

Mathematische Modelle und Methoden

Dauer: 135 Minuten

Hinweis: Von den sechs aufgeführten Aufgaben müssen genau fünf Aufgaben bearbeitet werden. Die nicht-bearbeitete Aufgabe muss (!) von Ihnen explizit angegeben werden! Es wird nicht automatisch die am schlechtesten bearbeitete Aufgabe gestrichen, sondern Aufgabe 6, wenn Sie nichts angeben.

Aufgabe 1

Der Sitz des Süßwarenherstellers *OBIRAH* befindet sich in Bonn, Stadtteil Kessenich. Dort leben 12500 Einwohner. In Kessenich gibt es drei Fast-Food-Restaurants – in eines dieser drei Restaurants geht jeder Einwohner genau einmal in der Woche essen. Dabei kann sich jeder Einwohner von Woche zu Woche neu entscheiden, welches der drei Restaurants er aufsuchen möchte.

Statistische Untersuchungen ergaben folgendes Verhalten bezüglich der Restaurantwechsel von Woche zu Woche:

- 40 % der Kunden von McFadden bleiben bei McFadden und 30 % wechseln zu Burger Prince
 - 20 % der Kunden von Burger Prince wechseln zu McFadden und 30 % zu Texas Fried Chicken
 - 40 % der Kunden von Texas Fried Chicken bleiben dort, 10 % wechseln zu Burger Prince
- a) Erklären Sie, warum die Spaltensummen von Übergangsmatrizen, die den obigen Sachverhalt darstellen können, immer 1 ergeben müssen.
- b) Stellen Sie obig beschriebenen Prozess als Übergangsgraph und Übergangsmatrix dar.

Gehen Sie davon aus, dass zum Start eine Verteilung von 60 % bei McFadden, 30 % bei Burger Prince und 10 % bei Texas Fried Chicken vorliegt.

- c) Berechnen Sie die Einwohneranzahlen, die sich nach einer Woche und nach zwei Wochen für das jeweilige Fast-Food-Restaurant entschieden haben.
- d) Bestimmen Sie die Startverteilung v_s , die notwendig wäre, damit bei der von Ihnen aufgestellten Übergangsmatrix aus b) nach einer Woche eine Endverteilung von

$$v_e = \begin{pmatrix} 4675 \\ 3750 \\ 4075 \end{pmatrix}$$

erreicht werden würde?

Aufgabe 2

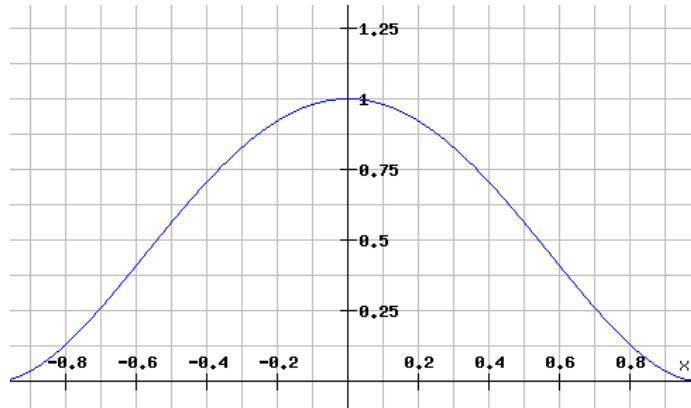
Der Süßwarenhersteller *OBIRAH* benötigt für die Fertigung seiner Silberteddys Gipsformen, die er von der Gießerei Müller bezieht. Die Jahre haben gezeigt, dass die Gießerei Gipsformen 1. Wahl, wobei 5 % defekt sind und Gipsformen 2. Wahl, von denen 10 % defekt sind, liefert. In einer Lieferung befinden sich keine Gipsformen unterschiedlicher Güte. *OBIRAH* will anhand einer Stichprobe testen, ob die Gießerei wie versprochen nur Gipsformen 1. Wahl liefert hat.

Sollten unter 40 zufällig gewählten Gipsformen mehr als zwei defekte dabei sein, reklamiert *OBIRAH* die Lieferung.

- a) Formulieren Sie den statistischen Test, also Hypothese und Alternative, die Zufallsvariable (Testgröße) mit Verteilung und Definitionsbereich (mögliche Werte) und die zugehörige Entscheidungsregel.
- b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art, interpretieren Sie dieses Ergebnis.
- c) Berechnen Sie den Fehler 2. Art.
- d) Welches Risiko beschreibt der Fehler 2. Art?

