第二章　信号检测

Wang Zhengyong

在许多实际问题中，经常遇到要在几种可能发生的情况中作出选择的问题。例如：雷达系统要根据观测到的雷达回波，作出目标是否存在的判决。同样，在数字通信系统中，发射机发射几种可能的波形，在传输过程中，不可避免地存在着干扰和噪声、从而波形发生畸变，因此，接收机要根据畸变了的观测波形，判决发射机发送的是几种可能波形中的哪一种。

在图形识别问题中，若己如若干种不同类别的图形，图形分类器要根据含有干扰和噪声的测量结果，利用图形的统计特征判断它应届于哪一类图形。

信号检测：统计识别问题，根据观测样本设计一检测器判断信号的有无以及信号类别。

3.1 假设检验

一、假设：被检测对象存在的可能状态。

二元假设：

$$H_1: \ y(t) = s(t) + n(t)$$

$$H_0: \ y(t) = n(t), \text{ 其中} s(t), n(t) \text{分别为信号和噪声.}$$

M元假设：

$$H_i: \ y(t) = s_i(t) + n(t); \ i = 1, 2, ..., M-1$$

$$H_0: \ y(t) = n(t), \text{ 其中} s_i(t), n(t) \text{分别为信号和噪声.}$$

M元假设检验属M择一，即作出观测结果属于哪一种假设。

二、假设检验步骤

1. 作出合理的假设。

2. 选择合适的判决准则。

3. 获取观测样本。

观测样本： 为进行统计判别需获得的数据。

4. 作出判断。

先验概率： 各种假设出现的概率$P(H_i)$。

后验概率： 在给定观测样本下，某假设的条件概率，即$P(H_i|Y)$，$Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)^T$

似然函数： 某种假设下，观测样本的条件概率密度函数，即$f(Y|H_i)$。

似然比： 似然函数的比值，如：

$$\frac{f(Y \mid H_1)}{f(Y \mid H_0)}$$

3.2 经典判决准则

一、最大后验概率准则（MAP准则）

1、基本思想： 在给定观测样本下，各假设的后验概率进行比较，最大后验概率所对应的假设为真。

$$\mathbf{MAX}\{\, P(\mathrm{H}_i|Y)\,\}$$

Maximum Posteriori

2、判决规则

二元假设： $H_1:\; y(t)=s(t)+n(t)$

$H_0:\; y(t)=n(t)$，其中$s(t)$, $n(t)$分别为信号和噪声.

观测样本$Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$

若$P(H_1\setminus Y)\geq P(H_0\setminus Y)$ → H_1为真，有信号

否则，H_0为真，无信号

由$P(H_1 \backslash Y) \geq P(H_0 \backslash Y)$,有:

$$\frac{P(H_1, Y)}{P(Y)} \geq \frac{P(H_0, Y)}{P(Y)}$$

即: $P(Y \backslash H_1)P(H_1) \geq P(Y \backslash H_0)P(H_0)$

$$\frac{P(Y \backslash H_1)}{P(Y \backslash H_0)} \geq \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

$$\frac{f(Y \backslash H_1)\Delta Y}{f(Y \backslash H_0)\Delta Y} \geq \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

$$\therefore \frac{f(Y \backslash H_1)}{f(Y \backslash H_0)} \geq \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

MAP判决规则:

(1)： 若 $P(H_1 \backslash Y) \geq P(H_0 \backslash Y)$

则H_1为真, 否则, H_0为真

（2）：若 $$\frac{f(Y \backslash H_1)}{f(Y \backslash H_0)} \geq \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

则H_1为真, 否则, H_0为真

例： 二元通信系统

H_1： $y(t)=s_1(t)+n(t)$

H_0： $y(t)=s_2(t)+n(t)$，其中$s_1(t),s_2(t),n(t)$分别为信号和高斯噪声.

$E[s_1(t)]=A, E[s_2(t)]=B, E[n(t)]=0, \mathrm{var}[n(t)]=\sigma^2; P(H_1)=P(H_0)=0.5$

观测样本 $Y=(y_1,y_2,\dots,y_n)^T$

$$\because f(y_i\backslash H_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(y_i-A)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$f(y_i\backslash H_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(y_i-B)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$\therefore \frac{f(Y\backslash H_1)}{f(Y\backslash H_0)}=\prod_{i=1}^{n}\frac{f(y_i\backslash H_1)}{f(y_i\backslash H_0)}$$

$$=\frac{\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n}\exp\left[-\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-A)^2}{2\sigma^2}\right]}{(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma})^n\exp\left[-\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-B)^2}{2\sigma^2}\right]}=\exp\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{(2A-2B)y_i-(A^2-B^2)}{2\sigma^2}\right]$$

因为先验概率已知且相等，则得判决规则为：

$$\exp\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{(2A-2B)y_i-(A^2-B^2)}{2\sigma^2}\right]\geq 1$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}[(2A-2B)y_i-(A^2-B^2)]\geq 0$$

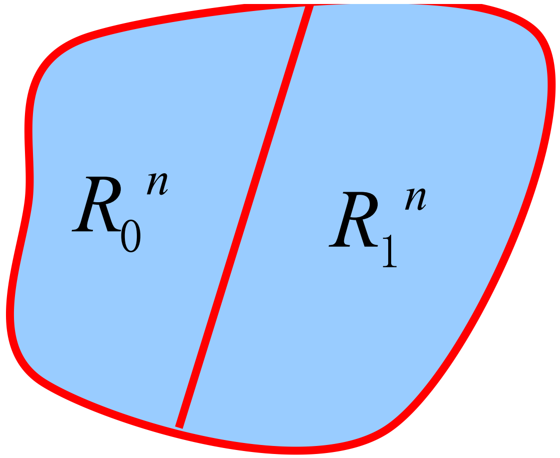
$$\sum_{i=1}^{n}(2A-2B)y_i\geq\sum_{i=1}^{n}(A^2-B^2)$$

$$\therefore\sum_{i=1}^{n}y_i\geq\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{A^2-B^2}{2A-2B)}\right) \Rightarrow H_1\text{为真, 否则, }H_0\text{为真}$$

