} + 5\end{aligned}$$

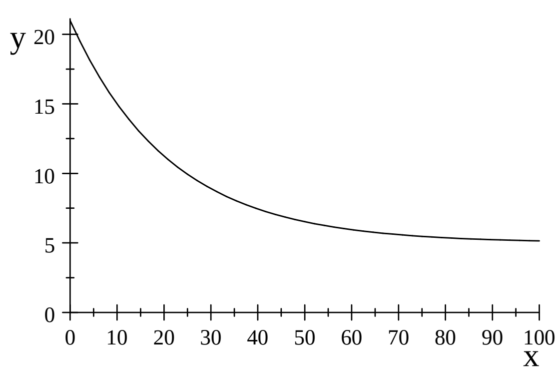
Beachten Sie, das hier natürlich für die Starttemperatur gilt $T(0) = 21$.
Wir lösen nun diese Gleichung

$$\begin{aligned}10 &= 16 \cdot e^{-K \cdot 10} \\ \frac{5}{8} &= e^{-K \cdot 10} \\ \ln(5) - \ln(8) &= -K \cdot 10 \\ K &= \frac{\ln(8) - \ln(5)}{10} = 0,047\end{aligned}$$

Damit haben wir den Temperaturverlauf

$$T(t) = \quad 16 \cdot e^{-0,047 \cdot t} + 5 \tag{14.29}$$

Grafisch:



Den gewünschten Wert von $T(t) = 9$ können wir nun berechnen

$$9 = 16 \cdot e^{-0{,}047 \cdot t} + 5$$

wird nach $t = 29{,}496$ Minuten erreicht.

b) Sie haben einen Versuch durchzuführen und dabei die Abkühlung eines Stoffes protokollarisch festzuhalten. Sie messen zum Zeitpunkt $t = 3h$ die Temperatur $35°C$ bei einer Umgebungstemperatur von $20°C$. Nach 6h ist die Temperatur (bei gleicher Umgebungstemperatur) auf $25°C$ abgekühlt. Ihr Laborleiter fragt Sie, wie groß denn die Temperatur zu Beginn ($t = 0$) war. Diese haben Sie vergessen zu messen. Weiterhin möchte ihr Laborleiter eine Prognose für den weiteren zeitlichen Verlauf haben.

Wir ermitteln die Prozessgleichung

$$T(t) = (T(0) - 20) \cdot e^{-Kt} + 20 \tag{14.30}$$

Einsetzen der beiden Messwerte ergibt

$$\begin{aligned} 35 &= (T(0) - 20) \cdot e^{-3K} + 20 \qquad (14.31) \\ 25 &= (T(0) - 20) \cdot e^{-6K} + 20 \end{aligned}$$

Zunächst kann die Umgebungstemperatur subtrahiert werden:

$$\begin{aligned} 15 &= (T(0) - 20) \cdot e^{-3K} \\ 5 &= (T(0) - 20) \cdot e^{-6K} \end{aligned}$$

Division der Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned} 3 &= \frac{e^{-3K}}{e^{-6K}} = e^{3K} \\ 3K &= \ln(3) \\ K &= \frac{\ln(3)}{3} = 0{,}366 \end{aligned}$$

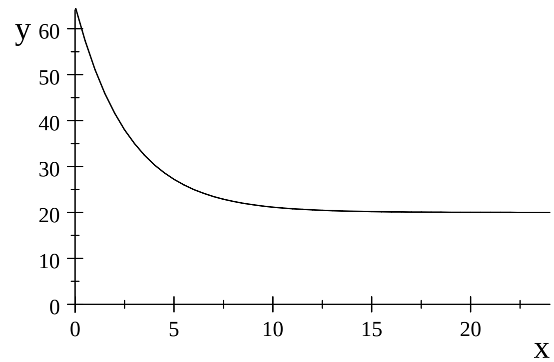
Nun kann T(0) aus (14.30) berechnet werden

$$35 = (T(0) - 20) \cdot e^{-0{,}366 \cdot 3} + 20 \tag{14.32}$$

$$\begin{aligned} 15 &= (T(0) - 20) \cdot e^{-0{,}366 \cdot 3} \\ 15 &= (T(0) - 20) \cdot 0{,}334 \\ 44{,}91 &= T(0) - 20 \\ T(0) &= 64{,}91 \end{aligned}$$

Also: Der Stoff war zu Beginn $64.91°C$. Und damit lautet die Prozessgleichung

$$T(t) = 44{,}91 \cdot e^{-0{,}366 \cdot t} + 20$$



14.4 Das logistische Wachstum - Störungen zweiter Ordnung

Wir wollen nun das Phänomen beschreiben, dass zunächst ein ungebremstes Wachstum vorliegt, später jedoch aufrund begrenzter Ressourcen dieses Wachstum wieder gebremst wird. Das Modell hierzu ist das **diskrete logistische Wachstum (Störung zweiter Ordnung)**

$$\boxed{\frac{\triangle y}{\triangle t} = k \cdot y \cdot (R - y)} \tag{14.33}$$

Für kleine y ist dies im Wesentlichen das Wachstum aus dem ungestörten Modell, für y nahe bei R nimmt das Wachstum dann wieder ab. Das Wachstum wird durch den Wachstumskoeffizienten $K = k \cdot R$ (für kleine y pro Mengeneinheit y beschrieben. Der Wachstumskoeffizient beschreibt also den Zuwachs pro Zeiteinheit für den ungebremsten Fall. Z.B. eine Nachricht verbreitet sich in einer Kleinstadt durch Mundpropaganda, in dem jeder täglich 10 anderen die Nachricht mitteilt; damit ist $K = k \cdot R = 10$, obwohl diese Wachstumsrate im Sättigungzustand gar nicht mehr erreicht werden kann.

Zur Modellbildung sind die Parameter wie folgt zu bilden

R	...	Obere Schranke der Population
$K = k \cdot R$	....	Wachstumsparameter für das anfänglich unbeschränkte Wachstum

Hierzu ist zunächst die Sättigunggröße R zu bestimmen. Der Parameter $k \cdot R$ ergibt sich aus dem anfänglichen umgebremsten Wachstum, der Parameter k damit ggf. durch Division dieses Wachstumsparameters durch R.Wir werden jedoch im weiteren sehen, dass nur der Parameter $k \cdot R$ benötigt wird.

Wir suchen auch hier die stationären Lösungen und finden $\triangle y = 0$ für $y_s = 0$ oder $y_s = R$. Ohne Bestand oder ohne freie Ressourcen kann also kein weiteres Wachstum entstehen.

Die zu lösende Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{y_n - y_{n-1}}{\triangle t} &= k \cdot y_{n-1} \cdot (R - y_{n-1}) \\ y_n - y_{n-1} &= k \cdot y_{n-1} \cdot (R - y_{n-1}) \cdot \triangle t \end{aligned}$$

kann für kleines $\triangle t$ ersetzt werden durch

$$y_n - y_{n-1} = k \cdot y_{n-1} \cdot (R - y_n) \cdot \triangle t \tag{14.34}$$

Betrachten wir nun die Größe

$$z_n = \frac{y_n}{R - y_n} = \frac{y_n - R + R}{R - y_n} = -1 + \frac{R}{R - y_n} \tag{14.35}$$

und entsprechend

$$z_{n-1} = \frac{y_{n-1}}{R - y_{n-1}} = -1 + \frac{R}{R - y_{n-1}}$$

so kann (14.35) nach y_n aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} 1 + z_n &= \frac{R}{R - y_n} && (14.36) \\ R - y_n &= \frac{R}{1 + z_n} \\ y_n &= R - \frac{R}{1 + z_n} \\ &= \frac{R(1 + z_n) - R}{1 + z_n} \\ &= \frac{Rz_n}{1 + z_n} = \frac{R}{\frac{1}{z_n} + 1} && (14.37) \end{aligned}$$

Es ist damit

$$z_n - z_{n-1} = \frac{R \cdot (R - y_{n-1}) - R \cdot (R - y_n)}{(R - y_{n-1})(R - y_n)}$$

mit (14.34) und (14.35) dann

$$\begin{aligned}
z_n - z_{n-1} &= \frac{R}{R-y_{n-1}} \cdot \frac{y_n - y_{n-1}}{R-y_n} \\
&= \frac{R}{R-y_{n-1}} \cdot k \cdot y_{n-1} \cdot \triangle t \\
&= R \cdot k \cdot \triangle t \cdot z_{n-1}
\end{aligned}$$

Und somit $\triangle z = R \cdot k \cdot z_{n-1} \cdot \triangle t$ bzw. $\dfrac{\triangle z}{\triangle t} = R \cdot k \cdot z_{n-1} = R \cdot k \cdot z(t)$

Dies ist jedoch das ungebremste Wachstum in z mit der Wachstumskonstante $R \cdot k$.

Die Lösung ist gegeben durch

$$z_n = z_0 \cdot (1 + R \cdot k \cdot \triangle t)^n \tag{14.38}$$

und wegen (14.35) auch für $n = 0$:

$$z_0 = \frac{y_0}{R - y_0}$$

Wegen (14.36) ist weiterhin

$$y_n = \frac{R}{\frac{1}{z_n} + 1}$$

und damit

$$\begin{aligned}
y_n &= \frac{R}{\frac{1}{z_0} \cdot \frac{1}{(1 + R \cdot k \cdot \triangle t)^n} + 1} \\
y_n &= \frac{R}{\frac{R - y_0}{y_0} \cdot (1 + R \cdot k \cdot \triangle t)^{-n} + 1}
\end{aligned}$$

Also:

Algorithmus 292 *(Diskretes Modell des Wachstums mit Störung zweiter Ordnung)*

Die Lösung des Modells $\boxed{\triangle y = (k \cdot y \cdot (R - y)) \cdot \triangle t}$ *mit* $y(0) = y_0$ *geg. (*kR *anfänglicher Wachstumsparameter pro Zeiteinheit* Δt_0, Δt *Zeitteil,* R *Oberschranke der verfügbaren Ressourcen) ist*

$$\boxed{y_n = \frac{R}{\frac{R - y_0}{y_0} \cdot (1 + R \cdot k \cdot \triangle t)^{-n} + 1}}$$

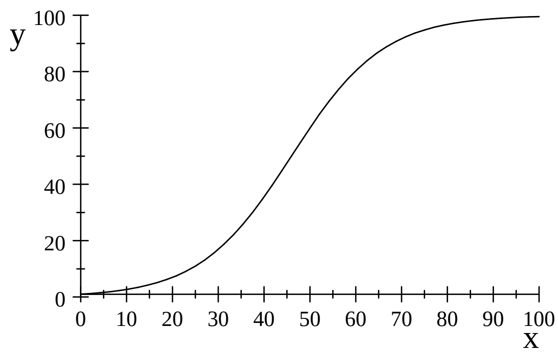
Und im kontinuierlichen Modell:

Algorithmus 293 *(Kontinuierliches Modell des Wachstums mit Störung zweiter Ordnung)*

Die Lösung des Modells $\boxed{y' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle t} = k \cdot y \cdot (R - y)}$ *mit* $y(0) = y_0$ *geg. (kR anfänglicher kontinuierlicher Wachstumsparameter,* R *Oberschranke der verfügbaren Ressourcen) ist für* $\Delta t \to 0$

$$\boxed{y(t) = \frac{R}{\frac{R - y_0}{y_0} \cdot e^{-R \cdot k \cdot t} + 1}}$$

Der Funktionsverlauf sieht dabei wie folgt aus: Für t=0 wird der Wert y_0 angenommen, für t$\to \infty$ der Wert R, z.B. für $y_0 = 1, R = 100, : k = 0,001$



$$y(t) = \frac{100}{99 \cdot e^{-0.1 \cdot t} + 1}$$

Bem.: Zur Bestimmung der Prozessgleichung reicht es ausser dem Parameter R die Größen

$$b = \frac{R - y_0}{y_0}$$

und

$$k_2 = R \cdot k$$

zu kennen. Mit diesen Abkürzungen vereinfacht sich das Lösen der Gleichungen, wenn beispielsweise die Funktion an zwei Zeitpunkten gegeben ist, wovon keiner dem Zeitpunkt $t = 0$ entspricht. Durch Einsetzen von $t = 0$ kann dann wiederum

$$y(0) = \frac{R}{b + 1}$$

berechnet werden.

Eine vereinfachte Berechnung kann wie folgt durchgeführt werden: Der Parameter R ist die langfristige Obergrenze, welche aus den Daten abgelesen werden kann. Der Wachstumsparameter $k \cdot R$ ist der Wert des zu Beginn vorhandenen exponentiellen Wachstums. Also aus den Daten für "kleines y" kann wie oben der Quotient zweier aufeinanderfolgender Messwerte berechnet werden. Dieser Quotient sollte konstant sein und um eins größer als der Wert des Wachstumsparameters $k \cdot R$ sein, bzw. umgekehrt erhält man den Wert des Wachstumsparameters durch Subtraktion von 1 der konstanten Koeffizienten.

Bsp.: Ein Computerspiel wird zum Zeitpunkt $t = 0$ auf den Markt geworfen und an 1000 Spieler gegeben, d.h. $y(0) = 1000$). Da der Bekanntheitsgrad mit jedem spielenden Teilnehmer wächst - er infiziert pro Zeiteinheit eine unbekannte Anzahl potientieller Neukunden - die jedoch durch die unbekannte Gesamtzahl R der potentiellen Spieler begrenzt wird, gilt

$$\frac{\triangle y}{\triangle t} = k \cdot y \cdot (R - y)$$

also ein Modell mit Störung zweiter Ordnung.

Es wird nun beobachtet, dass nach 10 Tagen 10000 Spieler existieren und der anfängliche Wachstumskoeffizient $k \cdot R = 0,3$ beträgt. (Damit wären nach 10 Tagen bei ungebremsten Wachstum etwa 13000 Spieler vorhanden - die tatsächliche Anzahl von 10000 spricht für eine Modellierung zweiter Ordnung). Wie ist damit der Funktionsverlauf im diskreten Modell? Wie groß ist die Gesamtzahl potentieller Kunden und wann werden 90% der Kunden das Spiel erworben haben?

Zum einen ist der Startwert $y(0) = 1000$ gegeben und unsere diskrete Lösungsfunktion lautet

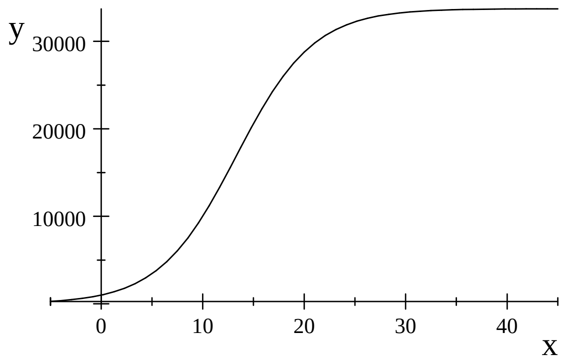
$$y_n = \frac{R}{\frac{R-1000}{1000} \cdot (1,3)^{-n} + 1}$$

Weiterhin ergeben die Messungen für $n = 10$

$$\begin{aligned}
10000 &= \frac{R}{\frac{R-1000}{1000} \cdot 1,3^{-10} + 1} \\
10000 \cdot (1 + \frac{R-1000}{1000} \cdot 1.3^{-10}) &= R \\
10000 + (10R - 10000) \cdot 0,072538 &= R \\
10000 - 725,38 &= R - 0,72538R \\
R &= 33773
\end{aligned}$$

Also ist die Gesamtzahl potentieller Kunden etwa 33700 Personen und der Verlauf ergibt sich gemäß

$$y = \frac{33773}{33,773 \cdot (1,3)^{-n} + 1}$$



90 % sind erreicht wenn

$$y_n = 0,9R = 0,9 \cdot 33773 = 30396$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{33773}{33,773 \cdot (1,3)^{-n} + 1} &= 30396 \\ 33773 &= 30396 \cdot (33.773 \cdot (1.3)^{-n} + 1) \\ n &= 21 \text{ Tage} \end{aligned}$$

Bem.: Verwenden wir statt dessen das kontinuierliche Modell so ergibt sich

$$10000 = \frac{R}{\frac{R-1000}{1000} \cdot e^{-0,3 \cdot 10} + 1}$$

und dies liefert als Wert für $R = 18924$. Dies zeigt, dass kleine Abweichungen in den Werten die Lösungen deutlich verändern können.

14.5 Systeme von Differenzengleichungen

Wir beschreiben eine parasitenbestimmte Population durch den Zuwachs mit Verlust durch

$$\boxed{\frac{\triangle y}{\triangle t} = k \cdot y(t) - a} \tag{14.39}$$

wobei k der Zuwachs pro Einheit und Zeiteinheit, a die Abnahme (gesamt) pro Zeiteinheit beschreibt.