Aufgabe 3

OBIRAH benötigt für sein Museum „Die Geschichte des Silberteddys“ eine neue Ausstellungswand. Diese soll in etwa den folgenden Querschnitt haben:



Die Wand hat auf der Abbildung eine Basisbreite von etwa 2 m, in der Mitte die Höhe 1 m. Die Mitte der Basis stellt den Koordinatenursprung dar. Die zugehörige Randkurve hat die Form eines Polynoms 4. Grades mit den doppelten Nullstellen 1 und -1 und der maximalen Höhe 1 m in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen.

- a) Geben Sie die Funktionsgleichung des zugehörigen Polynoms und die Querschnittsfläche an.

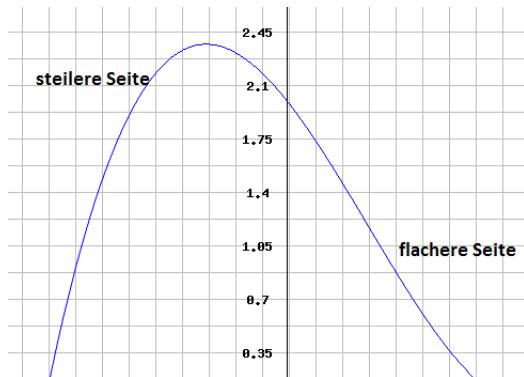
Es wurde entschieden, dass die Wand noch deutlich vergrößert werden muss: Im Querschnitt soll die Maximalhöhe in der Mitte 2 m betragen und die Basisbreite 10 m (von -5 bis 5).

- b) Wie lautet jetzt die Funktionsgleichung der Randkurve?

Die Wand wird in der Mitte der Museumshalle positioniert und hat eine Tiefe von 10m. Auf diesem Stück soll es Kindern ermöglicht werden zu spielen und zu klettern.

- c) Bestimmen Sie das Volumen der Wand, d.h. die Menge an Material die benötigt wird, wenn die Wand den Querschnitt aus Teil b) besitzt.

Den Planern der Wand/Kinderbeschäftigungsfäche fällt auf, dass die Form für manche Kinder womöglich etwas schwer ‚bekletterbar‘ ist. Aus diesem Grund wird eine alternative Querschnittsform (vgl. Skizze) gewählt.



Bei dieser Form geht man von einer Randkurve beschrieben durch ein Polynom 3. Grades aus. Zur steileren Seite hin gibt es eine einfache Nullstelle (bei -5), zur flacheren Seite eine doppelte Nullstelle (bei +5). Die Basisbreite bleibt bei 10 m.

- d) Man belässt die Höhe in der Mitte bei 2 m (Achtung, hierbei handelt es sich nicht mehr um das Maximum!) – geben Sie hierfür die Funktionsgleichung der Randkurve an. Wie viel Material braucht man jetzt für die Wand?
- e) Wie groß ist jetzt die maximale Höhe der Wand?

Aufgabe 4

Die Mitarbeiter bei OBIRAH wetten darum, wie ihre 12 Auszubildenden in der IHK-Abschlussprüfung abschneiden werden. Diese Wett-Tipps werden auf Wettscheinen notiert, wobei Matse Müller auf Position 1 gesetzt ist, Sandra Schmidt auf Position 2 usw. Dabei wird unterschieden, ob der Auszubildende

- (1) besser abschneidet als sonst (im Vergleich zu den bisher erbrachten Leistungen)
- (2) schlechter abschneidet wie sonst
- (3) oder seine Leistung sich nicht verändert

Man geht davon aus, dass alle drei Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind.

- a) Beschreiben Sie die Menge der möglichen Tippscheine in Tupel-Schreibweise.
- b) Welches Urnenmodell liegt für das zufällige Ausfüllen eines Tippscheines vor?
- c) Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen verschiedenen Tippscheine
- d) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass auf einem zufällig ausgefüllten Tippschein höchstens ein Abschneiden falsch getippt wird?
- e) Wie viele falsche Tipps pro Wettschein sind im Mittel zu erwarten (Erwartungswert)?

Aufgabe 5

Bonn-Kessenich wird durch ein Kraftwerk mit Energie versorgt, wobei das Kraftwerk konstant $32 \text{ MW} = 32000 \text{ kW}$ leistet.