$n=2, A=1, B=2$时，有：

$$y_1+y_2\geq 3$$

$Y \in R^n$ (n为样本空间)



3、二元假设的四种判决结果

(1) 实际H_0为真, 作出H_1为真的判决;

(2) 实际H_0为真, 作出H_0为真的判决;

(3) 实际H_1为真, 作出H_1为真的判决;

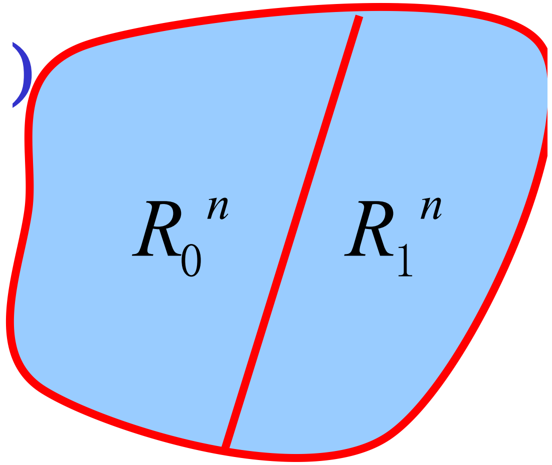
(4) 实际H_1为真, 作出H_0为真的判决;

正确判决

第一类错误（无信号但作出有信号的判决）的概率称为虚警概率:

$$\alpha = P(D_1 \backslash H_0) = \int_{R_1^n} f(Y \backslash H_0)\, dY$$

第二类错误（有信号但作出无信号的判决）的概率称为漏报概率：



$$\beta = P(D_0 \setminus H_1) = \int_{R_0^n} f(Y \setminus H_1)dY$$

正确判决的概率：

$$P(D_0 \setminus H_0) = \int_{R_0^n} f(Y \setminus H_0)dY$$

$$P(D_1 \setminus H_1) = \int_{R_1^n} f(Y \setminus H_1)dY$$

发现概率或检验概率

检验统计量: 一般是观测样本的似然比,如用Z表示,有:

$$Z = \frac{f(Y \setminus H_1)}{f(Y \setminus H_0)}$$

判决规则为： $Z(Y) \geq th$(门限) $\Longrightarrow$ H_1为真, 有信号

否则, H_0为真, 无信号

第二类错误（有信号但作出无信号的判决）的概率称为漏报概率：

$$\beta = P(D_0 \backslash H_1) = \int_{R_0^n} f(Y \backslash H_1) dY$$

$$= \int_{-\infty}^{th} f(Z \backslash H_1) dZ$$

正确判决的概率：

$$P(D_0 \backslash H_0) = \int_{R_0^n} f(Y \backslash H_0) dY = \int_{-\infty}^{th} f(Z \backslash H_0) dZ = 1 - \alpha$$

$$P_d = P(D_1 \backslash H_1) = \int_{R_1^n} f(Y \backslash H_1) dY = \int_{th}^{\infty} f(Z \backslash H_1) dZ = 1 - \beta$$

4、平均错误概率

$$P_e = P(H_0)P(D_1 \backslash H_0) + P(H_1)P(D_0 \backslash H_1)$$

$$\begin{aligned} P_e &= P(H_0)P(D_1 \backslash H_0) + P(H_1)P(D_0 \backslash H_1) \\ &= P(H_0)\int_{R_1^n} f(Y \backslash H_0)dY + P(H_1)[1 - \int_{R_1^n} f(Y \backslash H_1)dY] \\ &= P(H_1) + \int_{R_1^n} [P(H_0)f(Y \backslash H_0) - P(H_1)f(Y \backslash H_1)]dY \end{aligned}$$

要使上式最小，须满足下式:

$$P(H_0)f(Y \backslash H_0) - P(H_1)f(Y \backslash H_1) \le 0$$

即: $\dfrac{f(Y \backslash H_1)}{f(Y \backslash H_0)} \ge \dfrac{P(H_0)}{P(H_1)}$ ⟹ H_1为真, 有信号

否则, H_0为真, 无信号

基于最小错误概率的贝叶斯分类

定理 设A_1，…，A_n是S的一个划分，且$P(A_i)>0$，(i=1，…，n)，则对任何事件$B\in S$，有

$$P(A_j \mid B)=\frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)},(j=1,\dots,n)$$

式子就称为贝叶斯公式。

- 假设在某地区切片细胞中正常（w1）和异常（w2）两类的先验概率分别为p(w1)=0.9，p(w2)=0.1。现有一待识别细胞呈现出状态x，由其类条件概率密度分布曲线查的p(x|w1)=0.2,p(x|w2)=0.4,试对细胞x进行分类。

基于最小错误概率的贝叶斯分类

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}, (j = 1, \ldots, n)$$

- 利用贝叶斯公式，分别计算出状态为x时w1与w2的后验概率

$$P(\omega_i \mid X) = \frac{p(x \mid \omega_i)P(\omega_i)}{\sum_{j=1}^{c} p(X \mid \omega_j)P(\omega_i)} = \frac{0.2 \times 0.9}{0.2 \times 0.9 + 0.4 \times 0.1} = 0.818$$

$$P(w_2 \mid X) = 1 - P(w_1 \mid X) = 0.182$$

$$P(\omega 1 \mid x) = 0.818 > P(\omega 2 \mid x) = 0.0182$$

因此判定该细胞为正常细胞比较合理。

分类问题

税号	去年退税	婚姻状况	可征税收入	逃税
1	是	单身	125k	否
2	否	婚姻中	100k	否
3	否	单身	70k	否
4	是	婚姻中	120k	否
5	否	离婚	95k	是
6	否	婚姻中	60k	否
7	是	离婚	220k	否
8	否	单身	85k	是
9	否	婚姻中	75k	否
10	否	单身	90k	是

对于X =(去年退税 = 否， 婚姻状况＝婚姻中， 可征税收入 = 120K)

这个人会不会逃税?