Gehen wir nun davon aus,dass y die Beutepopulation ist, welche sich mit der Wachstumsrate k pro Zeiteinheit vermehrt, so werden a Tiere durch Jäger gefressen. Das Modell zur Berechnung dieses Wertes von a soll nun weiter verfeinert werden. Zunächst gehen wir davon aus,das es z Jäger gibt, welche pro Zeiteinheit je m Beutetiere erlegen. Damit ist

$$a = m \cdot z$$

und damit die Differenzengleichung

$$\frac{\triangle y}{\triangle t} = k \cdot y(t) - m \cdot z$$

Nun erscheint aber bei der Modellbildung die Größe der Jäger auch von der Anzahl der Beutetiere abzuhängen und damit nicht konstant zu sein. Es ergibt sich

$$\frac{\triangle y}{\triangle t} = k \cdot y(t) - m \cdot z(t)$$

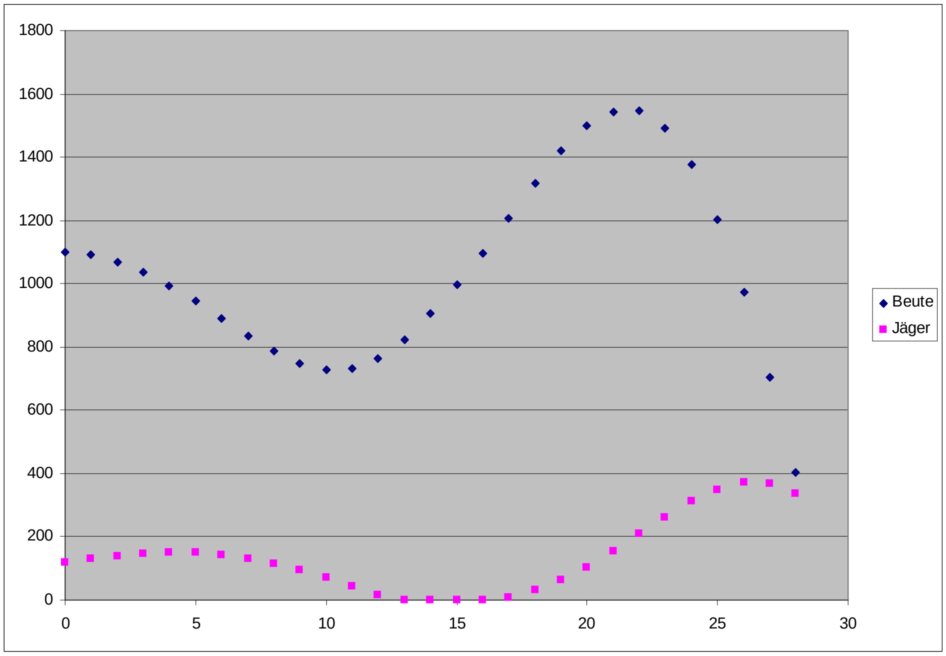
Bei der Modellierung der Jägerpopulation gehen wir dabei wie folgt vor: Bei einem Gleichgewicht von g Beutetieren bleibt die Population unverändert. Pro Beutetier mehr wachse der Bestand der Jäger um einen Faktor v, pro Tier weniger falle er um den gleichen Faktor. Dies führt zur Differenzengleichung der Jäger

$$\frac{\triangle z}{\triangle t} = v \cdot (y(t) - g)$$

Ein solches System, bei dem nun zwei gekoppelte Größen berechnet werden, heißt System gekoppelter Differenzengleichungen. Ermitteln wir den Verlauf so ergibt sich beispielsweise für die Parameter

$$\begin{aligned} y_0 &= 1100 \\ z_0 &= 120 \\ k &= 0,1 \\ v &= 0,1 \\ m &= 1 \\ g &= 1000 \end{aligned}$$

der folgende Funktionenverlauf für die gesuchten Größen $y(t)$ und $z(t)$



14.6 Zusammenfassung Wachstum und Zerfall

Diskrete Modelle - y_0 gegeben:

	Modell	Prozessgleichung
ungebremst	$\Delta y = k \cdot y_{n-1}$	$y_n = y_0 \cdot (1+k)^n$
Störung 1. Ordn.		
Parasiten	$\Delta y = k \cdot y_{n-1} - a$	$y_n = (y_0 - \frac{a}{k})(1+k)^n + \frac{a}{k}$
Ressourcen	$\Delta y = K \cdot (R - y_{n-1})$	$y_n = (y_0 - R)(1-K)^n + R$
Logistisch	$\Delta y = k \cdot y_{n-1} \cdot (R - y_{n-1})$	$y_n = \dfrac{R}{\dfrac{R-y_0}{y_0} \cdot (1+R\cdot k)^{-n} + 1}$

Kontinuierliche Modelle - y_0 gegeben:

	Modell	Prozessgleichung
ungebremst	$y'(t) = k \cdot y(t)$	$y(t) = y_0 \cdot e^{kt}$
Störung 1. Ord. Parasiten	$y'(t) = k \cdot y(t) - a$	$y(t) = (y_0 - \frac{a}{k})e^{kt} + \frac{a}{k}$
Ressourcen	$y'(t) = K \cdot (R - y(t))$	$y(t) = (y_0 - R)e^{-Kt} + R$
spez. Temperatur:	$T'(t) = K \cdot (T_{Umg} - T(t))$	$T(t) = (T_0 - T_{Umg})e^{-Kt} + T_{Umg}$
logistisch	$y'(t) = k \cdot y(t) \cdot (R - y(t))$	$y(t) = \dfrac{R}{\dfrac{R-y_0}{y_0} \cdot e^{-kRt} + 1}$

Kapitel 15

Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)

Das Buch der Natur ist mit mathematischen Symbolen geschrieben.
Galileo Galilei

15.1 Einleitung

Wir verlassen die mehrdimensionale Analysis und betrachten Funktionen einer Unbekannten $f(x)$ bzw. $y(x)$ oder kurz: y. Häufig werden auch zeitabhängige Prozesse $y(t)$ beschrieben, wodurch sich die Notation entsprechend ändert.

In diesem Kapitel ist nun jedoch nicht die Funktion gegeben, sondern es sind nur Eigenschaften wie z.B. Änderung der Größe pro Zeieinheit (erste Ableitung) oder höhere Ableitungen gegeben. Die Aufgabe ist nun, anhand dieser Eigenschaften die Funktion selber zu finden oder anzunähern.

Die Aufgabenstellungen unterscheiden sich also je nach gegebener und gesuchter Information:

1. Funktion gegeben, Änderung (Ableitung) gesucht: Differentialrechnung
2. Ableitung gegeben, Funktion gesucht: Integralrechnung
3. Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitung gegeben, Funktion gesucht: Differentialgleichung

15.1.1 Einführende Beispiele (s. Wachstum und Zerfall)

Exponentielles Wachstum

Betrachten wir das Wachstum von Bakterien in einer Nährlösung, so ist der Zuwachs proportional zur vorhandenen Menge und zur Zeit $\triangle t$. Bezeichnen wir nun die Anzahl der Bakterien mit $y(t)$, so gilt also

$$\triangle y = k \cdot y(t) \cdot \triangle t$$

Hierzu hatten wir gesehen, dass im Grenzübergang $\triangle t \to 0$ die Gleichung übergeht in

$$y'(t) = k \cdot y(t)$$

Eine solche Gleichung heißt **Differentialgleichung (DGL)**. Sie hat - wie ebenfalls oben gesehen - die Lösung

$$y(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$$

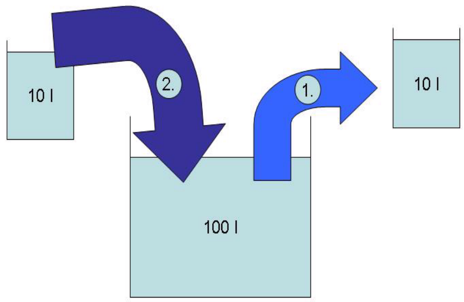
Für jedes c erhalten wir eine Lösungsfunktion $y(t)$. Ist nun neben der DGL noch eine **Anfangsbedingung** an einem beliebigen Zeitpunkt - meist $t = 0$ - gegeben, so lässt sich eine eindeutige Funktion zur Lösung der DGL angeben, z.B. mit gebenem $y(0) = y_0$

$$y(t) = y_0 \cdot e^{k \cdot t}$$

DGL und Anfangswert heissen dabei zusammen **Anfangswertproblem (AWP).**

Als ein weiteres Beispiel zur Verdeutlichung des Übergangs zwischem diskreten und kontinuierlichem Szenarion betrachten wir nun:

In einem Becken mit 100 l (= kg) ist Wasser, in dem 1%-Salz gelöst ist. Nun wird mit einem 10l - Behälter 10 l Wassergemisch - also 10% des Behälters und ebenso ein Zehntel des vorhandenen Salzes - entnommen und dann wiederum mit dem 10-l Behälter eine 5%-ige Salzlösung (=0,5 kg Salz) hinzu gekippt. Dieser Prozess wird nun immer wiederholt. Wie ist die Salzmenge in kg in diesem Behälter nach n Schritten?



Den Salzgehalt y_n nach n Austauschschritten geben wir in Gramm an. Eine Umrechnung in kg oder Prozent ist dann leicht möglich. Zu Beginn ist dann

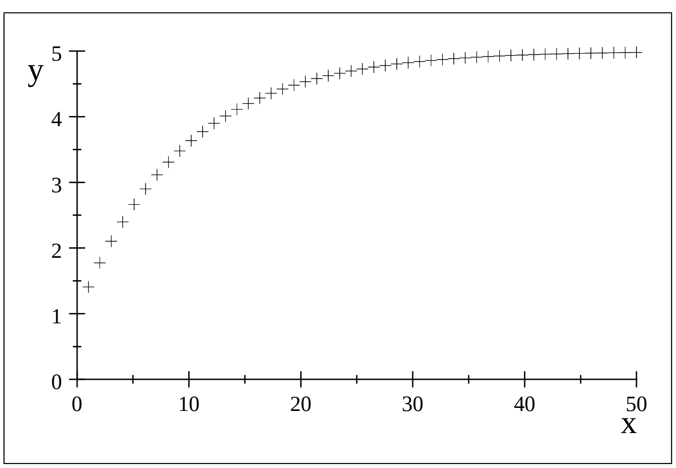
$$y_0 = 1$$

Die Änderung ist gegeben durch

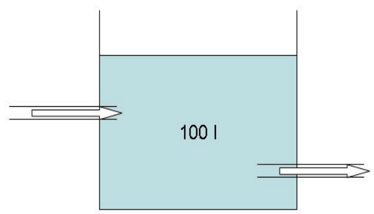
$$\Delta y = -0,1 \cdot y_{n-1} + 0,5$$

Damit ist der Salzgehalt gemäß Störung erster Ordnung gegeben mit $k = -0,1$ und $a = -0,05$ und die Prozessgleichung ist

$$\begin{aligned} y_n &= \left(1 - \frac{-0,5}{-0,1}\right)(1-0,1)^n + \frac{-0,5}{-0,1} \\ &= -4 \cdot 0,9^n + 5 \end{aligned}$$



Nun stellen wir die Situation wie folgt um: Der Zulauf wird über einen Hahn und der Ablauf wird durch einen Überlauf geregelt. Wie verläuft nun die Salzmenge, wenn wir kontinuierlich eine 5%-ige Salzlösung mit einer Zulaufgeschwindikeit von 10l pro Minute betrachten?



Zunächst ist wieder

$$y_0 = 1$$

Die Änderungsrate ist nun bei einer Zeitspanne Δt (in Minuten)

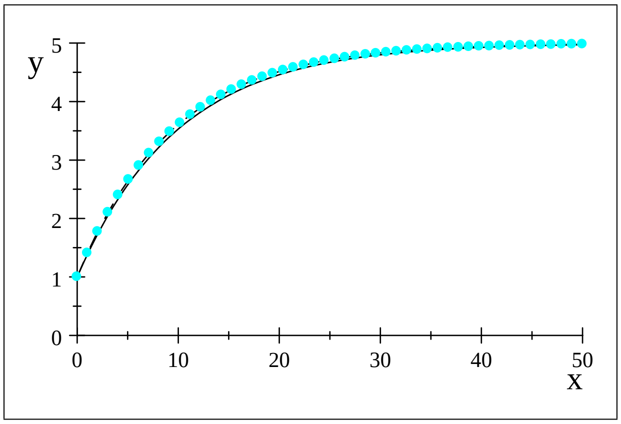
$$\begin{aligned} \Delta y &= 0,5 \cdot \Delta t - 0,1 \cdot y(t) \cdot \Delta t \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} &= 0,5 - 0,1 \cdot y(t) \end{aligned}$$

und damit für den Zeitschritt gegen Null

$$y'(t) = -0,1 \cdot y(t) + 0,5$$

Die Prozessgleichung lautet nun

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(1 - \frac{-0,5}{-0,1}\right) e^{-0,1 \cdot t} + \frac{-0,5}{-0,1} \\ &= -4 \cdot e^{-0,1 \cdot t} + 5 \end{aligned}$$



Exponentieller Zerfall

Betrachten wir negative Werte für k, so hatten wir Zerfallsprozesse, z.B. bei radioaktivem Zerfall. Mit $k = -\lambda$ lautet die Modellgleichung

$$\triangle y = -\lambda \cdot y(t) \cdot \triangle t$$

mit der Lösung

$$y(t) = y_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Die Hälfte der urspünglichen Substanz wird erreicht für

$$\begin{aligned} \frac{y_0}{2} &= y_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \\ -\ln(2) &= -\lambda t \\ t &= \frac{\ln(2)}{\lambda} \end{aligned}$$

Diese Zeit heisst die Halbwertszeit eines Stoffes und ist unabhängig von der Menge des Stoffes.

(*) Beispiel: Räuber-Beute-Modelle

Wir betrachten die Entwicklung eines Beutetieres (z.B. Gazellen) über die Zeit t.

Sei

$y(t)$ ... Anzahl der Beutetiere zum Zeitpunkt t
y_0 ... Anzahl der Beutetiere zum Startzeitpunkt (Bekannt)
z_0 ... Anzahl der Jäger (z.B. Tiger)

Ferner gebe es eine Geburtenrate b der Beutetiere, d.h. $\triangle y = b \cdot \triangle t$ falls es keine Todesfälle gäbe. Weiterhin erlegt jeder Jäger m Beutetiere pro Zeiteinheit $\triangle t_0$. Damit gilt für die Population

$$\triangle y = b \cdot \triangle t - m \cdot z_0 \cdot \triangle t \tag{15.1}$$

bzw.

$$\frac{\triangle y}{\triangle t} = b - m \cdot z_0 \tag{15.2}$$

und im Grenzübergang $\triangle t \to 0$

$$y'(t) = b - m \cdot z_0 \tag{15.3}$$

Integrieren wir diese Gleichung erhalten wir

$$\int y'(t)dt = y(t) = (b - m \cdot z_0) \cdot t + C \tag{15.4}$$

Aus $y(0) = y_0$ folgt $C = y_0$ und damit ist die Lösungsfunktion

$$y(t) = (b - m \cdot z_0) \cdot t + y_0 \tag{15.5}$$

Für $b > m \cdot z_0$ gibt es mehr Geburten als Todesfälle und die Anzahl der Beutetiere wächst linear, für $b < m \cdot z_0$ überwiegen die getöteten Tiere und bei $b = m \cdot z_0$ bleibt die Anzahl konstant y_0.

Die hier gemachte Annahme einer konstanten Anzahl Jäger beschreibt den Vorgang jedoch nicht hinreichend. Mit wachsender Anzahl Beutetiere vermehren sich auch die Jäger und deren Anzahl ergibt sich nun aus $z(t)$.

Eine geeignete Gleichung für die Anzahl der Jäger verwendet, dass, so lange mehr als eine Grenzzahl g Beutetiere $y(t)$ vorhanden sind, sich die Jäger um ein Vielfaches v dieser Differenz $y(t) - g$ vermehren; wenn weniger als g Beutetiere vorhanden sind, verringert sich die Anzahl. Dies wird durch die Gleichung

$$z'(t) = v \cdot (y(t) - g) \tag{15.6}$$

beschrieben.

Die Lösung des Systems

$$\begin{aligned} y'(t) &= b - m \cdot z(t) && (15.7)\\ z'(t) &= v \cdot (y(t) - g) && (15.8)\\ & y_0, z_0 \text{ bekannt} && (15.9) \end{aligned}$$

wird erreicht, in dem wir zunächst die erste Gleichung differenzieren

$$y'' = -m \cdot z'(t)$$

und nun die zweite Gleichung einsetzen

$$y'' = -m \cdot v \cdot (y(t) - g) \tag{15.10}$$

Die Lösung wird weiter unten beschrieben.

Definition 294 *Eine Gleichung der Form $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ heißt* ***explizite gewöhnliche DGL (Differentialgleichung) n-ter Ordnung.***

Bem. 1: Ist die Gleichung in der Form $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ gegeben, so heißt die Differentialgleichung **implizit.**

Bem 2.: Die DGL heißt gewöhnlich, da ihre Lösung (die Funktion y(x)) nur von einer Unbekannten abhängt. Bei mehreren Unbekannten spricht man von partiellen Differentialgleichungen.

Bem 3: Die Ordnung gibt also die höchste vorkommende Ableitung in der DGL an. Beispielsweise ist obige Gleichung für das Räuber-Beute-Modell eine explizite DGL 2. Ordnung.

Definition 295 *Die Vorgabe einer expliziten DGL und der Werte $x_0, y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ heißt* ***Anfangswertproblem (AWP).***

Definition 296 *Eine n-mal differenzierbare Funktion $y(x)$, die die explizite DGL erfüllt, heißt* ***allgemeine Lösung der Differentialgleichung.*** *Erfüllt Sie zusätzlich die Bedingungen des Anfangswertproblems aus der vorigen Definition, so heißt Sie* ***spezielle Lösung des AWP.***

Bem. Beim Beispiel war $y(t) = \frac{g}{2}t^2 + c_1 t + c_2$ die allgemeine Lösung der DGL $y'' = g$ und $y(t) = \frac{g}{2}t^2$ spezielle Lösung vom AWP $y'' = g, y(0) = 0, y'(0) = 0$

Beispiel: Wir betrachten die Reaktion $2NO_2 \rightarrow 2NO + O_2$ und interessieren uns für die Reaktionskinetik. Bezeichne x die verstrichene Zeit, $y(x)$ die Stickstoffdioxidkonzentration zum Zeitpunkt x. Wenn wir wissen, daß der Stoffumsatz pro Zeiteinheit proportional zum Quadrat der Konzentration $y^2(x)$ (aber $y(x)$ unbekannt) ist, lässt sich folgern:

$$y'(x) = -ky^2(x) \tag{15.11}$$

Dies ist eine explizite DGL erster Ordnung. Zur Zeit $x = 0$ sei die Konzentration $y(0) = y_0$ gegeben.

Die systematische Lösung dieses Problems wird im folgenden noch detaillierter behandelt. Hat man jedoch die Lösung des Problems gefunden, so lässt sich leicht überprüfen, ob diese die obige DGL erfüllt. Hier ist die Lösung:

$$y(x) = y_0 \cdot \frac{1}{1 + kxy_0}.$$

1. AWP: $y(0) = y_0$
2. DGL: $y'(x) = y_0 \cdot \frac{-ky_0}{(1+kxy_0)^2} = -k\frac{y_0^2}{(1+kxy_0)^2} = -k \cdot (y(x))^2$

Beispiele von Differentialgleichungen

$y' = f(x, y)$	Explizite DGL 1. Ordnung
$y'x + y = f(x)$	Implizite DGL 1. Ordnung
$y^{(2)} \cdot y^{(4)} = xy'$	Implizite DGL 4. Ordnung

Bem.: Sind keine Anfangsbedingungen gegeben, so hat eine DGL erster Ordnung einen freien Parameter in der Lösung und somit unenendlich viele Lösungen. Allgemein hat eine DGL n-ter Ordnung n freie Parameter. Für jede spezielle Wahl dieser Parameter erhält man eine Lösungsfunktion der DGL.

15.1.2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Zunächst sei erwähnt, dass durch ein Anfangswertproblem nicht stets eine eindeutige Lösung gegeben ist. Hierzu betrachten wir

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{y} \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

und die beiden verifizierbaren Lösungen

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 0 \\ y_2(x) &= \frac{x^2}{4} \end{aligned}$$

und wir erhalten somit 2 Lösungen.
Es gilt zunächst jedoch:

Satz 297 *Ist $y(x)$ ist genau dann eine Lösung des AWP $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$, falls*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

(Volterra-Integralgleichung)

Bew.: Ist $y(x)$ Lösung des AWP, so ist

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt &= \int_{x_0}^{x} y' dt \\ &= y(x) - y(x_0)\end{aligned}$$

Umgekehrt sei

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

Dann ist

$$\begin{aligned}y(x_0) &= y_0 \\ y' &= \frac{d}{dx}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt\right) \\ &= f(x, y(x))\end{aligned}$$

Bem.: Haben wir damit eine einfache Lösungsmethode gefunden? Leider nein - Machen wir uns das an einem Beispiel klar:

Gesucht sei die Lösung zu dem AWP

$$\begin{aligned}y' &= y \\ y_0 &= 1\end{aligned}$$

Dann erfüllt die Lösung

$$y(x) = 1 + \int_{0}^{x} y(t)dt$$

Wir kennen aber gerade die Funktion $y(x)$ nicht. Praktisch ist diese Aussage daher von eher geringer Bedeutung, aber es liefert die Existenz mindestens einer Lösung falls $\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$ existiert und es hilft ein Näherungsverfahren zu konsturieren:

Das Picard-Lindelöf Iterationsverfahren

Wir können mit Hilfe der Volterra-Integralgleichung wie folgt die gesuchte Lösung annähern. Starte mit einer beliebigen Startfunktion, z.B. einer Konstanten sinnvollerweise dem Anfangswert

$$g_0(x) = y_0$$

Bilde nun

$$g_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, g_n(t))dt$$

als nächste Näherung für die gesuchte Funktion $y(x)$.