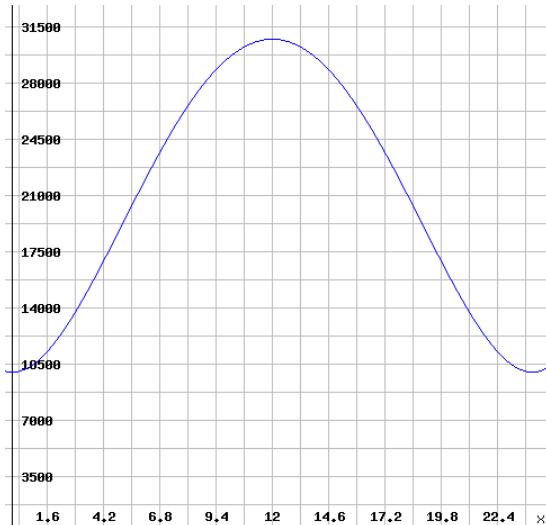
Wie viel Leistung die Kleinstadt verbraucht, hängt von den Privathaushalten und dem Süßwarenhersteller OBIRAH ab, der mittags seinen maximalen Bedarf hat.

Durch die in der Skizze dargestellte Funktion lässt sich die abgenommene Energie annähern:

$$L(t) = (t^4 - 48t^3 + 576t^2 + 10000), t = \text{Uhrzeit in Stunden}, L(t) = \text{Leistung in KW}$$

Die über einen Tag abgenommene Energie berechnet sich durch

$$E = \int_0^{24} L(t) dt$$



Die zu Schwachlastzeiten nicht von der Stadt benötigte Leistung wird in einem Pumpspeicherwerk zum Pumpen von Wasser in einen 50 m ($h=50$) höher liegenden See verwendet. Zu Zeiten, in denen das Kraftwerk weniger Leistung bereitstellt als benötigt wird, kann man das hochgepumpte Wasser durch Turbinen wieder ablaufen lassen und die dadurch gewonnene Leistung wieder nutzen.

- a) Berechnen Sie die Energiemenge E_p , die pro Tag für das Pumpspeicherwerk verwendet werden kann. Diese Energiemenge ergibt sich aus Differenz von Kraftwerkleistung und Energieverbrauch der Stadt.
- b) Die Pumpen haben einen Wirkungsgrad von 90 %. Bestimmen Sie die Masse des Wassers, das im Laufe eines Tages maximal hochgepumpt werden kann, wobei gilt

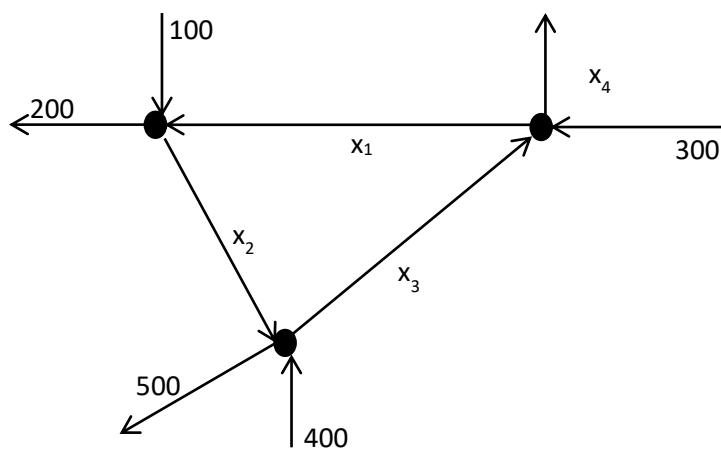
$$\text{Masse}[kg] = \frac{E_p}{g * \text{Höhe } [m]}, \quad g = 9.81 \frac{m}{sec^2}$$

(Hinweis: $1W = 1 \frac{kg * m^2}{sec^3}$, $1kWh = 1000Wh = 3600\ 000 W * sec$)

- c) Bei der Energieerzeugung durch Wasserablass besitzen die Turbinen einen Wirkungsgrad von 80 %. Welcher Anteil der Energie bleibt von der für das Hochpumpen aufgewendeten Energie übrig?

Aufgabe 6

Die unten zu sehende Skizze zeigt einen Auszug einer Fertigungsstraße aus Förderbändern von OBIRAH. Dabei gibt es nur Förderbänder, die in eine Richtung fördern, wobei die Richtung durch die Pfeilrichtung angegeben ist. Die Zahlen repräsentieren die Anzahl an Silberteddys, die in einer Stunde entlang der Förderbänder fahren. Die Kapazitäten der Förderbänder sind nicht bekannt und müssen nun von Ihnen berechnet werden. An keinem der drei Kreuzungspunkte gehen Silberteddys verloren.



- Geben Sie die drei zugehörigen linearen Gleichungen an.
- Lösen Sie das von Ihnen unter a) aufgestellte Gleichungssystem.
- Welchen Wert kann x_3 minimal annehmen?