H1:逃税

H0:不逃税

计算P(H1/X)和P(H0/X)哪个大的问题

等价于P(H1/X)P(X)和P(H0/X) P(X)哪个大

或P(X/H1)P(H1)和P(X/H0)P(H0)哪个大

$$P(X/H0) = P(\text{去年退税} = \text{否}/H0)P(\text{婚姻状况} = \text{婚姻中}/H0)P(\text{可征税收入} = 120k/H0)$$

$$= 4/7*4/7*1/7$$

分类问题

名称	胎生	会飞	水中生活	有腿	类别
Human	是	否	否	是	哺乳动物
python	否	否	否	否	非哺乳动物
salmon	否	否	是	否	非哺乳动物
whale	是	否	是	否	哺乳动物
frog	否	否	有时	是	非哺乳动物
komodo	否	否	否	是	非哺乳动物
bat	是	是	否	是	哺乳动物
pigeon	否	是	否	是	非哺乳动物
cat	是	否	否	是	哺乳动物
leopard_shark	是	否	是	否	非哺乳动物
turtle	否	否	有时	是	非哺乳动物
penguin	否	否	有时	是	非哺乳动物
porcupine	是	否	否	是	哺乳动物
eel	否	否	是	否	非哺乳动物
salamander	否	否	有时	是	非哺乳动物
gila_monster	否	否	否	是	非哺乳动物
platypus	否	否	否	是	哺乳动物
owl	否	是	否	是	非哺乳动物
dolphin	是	否	是	否	哺乳动物
eagle	否	是	否	是	非哺乳动物

胎生	会飞	水中生活	有腿	类别
是	否	是	否	?

设有两类数据集，类别1含有250个样本，类别2含有400个样本，每个样本有两个特征，分别取类别1的前200个和类别2的前300个样本作为训练样本，剩下的作为测试样本，根据基于最小错误率的贝叶斯决策理论设计分类器。

样本的概率密度函数由下式定义：

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|C|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{(X-M)^T C^{-1}(X-M)}{2}\right]$$

其中 $X=(x_1,x_2)^T$； $\mathrm{M}=(m_1,m_2)^T$

样本特征

$m_i=E[x_i]$

$$C=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$$

由最小错误概率判决规则，可得采用如下的函数作为判别函数：

$$g_i(X) = f(x_1, x_2|H_i)P(H_i), i = 1,2,\ldots, N(\text{类别数})$$

$P(H_i)$为类别H_i的先验概率。

$$f(x_1, x_2|H_i) = \frac{1}{(2\pi)\ |C_i|^{\frac{1}{2}}} \exp[-\frac{(X - M_i)^T C_i^{-1}(X - M_i)}{2}]$$

$M_i = (m_{i1}, m_{i2})^T$表示第i类特征的平均值

$m_{i1}=\frac{1}{N_i}\sum_{X\in H_I} x_{j1}{}^i, x_{j1}$表示第$i$类第j个样本第 1个特征

$m_{i2}=\frac{1}{N_i}\sum_{X\in H_I} x_{j2}{}^i, x_{j2}$表示第$i$类第j个样本第2个特征

$$f(x_1, x_2 | H_i) = \frac{1}{(2\pi)\,|C_i|^{\frac{1}{2}}} \exp[-\frac{(X-M_i)^T C_i^{-1}(X-M_i)}{2}]$$

求每一类样本的协方差矩阵

$$C_i = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix},$$

$$c_{\mathrm{jk}} = \frac{1}{N_i - 1}\sum_{l=1}^{N}(x_{lj}^i - m_{ij})(x_{lk}^i - m_{ik});\ j,k = 1,2$$

x_{lk}^i代表i类的第l个样品，第k个特征值

m_{ij}代表i类的第k个特征值的平均值

求出每一类的先验概率：$P(H_i) = N_i$ /N

将各个测试样本代入判别函数：

若$g_1(X) > g_2(X)$,则属于类别1，否则为类别2

二、最小错误概率准则

1、基本思想： 使平均错误概率最小.

$$P_e = P(H_0)P(D_1 \backslash H_0) + P(H_1)P(D_0 \backslash H_1) \Longrightarrow \text{最小}$$

$$= P(H_0)\int_{R_1^n} f(Y \backslash H_0)dY + P(H_1)[1 - \int_{R_1^n} f(Y \backslash H_1)dY]$$

$$= P(H_1) + \int_{R_1^n} \left[P(H_0)f(Y \backslash H_0) - P(H_1)f(Y \backslash H_1)\right]dY$$

2、判决规则：

$$P(H_0)f(Y \backslash H_0) - P(H_1)f(Y \backslash H_1) \leq 0$$

$$\text{即}: \frac{f(Y \backslash H_1)}{f(Y \backslash H_0)} \geq \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

三、贝叶斯(Bayes)平均风险最小准则

1、代价函数(风险函数)

C_{ij}：假设H_j为真判为H_i引起的风险或代价.

一般来讲，正确判决的风险小于错误判决引起的风险.

对于二元假设有： $C_{10} > C_{00}, C_{01} > C_{11}$

判决的平均风险： $\overline{C} = \sum_j \sum_i C_{ij} P(D_i \mid H_j) P(H_j)$

$$\overline{C} = P(H_0)[C_{00}P(D_0 \backslash H_0) + C_{10}P(D_1 \backslash H_0)]$$
$$+P(H_1)[C_{01}P(D_0 \backslash H_1) + C_{11}P(D_1 \backslash H_1)]$$

贝叶斯平均风险最小准则是指平均风险为最小的判决准则.

$$\overline{C} = \sum_j \sum_i C_{ij} P(D_i \mid H_j) P(H_j)$$

$$= P(H_0)C_{10} + P(H_1)C_{01}$$

$$+\int_{R_1^n} [P(H_0)(C_{10} - C_{00}) f(Y \setminus H_0) - P(H_1)(C_{01} - C_{11}) f(Y \setminus H_1)] dY$$

$\overline{C}$是 R_1^n的 函 数 ， 平 均 风 险 取 决 于 R_1^n的 划 分 。

问题: R_1^n如何划分可使$\overline{\text{C}}$最小.