Beispiel:

$$\begin{aligned} y' &= yx \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} g_0(x) &= 1 \\ g_1(x) &= 1 + \int_0^x f(t,1)dt \\ &= 1 + \int_0^x tdt \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} \\ g_2(x) &= 1 + \int_0^x f(t, 1 + \frac{t^2}{2})dt \\ &= 1 + \int_0^x t + \frac{t^3}{2}dt \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} \end{aligned}$$

u.s.w.

Satz 298 *(Peano): Ist $f(x,y)$ in $[a,b] \times \mathbb{R}$ stetig, so ist die DGL $y' = f(x,y)$ lösbar.*

Eine eindeutige Lösung wird nur unter zusätzlichen Bedingungen erreicht. Dazu:

Definition 299 *$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heisst **Lipschitz-stetig bzgl. y**, falls es eine Konstante L>0 gibt, mit*

$$\begin{aligned} |f(x,y_1) - f(x,y_2)| &< L \cdot |y_1 - y_2| \\ \forall (x,y_1),(x,y_2) &\in D \end{aligned}$$

Satz 300 *(Picard-Lindelöf) Sei $x_0 \in [a,b], f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, f Lipschitz stetig in y. Dann besitzt $y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$ eine eindeutige Lösung auf $[a,b]$.*

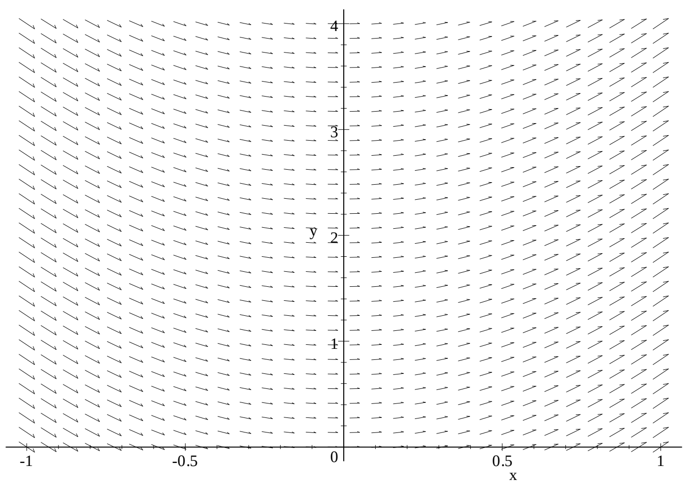
15.2 Lösungsverfahren für DGL'en erster Ordnung

Zu lösen ist also $y'(x) = f(x, y(x))$. Zunächst eine grafische Interpretation.

15.2.1 Geometrische Interpretation von y'=f(x,y)

Wir betrachten nun die DGL $y' = f(x, y)$. Diese Differentialgleichung besagt, daß an jeder Stelle (x_0, y_0) die Tangentensteigung der noch unbekannten Funktion berechnet werden kann. Wir wissen also - wenn wir einen Punkt der Kurve (näherungsweise) kennen, in welche Richtung die Funktion von dort weiterläuft.

Dieses lässt sich grafisch durch ein Richtungsfeld zeigen, in dem jedem Punkt nun ein kleiner Vektor mit der Steigung dieses Punktes zugeordnet wird.



Beispiel

Wird nun ein Anfangswert x_0 und ein zugehöriger Funktionswert y_0 vorgegeben, so ist eine Stelle der Funktion bekannt, z.B. $y(0) = 1$ und man kann von diesem Punkt die Funktion rekonstruieren, in dem man $y_1 = y(x_0 + h) = y(x_0) + h \cdot y'(x_0)$ berechnet dann von diesem Wert aus weiter rechnet.

Analytische Behandlung

Ist die DGL von der Gestalt $y' = f(x)$, so lässt sich die DGL durch direkte Integration lösen.

Beispiel: Ges: $\quad y' = 2x;$
$\quad y(0) = 1$

Zunächst integrieren wir beide Seiten der DGL und erhalten:

$$y = x^2 + c \qquad \textit{(Allgemeine Lösung der DGL)}$$

In diese Gleichung setzen wir nun die Anfangsbedingung ein und erhalten:

$$1 = y(0) = 0^2 + c$$

Und damit $c = 1$.

Die spezielle Lösung unseres Problems lautet - in dem man $c = 1$ *nun in die Allgemeine Lösung einsetzt:*

$$y = x^2 + 1$$

Trennung der Variablen

Hat die DGL die Gestalt $y' = f(x) \cdot g(y)$, also lassen sich die Variablen trennen (separieren), so kann man die DGL wie folgt lösen. Zunächst dividieren wir durch $g(y)$

$$\frac{1}{g(y)} y' = f(x)$$

Für die Funktion $\frac{1}{g(y)}$ ersetzen wir $h(y)$ mit Stammfunktion $H(y)$ und erhalten

$$h(y) \cdot y' = f(x)$$

Nun erinnern wir uns das y eine Funktion $y(x)$ ist. Integration liefert zunächst

$$\int h(y(x)) \cdot y'(x) dx = \int f(x) dx$$

und erkennen auf der linken Seite nach der Substitution $u = y(x)$

$$\begin{aligned} \int h(u) du &= \int f(x) dx \\ H(u) &= F(x) + c \\ H(y(x)) &= F(x) + c \end{aligned}$$

Diese Gleichung lösen wir nach y auf und erhalten

$$y(x) = H^{-1}(F(x) + c)$$

Mathematischer weniger korrekt, aber deutlich einprägsamer ist die folgende Form des Verfahrens:
Wir ersetzen zunächst y'durch $\frac{dy}{dx}$ und erhalten:

$$\tfrac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

$$\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$$

$$\int \underbrace{\frac{1}{g(y)}}_{h(y)} dy = \int f(x) dx$$

$$H(y) = F(x) + c$$

$$y(x) = H^{-1}(F(x) + c)$$

Löst man nun dies Integral und löst die resultierende Gleichung nach y auf, so hat man die gesuchte Lösung gefunden.

Bsp. (s.o.):

$$y' = -ky^2 \text{ mit } y(0) = y_0$$

$$\frac{dy}{dx} = -ky^2$$

$$\int -\frac{1}{y^2} dy = \int k dx$$

$$\frac{1}{y} = kx + c$$

$$y = \frac{1}{kx + c}$$

Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt: $y_0 = y(0) = \frac{1}{c}$ *bzw.* $c = \frac{1}{y_0}$*. Und damit:*

$$y = \frac{1}{kx + \frac{1}{y_0}} = \frac{y_0}{kxy_0 + 1}$$

15.2.2 Substitution

In vielen Fällen kann ein zunächst komplex aussehendes Problem durch eine geeignete Substitution vereinfacht werden.

DGL'en vom Typ $y' = f(ax + b \cdot y(x) + c)$

Mit der **Substitution** $z(x) = ax + by + c$ wird die rechte Seite zu $f(z)$ und es ergibt sich $y = \dfrac{z(x) - ax - c}{b}$. Dieses kann am Ende genutzt werden um aus der Lösung $z(x)$ wiederum die ursprünglich gesuchte Funktion $y(x)$ zu ermitteln. Es gilt für den Wert der Ableitung von $y(x)$

$$y'(x) = \frac{1}{b} \cdot (z'(x) - a) \tag{15.12}$$

Einsetzen in die DGL ergibt

$$\frac{1}{b} \cdot (z'(x) - a) = f(z) \tag{15.13}$$

bzw.

$$\boxed{z'(x) = a + b \cdot f(z)} \tag{15.14}$$

Diese Gleichung in der neuen Variablen z kann nun durch Integration **gelöst** werden. Die Lösung dieses Problems sei $z(x)$. Andererseits ergibt sich die **Rücksubstitution**

$$y(x) = \frac{z(x) - a \cdot x - c}{b} \tag{15.15}$$

wobei für $z(x)$ nun die zuvor gefundene Lösung eingesetzt wird.

Bsp: $y' = (x + y(x))^2$

Im obigen Beispiel ist damit $a = 1, b = 1, c = 0$ *und* $f(z) = z^2$

1. Substituieren

$$\begin{aligned} z(x) &= x + y(x) \\ y(x) &= z(x) - x \\ y'(x) &= z'(x) - 1 \end{aligned} \tag{15.16}$$

2. Einsetzen in die DGL

$$z'(x) - 1 = z(x)^2$$

3. Lösen der DGL

$$\begin{aligned} z' &= 1 + z^2 \\ \int \frac{1}{1+z^2} dz &= \int 1 dx \\ atan(z) &= x + c \\ z &= tan(x + c) \end{aligned}$$

4. Rücksubstitution mit (15.16):

$$\begin{aligned} x + y(x) &= tan(x + c) \\ y(x) &= tan(x + c) - x \end{aligned}$$

c ist dabei ein freier Parameter, der sich aus der Anfangsbedingung ergibt.

DGL'en vom Typ $y' = f(\frac{y}{x})$

Mit der **Substitution** $z(x) = \frac{y}{x}$ gilt zunächst $y(x) = z(x) \cdot x$ und damit $y' = z(x) + z'(x) \cdot x$ (Produktregel!)

Einsetzen in die DGL ergibt

$$\boxed{z(x) + z'(x) \cdot x = f(z)} \text{ bzw} \tag{15.17}$$

$$z'(x) = \frac{f(z) - z(x)}{x}$$

Diese Gleichung in der neuen Variablen z kann nun durch Integration **gelöst** werden. Die Lösung dieses Problems sei wiederum $z(x)$. Aus der **Rücksubstitution**

$$y(x) = z(x) \cdot x \tag{15.18}$$

wobei für $z(x)$ nun die zuvor gefundene Lösung eingesetzt wird.

Bsp: $y' = \frac{y(x)}{x} + 1$

Im obigen Beispiel ist damit $y' = f(z) = z + 1$

1. Substituieren

$$\begin{aligned} z(x) &= \frac{y(x)}{x} \\ y(x) &= z(x) \cdot x \\ y'(x) &= z(x) + z'(x) \cdot x \end{aligned}$$

2. Einsetzen in die DGL

$$z(x) + z'(x) \cdot x = z(x) + 1$$

3. Lösen der DGL

$$\begin{aligned} z' \cdot x &= 1 \\ \int 1 dz &= \int \frac{1}{x} dx \\ z &= ln|x| + c \end{aligned}$$

4. Rücksubstitution mit (15.18):

$$y = (ln|x| + c) \cdot x$$

c ist dabei ein freier Parameter, der sich aus der Anfangsbedingung ergibt. Beachte: Bei einem speziellen Anfangswertproblem muß am Schluß der Parameter c durch Einsetzen des Anfangswertes ermittelt werden.

Bem.: Häufig muß die DGL noch umgeformt werden, um eine geeignete Substitution zu erkennen, z.B.

$$\begin{aligned} xy' &= y + \sqrt{x^2 + y^2} \\ y' &= \frac{y}{x} + \sqrt{1 + (\frac{y}{x})^2} \end{aligned}$$

Bsp.: Lösen Sie die DGL zum gebremsten Wachstum

$$y' = \frac{dy}{dt} = ky - a \tag{15.19}$$

mit $y(0) = y_0$ mit dem Substitutionsverfahren.

Anwendung: Freier Fall mit Luftwiderstand

Betrachten wir den freien Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes, so erhalten wir eine Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit

$$F_R = \rho \cdot v(t)$$

eine Trägheitkraft

$$F_T = m \cdot a(t) = m \cdot v'(t)$$

und eine Gewichtskraft

$$F_G = m \cdot g$$

Insgesamt ergibt sich aus dem Käftegleichgewicht

$$\begin{aligned} F_T + F_R &= F_G \\ m \cdot v'(t) &= m \cdot g - \rho \cdot v(t) \\ v'(t) &= g - \frac{\rho}{m} \cdot v(t) \end{aligned}$$

Wir substituieren

$$\begin{aligned} z(t) &= g - \frac{\rho}{m} \cdot v(t) \\ v(t) &= \frac{m}{\rho}(g - z(t)) \\ v'(t) &= -\frac{m}{\rho} z'(t) \end{aligned}$$

und damit erhalten wir die neue DGL

$$\begin{aligned} -\frac{m}{\rho} z'(t) &= z(t) \\ z'(t) &= -\frac{\rho}{m} z(t) \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$z(t) = c \cdot e^{-\frac{\rho}{m} t}$$

und daraus

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{m}{\rho}(g - z(t)) \\ &= \frac{m}{\rho}(g - c \cdot e^{-\frac{\rho}{m} t}) \end{aligned}$$

Gibt es eine Startbedingung

$$v(0) = v_0$$

so ergibt sich weiterhin

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{m}{\rho}(g - c) \\ g - c &= v_0 \cdot \frac{\rho}{m} \\ c &= g - v_0 \cdot \frac{\rho}{m} \end{aligned}$$

und damit die spezielle Lösung

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{m}{\rho}\left(g - \left(g - v_0 \cdot \frac{\rho}{m}\right) \cdot e^{-\frac{\rho}{m}t}\right) \\ &= \frac{m}{\rho}g + \left(v_0 - g\frac{m}{\rho}\right) \cdot e^{-\frac{\rho}{m}t} \end{aligned}$$

Insbesondere ergibt sich für $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{m}{\rho}g$$

als Grenzgeschwindigkeit.

15.2.3 Lineare DGL'en

Eine spezielle DGL mit trennbaren Variablen ist

$$\begin{aligned} y' &= g(x) \cdot y \\ \text{bzw. } y' + f(x) \cdot y &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösung wird durch Integration berechnet:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= g(x) \cdot y \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int g(x) dx \\ ln\,|y| &= \int g(x) dx + \tilde{c} \\ y &= e^{\int g(x)dx + c} = c \cdot e^{\int g(x)dx} \end{aligned}$$

wobei $c_1$wiederum erst am Ende durch Einsetzen des Anfangswertes berechnet wird.

Bsp.: $y' = y \cdot sin(x)$ *mit* $y(0)=1$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y} dy &= \int sin(x) dx \\ ln\,|y| &= -cos(x) + \tilde{c} \\ y &= c \cdot e^{-cos(x)} \text{ (Allgem. Lösung)} \end{aligned}$$

Aus der Anfangsbedingung $y(0)=1$ *ergibt sich:*

$$\begin{aligned} y(0) &= c \cdot e^{-1} = 1 \\ c &= e \end{aligned}$$

und damit die spezielle Lösung

$$y = e \cdot e^{-cos(x)} = e^{1-cos(x)}$$

Für den Fall $y' + f(x) \cdot y = 0$ ergibt sich analog die allgemeine Lösung

$$y = c \cdot e^{\int -f(x)dx} \tag{15.20}$$

Definition 301 *Die Gleichung* $y' + f(x) \cdot y = 0$ *heißt* ***linear homogene DGL 1. Ordnung.***

Bem.: Die linear homogene DGL hat also immer die allgemeine Lösung gemäß 15.20.

Der Name hat die Bestandteile: linear (in y), homogen (rechte Seite ist 0) und 1. Ordnung da die höchste auftretende Ableitung y' ist. Ist die rechte Seite eine Funktion in x, so greift die folgende Definition:

Definition 302 *Die Gleichung* $y' + f(x) \cdot y = g(x)$ *heißt* ***linear inhomogene DGL 1. Ordnung.*** $g(x)$ *heißt* ***Störfunktion.*** *Das zugehörige AWP heißt lineares AWP.*

Satz 303 *Jedes lineare AWP mit stetigen Funktion* $f(x)$ *und* $g(x)$ *sowie beschränktem* $f(x)$ *hat genau eine Lösung.*

Bew.: Es ist $y\prime = -f(x) \cdot y + g(x)$ und damit

$$\begin{aligned} |-f(x)y_1 + g(x) + f(x)y_2 - g(x)| &= |f(x)| \cdot |y_1 - y_2| \\ &\leq M \cdot |y_1 - y_2| \end{aligned}$$

Damit ist die lineare Funktion Lipschitz stetig und eine eindeutige Lösung gesichert.

Lösung der inhomogenen DGL- Variation der Konstanten:

Ansatz: Betrachte zur Lösung von $y' + f(x) \cdot y = g(x)$ statt (15.20) den Lösungsansatz

$$y = c(x) \cdot e^{\int -f(x)dx} \tag{15.21}$$

Bildet man hieraus y' so ergibt sich mit der Produktregel:

$$y' = c'(x) \cdot e^{\int -f(x)dx} + c(x) \cdot e^{\int -f(x)dx} \cdot (-f(x)) = c'(x) \cdot e^{\int -f(x)dx} - f(x) \cdot y \tag{15.22}$$

und damit

$$y' + f(x) \cdot y = c'(x) \cdot e^{\int -f(x)dx} \tag{15.23}$$

Vergleichen wir dieses mit der ursprünglichen Aufgabenstellung 15.2.3 so muß für die Störfunktion gelten

$$g(x) = c'(x) \cdot e^{\int -f(x)dx} \tag{15.24}$$

Man erhält also eine neue DGL für $c(x)$

$$c'(x) = g(x) \cdot e^{\int f(x)dx} \tag{15.25}$$

Löst man diese DGL und erhält die Funktion $c(x)$ so kann man mit 15.21 die Lösung des ursprünglichen Systems berechnen.

Folgende Arbeitschritte sind also nötig um die DGL $y' + f(x) \cdot y = g(x)$ zu lösen:

1. Löse homogene DGL $y' + f(x) \cdot y = 0$. Ergebnis: $y = c \cdot e^{\int -f(x)dx}$ mit einer Konstanten c
2. Ersetze c durch $c(x)$, also die Konstante durch eine von x abhängige Funktion.
3. Berechne mit $y = c(x) \cdot e^{\int -f(x)dx}$ den Ausdruck y' und vergleiche diese Gleichung mit der ursprünglichen mit Störfunktion
4. Bestimme aus der Differentialgleichung für $c(x)$ die Lösung für c, welche eine neue Konstante enthält
5. Setze diese Lösung in $y = c(x) \cdot e^{\int -f(x)dx}$ ein.
6. Ist ein Anfangswert gegeben, so berechne hieraus die freie Konstante c_1 und berechne damit die spezielle Lösung.

