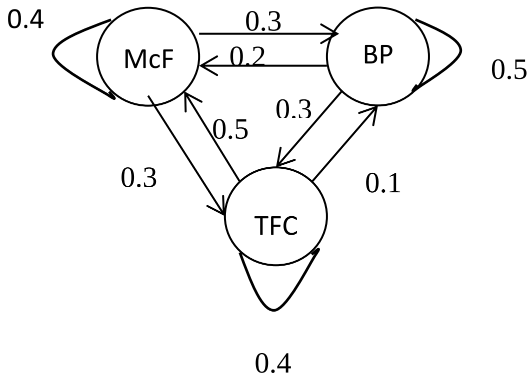
Mathematische Modelle und Methoden – Lösungen

Aufgabe 1

a) Bei dem beschriebenen Szenario handelt es sich um ein geschlossenes System, bei dem die Einwohner nicht abwandern, sondern 100% der Einwohner müssen sich auf die drei genannten Fast-Food-Restaurants verteilen. Die Spaltensumme charakterisiert die Anzahl der Einwohner, die von einem Zustand zum anderen wandern. Da auch hier das Verbleiben als Zustandsänderung modelliert wurde, muss die Spaltensumme 1 bzw. 100% betragen.

b) Übergangsgraph:



Übergangsmatrix: $M = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$

c) $v_0 = \begin{pmatrix} 0.6 * 12500 \\ 0.3 * 12500 \\ 0.1 * 12500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7500 \\ 3750 \\ 1250 \end{pmatrix}$, damit folgt

$$v_1 = M * v_0 = \begin{pmatrix} 0.4 * 7500 + & 0.2 * 3750 + & 0.5 * 1250 \\ 0.3 * 7500 + & 0.5 * 3750 + & 0.1 * 1250 \\ 0.3 * 7500 + & 0.3 * 3750 + & 0.4 * 1250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4375 \\ 4250 \\ 3875 \end{pmatrix},$$

damit verteilen sich also nach einer Woche 4375 Einwohner auf McFadden, 4250 Einwohner auf Burger Prince und 3875 Einwohner auf Texas Fried Chicken.

$$v_2 = M * v_1 = \begin{pmatrix} 0.4 * 4375 + & 0.2 * 4250 + & 0.5 * 3875 \\ 0.3 * 4375 + & 0.5 * 4250 + & 0.1 * 3875 \\ 0.3 * 4375 + & 0.3 * 4250 + & 0.4 * 3875 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4537.5 \\ 3825 \\ 4137.5 \end{pmatrix}$$

damit verteilen sich also nach zwei Wochen 4537.5 Einwohner auf McFadden, 3825 Einwohner auf Burger Prince und 4137.5 Einwohner auf Texas Fried Chicken (Ein Einwohner isst also ein halbes Essen bei McFadden und ein halbes bei Texas Fried Chicken ☺).

d)

$$v_e = \begin{pmatrix} 4675 \\ 3750 \\ 4075 \end{pmatrix} = M * \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 * a + & 0.2 * b + & 0.5 * c \\ 0.3 * a + & 0.5 * b + & 0.1 * c \\ 0.3 * a + & 0.3 * b + & 0.4 * c \end{pmatrix}$$

Lösen des Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.5 & 4675 \\ 0.3 & 0.5 & 0.1 & 3750 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 & 4075 \end{pmatrix} => \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & 46750 \\ 3 & 5 & 1 & 37500 \\ 3 & 3 & 4 & 40750 \end{pmatrix} => \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & 46750 \\ 0 & -14 & 11 & -9750 \\ 0 & 2 & -3 & -3250 \end{pmatrix} =>$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & 46750 \\ 0 & -14 & 11 & -9750 \\ 0 & 0 & -20 & -65000 \end{pmatrix}$$

$$3. Zeile: -20x_3 = -65000 \Leftrightarrow x_3 = 3250$$

$$2. Zeile: -14x_2 + 11x_3 = -9750 \Leftrightarrow -14x_2 = 45500 \Leftrightarrow x_2 = 3250$$

$$1. Zeile = 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 46750 \Leftrightarrow x_1 = 6000$$

Damit gilt $v_s = \begin{pmatrix} 6000 \\ 3250 \\ 3250 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

a) X = Anzahl der defekten Formen

X ist binomialverteilt B(k|0.05,40), k=0…40

H_0: die Lieferung besteht aus Gipsformen 1. Wahl

H_1: die Lieferung besteht in Wirklichkeit aus Gipsformen 2. Wahl

Falls X >= 3 ist, wird H_0 verworfen.

b) $p_0 = P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$

$= 1 - \binom{40}{0} * 0.05^0 * 0.95^{40} - \binom{40}{1} * 0.05^1 * 0.95^{39} - \binom{40}{2} * 0.05^2 * 0.95^{38} \approx 0.32$

Der Fehler 1. Art beschreibt das Ereignis, dass die Lieferung zurückgeschickt wird, obwohl sie wie versprochen nur Gipsformen 1. Wahl enthalten hat. Die Wahrscheinlichkeit hierfür liegt bei etwa 32 %.

c) P_1 = B(0|0.1,40) + B(1|0.1,40) + B(2|0.1,40) ≈ 0.22

d) Der Fehler 2. Art beschreibt das Risiko, eine Lieferung zu behalten, obwohl sie Gipsformen 2.Wahl enthält.