⇓ **满足**

使$P(H_0)(C_{10} - C_{00}) f(Y \setminus H_0) - P(H_1)(C_{01} - C_{11}) f(Y \setminus H_1) < 0$

的Y取值范围.

由 $P(H_0)(C_{10}-C_{00})f(Y\backslash H_0)-P(H_1)(C_{01}-C_{11})f(Y\backslash H_1)<0$

有：$\dfrac{f(Y\backslash H_1)}{f(Y\backslash H_0)}>\dfrac{P(H_0)(C_{10}-C_{00})}{P(H_1)(C_{01}-C_{11})}$

判决规则:

$$\underbrace{\frac{f(Y\backslash H_1)}{f(Y\backslash H_0)}}_{\text{似然比}}>\underbrace{\frac{P(H_0)(C_{10}-C_{00})}{P(H_1)(C_{01}-C_{11})}}_{\text{门限}} \Rightarrow$$

H_1为真，有信号

否则，H_0为真，无信号

$$Z(Y)=\frac{f(Y/H_1)}{f(Y/H_0)},th=\frac{P(H_0)(C_{10}-C_{00})}{P(H_1)(C_{01}-C_{11})}$$

则有：

$Z(Y)\geq th \Rightarrow$ H_1为真，有信号

否则，H_0为真，无信号

$Z(Y)$是一维随机变量，也称为检验统计量

在二元数字通信系统中,假设为H_1时,信源输出为常值正电压m,假设为H_0时,信源输出输出零电平,信号在传输过程中迭加了噪声$n(t)$,每种信号的持续时间为T, 请:

(1) 若接收端对接收信号x(t)在(0,T)时间内进行1次采样,给出对应的贝叶斯检测准则

(2) 若接收端对接收信号x(t)在(0,T)时间内进行N次独立采样,给出对应的贝叶斯检测准则.

上述两种情况下,噪声采样值n_i是均值为零,方差为 σ的高斯噪声

解: 一次采样时

$$H_0 : x = n$$

$$H_1 : x = m + n$$

步骤1:计算两个似然函数,构建似然比

由于n是高斯分布随机变量,因此在H0假设下,观察信号x也服从高斯分布,且均值为零,方差为 σ^2 ,在H1假设下,观察信号x服从均值为m,方差为σ^2的高斯分布。

$$p(x|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$p(x|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

步骤2：根据两个假设的先验概率和代价因子，计算判决门限

$$\eta=\frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})}$$

步骤3：形成贝叶斯检测基本表达式

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\eta \Longrightarrow \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\eta$$

步骤4：化简

$$\exp\left(\frac{x^2-(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\eta \Longrightarrow x\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{\sigma^2}{m}\ln\eta+\frac{m}{2}$$

解：N次采样时

$$H_0: x_i = n, \quad i = 1,2,\cdots,N$$

$$H_1: x_i = m + n, \quad i = 1,2,\cdots,N$$

步骤1：计算两个似然函数，构建似然比

由于n是高斯分布随机变量，因此在H0假设下，第i次采样值x_i服从高斯分布，且均值为零，方差为 σ^2 ,在H1假设下，第i次采样值x_i服从均值为m，方差为σ^2的高斯分布。

$$p(x_i|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right) \Longrightarrow p(\boldsymbol{x}|H_0) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$p(x_i|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad p(\boldsymbol{x}|H_1) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

步骤2：根据两个假设的先验概率和代价因子，计算判决门限

$$\eta=\frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})}$$

步骤3：形成贝叶斯检测基本表达式

$$\frac{p(\boldsymbol{x}|H_1)}{p(\boldsymbol{x}|H_0)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\eta \quad\Longrightarrow\quad \frac{\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x_i-m)^2}{2\sigma^2}\right)}{\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\eta$$

步骤4：化简

$$\frac{\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x_i-m)^2}{2\sigma^2}\right)}{\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\eta \quad\Longrightarrow\quad \exp\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^2-(x_i-m)^2\right)}{2\sigma^2}\right)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\eta$$

$$\Longrightarrow\quad -Nm^2+\sum_{i=1}^{N}2mx_i\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}2\sigma^2\ln\eta \quad\Longrightarrow\quad \sum_{i=1}^{N}x_i\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{\sigma^2\ln\eta}{m}+\frac{Nm}{2}$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{\sigma^2\ln\eta}{Nm}+\frac{m}{2}$$

观测值x被判为i类时的风险：

$$R(D_i \mid X) = \sum_j C_{ji} P(H_j \mid X)$$

根据 $R(D_i \mid X)$ 的最小值来做出判决分类。

步骤1：

根据贝叶斯公式计算出后验概率：

$$P(H_j \mid X) = \frac{P(X \mid H_j) P(H_j)}{\sum_j P(X \mid H_j) P(H_j)}$$

步骤2：

计算出观测值X被判为i类时的风险：

$$R(D_i \mid X) = \sum_j C_{ji} P(H_j \mid X)$$

步骤3： 根据 $R(D_i \mid X)$ 的最小值来做出判决分类。

四、极大极小准则

1、假定各种假设先验概率已知

令 $Q=P(H_0)=q$，且 $C_{00},C_{01},C_{11},C_{10}$ 已知

对于二元假设:

$$P(D_1 \backslash H_0)=\int_{R_1^n} f(Y\backslash H_0)dY=\alpha(Q)$$

$$P(D_0 \backslash H_1)=\int_{R_0^n} f(Y\backslash H_1)dY=\beta(Q)$$

先验概率的函数

平均风险:

$$\overline{C}_{\min}(Q)=\sum_j\sum_i C_{ij}P(D_i\,|\,H_j)P(H_j)$$

$$=Q[C_{00}(1-\alpha(Q))+C_{10}\alpha(Q)]+(1-Q)[C_{01}\beta(Q)+C_{11}(1-\beta(Q))]$$

$$=q[C_{00}(1-\alpha(q))+C_{10}\alpha(q)]+(1-q)[C_{01}\beta(q)+C_{11}(1-\beta(q))]$$