Bsp.:

$$y' - \cos(x) \cdot y = x \cdot e^{\sin(x)} \quad \text{mit } y(0) = 3$$

1. Löse homogene DGL: $y' - \cos(x) \cdot y = 0$

$$\begin{aligned} y' &= \cos(x) \cdot y \\ \frac{y'}{y} &= \cos(x) \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int \cos(x) dx \\ ln(y) &= \sin(x) + c_1 \\ y &= c \cdot e^{\sin(x)} \end{aligned}$$

2.Ersetzen: Ansatz: $y = c(x) \cdot e^{\sin(x)}$
3. Berechne y' :

Damit:

$$\begin{aligned} y' &= c'(x) \cdot e^{\sin(x)} + c(x) \cdot e^{\sin(x)} \cdot \cos(x) \\ &= c'(x) \cdot e^{\sin(x)} + y \cdot \cos(x) \end{aligned}$$

bzw.

$$y' - y \cdot \cos(x) = c'(x) \cdot e^{\sin(x)}$$

Vergleich: Ursprünglich $y' - \cos(x) \cdot y{=}x \cdot e^{\sin(x)}$

4. Lösen der DGL für $c(x)$:
Es muß also gelten $c'(x) \cdot e^{\sin(x)} = x \cdot e^{\sin(x)}$

$$\begin{aligned} c'(x) &= x \\ c(x) &= \frac{1}{2}x^2 + c \end{aligned}$$

5. Einsetzen in $y = c(x) \cdot e^{\sin(x)}$

$$\left(\frac{1}{2}x^2 + c\right) \cdot e^{\sin(x)}$$

6. Berechnung von c *aus* $y(0) = 3$

$$\begin{aligned} y(0) &= c \cdot 1 = 3 \\ damit &: c = 3 \end{aligned}$$

Und damit ergibt sich als Lösung:

$$\left(\frac{1}{2}x^2 + 3\right) \cdot e^{\sin(x)}$$

Kontrolle: Lösen Sie die DGL zum gebremsten Wachstum

$$y' = \frac{dy}{dt} = ky - a \tag{15.26}$$

mit $y(0) = y_0$ durch Umstellung mit dem Verfahren "Variation der Konstanten".

15.2.4 Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Das Superpositionsprinzip

Wir betrachten nun die lineare DGL

$$y' + a \cdot y = g(x) \tag{15.27}$$

Diese DGL hat im Vergleich zum Verfahren der Variation der Konstanten einen Vorfaktor von y , der von x unabhängig, also konstant ist.

Die zu dieser DGL gehörende homogene DGl lautet $y' + a \cdot y = 0$. Wir bezeichnen nun die allgemeine Lösung der homogenen DGL mit y_h und irgend eine spezielle Lösung (partikuläre Lösung) von 15.27 mit y_p. Kombiniert man nun diese beiden Lösungen zu $y = y_h + y_p$, so gilt, daß y nun auch die ursprüngliche inhomogene DGL löst. Dies bedeutet, dass man zu einer Lösung der inhomogenen DGL stets eine beliebige Lösung der homogenen DGL hinzuaddieren darf und man erhält wiederum eine Lösung der inhomogenen DGL.

Denn: Wegen y_h Lösung der homogenen DGL gilt: $y_h' + a \cdot y_h = 0$ und da y_p Lösung der inhomogenen DGL ist, gilt: $y_p' + a \cdot y_p = g(x)$. Und damit:

$$\begin{aligned} y' + a \cdot y &= (y_h + y_p)' + a \cdot (y_h + y_p) \\ &= y_h' + y_p' + a \cdot y_h + a \cdot y_p = (y_h' + a \cdot y_h) + (y_p' + a \cdot y_p) \\ &= 0 + g(x) = g(x) \end{aligned}$$

Das Lösungsverfahren lautet damit:

Verfahren zur Lösung der inhomogenen linearen DGL mit konstanten Koeffizienten

1. Bestimme zunächst die **allgemeine Lösung** y_h **der homogenen DGL** $y' + a \cdot y = 0$ (y_h enthält dabei noch einen freien Parameter)
2. Bestimme **eine** Lösung $y_p$der **inhomogenen DGL** $y' + a \cdot y = g(x)$
3. Die **allgemeine Lösung der inhomogenen DGL** ergibt sich dann gemäß $y = y_h + y_p$
4. Ist das Problem als AWP gegeben, so wird der freie Parameter in y_h so bestimmt, daß y die DGL löst.

Verbleibt die Frage, wie man y_h und y_p bestimmen kann.

Zunächst betrachten wir wiederum die homogene DGL $y' + a \cdot y = 0$ und können deren Lösungsvielfalt durch Trennung der Variablen bestimmen. Diese Lösungsfunktion y_h ist dann:

$$y_h = c \cdot e^{-ax} \tag{15.28}$$

Wie findet man nun y_p? Hier verwendet man das Verfahren:

Ansatz vom Typ der rechten Seite

Idee: Man "rät" eine Lösung, in dem man einen Funktionenansatz für y vom Typ der Störfunktion $g(x)$ wählt.

Beispiel: AWP: $y' + 2y = 2x + 13$ mit $y(0) = 8$

Wir sehen auf der rechten Seite ein Polynom und versuchen den Ansatz: $y = bx + c$ und damit $y' = b$. Diese eingesetzt in die DGL ergibt:

$$\begin{aligned} b + 2(bx + c) &= 2x + 13 \\ 2bx + b + 2c &= 2x + 13 \end{aligned}$$

Nun vergleichen wir die Vorzahlen der Konstanten und des linearen Terms und erhalten die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} 2b &= 2 \\ b + 2c &= 13 \end{aligned}$$

und damit $b = 1$ und $c = 6$.

Damit haben wir eine Lösung (partikuläre Lösung) der inhomogenen DGL gefunden: $y_p = x + 6$. (Probe: $y' + 2y = 1 + 2x + 12 = 2x + 13$)

Berechnet man nun noch $y_h = c \cdot e^{-2x}$, so ergibt sich die allgemeine Lösung der DGL gemäß

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= c \cdot e^{-2x} + x + 6 \end{aligned}$$

Betrachtet man nun noch die Bedingung $y(0) = 8$, so ergibt diese

$$\begin{aligned} y(0) &= c + 6 \overset{!}{=} 8 \\ c &= 2 \end{aligned}$$

und man erhält die spezielle Lösung $\quad y = 2 \cdot e^{-2x} + x + 6.$

Besteht die rechte Seite aus einer Funktion anderer Art, so muß ein analoger Ansatz gemacht werden. Da man den Ansatz in Abhängigkeit von der Störfunktion ("rechte Seite") macht, nennt man diese Verfahren auch **Ansatz vom Typ der rechten Seite.**

Folgende Ansatzfuntkionen werden hierbei gemacht (homogene Lösung sei $y_h = c \cdot e^{-ax}$)

Störfunktionstyp	**Störfunktion** $g(x)$	**Ansatz für** y_p
Konstante	k_0	c_0
Linear	$k_0 + k_1 x$	$c_0 + c_1 x$
Polynom	$\sum_{i=0}^{n} k_i x^i$	$\sum_{i=0}^{n} c_i x^i$
Exponentiell	$k \cdot e^{bx}; b \neq -a$	$c_0 \cdot e^{bx}$
	$k \cdot e^{-ax}$	$c_0 \cdot x e^{-ax}$
Trigonometrisch	$k \cdot sin(bx) + l \cdot cos(bx);$	$c_0 \cdot sin(bx) + c_1 \cdot cos(bx)$

Dabei wird dann jeweils die Ansatzfunktion in die DGL eingesetzt und über Koeffizientenvergleich mit der rechten Seite, also der Störfunktion, die Parameter c_i bestimmt. Beachte: in der Ansatzfunktion sind nur die c_i zu bestimmen, die b erhalten wir aus der Störfunktion.

Bsp.: $y' + y = 2 \cdot \sin(3x)$
1. Allgemeine Lösung der homogenen DGL $y' + y = 0 : \quad y_h = c \cdot e^{-x}$

2. Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL $y' + y = 2 \cdot \sin(3x)$:

Ansatz: $y_p = c_0 \cdot sin(3x) + c_1 \cdot cos(3x) \Longrightarrow y_p' = 3c_0 \cdot \cos(3x) - 3c_1 \cdot \sin(3x)$

Damit ist $y_p' + y_p = 3c_0 \cdot \cos(3x) - 3c_1 \cdot \sin(3x) + c_0 \cdot sin(3x) + c_1 \cdot cos(3x)$
$=(c_0 - 3c_1) \cdot sin(3x) + (c_1 + 3c_0) \cdot cos(3x) \stackrel{!}{=} 2 \cdot \sin(3x)$

Koeffizientenvergleich von $\sin(3x)$ *und* $\cos(3x)$ *liefert nun zwei Gleichungen:*

$$\begin{aligned} c_0 - 3c_1 &= 2 \\ c_1 + 3c_0 &= 0 \end{aligned}$$

mit der Lösung (nachrechnen)

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{5} \\ c_1 &= -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

also $y_p = \frac{1}{5} \cdot sin(3x) - \frac{3}{5} \cdot cos(3x)$

3. Summe der Lösungen liefert: $y = y_h + y_p = c \cdot e^{-x} + \frac{1}{5} \cdot sin(3x) - \frac{3}{5} \cdot cos(3x)$

Bsp. 2 : $y' + 3y = e^{-2x}$
1.Allgemeine Lösung der homogenen DGL $y' + 3y = 0$: $\quad y_h = c \cdot e^{-3x}$
2. Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL $y' + 3y = e^{-2x}$:

Ansatz: $y_p = Ae^{-2x} \Longrightarrow y_p' = -2Ae^{-2x}$

Damit ist $y_p' + 3y_p = -2Ae^{-2x} + 3Ae^{-2x} = Ae^{-2x} \stackrel{!}{=} e^{-2x}$

Koeffizientenvergleich liefert nun:

$$A = 1$$

also $y_p = e^{-2x}$

3. Summe der Lösungen liefert: $y = y_h + y_p = c \cdot e^{-3x} + e^{-2x}$

Bsp. 3 : $y' + 3y = e^{-3x}$
1.Allgemeine Lösung der homogenen DGL $y' + 3y = 0$ *:* $\quad y_h = c \cdot e^{-3x}$
2. Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL $y' + 3y = e^{-3x}$ *:*

Ansatz: $y_p = Axe^{-3x} \Longrightarrow y_p' = -3Axe^{-3x} + Ae^{-3x}$

Damit ist $y_p' + 3y_p = -3Axe^{-3x} + Ae^{-3x} + 3Axe^{-3x} = Ae^{-3x} \stackrel{!}{=} e^{-3x}$

Koeffizientenvergleich liefert nun:

$$A = 1$$

also $y_p = xe^{-3x}$

3. Summe der Lösungen liefert: $y = y_h + y_p = c \cdot e^{-3x} + xe^{-3x}$

Bsp.: Lösen Sie die DGL zum gebremsten Wachstum

$$y' = \frac{dy}{dt} = ky - a \tag{15.29}$$

mit $y(0) = y_0$ mit dem Verfahren "Lineare DGL mit konst. Koeffizienten".

15.2.5 Die Bernoulli-Differentialgleichung

Wir betrachten nun die DGL

$$y' + f(x) \cdot y = g(x) \cdot y^\alpha$$

mit $\alpha \neq 1$. Diese lässt sich nicht mit dem Verfahren Variation der Konstanten lösen, da die rechte Seite noch den Term in y enthält. Hier hilft folgende Substitution

$$z = y^{1-\alpha} = \frac{y}{y^\alpha}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} y &= z^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ y' &= \frac{1}{1-\alpha} z^{\frac{1}{1-\alpha}-1} \cdot z' \\ &= \frac{1}{1-\alpha} z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot z' \end{aligned}$$

Eingesetzt in die DGL

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\alpha} z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot z' + f(x) \cdot z^{\frac{1}{1-\alpha}} &= g(x) \cdot z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\
z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot z' + (1-\alpha) \cdot f(x) \cdot z^{\frac{1}{1-\alpha}} &= (1-\alpha) \cdot g(x) \cdot z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\
z' + (1-\alpha) \cdot f(x) \cdot \frac{z^{\frac{1}{1-\alpha}}}{z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} &= g(x) \cdot (1-\alpha) \\
z' + (1-\alpha) \cdot f(x) \cdot z &= g(x) \cdot (1-\alpha)
\end{aligned}$$

und wir erhalten eine lineare DGL zur Lösung mit einem der obigen Verfahren. Schliesslich liefert

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

die gesuchte Lösung.

Beispiel:

$$y' - \frac{4}{x} y = x y^3$$

hat $\alpha = 3$. Die Substitution lautet demnach

$$\begin{aligned}
z &= y^{1-3} = y^{-2} \\
y &= z^{-\frac{1}{2}} \\
y' &= -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} \cdot z'
\end{aligned}$$

und die DGL

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} \cdot z' - \frac{4}{x} z^{-\frac{1}{2}} &= x z^{-\frac{3}{2}} \\
z^{-\frac{3}{2}} \cdot z' + \frac{8}{x} z^{-\frac{1}{2}} &= -2 x z^{-\frac{3}{2}} \\
z' + \frac{8}{x} z &= -2x
\end{aligned}$$

Diese lineare DGL kann nun gelöst werden und man erhält

$$z = c \cdot \frac{1}{x^8} - \frac{1}{5} x^2$$

und anhand dieser Lösung findet nun die Rücksustitution statt

$$\begin{aligned}
y &= z^{-\frac{1}{2}} \\
&= \left(c \cdot \frac{1}{x^8} - \frac{1}{5} x^2 \right)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

15.2.6 Zusammenfassung der Lösungsverfahren für DGL 1. Ordnung

$y' = f(x) \cdot g(y)$	Trennung der Variablen	$y' = \frac{dy}{dx}$ ersetzen
$y' = f(ax + by + c)$	Substitution	$z = ax + by + c$
$y' = f(\frac{y}{x})$	Substitution	$z = \frac{y}{x}$
$y' + f(x) \cdot y = g(x)$	Variation der Konstanten	
$y' + a \cdot y = g(x)$	Summe $y_h + y_p$	
$y' + a \cdot y = g(x)y^\alpha$	Substitution	
$y' + f(x) \cdot y = g(x)y^\alpha$	Substitution (Bernoulli)	

Konstante Koeffizienten mit weiteren rechten Seiten

Das Verfahren soll nun an einem Beispiel erläutert werden:

$$y' - y = (x + 1)e^x$$

Zunächst kann auch hier die allgemeine Lösung der homogenen DGL wie üblich ermittelt werden. Es ist

$$y_h = c \cdot e^x$$

Der naheliegende Ansatz wäre nun auch

$$y_p = (ax + b)e^x$$

jedoch sehen wir auch hier, dass der Exponent der homogenen Lösung mit der inhomogenen übereinstimmt und wir müssen den Ansatz wieder modifizieren zu

$$\begin{aligned} y_p &= x(ax + b)e^x \\ &= \left(ax^2 + bx\right) e^x \end{aligned}$$

Die Ableitung wird nun formal ausgerechnet zu

$$\begin{aligned} y_p' &= (2ax + b)e^x + \left(ax^2 + bx\right) e^x \\ &= e^x \left(ax^2 + (2a + b)x + b\right) \end{aligned}$$

Setzen wir die beiden Terme in die DGL ein und vergleichen die Koeffizienten in e^x, so erhalten wir

$$\begin{aligned} y_p' - y &= e^x \left(ax^2 + (2a + b)x + b\right) - \left(ax^2 + bx\right) e^x \\ &= (2ax + b)\, e^x \\ &= (x + 1)e^x \end{aligned}$$

welches ergibt

$$\begin{aligned} 2a &= 1 \\ a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

und

$$b = 1$$

also

$$y_p = \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) e^x$$

und damit erhalten wir die Lösung

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= c \cdot e^x + \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) e^x \end{aligned}$$

Als weiteres Beispiel soll nun das Superpositionsprinzip zur Konstruktion von kopmplexeren rechten Seiten erläutert werden. Hierzu sei zunächst bemerkt, dass mit zwei partikulären Lösung $y_p^{(1)}$ und $y_p^{(2)}$ zweier inhomogener DGL'en

$$\begin{aligned} y' + ay &= g^{(1)}(x) \\ y' + ay &= g^{(2)}(x) \end{aligned}$$

auch die Summe dieser beiden Lösungen $y_p^{(1)} + y_p^{(2)}$ Lösung von

$$y' + ay = g^{(1)}(x) + g^{(2)}(x)$$

(Einsetzen). Dieses kann nun analog auf beliebig viele Funktionen erweitert werden.

Bsp.: Wir suchen die allgemeine Lösung der Funktion

$$y' - 2y = 4(1 + x^2 + e^x) + 5\sin(3x)$$

mit bereits bekannten partikulären Teillösungen

$$\begin{aligned} y' - 2y &= 1 + x^2 \\ y_p &= -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' - 2y &= e^x \\ y_p &= -e^x \end{aligned}$$

Damit ist zunächt (nachrechnen)

$$y_p = 4(-\frac{3}{4} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - e^x)$$

auch Lösung von

$$y' - 2y = 4(1 + x^2 + e^x)$$

Auch die homogene Lösung ist leicht zu ermitteln.

$$y_h = ce^{2x}$$

und für die Gesamtlösung brauchen wir nun nur noch eine partikuläre Lösung von

$$y' - 2y = 5\sin(3x)$$

über den Ansatz

$$y_p = A\sin(3x) + B\cos(3x)$$

mit

$$y_p' = 3A\cos(3x) - 3B\sin(3x)$$

Eingesetzt in die DGL ergibt dies

$$\begin{aligned}
y_p' - 2y_p &= 3A\cos(3x) - 3B\sin(3x) - 2\left(A\sin(3x) + B\cos(3x)\right) \\
&= \cos(3x)\cdot(3A - 2B) + \sin(3x)\cdot(-3B - 2A) \\
&= 5\sin(3x)
\end{aligned}$$

Dies liefert

$$\begin{aligned}
3A - 2B &= 0 \\
A &= \frac{2}{3}B \\
\\
-3B - 2A &= 5 \\
-3B - \frac{4}{3}B &= 5 \\
-\frac{13}{3}B &= 5 \\
B &= -\frac{15}{13} \\
A &= -\frac{10}{13}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$y_p = -\frac{10}{13}\sin(3x) - \frac{15}{13}\cos(3x)$$

und die Gesamtlösung

$$y = ce^{2x} + 4(-\frac{3}{4} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - e^x) - \frac{10}{13}\sin(3x) - \frac{15}{13}\cos(3x)$$

15.2.7 Weitere linear inhomogene DGL'en mit nicht-konstanten Koeffizienten

Häufig wird auch das Verfahren Variation der Konstanten über das Superpositionsprinzip angewandt. Dabei wird in der Integration der Funktion $c(x)$ die Integrationskonstante als partikuläre Lösung weggelassen.

Auch für linear inhomogene DGL'en mit nicht-konstanten Koeffizienten gilt das Superpositionsprinzip, da für eine partikuläre Lösung y_p gilt

$$y_p' + f(x)y_p = g(x)$$

und für die allgemeine Lösung y_h der homogenen DGL

$$y_h' + f(x)y_h = 0$$

und somit für die Summe der beiden Lösungen $y = y_h + y_p$

$$\begin{aligned} y' + f(x)y &= (y_h + y_p)' + f(x)(y_h + y_p) \\ &= y_h' + y_p' + f(x)y_h + f(x)y_p \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Somit kann auch bei dieser Art DGL die Lösung zerlegt werden in eine allgemeine Lösung der homogenen DGL (Zu bestimmen wie im ersten Teil beim Verfahren Variation der Konstanten) und eine partikuläre Lösung (Zu bestimmen gemäß Ansatz vom Typ der rechten Seite). Dieser Ansatz kann nun auch für Funktionen, die nicht in die obigen Klassen fallen, verwendet werden.