Aufgabe 3

a)

$$Funktionsgleichung: g(x) = (x-1)(x-1)(x+1)(x+1) = x^4 - 2x^2 + 1$$

$$Querschnittsfläche\ F = \int_{-1}^{1} x^4 - 2x^2 + 1\, dx = \frac{16}{15} = 1.067\ m^2$$

b) Neue Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{2}{625}(x-5)(x-5)(x+5)(x+5) = \frac{2}{625}x^4 - \frac{4}{25}x^2 + 2$ wegen -5 und +5 doppelte Nullstellen und f(0) = 2.

c) Das Volumen ergibt sich aus der Länge multipliziert mit der Querschnittsfläche:

$$V = 10 \int_{-5}^{5} f(x)dx = \frac{320}{3} = 106.67m^3$$

Damit werden ca. 107m^3 Material benötigt.

d) Funktionsgleichung der Randkurve berechnet sich zu

$$p(x) = \frac{2}{125} * (x+5)(x-5)(x-5) = \frac{2}{125} * x^3 - \frac{2}{25}x^2 - \frac{2}{5}x + 2$$

wegen -5 einfache und +5 doppelte Nullstelle, p(0) = 2

$$V = 10 \int_{-5}^{5} p(x)dx = 133.33m^3$$

e) Die Ableitung von p(x) wird gleich 0 gesetzt, also

$$p'(x) = \frac{6}{125}x^2 - \frac{4}{25}x - \frac{2}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{10}{3}x - \frac{25}{3} = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{5}{3} \pm \frac{10}{3}$$

Da das Maximum links von der Mitte liegt, ist es bei x=-5/3, die zweite Ableitung hat dort den Wert -8/25 < 0 (hinreichendes Kriterium). Die Höhe ist dort gleich 64/27 = 2.37m.

Aufgabe 4

a) M = {(i_1, …., i_{12}) mit i_j aus {0,1,2} für j = 1, …, 12}

b) 12-maliges Ziehen mit Zurücklegen und Berücksichtigen der Reihenfolge, d.h. Permutation mit Wiederholung

c) Anzahl der möglichen Spielergebnisse: 3^{12} = 531441

d) $P(N = k) = \binom{12}{k} * (\frac{2}{3})^k * (\frac{1}{3})^{12-k}$ für k = 0, …, 12

$P(N \le 1) = P(N = 0) + P(N = 1) = \binom{12}{0} * (\frac{2}{3})^0 * (\frac{1}{3})^{12} + \binom{12}{1} * (\frac{2}{3})^1 * (\frac{1}{3})^{11} = (\frac{1}{3})^{12} + 12 * (\frac{2}{3})^1 (\frac{1}{3})^{11} = \frac{1}{3^{12}} + \frac{24}{3^{12}} = \frac{25}{3^{12}} \approx 0{,}0047\%$

e) Der Erwartungswert einer binomialverteilten Größe ist gleich μ=n*p=12 * (2/3) = 8

Aufgabe 5

a) An einem Tag liefert das Kraftwerk 24 h * 32 MW = 768 MWh = 768000 kWh

Energieverbrauch der Stadt:

$$E = \int_0^{24} (t^4 - 48t^3 + 576t^2 + 10000)\, dt = \left[\frac{t^5}{5} - 12t^4 + 192t^3 + 10000t\right]_0^{24} = 505420.8\ kWh$$

Damit stehen dem Pumpwerk E_v = 768000 – 505420.8 = 262579 kWh zur Verfügung.

b) $Masse = \frac{E_p}{g * Höhe\ [m]} * 0.9 = \frac{262579\text{kWh} * 0.9}{9.81\frac{m}{s^2} * 50m} = \frac{262579 * 3600 * 0.9\ \text{kW} * \text{sec}^3\ \square}{9.81 * 50m^2} = \frac{262579 * 3600 * 900\ \text{W} * \text{sec}^3\ \square}{9.81 * 50m^2}$

Nun ist 1W = 1 $\frac{kg * m^2}{\text{sec}^3\ \square}$ und damit $Masse = \frac{262579 * 3600 * 900\ \text{kg}}{9.81 * 50} = 1{,}734467 * 10^9 kg = 1734467t$

Damit können also 1734467 Tonnen Wasser hochgepumpt werden.

c) Anteil = 0.8 * 0.9 = 0.72

Aufgabe 6

a) Für die drei Kreuzungspunkte gilt:

$$x_1 + 100 = x_2 + 200$$
$$x_2 + 400 = x_3 + 500$$
$$x_3 + 300 = x_4 + x_1$$

b) In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 100 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 300 \end{pmatrix} => \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 200 \end{pmatrix} => \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 100 \end{pmatrix}$$

$$3. Zeile: x_4 = 100$$

$$2. Zeile: Wähle\ x_3 = \lambda\ ,\ x_2 - x_3 = 100 \Leftrightarrow x_2 = 100 + \lambda$$

$$1. Zeile: x_1 - x_2 = 100 \Leftrightarrow x_1 = 100 + x_2 \Leftrightarrow x_1 = 200 + \lambda$$

Damit ist die Lösung $\begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit λ>= 0

c) x_3 ist minimal 0.