2、假定各种假设先验概率未知

假 定 $q_1 = P(H_0)$[猜 测], 且 $C_{00}, C_{01}, C_{11}, C_{10}$已 知

利用Bayes准则(此时利用假设H_0的概率为q_1,而实际为Q=q):

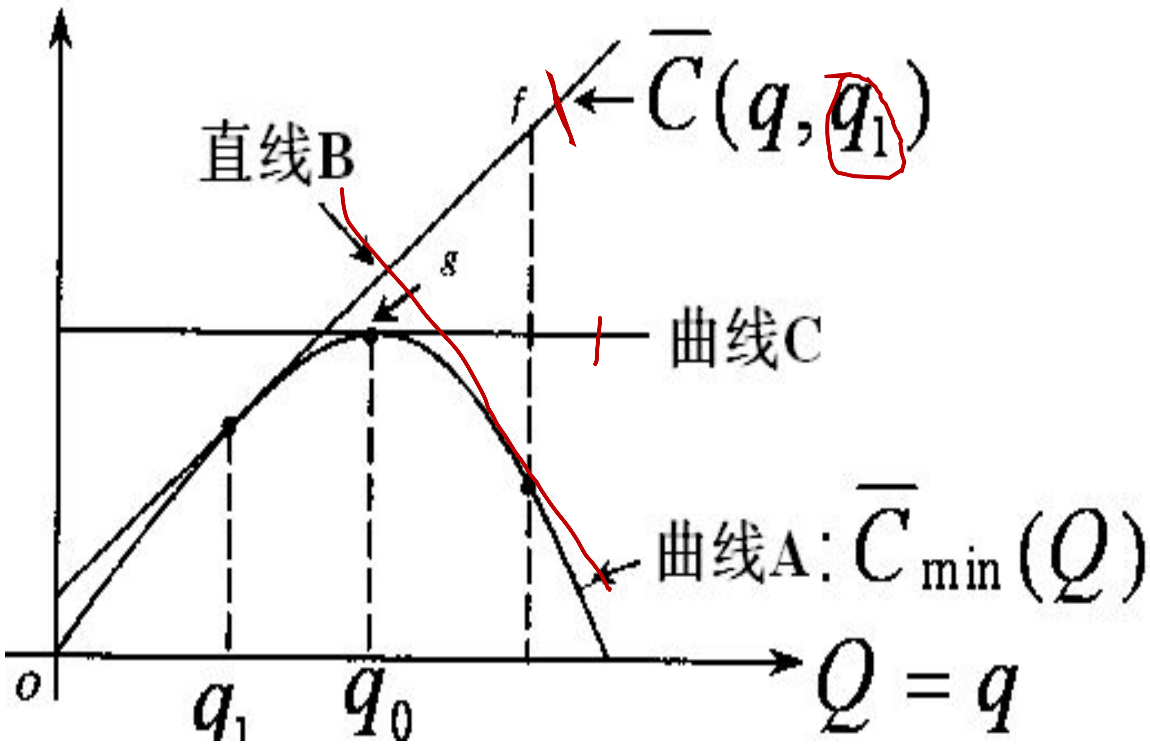
$$\overline{C}(q,q_1) = q[C_{00}(1-\alpha(q_1)) + C_{10}\alpha(q_1)] + (1-q)[C_{01}\beta(q_1) + C_{11}(1-\beta(q_1))]$$

对每一q_1,上式应是q的一条直线(线性函数)

设： $A(q_1) = (C_{10} - C_{00})\alpha(q_1)$, $B(q_1) = (C_{01} - C_{11})\beta(q_1)$

$$\therefore \overline{C}(q,q_1) = C_{00}q + C_{11}(1-q) + A(q_1)q + B(q_1)(1-q)$$

$$= [C_{00} - C_{11} + A(q_1) - B(q_1)]q + B(q_1) + C_{11}$$



由图有: (1)直线B与曲线A在$q= q_1$时相交.

(2)对每一个选定的q_1而言,当q=1或趋于 0时,直线B具有最大的平均风险.

(3)若$q_1 < q_0$,当$q> q_0$时,直线B的值大于曲线A的最大值;

若q1 > q0,当q< q0时,直线B的值大于曲线A的最大值

由 $\frac{d}{dq}\overline{C}\ (q,q_1)=C_{00}-C_{11}+A(q_1)+B(q_1)=0$

有 $:C_{10}\alpha(q_0)+C_{00}(1-\alpha(q_0))=C_{01}\beta(q_0)+C_{11}(1-\beta(q_0))$

设： $\mathrm{A}(q_1)=(C_{10}-C_{00})\alpha(q_1)$, $\mathrm{B}(q_1)=(C_{01}-C_{11})\beta(q_1)$

先验概率为q_0时H_0为真时的条件平均风险

等于H_1为真时的条件平均风险。

例2: 二元通信系统,

H_1: $y(t)=1+n(t)$

H_0: $y(t)=n(t)$, 其中$n(t)$为零均值，方差为σ^2的高斯白噪声，

$P(H_1)=P(H_0)$未知，$C_{00}=C_{11}=0, C_{01}=C_{11}=1$，试写出样本数为1时的判决规则和$P(H_0)$。

$$\because f(y_i \backslash H_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left[-\frac{(y_i-1)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$f(y_i \backslash H_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left[-\frac{(y_i{}^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$\therefore \frac{f(y_1 \backslash H_1)}{f(y_1 \backslash H_0)}=\exp\left[\frac{2y_1-1}{2\sigma^2}\right]$$