Auch hier zur Erläuterung des Verfahrens ein Beispiel. Gesucht sei die allgemeine Lösung von

$$y' = -\frac{y}{x} + 1$$

Die homogene DGL ist

$$y' = -\frac{y}{x}$$

mit der Lösung (Trennung der Variablen)

$$y_h = \frac{c}{x}$$

Nun setzen wir an

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{c(x)}{x} \\ y_p' &= \frac{c'(x)x - c(x)}{x^2} \\ &= \frac{c'(x)}{x} - \frac{1}{x}y \end{aligned}$$

und erhalten

$$y_p' = -\frac{y}{x} + \frac{c'(x)}{x}$$

Hier können wir nun wieder mit dem inhomogenen Anteil vergleichen und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{c'(x)}{x} &= 1 \\ c'(x) &= x \end{aligned}$$

Wir suchen nun nur eine partikuläre Lösung und wählen dazu

$$c(x) = \frac{x^2}{2}$$

und damit

$$y_p = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{2}$$

Wir erhalten insgesamt

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= \frac{c}{x} + \frac{x}{2} \end{aligned}$$

15.2.8 Potenzreihenansätze

Helfen obige Lösungverfahren nicht, so kann die Funktion ggf. über ihre Potenzreihe hergeleitet werden. Als Entwicklungspunkt wird dabei der Startwert x_0 verwendet oder Null bei der Suche nach einer allgemeinen Lösung. Der Einfachheit halber verwenden wir nun zunächst $x_0 = 0$.

Fangen wir mit einem Beispiel an. Wir suchen die Lösung des AWP

$$\begin{aligned} y' &= y \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

Die Funktion wird nun über ihre Potenzreihe ermittelt, d.h. wir suchen

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Zunächst erhalten wir aus dem Startwert

$$1 = y(0) = a_0$$

Wir differenzieren die Funktion und erhalten

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n \cdot x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) \cdot x^n \end{aligned}$$

Bilden wir die DGL so gilt damit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) \cdot x^n$$

also

$$a_n = a_{n+1}(n+1)$$

Division liefert

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)}$$

und fortgesetztes Einsetzen

$$a_{n+1} = \frac{a_0}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

oder mit dem Index n

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

Dies liefert die Lösung

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x$$

Bem.: In der Regel kann keine geschlossene Darstellung der Funktion angegeben werden, sondern nur eine Berechnungsvorschrift für die a_n.

Bsp:

$$\begin{aligned} y' &= 2y + 1 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

Der Ansatz liefert wieder zunächst $a_0 = 1$ und die DGL in der Potenzreihenform

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) \cdot x^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 1$$

und wir vergleichen die Koeffizienten:

$$\begin{aligned} n &= 0 : a_1 = 2a_0 + 1 = 3 \\ n &= 1 : a_2 \cdot 2 = 2a_1 = 6 \\ a_2 &= 3 \\ n &= 2 : a_3 = \frac{2a_2}{3} = 2 \\ &\dots \\ a_n &= \frac{2}{n} a_{n-1} \text{ für } n > 2 \end{aligned}$$

Damit könnte die Funktion angegeben werden oder auch approximiert werden:

$$y = 1 + 3x + 3x^2 + 2x^3$$

Um die Potenzreihe entwickeln zu können, müssen alle Funktionen, also auch Koeffizienten und Störfunktionen in Potenzreihen dargestellt werden. Brauchbar ist diese Methode von daher vor allem bei Polynomen in x und y, da diese bereits ihre Potenzreihen sind.

Hierzu ein abschliessendes Beispiel. Wir suchen die Lösung in Form der ersten drei Summanden der Potenzreihe von der DGL

$$\begin{aligned} y' - 2y &= e^x \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

und damit $a_0 = 1$. In Potenzreihendarstellung ist dies

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) \cdot x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{n+1}(n+1) - 2a_n\right) \cdot x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \end{aligned}$$

und wir erhalten durch Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} n &= 0 : a_1 - 2 = 1 \to a_1 = 3 \\ n &= 1 : 2a_2 - 2 \cdot 3 = 1 \to a_2 = \frac{7}{2} \\ n &= 2 : 3a_3 - 2 \cdot \frac{7}{2} = \frac{1}{2} \to a_3 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

und wir erhalten die Lösung

$$y = 1 + 3x + \frac{7}{2}x^2 + \frac{5}{2}x^3$$

15.2.9 Exakte Differentialgleichungen

Wir betrachten nun wie beim impliziten Differenzieren die Funktion als Höhenlinie zu $F(x, y(x)) = 0$ und das Differential

$$\begin{aligned} F_x dx + F_y dy &= 0 \\ p(x,y)dx + q(x,y)dy &= 0 \end{aligned}$$

bzw. nach Division durch dx

$$\begin{aligned} F_x + F_y \cdot y' &= 0 \\ p(x,y) + q(x,y)y' &= 0 \end{aligned}$$

Falls dies ein Differential ist, muss gelten (s.o.)

$$p_y = q_x$$

Daher definieren wir

Definition 304 *Eine DGL der Form*

$$p(x,y) + q(x,y)y' = 0$$

mit

$$p_y = q_x$$

*heisst **exakte DGL.** Die Bedingung $p_y = q_x$ heisst Integrabilitätsbedingung.*

Finden wir nun das Potential, also die mehrdimensionale Stammfunktion, so haben wir eine implizite Darstellung aller Lösungsfunktionen gefunden. Können wir diese noch nach y auflösen, erhalten wir sogar eine explizite Darstellung der Lösungen.

Bsp.: Wir betrachten die DGL

$$\begin{aligned} (12xy+3)\,dx + 6x^2dy &= 0 \\ (12xy+3) + 6x^2y' &= 0 \\ y' &= -\frac{12xy+3}{6x^2} \end{aligned}$$

Überprüfen wir zunächst die Integrabilitätsbedingung:

$$\begin{aligned} P_y &= 12x \\ Q_x &= 12x \end{aligned}$$

Damit ist die DGL exakt und es existiert eine Stammfunktion. Diese berechnen wir (s.o.)

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int 12xy + 3dx + c(y) \\ &= 6x^2y + 3x + c(y) \end{aligned}$$

Differentiation nach y liefert

$$\begin{aligned} 6x^2 + c'(y) &= 6x^2 \\ c'(y) &= 0 \\ c(y) &= c \end{aligned}$$

und damit

$$F(x,y) = 6x^2y + 3x + \tilde{c} = 0$$

Damit wird die DGL gelöst von

$$6x^2y + 3x = c$$

In diesem Fall lässt sich die DGL auflösen und wir erhalten die Lösung

$$y = \frac{c - 3x}{6x^2}$$

Bem.: Gegebenenfalls kann eine DGL zu einer exakten erweitert werden. Als Beispiel betrachte man die DGL/das Differential

$$\left(4x + 3y^2\right) dx + 2xydy = 0$$

bzw

$$y' = -\frac{4x + 3y^2}{2xy}$$

Diese DGL ist nicht exakt, da $\frac{\partial}{\partial y} 4x + 3y^2 = 6y$ und $\frac{\partial}{\partial x} 2xy = 2y$.

Erweitern wir jedoch den Bruch mit x^2 so erhalten wir

$$y' = -\frac{4x^3 + 3x^2y^2}{2x^3y}$$

und diese erfüllt

$$\frac{\partial}{\partial y} 4x^3 + 3x^2y^2 = 6x^2y$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x} 2x^3y = 6x^2y$$

Damit wird die DGL exakt und somit lösbar und wir erhalten

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int 4x^3 + 3x^2y^2 dx + c(y) \\ &= x^4 + x^3y^2 + c(y) \end{aligned}$$

Differenzieren nach y liefert

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x^3y = 2x^3y + c'(y)$$

welches liefert

$$\begin{aligned} c'(y) &= 0 \\ c(y) &= const = c \end{aligned}$$

Und wir erhalten die allgemeine Lösung

$$F(x,y) = x^4 + x^3y^2 + c = 0$$

bzw explizit

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{x^4+c}{x^3} = x + \frac{c}{x^3} \\ y &= \pm\sqrt{x + \frac{c}{x^3}} \end{aligned}$$

Verbleibt die Frage, wann so ein Faktor zur Erweiterung des Bruches existiert und wann nicht.

Wir betrachten hierzu das Differential

$$p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0$$

und suchen einen Term $m(x,y)$ - den integrierenden Faktor oder Euler-Multiplikator - um den wir das Differential erweitern zu

$$m(x,y) \cdot p(x,y)dx + m(x,y) \cdot q(x,y)dy = 0$$

Damit die DGL exakt wird, muss gelten

$$\frac{\partial}{\partial y} m(x,y) \cdot p(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} m(x,y) \cdot q(x,y)$$

Dies führt mit Hilfe der Produktregel zu

$$m_y \cdot p + m \cdot p_y = m_x \cdot q + m \cdot q_x$$

Dieses ist nun wiederum eine DGL in $m(x,y)$ und lässt sich mit Hilfe der Theorie der partiellen DGL's lösen. Hier betrachten wir den einfachen Fall, dass ein Faktor bereits existiert, der nur von einer der beiden Unbekannten abhängt. Im Fall $m(x,y) = m(x)$ gilt dann

$$\begin{aligned} m(x) \cdot p_y &= m_x \cdot q + m(x) \cdot q_x \\ m_x &= \frac{1}{q} \cdot m(x) \cdot (p_y - q_x) \end{aligned}$$

Ist die rechte Seite nun eine Funktion, die ebenfalls nur von x, also

$$\frac{1}{q} \cdot (p_y - q_x) = f(x)$$

abhängt, so kann $m(x)$ durch die Lösung der auftretenden gewöhnlichen DGL in $m(x)$ bestimmt werden.

Analog, wenn die Funktion $m(x,y)$ nur von y abhängt, ist $m_x = 0$ und es ist

$$m_y \cdot p + m \cdot p_y = m \cdot q_x$$

bzw.

$$\begin{aligned} m_y \cdot p &= m \cdot q_x - m \cdot p_y \\ m_y &= \frac{1}{p} m(y) \left(q_x - p_y\right) \end{aligned}$$

und in diesem Fall ist die Funktion zu integrieren, falls

$$\frac{1}{p} \left(q_x - p_y\right) = g(y)$$

eine Funktion in y ist.

Zur Vorgehensweise gehen wir daher gerade umgekehrt vor:
Ist

$$\frac{1}{q} \cdot \left(p_y - q_x\right)$$

eine Funktion nur in x, so suchen wir den Euler-Multiplikator als Funktion ausschliesslich in x und lösen durch Integration die DGL

$$m_x = \frac{1}{q} \cdot m(x) \cdot \left(p_y - q_x\right)$$

Da wir nur eine Lösung dieser DGL benötigen, kann die Konstante vernachlässigt werden. Ist

$$\frac{1}{p} \left(q_x - p_y\right)$$

eine Funktion in y so erhalten wir die DGL

$$m_y = \frac{1}{p} m(y) \left(q_x - p_y\right)$$

und erhalten hieraus den Multiplikator. Die DGL wird mit diesem exakt und liefert eine implizite Lösung der Funktion $y(x)$.

Bsp.:
Wir betrachten das obige Differential bzw die DGL

$$4x + 3y^2 dx + 2xydy = 0$$

bzw

$$y' = -\frac{4x + 3y^2}{2xy}$$

von der wir bereits gesehen hatten, dass diese nicht exakt ist und der Euler-Multiplikator wurde oben angegeben. Nun wollen wir diesen berechnen:

Es ist

$$\begin{aligned} p(x,y) &= 4x + 3y^2 \\ q(x,y) &= 2xy \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} p_y &= 6y \\ q_x &= 2y \end{aligned}$$

Zunächst ist zu entscheiden, in welcher Unbekannten der Euler-Multiplikator gewählt werden soll. Es ist

$$\frac{1}{q} \cdot (p_y - q_x) = \frac{4y}{2xy} = \frac{2}{x}$$

eine Funktion in x.Bem.: Es wäre

$$\frac{1}{p}\,(q_x - p_y) = \frac{-4y}{4x + 3y^2}$$

keine Funktion in y und somit unbrauchbar.

Nun wollen wir den Euler-Mulitlikator berechnen. Hierzu stellen wir die DGL auf

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{1}{q} \cdot m(x) \cdot (p_y - q_x) \\ &= \frac{2}{x} m(x) \end{aligned}$$

und lösen mit Trennung der Variablen

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{m} dm &= \int \frac{2}{x} dx \\ \ln(m) &= 2\ln(x) + \tilde{c} \\ m(x) &= cx^2 \end{aligned}$$

Wir wählen $c = 1$ und erhalten

$$m(x) = x^2$$

und das Differential

$$x^2 \left(4x + 3y^2\right) dx + x^2 \,(2xy)\, dy = 0$$

als exakte DGL mit oben berechneter Lösung.
Bsp.:2

$$xy^2 + y - xy' = 0$$

bzw

$$\begin{aligned} y' &= \frac{xy^2 + y}{x} \\ &= y^2 + \frac{y}{x} \end{aligned}$$

Als Differential ist dies

$$\left(xy^2 + y\right) dx + (-x)dy = 0$$

Also

$$\begin{aligned} p(x, y) &= xy^2 + y \\ q(x, y) &= -x \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} p_y &= 2xy + 1 \\ q_x &= -1 \end{aligned}$$

ist die DGL nicht exakt.
Wir bilden

$$\frac{1}{q} \cdot (p_y - q_x) = \frac{2xy + 2}{-x}$$

(funktioniert nicht) und

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \cdot (q_x - p_y) &= \frac{-2 - 2xy}{y + xy^2} \\ &= \frac{-2(1 + xy)}{y \cdot (xy + 1)} = \frac{-2}{y} \end{aligned}$$

Damit lautet die DGL

$$m_y = \frac{-2}{y} m(y)$$

und eine spezielle Lösung lautet

$$m(y) = \frac{1}{y^2}$$

Dieser Euler Multiplikator wird nun in das Differential multipliziert

$$\left(x + \frac{1}{y}\right) dx + \frac{-x}{y^2} dy = 0$$

Nun wird die DGL exakt, da

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x + \frac{1}{y}\right) = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{-x}{y^2}$$

Die Lösung erhalten wir wie gehabt

$$\int x + \frac{1}{y} dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{y} + c(y)$$

Ableiten nach y liefert

$$-\frac{x}{y^2} + c'(y) = \frac{-x}{y^2}$$

Also

$$\begin{aligned} c'(y) &= 0 \\ c(y) &= \tilde{c} \end{aligned}$$

und wir erhalten als implizite Lösung

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{y} + \tilde{c} = F(x, y) = 0$$

Also

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{y} &= c \\ \frac{x}{y} &= c - \frac{1}{2}x^2 \\ \frac{y}{x} &= \frac{1}{c - \frac{1}{2}x^2} \\ y &= \frac{x}{c - \frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

15.3 Numerische Lösung einer expliziten DGL 1. Ordnung

Leider können mit den Verfahren im Kapitel 19.1 noch längst nicht alle Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme der Form

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

gelöst werden.

Hier erlangen nun wiederum numerische Verfahren Bedeutung. Hierbei wird nun nicht die Funktion geschlossen (exakt) berechnet, sondern nur näherungsweise an vorgegebenen Stützstellen. Aus der Kenntnis des Wertes y_0 kann nun von dort die Funktion entwickelt werden.

Zur Interpretation sei nocheinmal auf das Beispiel 15.2.1 verwiesen. Bekannt ist zunächst $y(x_0) = y_0$. Somit kann der Startwert festgelegt werden.Weiterhin kennt man nun die Steigung der Funktion in diesem Punkt durch Einsetzen des bekannten Punktes (x_0, y_0): $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$.

Andererseits gilt näherungsweise mit $x_1 = x_0 + h$ gemäß Differenzenquotient

$$\frac{y(x_0 + h) - y(x_0)}{h} \approx y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} y(x_1) &= y(x_0 + h) = y(x_0) + h \cdot y'(x_0) \\ &= y(x_0) + h \cdot f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Nun lässt sich wiederum durch x_1 und $y(x_1)$ die Ableitung der gesuchten Funktion aus $y'(x_1) = f(x_1, y_1)$ berechnen und hieraus

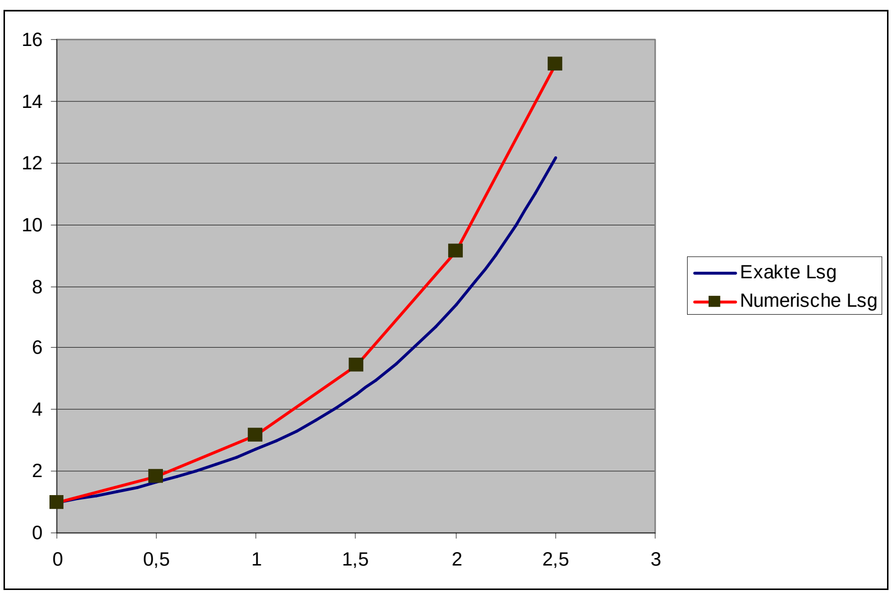
$$y(x_2) = y(x_1 + h) = y(x_1) + h \cdot y'(x_1)$$

usw.

Grafisch ergibt sich der Wert $y(x_1)$ in dem man die Gerade durch x_0 mit der Steigung $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ bildet und deren Wert an x_1 ermittelt.

Dieses Verfahren heißt : **Streckenzugverfahren von Euler**

Grafisch:



Der Algorithmus lautet somit:

1. Gegeben:

$$y' = f(x,y) \tag{15.30}$$
$$y(x_0) = y_0 \tag{15.31}$$

und die Schrittweite h

2. Berechne für $i = 0, 1, ...$

a) $f(x_i, y_i)$
b) $y(x_{i+1}) = y(x_i) + h \cdot f(x_i, y_i)$ mit $x_{i+1} = x_i + h$

Rechenschema:

i	$\mathbf{x}_i$	$\mathbf{y}(\mathbf{x}_i)$	$\mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$	
0	x_0	y_0	$f(x_0, y_0)$	
1	$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$	$f(x_1, y_1)$	
$\vdots$				

Beispiel:

$y' = 2 \cdot y \cdot x, \qquad x_0 = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad$ *(Exakt:* $y = e^{x^2}$*)*

Berechne $y(1)$ *näherungsweise mit* $h = 0,2$

i	x_i	$y(x_i)$	$f(x_i, y_i) = 2 \cdot y_i \cdot x_i$	
0	0	1	0	
1	$0,2$	$y_1 = 1 + 0,2 \cdot 0 = 1$	$2 \cdot 1 \cdot 0,2 = 0,4$	
2	$0,4$	$1 + 0,2 \cdot 0,4 = 1,08$	$2 \cdot 1,08 \cdot 0,4 = 0,8$	
3	$0,6$	$1,08 + 0,2 \cdot 0,8 = 1,25$	$2 \cdot 1,25 \cdot 0,6 = 1,5$	
4	$0,8$	$1,25 + 0,2 \cdot 1,5 = 1,55$	$2 \cdot 1,55 \cdot 0,8 = 2,5$	
5	1	$1,55 + 0,2 \cdot 2,5 = 2,05$	*(nicht benötigt)*	$Exakt: 2,71$

Bem.: Die Lösung ist offensichtlich noch recht ungenau. Eine verbesserte Lösung lässt sich erreichen, wenn die Schrittweite h verkleinert wird. In diesem Fall steigt jedoch auch der Rechenaufwand. Weitere Verfahren (Heun, Runge-Kutta) machen zur Verbesserung der Konvergenzordnung einen Prädiktor-Korrektor Ansatz, d.h. aus einer Vorrausschätzung der Ableitung werden die Werte der Ableitung "frühzeitig" korrigiert. (Papula).

15.4 Lineare DGL'en 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten

Wir betrachten nun die lineare DGL, bei der außer den Termen in y' auch die zweite Ableitung beachtet wird, also:

$$y'' + ay' + by = g(x) \tag{15.32}$$

Es gilt auch hier, daß sich die allgemeine Lösung zusammensetzt aus der allgemeinen Lösung der homogenen DGL y_h und einer partikulären Lösung y_p. Schließlich kann die Lösung der DGL gemäß $y = y_h + y_p$ bestimmt werden.

Zunächst betrachten wir wiederum die Lösung des homogenen Problems

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{15.33}$$

Als Ansatz bietet sich auch hier an:

$$y = e^{\alpha x} \tag{15.34}$$

und damit

$$y' = \alpha e^{\alpha x} \tag{15.35}$$
$$y'' = \alpha^2 e^{\alpha x} \tag{15.36}$$

Wir setzen dies in die homogene DGL und erhalten

$$\alpha^2 e^{\alpha x} + \alpha a e^{\alpha x} + b e^{\alpha x} = 0 \tag{15.37}$$

bzw nach Division durch $e^{\alpha x}$

$$\alpha^2 + \alpha a + b = 0 \tag{15.38}$$

Definition 305 *Die Gleichung $\alpha^2+\alpha a+b = 0$ heißt die zur DGL $y''+ay'+by = 0$ gehörende **charakteristische Gleichung.** Berechnet man Lösungen α_1 und α_2 der charakteristischen Gleichung, so sind damit $y_1 = e^{\alpha_1 x}$ und $y_2 = e^{\alpha_2 x}$ Lösungen der homogenen DGL.*

Finden wir zwei Lösungen, so kann dann die Lösungsgesamtheit mit Hilfe des folgenden Satzes berechnet werden.

Satz 306 *Mit zwei Lösungen y_1 und y_2 sind auch alle Kombinationen $y_h = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \lambda_i \in \mathbb{C}$ Lösung der homgenen DGL.*

Beweis: Es ist y_1''+a$y_1' + by_1 = 0$ und y_2''+a$y_2' + c_2y_2 = 0$ und damit

$$\begin{aligned} y_h'' + ay_h' + by_h &= (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)'' + a \cdot (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)' + b(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \\ &= \lambda_1 y_1'' + \lambda_2 y_2'' + a \cdot \lambda_1 y_1' + a \cdot \lambda_2 y_2' + +b\lambda_1 y_1 + b\lambda_2 y_2 \\ &= \lambda_1 (y_1'' + ay_1' + by_1) + \lambda_2 (y_2'' + ay_2' + c_2 y_2) = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Bem.: Zu beachten ist, dass $\lambda_i \in \mathbb{C}$ gewählt werden darf. Dies wird im Weiteren noch verwendet.

Wir wollen nun die Lösungen der charakteristischen Gleichung berechnen

$$\alpha^2 + \alpha a + b = 0$$

liefert

$$\alpha_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \tag{15.39}$$

und mit der Diskriminante $D = \dfrac{a^2}{4} - b$ liefert nun Aufschluß über die Lösungen der homgenen DGL

1. $D > 0$

α_1 und α_2 sind zwei verschiedene reelle Lösungen der charakteristischen Gleichung und man erhält die allgemeine y_h Lösung der homogenen DGL aus

$$\begin{aligned} y_h &= \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ & \boxed{y_h = \lambda_1 e^{\alpha_1 x} + \lambda_2 e^{\alpha_2 x}} \end{aligned} \tag{15.40}$$

wobei λ_1 und λ_2 freie reelle Parameter sind.

2. $D = 0$

Die charakteristische Gleichung hat nur eine Nullstelle $\alpha = -\dfrac{a}{2}$ und somit existiert nur eine Lösung $y_1 = e^{\alpha x}$.

In diesem Fall ist jedoch auch $y_2 = x \cdot e^{\alpha x}$ Lösung, denn

mit $y_2' = e^{\alpha x} + \alpha \cdot x \cdot e^{\alpha x}$ und $y_2'' = \alpha \cdot e^{\alpha x} + \alpha \cdot (e^{\alpha x} + \alpha \cdot x \cdot e^{\alpha x}) = 2\alpha e^{\alpha x} + \alpha^2 \cdot x \cdot e^{\alpha x}$ ergibt sich durch Einsetzen in die DGL mit $a = -2\alpha$ und wegen $D = 0$ ist auch $b = \dfrac{a^2}{4} = \alpha^2$:

$$\begin{aligned} & 2\alpha e^{\alpha x} + \alpha^2 \cdot x \cdot e^{\alpha x} - 2\alpha \cdot (e^{\alpha x} + \alpha \cdot x \cdot e^{\alpha x}) + \alpha^2 \cdot x \cdot e^{\alpha x} \\ = \; & e^{\alpha x} \cdot (2\alpha + \alpha^2 \cdot x - 2\alpha - 2\alpha^2 \cdot x + \alpha^2 \cdot x) = 0 \end{aligned}$$

Also ist auch $y_2 = x \cdot e^{\alpha x}$ eine Lösung der DGL und wir fassen wieder die Lösungen zusammen:

$$\begin{aligned} y_h &= \lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 && (15.41)\\ &= \lambda_1 \cdot e^{\alpha x} + \lambda_2 \cdot x \cdot e^{\alpha x} && (15.42)\\ &= (\lambda_1 + \lambda_2 \cdot x) \cdot e^{\alpha x} && (15.43) \end{aligned}$$

3. $D < 0$

In diesem Fall ist mit $v = \sqrt{-D} = \mathrm{Im}(\alpha)$ und $w = -\frac{a}{2} = \mathrm{Re}(\alpha)$ die Lösung der charakteristischen Gleichung

$$\alpha_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm i \cdot v = w \pm i \cdot v$$

und damit die erste Lösung

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{(w+i\cdot v)\cdot x}\\ &= e^{w\cdot x} \cdot e^{i\cdot vx}\\ &= e^{wx} \cdot (\cos(vx) + i \cdot \sin(vx)) \end{aligned}$$

Die zweite Lösung ist

$$\begin{aligned} y_2 &= e^{(w-i\cdot v)\cdot x}\\ &= e^{wx} \cdot e^{i\cdot(-vx)}\\ &= e^{wx} \cdot (\cos((-v)\cdot x) + i \cdot \sin((-v)\cdot x))\\ &= e^{wx} \cdot (\cos(vx) - i \cdot \sin(vx)) \end{aligned}$$

Bildet man nun alle Kombinationen für $\mu_i \in \mathbb{C}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} y &= \mu_1 \cdot y_1 + \mu_2 \cdot y_2\\ &= e^{wx} \cdot (\mu_1 \cdot (\cos(vx) + i \cdot \sin(vx)) + \mu_2 \cdot (\cos(vx) - i \cdot \sin(vx))\\ &= e^{wx} \cdot ((\mu_1 + \mu_2) \cdot \cos(vx) + (\mu_1 - \mu_2) \cdot i \cdot \sin(vx)) \end{aligned}$$

Um reelle Funktionen zu erhalten, wählen wir nun die μ_i so dass

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 &\in \mathbb{R}\\ (\mu_1 - \mu_2) \cdot i &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Daher müssen wir die μ_i konjugiert komplex wählen, also für beliebige reelle $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ergibt sich mit:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{\lambda_1 - \lambda_2 i}{2}\\ \mu_2 &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2 i}{2} \end{aligned}$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 &= \lambda_1 \\ (\mu_1 - \mu_2) \cdot i &= -\lambda_2 i^2 = \lambda_2 \end{aligned}$$

und damit die reellen Funktionen

$$\boxed{y_h = e^{wx} \cdot (\lambda_1 \cos(vx) + \lambda_2 \sin(vx))}$$

Beachte: $\lambda_1$und λ_2 sind stets beliebige frei wählbare Parameter, während sich w=-$\frac{a}{2}$ (Realteil der Nullstelle) und v (Imaginärteil der Nullstelle) aus der DGL bzw. deren charakteristischen Gleichung berechnen lassen.

Die Lösung ist dabei eine schwingende Funktion, deren Amplitude von $w = -\frac{a}{2}$ abhängt. Für positives a ist dies eine abklingende - also der Null sich nähernde - Amplitude. Für negative a wird der Ausschlag anwachsen.

Beispiele:

1. $y'' + 2y' + y = 0$

a) Charakteristische Gleichung: $\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$

b) Lösungen: $\alpha_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-1}$

c) $D = 0$ *(Fall 2):* y_h=(λ_1+$\lambda_2 x$)e^{-x}

2. $y'' - 4y' + 3y = 0$

a) Charakteristische Gleichung: $\alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0$

b) Lösungen: $\alpha_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 \Rightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 3$

c) $D > 0$ *(Fall 1):* y_h=$\lambda_1 e^x$+$\lambda_2 e^{3x}$

3. $y'' + 4y'$ $+40 = 0$

a) Charakteristische Gleichung: $\alpha^2 + 4\alpha + 40 = 0$
b) Lösungen: $\alpha_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-40} = 2 \pm \sqrt{-36}$

c) $D < 0$ *(Fall 3)* w=$-\dfrac{a}{2} = -2$,v= $\sqrt{-D} = \sqrt{36} = 6$: $y_h = e^{-2x} \cdot (\lambda_1 \cos(6x) + \lambda_2 \sin(6x))$

Wir haben also nun bestimmt, wie man die allgemeine Lösung der homogenen DGL berechnen kann. Diese Lösung enthält stets zwei freie Parameter und ist damit die vollständige Lösungsmenge. Ist ein homogenes AWP Problem gegeben (Bei inhomogenen darf hier der Parameter nicht bestimmt werden), so sind die Bedingungen in die Lösung einzusetzen und somit die Parameter zu eliminieren.

Beispiel (Nr 2 von oben): $y'' - 4y' + 3y = 0$ *mit* $y(0) = 1, y'(0) = -1$

Allgemeine Lösung: y_h=$\lambda_1 e^x$+$\lambda_2 e^{3x}$
Damit: y_h'=$\lambda_1 e^x$+$3\lambda_2 e^{3x}$

Anfangsbedingungen:

$$y(0) = 1 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \tag{15.44}$$
$$y'(0) = -1 \Rightarrow \lambda_1 + 3\lambda_2 = -1 \tag{15.45}$$

liefern somit ein lineraes Gleichungssystem von 2 Gleichungen und 2 Unbekannten. Hier Lösung: $\lambda_1 = 2; \lambda_2 = -1$
und damit die spezielle Lösung y_h=$2e^x$-e^{3x}

Verbleibt nun die Frage wie man eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems finden kann.Hier gilt das Superpositionsprinzip derart, dass falls y_h allgemeine Lösung der homogenen DGL ist und y_p eine Lösung der inhomogenen DGL, die Summe

$$y = y_h + y_p$$

Lösung der inhomogenen DGL ist (Einsetzen). Auch für eine zusammengesetzte rechte Seite

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x)$$

kann analog das Problem darauf reduziert werden, zunächst eine partikuläre Lösung y_1 zur rechten Seite $g_1(x)$ und dann eine partikuläre Lösung y_2 zur rechten Seite $g_2(x)$ zu finden. Dann liefert

$$y_p = y_1 + y_2$$

eine partikuläre Lösung für das ursprüngliche System.

Um nun die inhomogene DGL $y'' + ay' + by = g(x)$ mit einer Störfunktion auf der rechten Seite zu lösen, machen wir wieder einen Ansatz vom Typ der Störfunktion bzw. der rechten Seite:

Störfunktion $g(x)$	**Ansatz für** y_p
$\sum_{i=0}^{n} k_i x^i$	$\sum_{i=0}^{n} A_i x^i$
$k \cdot e^{cx}$	Fall 1: c ist keine Nullstelle der char. Gleichung $A \cdot e^{cx}$ Fall 2: c ist einfache Nullstelle der char. Gleichung $A \cdot x \cdot e^{cx}$ Fall 3: c ist doppelte Nullstelle der char. Gleichung $A \cdot x^2 \cdot e^{cx}$
$k_1 \cdot \sin(cx) + k_2 \cdot \cos(cx)$	$c_1 \cdot \sin(cx) + c_2 \cdot \cos(cx)$ (Vorsicht bei komplexen Nullstellen)

Weitere Ansatzfunktionen sind je nach Anwendungsfall zu verwenden.
Bem.: Im Falle einer konstanten rechten Seite, also

$$y'' - ay' + by = k$$

gewinnt man eine partikuläre Lösung wegen $y = A, y' = y'' = 0$ durch

$$\begin{aligned} bA &= k \\ A &= \frac{k}{b} \end{aligned}$$

Beispiel:
1. $y'' + 2y' + y = x^3 + 6x^2 + 6x + 1$

Ansatz: $y_p = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$
Damit: $y_p' = 3c_3x^2 + 2c_2x + c_1$
und: $y_p'' = 6c_3x + 2c_2$

Eingesetzt in die DGL: $6c_3x+2c_2+2\cdot(3c_3x^2+2c_2x+c_1)+c_3x^3+c_2x^2+c_1x+c_0$
$= c_3x^3 + x^2 \cdot (c_2 + 6c_3) + x \cdot (c_1 + 4c_2 + 6c_3) + (c_0 + 2c_1 + 2c_2) \overset{!}{=} x^3+6x^2+6x+1$

liefert per Koeffizientenvergleich:

x^3 : $c_3 = 1$

x^2 : $c_2 + 6c_3 = c_2 + 6 \stackrel{!}{=} 6 \Rightarrow c_2 = 0$

x : $c_1 + 4c_2 + 6c_3 = c_1 + 6 \stackrel{!}{=} 6 \Rightarrow c_1 = 0$

1 : $c_0 + 2c_1 + 2c_2 = c_0 \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow c_0 = 1$

und damit die partikuläre Lösung $y_p = x^3 + 1$

Nachdem wir nun eine partikuläre Lösung und die allgemeine Lösung des homogenen Problems bestimmt haben, kann die Lösung angegeben werden:

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{-x} + x^3 + 1 \end{aligned}$$

Sind nun Anfangsbedingungen gegeben, so sind anhand derer die Konstanten λ_1 und λ_2 zu bestimmen.

Bem.: Bei einer zusammengesetzten rechten Seite kann wieder das Superpositionsprinzip angewandt werden, um auch die rechten Seiten zusammenzusetzen. Also:

Satz 307 *Sei* $y_p^{(1)}$ *Lösung von* $y'' + ay' + by = g_1(x)$ *und* $y_p^{(2)}$ *Lösung von* $y'' + ay' + by = g_2(x)$*, so ist*

$$y_p = y_p^{(1)} + y_p^{(2)}$$

Lösung von

$$y'' + ay' + by = g_1(x) + g_2(x)$$

Bew.: Einsetzen.

15.4.1 Lineare Differentialgleichungssysteme

Wir betrachten das allgemeine homogene lineare DGL-System 1. Ordnung

$$\begin{aligned} y' &= a \cdot y + b \cdot z \\ z' &= d \cdot y + c \cdot z \end{aligned}$$

Zur Lösung eliminieren wir zunächst in der ersten Gleichung z

$$\begin{aligned} bz &= y' - ay \\ z &= \frac{y' - ay}{b} \end{aligned}$$

Nun kann die erste Gleichung differenziert werden und mit Hilfe der Größe von z und der zweiten DGL ist nun:

$$\begin{aligned} y'' - ay' &= bz' \\ &= bcz + bdy \\ &= c(y' - ay) + bdy \\ y'' - (a+c)y' + (ac - bd)y &= 0 \end{aligned}$$

Insbesondere ist nun

$$y_p = 0$$

Für die allgemeine Lösung der homogenen DGL ist die char. Gleichung

$$\alpha^2 - (a+c)\alpha + (ac - bd) = 0$$

Hieraus kann nun wie oben je nach Art der Nullstellen die Lösung berechnet werden.

Alternativ lässt sich das System beschreiben als eine lineare Abbildung

$$\begin{pmatrix} y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Berechnen wir nun für die Matrix die Eigenwerte, so ist:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ d & c - \lambda \end{pmatrix} &= (a - \lambda)(c - \lambda) - bd \\ &= \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - bd \end{aligned}$$

welches der char. Gleichung der DGL 2. Ordnung vorhin entspricht. Die Eigenwerte der Matrix sind also die Exponenten in der allgemeinen Lösung der homogenen DGL.

Falls nötig kann auch aus einer DGL 2. Ordnung ein System erzeugt werden:

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= c \\ y(0) &= y_0 \\ y'(0) &= y_1 \end{aligned}$$

Wir definieren eine neueFunktion

$$z = y'$$

damit ist

$$z' = y''$$

so ist

$$\begin{aligned} y'' &= c - ay' - by \\ &\rightarrow z' = c - az - by \end{aligned}$$

Die zweite DGL ist dann einfach

$$y' = z$$

also lautet das System

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= -az - by + c \end{aligned}$$

Wegen

$$y(0) = y_0$$

ist ein Startwert gegeben. Der andere ist

$$y'(0) = z(0) = y_1$$

Fortsetzung des Räuber-Beute-Modells

Die Lösung des Systems

$$\begin{aligned} y'(t) &= b - m \cdot z(t) \\ z'(t) &= v \cdot (y(t) - g) \\ & \quad y_0, z_0 \text{ bekannt} \end{aligned} \tag{15.46}$$

wird durch Differentiation der ersten Gleichung und Einsetzen der zweiten erreicht:

$$y'' = -m \cdot z' = -m \cdot v \cdot (y - g)$$

Dies ist äquivalent zu

$$y'' + mv \cdot y = mvg$$

Dies ist eine DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.
Eine partikuläre Lösung ist

$$y_p = g \tag{15.47}$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Systems erfordert das charakteristische Polynom. Der lineare Term in y' fehlt und daher ist dies

$$\alpha^2 + mv = 0$$

und damit

$$\alpha_{1,2} = 0 \pm \sqrt{-mv} \tag{15.48}$$

Da die Konstanten sämtlich positiv sind, ist die Diskriminante negativ und die Lösung ergibt sich zu

$$\begin{aligned} y_h &= e^{0\cdot t} \cdot (\lambda_1 \cdot \cos(\sqrt{mv} \cdot t) + \lambda_2 \cdot \sin(\sqrt{mv} \cdot t) \\ &= \lambda_1 \cdot \cos(\sqrt{mv} \cdot t) + \lambda_2 \cdot \sin(\sqrt{mv} \cdot t) \end{aligned}$$

Die Lösungsgesamtheit ist

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= \lambda_1 \cdot \cos(\sqrt{mv} \cdot t) + \lambda_2 \cdot \sin(\sqrt{mv} \cdot t) + g \end{aligned}$$

Dies ist eine Schwingung um den Gleichgewichtswert g. Nun müssen noch die Parameter λ_1 und λ_2 aus den Anfangsbedingungen berechnet werden.