则得判决规则为： $$\exp\left[\frac{2y_1-1}{2\sigma^2}\right]\geq\frac{P(H_0)[C_{10}-C_{00}]}{P(H_1)[C_{01}-C_{11}]}$$

$$\therefore y_1\geq 0.5+\ln\frac{P(H_0)}{1-P(H_0)},\sigma^2=1$$

令：$th=0.5+\ln\dfrac{P(H_0)}{1-P(H_0)}$

$\because$由$\dfrac{d}{dq}\overline{C}\ (q,q_1)=C_{00}-C_{11}+A(q_1)+B(q_1)=0$

有$:C_{10}\alpha(q_0)+C_{00}(1-\alpha(q_0))=C_{01}\beta(q_0)+C_{11}(1-\beta(q_0))$

$\alpha(q_0)=\beta(q_0)$

$$\therefore\int_{th}^{\infty}f(y_1\backslash H_0)dy_1=\int_{-\infty}^{th}f(y_1\backslash H_1)dy_1$$

$$\int_{th}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{y_1{}^2}{2}\right]dy_1=\int_{-\infty}^{th}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(y_1-1)^2}{2}\right]dy_1=\int_{-\infty}^{th-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{y_1{}^2}{2}\right]dy_1$$

$\therefore th=0.5$

$$th=0.5+\ln\frac{P(H_0)}{1-P(H_0)}\Rightarrow P(H_0)=0.5$$

五、Neyman-Pearson准则

1.基本思想： 在严格限制某一类错误概率，使正确判决的概率达最大，如P_d最大.

准则: 在虚警概率a一定条件下，使发现概率P_d最大（或β最小）.

$$H_1: \ Y = S + N$$

$$H_0: \ Y = N, \ \text{其中}S, N\text{分别为信号和噪声.}$$

利用拉格朗日法，构成目标函数：

$$L(R_0^n) = \beta + \lambda\alpha$$

在a约束条件下，使该式为最小的R_0^n即为待求的R_0^n.

利用拉格朗日法，构成目标函数：

$$L(R_0^n) = \beta + \lambda\alpha = P(D_0 \setminus H_1) + \lambda P(D_1 \setminus H_0)$$

在a约束条件下，使该式为最小的.的R_0^n即为待求的R_0^n.

若风险函数满足：
$$C_{00} = C_{11} = 0;$$
$$P(H_0)C_{10} = \lambda;\ P(H_1)C_{01} = 1$$

$$\overline{C} = \sum_j \sum_i C_{ij} P(D_i \mid H_j) P(H_j)$$
$$= P(D_0 \mid H_1) + \lambda P(D_1 \mid H_0) = L(R_0^n)$$

可见，此时的平均风险函数表达式与目标函数相同，使上式最小的R_0^n即为L(R_0^n)的极值解.

由$\overline{C} = P(D_0 | H_1) + \lambda P(D_1 | H_0) = L(R_0^n)$

有:$\int_{R_0^n} f(Y | H_1)dY + \lambda[1 - \int_{R_0^n} f(Y | H_0)dY$

$\Big\Downarrow$ **最小**

$[f(Y|H_1) - \lambda f(Y|H_0)] < 0 \Longrightarrow Y \in R_0{}^n, H_0$为真

判决规则:

$$\frac{f(Y \backslash H_1)}{\underline{f(Y \backslash H_0)}} > \lambda \Longrightarrow$$

H_1为真, 有信号

否则, H_0为真, 无信号

似然比

门限λ由给定的虚警概率α确定.

例3: 二元通信系统，

H_1： $y(t)=1+n(t)$

H_0： $y(t)=n(t)$，其中$n(t)$分别噪声.

$\alpha=0.5, n(t)$为零均值方差为σ^2的高斯噪声，

若采用Neyman-pearson准则，请求出判决规则。

$$\because f(y_i \backslash H_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left[-\frac{(y_i-1)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$f(y_i \backslash H_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left[-\frac{y_i^{\ 2}}{2\sigma^2}\right]$$

$$\therefore L(Y)=\frac{f(Y \backslash H_1)}{f(Y \backslash H_0)}=\prod_{i=1}^{n}\ \frac{f(y_i \backslash H_1)}{f(y_i \backslash H_0)}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma})^n}\exp\left[-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{(y_i-1)^2}{2\sigma^2}\right]}{(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}})^n\exp\left[-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{y_i^{\ 2}}{2\sigma^2}\right]}=\exp\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{2y_i-1)}{2\sigma^2}\right]$$

则得判决规则为： $$L(Y)=\exp\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{2y_i-1)}{2\sigma^2}\right]\geq\lambda$$

取对数有： $$\sum_{i=1}^{n}\frac{2y_i-1}{2\sigma^2}\geq\ln\lambda,\text{即}$$

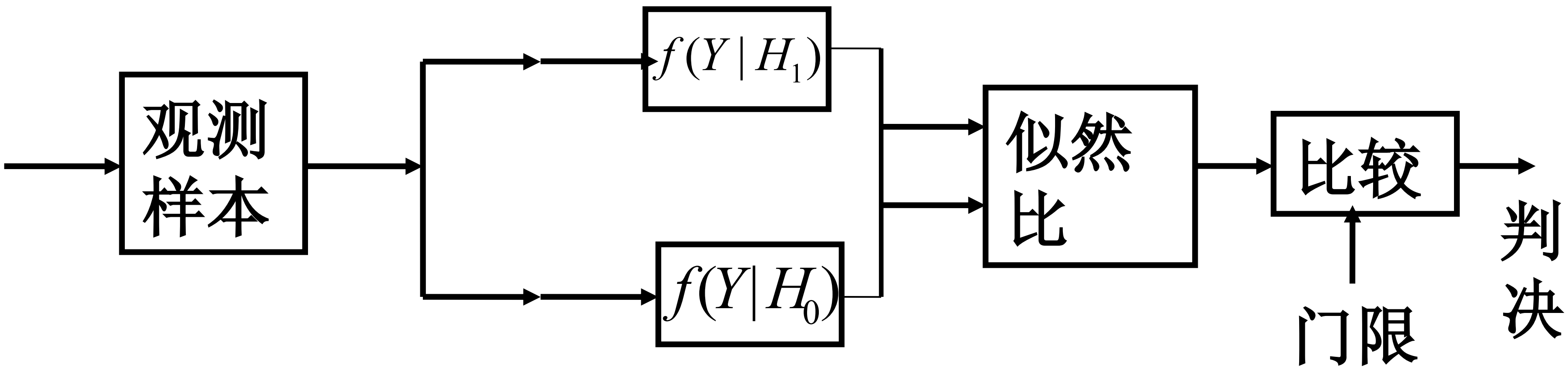
等效判决规则为： $$\sum_{i=1}^{n}y_i\geq\sigma^2\ln\lambda+n/2=th$$