Zunächst zu λ_1 : Mit $y(0) = y_0$ ist

$$\begin{aligned} y_0 &= \lambda_1 + g \\ \lambda_1 &= y_0 - g \end{aligned}$$

Weiterhin lässt sich nun die Entwicklung der Räuber ermitteln. Aus 15.46 ergibt sich

$$z(t) = \frac{b - y'}{m} \tag{15.49}$$

nun mit $y' = -(y_0 - g) \cdot \sqrt{mv} \cdot \sin(\sqrt{mv} \cdot t) + \lambda_2 \cdot \sqrt{mv} \cdot \cos(\sqrt{mv} \cdot t)$

$$z(t) = \frac{1}{m} \cdot (b + (y_0 - g) \cdot \sqrt{mv} \cdot \sin(\sqrt{mv} \cdot t) - \lambda_2 \cdot \sqrt{mv} \cdot \cos(\sqrt{mv} \cdot t)) \tag{15.50}$$

Der letzte fehlende Wert λ_2 kann schliesslich aus der Anfangsbedingung $z(0) = z_0$ ermittelt werden:

$$z(0) = z_0 = \frac{b - \lambda_2 \cdot \sqrt{mv}}{m} \tag{15.51}$$

und damit

$$\lambda_2 = \frac{b - z_0 \cdot m}{\sqrt{mv}} \tag{15.52}$$

Die allgemeine Lösung ist damit

$$\boxed{y(t) = (y_0 - g) \cdot \cos(\sqrt{mv} \cdot t) + \frac{b - z_0 \cdot m}{\sqrt{mv}} \cdot \sin(\sqrt{mv} \cdot t) + g}$$

$$\boxed{z(t) = \frac{1}{m} \cdot ((y_0 - g) \cdot \sin(\sqrt{mv} \cdot t) - (b - z_0 \cdot m) \cdot \cos(\sqrt{mv} \cdot t)) + \frac{b}{m}}$$

Insbesondere haben die Schwankungen die gleiche Periode. Diese wiederum hängt nur von m und v ab. Je größer Fressrate und Vermehrungsfaktor sind, desto schneller oszilliert die Funktion.

Eine weitere Verfeinerung des Modells ist die folgende: Während wir derzeit annehmen, dass pro Zeiteinheit eine feste Anzahl Beutetiergeburten b hinzukommen, erscheint es realistischer wenn wir die Geburten abhängig von der Anzahl existierender Beutetiere abhängig machen. Wenn die Geburtenrate pro Zeiteinheit und Tier den Wert k hat, ist somit die Gesamtzahl Geburten $k \cdot y(t)$ und wir erhalten aus 15.46

$$\begin{aligned} y'(t) &= k \cdot y(t) - m \cdot z(t) \\ z'(t) &= v \cdot (y(t) - g) \\ & \quad y_0, z_0 \text{ bekannt} \end{aligned} \tag{15.53}$$

Dies führt dann zu

$$\begin{aligned} y'' &= ky' - mz' \\ &= ky' - m(v \cdot (y(t) - g)) \\ y'' - k \cdot y' + mvy &= mvg \end{aligned}$$

Ebenfalls eine DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und partikulärer Lösung

$$y_p = g$$

Das charakteristische Polynom lautet in diesem Fall

$$\begin{aligned} \alpha^2 - k \cdot \alpha + mv &= 0 \\ \alpha_{1,2} &= \frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} - mv} \end{aligned}$$

Die Diskriminante $\frac{k^2}{4} - mv$ entscheidet nun über die Lösungsfunktion. Dabei entspricht $\frac{k^2}{4} - mv > 0$ gerade $k^2 > 4mv$

Fall 1: $k^2 > 4mv$ (die Geburtenrate ist groß gegenüber dem Nahrungsbedarf und der Jägerzunahme)

Dann ist:

$$y_h(t) = \lambda_1 \cdot e^{\alpha_1 t} + \lambda_2 \cdot e^{\alpha_2 t}$$

bzw die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$y(t) = y_h + y_p = \lambda_1 \cdot e^{\alpha_1 t} + \lambda_2 \cdot e^{\alpha_2 t} + g$$

und

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{ky - y'}{m} \\ &= \frac{k \cdot (\lambda_1 \cdot e^{\alpha_1 t} + \lambda_2 \cdot e^{\alpha_2 t} + g) - (\lambda_1 \cdot \alpha_1 \cdot e^{\alpha_1 t} + \lambda_2 \cdot \alpha_2 \cdot e^{\alpha_2 t})}{m} \end{aligned}$$

Die Parameter können wiederum aus den Anfangsbedingungen $y(0) = y_0$

$$y_0 = \lambda_1 + \lambda_2 + g$$

und $z(0) = z_0$

$$z_0 = \frac{k \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + g) - (\lambda_1 \cdot \alpha_1 + \lambda_2 \cdot \alpha_2)}{m}$$

berechnet werden. Hier ist dies ein lineares Gleichungssystem in den beiden Unbekannten λ_1 und λ_2.

Die Lösung ist dabei eine exponentiell steigende oder exponentiell fallende Funktion (je nach Startwerten).
Fall 2: $k^2 = 4mv$
Dann ist:

$$y(t) = (\lambda_1 + \lambda_2 t) \cdot e^{k/2 \cdot t}$$

und wir erhalten ebenfalls exponentielles Wachstum.

Schliesslich im Fall $k^2 < 4mv$

Dann ist:

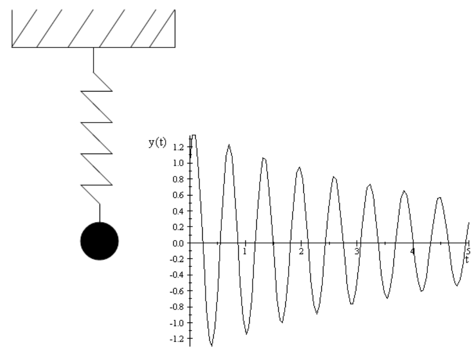
$$y(t) = e^{k/2 \cdot t}(\lambda_1 \cdot \cos(\sqrt{-\frac{k^2}{4} + mv} \cdot t) + \lambda_2 \cdot \sin(\sqrt{-\frac{k^2}{4} + mv} \cdot t)) + g \quad (15.54)$$

die Lösung. Im Gegensatz zum vorigen Modell ist der Realteil der Nullstelle ungleich Null und damit erhält die Sinus-Schwingung einen Vorfaktor, welcher diese Funktion zu einer oszillierenden Funktion mit wachsender Amplitude macht und dies würde somit zwangsläufig zum Aussterben beider Rassen führen. (Daher achtet Mutter Natur stets auf $k^2 \geq 4mv$).

15.5 (*) Anwendung: Die harmonische Schwingung

Eine sehr gute Online-Version der Herleitung mit Visualisierung finden Sie unter http://www.matheprisma.uni-wuppertal.de/Module/Schwingu

Wir betrachten nun die Schwingung eines Federpendels und tragen die vertikale Auslenkung über die Zeit auf.



Es sei also

t...Zeit
$y(t)$...Auslenkung des Pendels zum Zeitpunkt t (gesucht)
$y'(t)$... Geschwindigkeit des Pendels
$y''(t)$.... Beschleunigung des Pendels

Dabei ist der Weg $y(t)$ als Unterschied zur Ruhelage der Feder ohne Masse zu sehen.

Um nun die Gleichungen zu ermitteln, bilden wir die Kräftebilanz:

1. Trägheitskraft: Da der Massenpunkt in Bewegung ist, hat er eine Trägheitskraft nach $m \cdot a$, wobei a seine derzeitige Beschleunigung, also $y''(t)$, ist.
2. Gewichtskraft (nach unten): $m \cdot g$
3. Rückstellkraft der Feder (nach oben): Abhängig von der Auslenkung $y(t)$ und der Federkonstante c: $c \cdot y(t)$
4. Reibungsverluste: Abhängig von der Geschwindigkeit (Entgegen der Geschwindigkeit) $y'(t)$ und der Reibungskonstante $r : r \cdot y'(t)$

Wir bilanzieren:

$$\begin{aligned} m \cdot y''(t) + r \cdot y'(t) + c \cdot y(t) &= m \cdot g \\ y''(t) + \frac{r}{m} \cdot y'(t) + \frac{c}{m} \cdot y(t) &= g \qquad (15.55) \end{aligned}$$

und erhalten als eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Zunächst berechnen wir die partikuläre Lösung y_p: Mit dem Ansatz $y(t) = d = konst$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{c}{m} \cdot d &= g \\ y_p &= d = \frac{m \cdot g}{c} \end{aligned}$$

Damit verbleibt die Lösung der homogenen DGL

$$y''(t) + \frac{r}{m} \cdot y'(t) + \frac{c}{m} \cdot y(t) = 0 \tag{15.56}$$

Die in der Literatur verwendeten Konstanten sollen nun auch hier verwendet werden: Wir bezeichnen nun die massenabhängige Federkraft mit

$$w^2 = \frac{c}{m} \tag{15.57}$$

und die massenabhängige Reibung (Konstante für den Versuch) mit

$$k = \frac{r}{m} \tag{15.58}$$

und erhalten die Standardform für die harmonische Schwingung

$$y''(t) + k \cdot y'(t) + w^2 \cdot y(t) = 0 \tag{15.59}$$

Die Lösung dieser DGL wird mit den oben genannten Verfahren gelöst:

1. Charakteristische Gleichung

$$\alpha^2 + k\alpha + w^2 = 0 \tag{15.60}$$

Lösung:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{k^2}{4} - w^2}_{D}} \tag{15.61}$$

2. Fallunterscheidung

a) D>0, d.h. $\frac{k^2}{4} - w^2 > 0$ bzw. $\frac{k}{2} > w$: Es existieren zwei reelle Lösungen $\alpha_{1,2} = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{D}$

Bem: Da alle konstanten positiv sind, ist der Wert unter der Wurzel kleiner als $\frac{k^2}{4}$und damit sind beide Lösungen α_1 und α_2 negativ.
Allgem. Lösung: $y_h(t) = \lambda_1 \mathrm{e}^{\alpha_1 t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{\alpha_2 t}$

b) D=0, d.h. $\frac{k^2}{4} - w^2 = 0$ bzw. $\frac{k}{2} = w$: Es existiert eine reelle Lösung $\alpha_1 = -\frac{k}{2}$

Allgem. Lösung: $y_h(t) = (\lambda_1 + \lambda_2 t) \cdot \mathrm{e}^{\alpha_1 t}$

c) D<0, d.h. $\frac{k^2}{4} - w^2 < 0$ bzw. $\frac{k}{2} < w$: Es existieren keine reellen Lösungen: Mit b= $\sqrt{-D}$

Allgem. Lösung: $y_h(t) = e^{-\frac{k}{2}t} \cdot (\lambda_1 \cos(\mathrm{b}t) + \lambda_2 \sin(\mathrm{b}t))$

Die Konstanten λ_1 und λ_2 werden wiederum aus den Anfangsbedingungen bestimmt.

Bem.: Für die inhomogenene DGL muss nun noch y_p addiert werden, also

a) $y(t) = \lambda_1 \mathrm{e}^{\alpha_1 t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{\alpha_2 t} + \frac{mg}{c}$

b) $y(t) = (\lambda_1 + \lambda_2 t) \cdot \mathrm{e}^{\alpha_1 t} + \frac{mg}{c}$

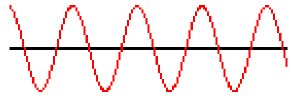
c) $y(t) = e^{-\frac{k}{2}t} \cdot (\lambda_1 \cos(\mathrm{b}t) + \lambda_2 \sin(\mathrm{b}t)) + \frac{mg}{c}$

In allen Fällen mit $k > 0$ gilt $\lim_{t \to \infty} y(t) = \frac{mg}{c}$, also ist die partikuläre Lösung der Ruhezustand.

Spezialfälle/Verlaufsskizzen:

1. Reibungsfreie Schwingung ($k = r = 0$) Damit ist $D = -w^2 < 0$ und wir erhalten als Lösung:

$$y(t) = \lambda_1 \cos(wt) + \lambda_2 \sin(wt) \tag{15.62}$$

also eine ungedämpfte Sinusschwingung, z.B. 

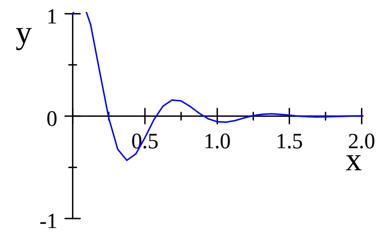
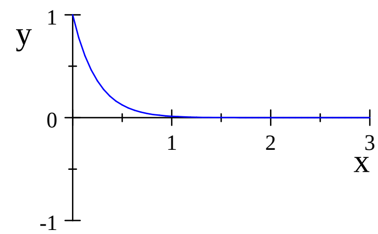
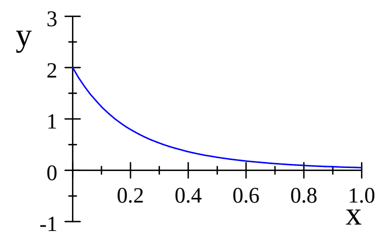
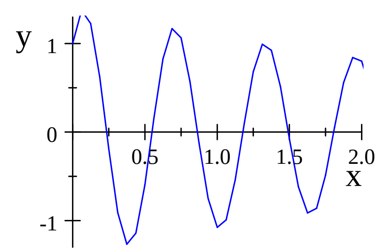
2. Hohe Reibung (zB in viskoser Flüssigkeit). Für $\frac{k}{2} > w$ ist die Lösung $y(t) = \lambda_1 \mathrm{e}^{\alpha_1 t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{\alpha_2 t}$ und damit "schwingungsfrei" (keine trigonometrischen Terme). Der Massenpunkt bewegt sich also zu seiner Ruhelage.

Der Verlauf ist damit annähernd exponentiell 

3. Kleine Reibung (z.B. Luft): Hier ist die allgem. Lösung $y(t) = e^{-\frac{k}{2}t} \cdot$

$(\lambda_1 \cos(wt) + \lambda_2 \sin(wt))$, also eine Schwingung dessen Amplitude durch die monoton fallende Funktion $e^{-\frac{k}{2}t}$ begrenzt wird.

4. Weitere Verlaufsskizzen: Aus den Anfangswerten seien bestimmt $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

k	**w**	**D**	**Funktion**	**Graph**
6	10	-91	$e^{-3t} \cdot (\cos(\sqrt{91}t) + \sin(\sqrt{91}t))$	
10	5	0	$(1+t)e^{-5t}$	
10	3	16	$e^{-7t} + e^{-3t}$	
$0,5$	100	-10000	$e^{-0,25t} \cdot (\cos(10t) + \sin(10t))$	

15.6 Wachstumsprozesse mit Hilfe der Differentialgleichungen

Diese mehrseitige Herleitung des kontinuierlichen Modells kann durch die Einführung von Differentialgleichungen erheblich verkürzt werden:

Ausgehend von $y(0) = y_0$ der Evolutionsgleichung

$$\triangle y = k \cdot y(t) \cdot \triangle t$$

wird die Gleichung

$$\frac{\triangle y}{\triangle t} = k \cdot y(t)$$

und der Grenzübergang $\triangle t \to 0$ gebildet

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle t} = k \cdot y(t)$$

Diese Gleichung wird nun durch Trennung der Variablen gelöst

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{y(t)} dy &= \int k dt \\
\ln(y(t)) &= kt + c_0 \\
y(t) &= e^{kt+c_0} = e^{kt} \cdot e^{c_0}
\end{aligned}$$

Aus $y(0) = y_0$ ergibt sich

$$y_0 = e^{c_0}$$

und damit die gleiche Lösung

$$\boxed{y(t) = y_0 \cdot e^{kt}}$$

Enstprechend kann die Störung erster Ordnung, beschrieben durch

$$y'(t) = k \cdot y(t) - a$$

als linear inhomogene DGL gelöst werden:

$$y'(t) - k \cdot y(t) = -a$$

liefert die homogene Lösung

$$y_h = c \cdot e^{kt}$$

und die partikuläre Lösung

$$y_p = \frac{a}{k}$$

und damit die Gesamtlösung

$$\begin{aligned}
y &= y_h + y_p \\
&= c \cdot e^{kt} + \frac{a}{k}
\end{aligned}$$

Einsetzen des Anfagswertes ergibt

$$y(0) = c + \frac{a}{k} = y_0$$

liefert die Konstante

$$c = y_0 - \frac{a}{k}$$

und damit wiederum die Lösungsfunktion

$$\boxed{y(t) = \left(y_0 - \frac{a}{k}\right) \cdot e^{kt} + \frac{a}{k}}$$

15.6.1 Differentialgleichungen für Störungen zweiter Ordnung

Zu lösen ist die Gleichung des **logistischen Wachstums (Störung zweiter Ordnung)**

$$\boxed{y' = k \cdot y \cdot (R - y)} \tag{15.63}$$

Mit

$$z = \frac{y}{R - y} = -1 + \frac{R}{R - y}$$

ist

$$z' = \frac{R}{(R - y)^2} \cdot y' \tag{15.64}$$

und damit

$$\begin{aligned} z' &= \frac{R}{(R - y)^2} \cdot k \cdot y \cdot (R - y) \\ &= \frac{R}{R - y} \cdot k \cdot y \\ &= R \cdot k \cdot z \end{aligned}$$

Lösen durch Trennung der Variablen ergibt wie oben

$$z = z_0 \cdot e^{R \cdot k \cdot t}$$

$z_0 = \dfrac{y_0}{R - y_0}$ ergibt

$$z = \frac{y_0}{R - y_0} \cdot e^{R \cdot k \cdot t}$$

Aus $z = -1 + \dfrac{R}{R - y}$ ergibt sich die Rücksubstitution $y = \dfrac{R}{\frac{1}{z} + 1}$ und damit

$$\boxed{y(t) = \frac{R}{\frac{R - y_0}{y_0} \cdot e^{-R \cdot k \cdot t} + 1}}$$

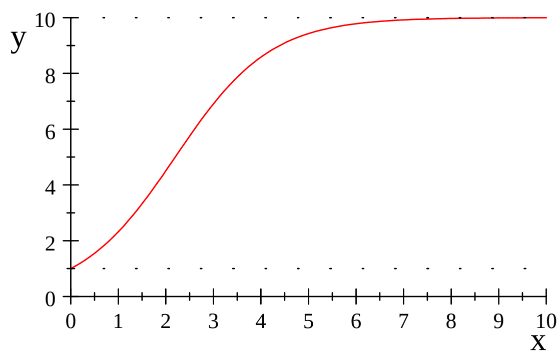
Es ist zum Zeitpunkt $t = 0$

$$y(t) = \frac{R}{\frac{R - y_0}{y_0} + 1} = \frac{R}{\frac{R}{y_0}} = y_0$$

und für t$\rightarrow \infty$

$$y = \frac{R}{\frac{R - y_0}{y_0} \cdot 0 + 1} = R$$

Zur Anschauung: Funktionsverläufe für $R = 10, y_0 = 1, k = 0,1$, also $y = \frac{10}{9 \cdot e^{-t} + 1}$. Untere Schranke ist dann der Startwert y_0, obere Schranke R.



Teil IV

Übungen Analysis 2

Kapitel 16

Funktionen mehrerer Veränderlicher

16.1 Metrische Räume

A8.1.1: Zeigen Sie:

$$d(\vec{x},\vec{y}) = \max_{k=1\ldots n} |x_k - y_k|$$

ist eine Metrik.

16.2 Normen im $\mathbb{R}^n$

A8.2.1: Zeigen Sie: Für $x = \vec{x} = (x_1, ..., x_n)^T$ ist

$$\|\vec{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

eine Norm. Hinweis: Verwenden Sie zum Beweis der Dreiecksungleichung die Schwarz'sche Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

A8.2.2: Wir betrachten die Punkte des $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Normen für jeden Punkt. Verwenden Sie dabei die Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$.

Finden Sie jeweils den Punkt mit dem kleinsten und grössten Abstand zum Ursprung in dieser Norm.

A8.2.3: Wieso ist

$$\|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_2 \leq \|\vec{x}\|_1$$

?

Wir haben einen Vektor im $\mathbb{R}^7$ mit $\|\vec{x}\|_2 = 2$. Welche Näherung können Sie für $\|\vec{x}\|_\infty$ und $\|\vec{x}\|_1$ angeben?

A8.2.4(*): Zeigen Sie mit Hilfe der Schwarz-Ungleichung die von Ihnen gewünschte Normenäquivalenz

$$\|\vec{x}\|_1 \leq \sqrt{n} \cdot \|\vec{x}\|_2$$

16.3 Folgen im $\mathbb{R}^n$

A8.3.1: Wir betrachten die Folge

$$\vec{x}_n = \begin{pmatrix} 2 - \frac{2}{\sqrt{n}} \\ 1 + (-1)^n \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Wie lautet der Grenzwert $\vec{x}$ dieser Folge? Berechnen Sie zu $\varepsilon = 0,1$ das $n_0(\varepsilon)$, so dass gilt

$$\|\vec{x}_n - \vec{x}\| < \varepsilon$$

Verwenden Sie als Norm a) die Maximumnorm, b) die Summennorm c) die euklidische Norm

16.4 Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$

A8.4.1: Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x, y, z) = x \cdot \ln(z) \cdot e^{xyz} + 1$$

A8.4.2: Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x, y) = \left\{ \begin{array}{r} \frac{\sqrt{4x^6 + 5y^2}}{x^3} \text{ für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 \text{ für } (0, 0) \end{array} \right\}$$

auf Stetigkeit im Ursprung.

a) Verwenden Sie dabei die Methode über Folgen in kartesischen Koordinaten.

b) Verwenden Sie die Methode der Polarkoordinaten.

A8.4.3:
a) Eine Funktion habe in einer Richtung $\vec{v}$ eine Steigung von D_v. Wie groß wird die Steigung in Richtung $-\vec{v}$?
b) Wie gross wird die Steigung der Funktion

$$f(x,y) = x \cdot \ln(y) \cdot e^{xy} + 1$$

im Punkt

$$(x_0, y_0) = (1,1)$$

in Richtung des Vektors

$$\vec{v} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

? Welches ist die größtmögliche Steigung unter allen Suchrichtungen?

A8.4.4: Eine Funktion habe in Richtung des Vektors

$$\vec{v} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

eine Steigung von $D_v = 20$ und in Richtung des Vektors

$$\vec{w} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

eine Steigung $D_w = 15\sqrt{2}$.Wie lautet der Gradient dieser Funktion? Welches ist die größtmögliche Steigung, die die Funktion in diesem unbekannten Punkt annehmen kann ? Welchen Winkel hatte der Vektor $\vec{v}$ zum Gradienten?

A8.4.5: Bestimmen Sie die Tangentialebene der Funktion

$$f(x,y) = x \cdot \ln(y) \cdot e^{xy} + 1$$

im Punkt

$$(x_0, y_0) = (1,1)$$

in vektorieller und analytischer Form.

16.5 Das vollständige Differential

A8.5.1: Wie lautet das vollständige Differential der Funktion

$$f(x,y) = x \cdot \ln(y) \cdot e^{xy} + 1$$

im Punkt

$$(x_0, y_0) = (1,1)$$

? Wenn wir nun den x-Wert maximal um 0,2 verändern, den y-Wert maximal um 0,1 - Wie ändert sich dann maximal der Wert der Tangentialebene (als Näherung für die maximale Änderung der Funktion)? In welchem Bereich wird sich somit der Funktionswert unter Annahme dieser Ungenauigkeit bewegen?

16.6 Partielle Ableitungen höherer Ordnung

A8.6.1: Wir betrachten die Strömungsgeschwindigksvektoren an den Raumkoordinaten (x, y, z).

a) Sei zunächst ein Fluss mit dem Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Skizzieren Sie zweidimensional das Vektorfeld (Zeichnen Sie in (x, y) den Vektor ein)

Zeigen Sie: Ein solches Feld ist quellen- und wirbelfrei.

b) Wir betrachten ein Feld mit zunehmender Strömungsgeschwindigkeit parallel zur x-Achse für $x > 0$ gemäß

$$\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie: Dieses Feld hat Quellen, bleibt jedoch wirbelfrei.

A8.6.2: Wir wissen, dass

$$\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ f_2(unbekannt) \\ xyz \end{pmatrix}$$

ein quellen- und senkenfreies Strömungsfeld ist. Wie muss denn dann die 2. Komponente des Vektors lauten? Berechnen Sie anschliessend die Jacobi Matrix, Gradient und Rotation von $\vec{f}(x, y, z)$.

16.7 Die Taylorentwicklung für $f(x, y)$

A8.7.1: Berechnen Sie die Taylorreihenentwicklung von

$$f(x,y) = \sin(x)e^{y-1} + xy - \pi$$

in $(x_0, y_0) = (\pi, 1)$ bis zum quadratischen Term.

16.8 Relative Extremwerte ohne Nebenbedingungen

A8.8.1: Wir bewegen uns auf einem Kreis mit Radius $r = 2$ und dem Mittelpunkt $M = (x_0, y_0) = (3, 4)$.

Wie lautet somit der Weg $\vec{X}(t)$, wenn Sie sich entgegen den Uhrzeigersinn bewegen?

Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel: Wie lautet die Ableitung $\frac{df}{dt}$ für die Abstandsquadratfunktion $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. Welcher Punkt hat den kleinsten Abstand zum Ursprung ?

Bem.: Für diesen Punkt gilt: $x > 3, y > 4$ und $\frac{df}{dt} = 0$.

A8.8.2: Berechnen Sie zur Messreihe

x_i	-1	-$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
y_i	2	0	6	4

die Ausgleichsfunktion der Gestalt

$$g(x) = a + b \cdot \frac{1}{x}$$

A8.8.3: Berechnen Sie den Wert der Ableitung $y'(x)$

$$y'(1)$$

für die Punkte (x_0, y_0), die erfüllen

$$y - \frac{12x^2}{y} = 4$$

A8.8.4: Ermitteln Sie mit dem Verfahren der kleinsten Fehlerquadrate zu einer Messung $(x_k, y_k), k = 1, ..., n$ die optimale Ausgleichsparabel $y = a + bx + cx^2$ durch Minimierung der Summe des quadratischen Fehlers

$$F(a, b, c) = \sum_{k=1}^{n} (a + bx_k + cx_k^2 - y_k)^2$$

Bem.: Die zweiten Ableitungen brauchen Sie nicht zu berechnen.

A8.8.5: Welche Gerade $g(x) = a + bx$ approximiert die Funktion $h(x) = \frac{1}{x}$ im Intervall $[1; 2]$ bestmöglich?

16.9 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

A8.9.1: Lösen Sie die Aufgabe als Extremwertaufgabe mit Hilfe der Lagrange Multiplikatoren und vergleichen Sie die Ergebnisse. Die zu optimierende Funktion ist

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

unter der Nebenbedingung

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 2^2 = 4$$

16.10 Parametrische Funktionen und Kurvenintegrale

A8.10.1: Der Weg einer parametrischen Funktion werde für den Zeitraum $t \in [0,1]$ beschrieben durch die beiden Wege

$$\vec{X}_1(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{X}_2(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

Auf diesem Weg sei ein Käfte-Feld gegeben durch:

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy + e^x \\ x^2 - \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{pmatrix}$$

Skizzieren Sie die Wege und berechnen Sie entlang dieser Wege die zu leistende Arbeit.

Existiert zu diesem Kraftfeld eine Potentialfunktion? Wie lautet diese? Berechnen Sie - falls diese existiert - mit Hilfe der Potentialfunktion die Arbeit und vergleichen Sie ihre Ergebnisse.

Kapitel 17

Mehrdimensionale Integration

17.1 Berechnung der Integrale

A9.1.1: Wir betrachten die Funktion

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1}$$

Berechnen Sie das Oberflächenintegral (das Volumen unterhalb dieser Funktion) für die Integrationsbereiche

a)

$$B_1 = \{\vec{x} = (x,y)^T | x > 0, y > 0, \|\vec{x}\|_\infty < 1\}$$

b)

$$B_2 = \{\vec{x} = (x,y)^T | x > 0, y > 0, \|\vec{x}\|_2 < 1\}$$

c)

$$B_3 = \{\vec{x} = (x,y)^T | x > 0, y > 0, \|\vec{x}\|_1 < 1\}$$

Skizzieren Sie zunächst die Integrationsbereiche. Überprüfen Sie die Plausibilität $I_1 > I_2 > I_3 > 0$.

A9.1.2: Wo liegt der Schwerpunkt der Fläche, die von $f(x) = 16 - x^2, g(x) = 6x$ und $h(x) = \frac{7}{3}x$ im ersten Quadranten $(x > 0, y > 0)$ eingeschlossen wird? Skizzieren Sie auch hier zunächst das Problem.

Kapitel 18

Wachstums- und Zerfallsprozesse

AW.1: Sie tilgen einen Kredit über 10000 Euro mit einer jährlichen Rate von 2000 Euro. Die Verzinsung wird zu Ende des Jahres mit 10% der Restschuld berechnet.

Beschreiben Sie dies in einem diskreten Differenzenmodell. Wie lautet die Prozessgleichung und wann ist der Kredit getilgt? Zeichnen Sie den Verlauf y_n.

AW.2: Eine Epedemie erreiche eine Kleinstadt mit 40000 Einwohnern. Zu Aufzeichnungsbeginn sind 200 Leute infiziert. Pro Tag werden 10% der nicht-infizierten neu infiziert. (Keiner stirbt oder wird genesen).

Beschreiben Sie dies in einem diskreten Differenzenmodell. Wie lautet die Prozessgleichung und wann sind 90% der Stadt infiziert? Zeichnen Sie den Verlauf y_n.

Kapitel 19

Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)

A10.1: Lösen Sie die DGL

$$\begin{aligned} y' &= y^2 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

durch das Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf (2 Iterationen) und einen Potenzreihenansatz bis zur Ordnung 3.

Bem.: Die exakte Lösung ist

$$y(x) = \frac{1}{1-x}$$

19.1 Lösungsverfahren für DGL'en erster Ordnung

A10.1.1: Lösen Sie die DGL'en durch eine geignete Substitution:

a)

$$y' = \frac{1}{x+y} \cdot x - 1$$

b)

$$y' = \sqrt{1 + \frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

A10.1.2: Lösen Sie die DGL für $y(t)$ der Störung zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} y' &= k \cdot y \cdot (R - y) \\ &= kR \cdot y - k \cdot y^2 \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

als Bernoulli DGL und anschliessender linearer Substitution.

A10.1.3: Sie heizen einen Backofen ein. Seine Temperatur erhöht sich von $T_{Back}(0) = 30$ Grad minütlich um 10 Grad, bis nach 17 Min die Zieltemperatur von 200 Grad erreicht ist. Sie stellen aber bereits zu Beginn eine Kuchenmischung, welche die Zimmertemperatur 20 Grad hat mit in den Ofen. Diese folgt nun dem Newton'schen Temperaturgesetz. (Erwärmung proportional zur Temperaturdifferenz zwischen Mischung und Ofen). Berechnen Sie zunächst die Lösung des Temperaturverlaufs der Backmischung $T(t)$ mit dem unbekannten Wärmeleitkoeffizient K als Parameter dieser Funktion. Werten Sie anschliessend die Funktion für $K = 0.001, K = 0.2, K = 0.5, K = 1$ aus und zeichnen SIe die Temperaturverläufe.

A10.1.4: Berechnen sie zu

$$y_0 = y(0) = 1$$

die Lösung der AWP's

$$y' = k \cdot y$$

und

$$y' = ky - a$$

mit $k = 0.5, a = 1$ mit dem Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf (2 Iterationen) und vergleichen Sie mit den exakten Resultaten.

A10.1.5: Lösen Sie die Anfangswertprobleme zu $y(0) = 1$ für die DGL'en

$$\begin{aligned} a)\ y' + 2y &= 4\sin(2x) \\ b)\ y' + 2y &= 4e^{2x} \\ c)\ y' + 2y &= 4e^{-2x} \\ d)\ y' + 2y &= 2x^2 \end{aligned}$$

A10.1.6:
a) Lösen Sie die DGL

$$y' = \frac{-2y - y^2 \frac{\cos(x)}{x}}{x + 2y \frac{\sin(x)}{x}}$$

bzw.

$$\left(2y + y^2 \frac{\cos(x)}{x}\right) + \left(x + 2y \frac{\sin(x)}{x}\right) y' = 0$$

b) Wie lautet zusätzlich die Lösung des AWP, falls $y(1) = 1$ gefordert ist?

19.2 Lineare DGL'en 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten

A10.2.1: Lösen Sie die DGL zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} a)\ y'' - 4y' + 3y &= 2e^x \\ b)\ \ y'' - 2y' + y &= 2e^x \\ c)\ y'' - 2y' + 5y &= 2e^x \end{aligned}$$

19.3 DGL der Emotionen

Schliesslich wollen wir noch abschliessend klären, wie und warum sich Beziehungen zwischen Mann und Frau entwickeln. Hierzu bedarf es keiner Wahrsager sondern nur die richtige Formulierung der Differentialgleichungen, die in diesem Fall die Reaktionen beschreiben.

Hierzu betrachten wir zwei gesuchte Funktionen der Emotionen von Mann und Frau und bezeichnen diese mit $M(t)$ und $F(t)$.

Dabei beschreiben positive Werte der Funktionen Zuneigung, negative Abneigung.

Zunächst sind die aktuellen Werte hierzu die Startwerte unseres Systems, also

$$\begin{aligned} M_0 &= M(0) \\ F_0 &= F(0) \end{aligned}$$

Um die Funktion mit Leben zu füllen, betrachten wir im Moment mal die Werte

$$\begin{aligned} M_0 &= 0 \\ F_0 &= 2 \end{aligned}$$

Nun beschreiben wir die Reaktion auf die Emotion des Anderen als Änderungsrate. Modellieren wir mal zunächst die Vergesslichkeit, so wäre ein erster Ansatz, dass in jedem Zeitschritt beispielsweise 10% vergessen werden. Also

$$\begin{aligned} \Delta M &= -0,1 \cdot M \\ \Delta F &= -0,1 \cdot F \end{aligned}$$

Zum Anderen wird die Reaktion auf die Emotion des Anderen wie folgt modelliert

Bei der Frau bewirkt sowohl Zuneigung als auch Abneigung eine Verstärkung der eigenen Gefühle, beispielsweise zu 25% wird der Wert vom Mann zum eigenen Status hinzuaddiert.

Beim Mann ist dies umgekehrt: Zu grosse Nähe bewirkt Distanz, Streit bewirkt Bemühen die Emotionen in die andere Richtung zu lenken, sagen wir zu 50%. Es entsteht das System

$$\begin{aligned}\Delta M &= -0,1 \cdot M - 0,5 \cdot F \\ \Delta F &= 0,25 \cdot M - 0,1 \cdot F\end{aligned}$$

A10.3.1: Das Modell und das homogene System: Berechnen Sie aus diesen Differenzengleichungenden die Änderungen und damit zeitlichen Verlauf der beiden Funktionen M_n und F_n iterativ und zeichnen Sie diesen. Überführen Sie anschliessend die Differenzengleichungen in Differentialgleichungen und lösen das System exakt. Was wird der langfristige zeitiche Verlauf ergeben?

A10.3.2: Das inhomogene System mit konstanter Störfunktion: Um nun hier einen Ausweg zu schaffen, geben wir dem System wie folgt einen Impuls: Beide Funktionen werden um einen festen Wert erhöht (z.B. durch Hochzeitstag, Urlaub, Blumen ....) und wir erhalten z.B. für eine Erhöhung um 1

$$\begin{aligned}M' &= -0,1 \cdot M - 0,5 \cdot F + 1 \\ F' &= 0,25 \cdot M - 0,1 \cdot F + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_0 &= 0 \\ F_0 &= 2\end{aligned}$$

Wie sind nun die partikulären Lösungen? Werden beide Werte langfristig positiv oder wo liegen diese? Berechnen Sie nun für die Differenzengleichungen wiederum die Funktionsverläufe iterativ.

A10.3.3: Das inhomogene System mit beliebiger Störfunktion: Damit wir die kontinuierlichen Funktionen ermitteln können, betrachten wir nun allgemein das System

$$\begin{aligned}M' &= a \cdot M + b \cdot F + g_1(t) \\ F' &= c \cdot M + d \cdot F + g_2(t)\end{aligned}$$

M_0, F_0 geg.

Überführen Sie dieses in eine DGL 2. Ordnung. Lösen Sie hier die homogene DGL. (Die Partikulären Lösungen setzen sie als gefundene Funktionen $M_p(t), F_p(t)$ ein)

A10.3.4: Bestimmen Sie nun die exakte Lösung des Systems

$$\begin{aligned} M' &= -0,1 \cdot M - 0,5 \cdot F + 1 \\ F' &= 0,25 \cdot M - 0,1 \cdot F + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_0 &= 0 \\ F_0 &= 2 \end{aligned}$$

und zeichnen Sie die Funktionsverläufe. Fassen Sie den Algorithmus nochmals zusammen.

A10.3.5: Schreiben Sie ein Programm zur Lösung beliebiger linearer Systeme mit konstanter Störfunktion, also zu

$$\begin{aligned} y' &= ay + bz + e \\ z' &= cy + dz + f \end{aligned}$$

$$y_0, z_0 \text{ geg.}$$

Index