$$\text{令}Z=\sum_{i=1}^{n}y_i$$

$$\text{则}f(Z\,|\,H_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(n\sigma^2)^{1/2}}e^{-\frac{Z^2}{2n\sigma^2}}$$

$$\therefore\int_{th}^{\infty}f(Z\,|\,H_0)dZ=\alpha \Longrightarrow$$ **计算出th, λ**

似然比检验对应的最佳检测器



3.3　确知信号的检测

- 高斯白噪声
- 限带高斯白噪声

1、高斯白噪声下确知信号的检测

二元确知信号:

H_1: $Y=S_1+N$

H_0: $Y=S_2+N$, 其中S_1和S_2为信号, N为均值为0的高斯白噪声.

$$S_1=\{s_{11},s_{12},\ldots s_{1n}\}^T, S_2=\{s_{21},s_{22},\ldots s_{2n}\}^T; N=\{n_1,n_2,\ldots n_n\}^T$$

$$f(Y\backslash H_1)=\prod_{i=1}^{n}f(y_i\backslash H_1)$$

$$f(Y\backslash H_0)=\prod_{i=1}^{n}f(y_i\backslash H_0)$$

$$\therefore Z=\frac{f(Y\backslash H_1)}{f(Y\backslash H_0)}=\prod_{i=1}^{n}\frac{f(y_i\backslash H_1)}{f(y_i\backslash H_0)}$$

$$\therefore Z=\frac{f(Y\backslash H_1)}{f(Y\backslash H_0)}=\prod_{i=1}^{n}\frac{f(y_i\backslash H_1)}{f(y_i\backslash H_0)}$$

$$\because f(y_i\backslash H_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(y_i-s_{1i})^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$f(y_i\backslash H_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(y_i-s_{2i})^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$\therefore Z=\frac{f(Y\backslash H_1)}{f(Y\backslash H_0)}=\exp\left[-\sum_{i=1}^{n}\frac{2y_is_{2i}-2y_is_{1i}-(s_{2i}^2-s_{1i}^2)}{2\sigma^2}\right]$$

若先验概率已知且相等，则得判决规则为：

$$\exp\left[-\sum_{i=1}^{n}\frac{2y_is_{2i}-2y_is_{1i}-(s_{2i}^2-s_{1i}^2)}{2\sigma^2}\right]\geq 1 \Rightarrow$$

H_1为真, 有信号

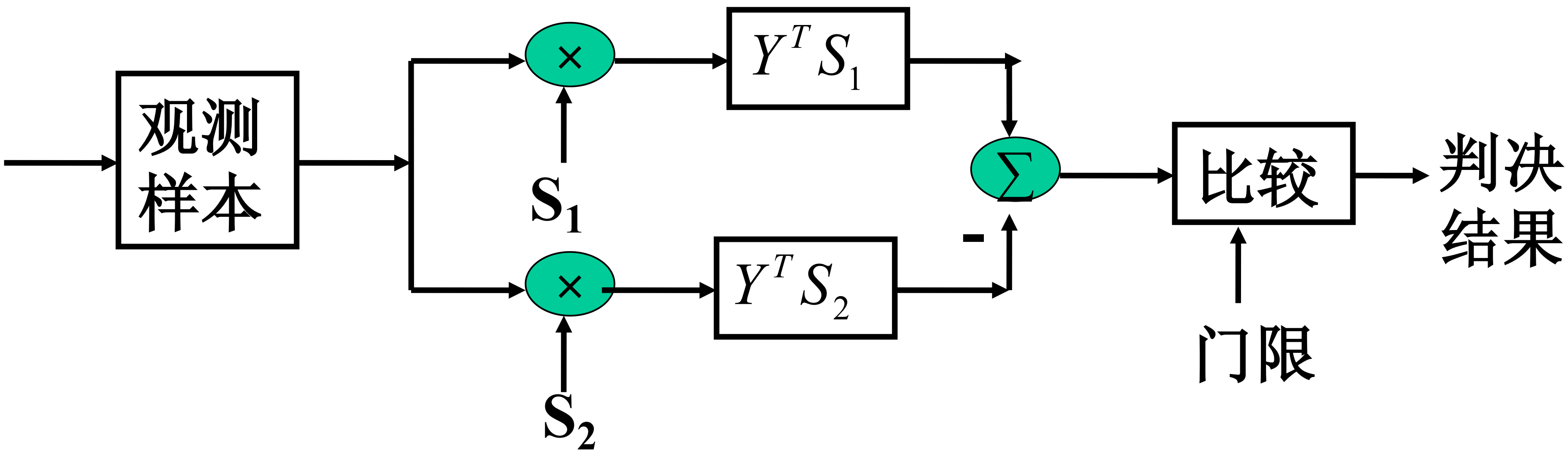
否则, H_0为真, 无信号

$$即:\left[-\sum_{i=1}^{n}\frac{2y_is_{2i}-2y_is_{1i}-(s_{2i}^2-s_{1i}^2)}{2\sigma^2}\right]\geq 0$$

等效判决规则为:

$$Y^T(S_1-S_2)\geq\frac{1}{2}(S_1{}^TS_1-S_2{}^TS_2) \Rightarrow H_1为真,有信号$$

否则, H_0为真, 无信号



二元确知信号最佳检测器

(相关接收器)

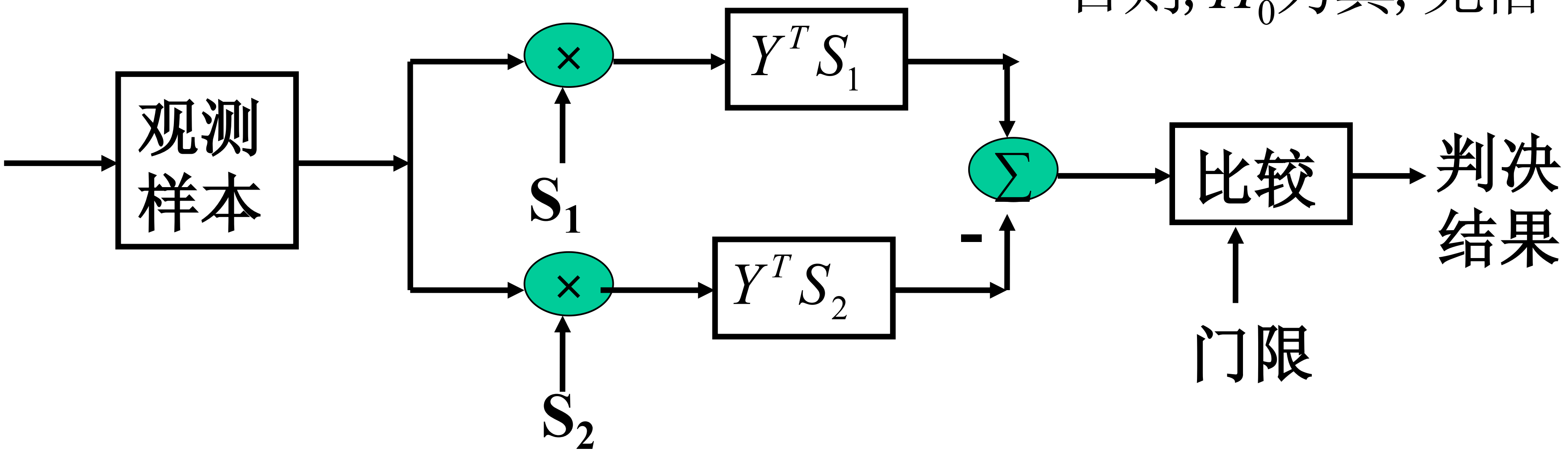
$$Y^T(S_1 - S_2) \ge \frac{1}{2}(S_1^T S_1 - S_2^T S_2)$$

两边各加$\frac{1}{2}Y^T Y$,有:

等效判决规则为:

$$(Y - S_2)^T (Y - S_2) \ge (Y - S_1)^T (Y - S_1) \Longrightarrow H_1\text{为真, 有信号}$$

否则, H_0为真, 无信号



二元确知信号最佳检测器

(相关接收器)

2、限带高斯白噪声下确知信号的检测

H_1： $y(t)=s_1(t)+n(t)$

H_0： $y(t)=s_2(t)+n(t)$，其中$s_1(t)$和$s_2(t)$为信号,$n(t)$为限带高斯白噪声（均值为0, 方差为σ^2）.

$P_n(\omega)=N_0/2, |\omega|<\Omega$

由功率谱有, 限带高斯白噪声的自相关函数为:

$$R_n(\tau)=\frac{N_0\Omega}{2\pi}\frac{\sin\Omega\tau}{\Omega\tau}$$

当$\tau=\dfrac{k\pi}{\Omega}$时,$R_n(\tau)=0\Rightarrow$不相关

$\therefore$ 对限带高斯白噪声，以间隔$\Delta t=\dfrac{\pi}{\Omega}$采样，

可得到高斯白噪声序列$n(k)$.

⇩

对限带高斯白噪声下确知信号的检测可采用高斯白噪声下确知信号的检测方法实现。

3、相关接收检测性能分析

当先验概率相等时，判决规则为：

$$Y^T(S_1 - S_2) \geq \frac{1}{2}(S_1{}^T S_1 - S_2{}^T S_2)$$

$$Y^T S_1 - Y^T S_2 + \frac{1}{2}(S_2{}^T S_2 - S_1{}^T S_1) \geq 0 \Longrightarrow H_1\text{为真}$$

等效检验统计量为：$G = Y^T S_1 - Y^T S_2 + \frac{1}{2}(S_2{}^T S_2 - S_1{}^T S_1)$

一维高斯随机变量

门限为0。

错误概率：

$$P(D_0 \backslash H_1) = \int_{-\infty}^{0} f(G \backslash H_1)\, dG$$

$$P(D_1 \backslash H_0) = \int_{0}^{\infty} f(G \backslash H_0)\, dG$$

错误概率：

$$P(D_0 \backslash H_1) = \int_{-\infty}^{0} f(G \backslash H_1)dG$$

$$P(D_1 \backslash H_0) = \int_{0}^{\infty} f(G \backslash H_0)dG$$

平均错误概率为：

$$P_e = P(H_0)P(D_1 \backslash H_0) + P(H_1)P(D_0 \backslash H_1)$$

$$= \frac{1}{2}[P(D_1 \backslash H_0) + P(D_0 \backslash H_1)]$$

H_0下G的均值为：

$$E[G \backslash H_0] = E[Y^T S_1 - Y^T S_2 + \frac{1}{2}(S_2{}^T S_2 - S_1{}^T S_1) \backslash H_0]$$

$$= E[(S_2 + N)^T S_1 - (S_2 + N)^T S_2 + \frac{1}{2}(S_2{}^T S_2 - S_1{}^T S_1)]$$

$$= S_2{}^T S_1 - \frac{1}{2}(S_2{}^T S_2 + S_1{}^T S_1)] = -\frac{1}{2}[(S_2 - S_1)^T (S_2 - S_1)]$$

$$G - E[G \backslash H_0] = [Y^T S_1 - Y^T S_2 + \frac{1}{2}(S_2{}^T S_2 - S_1{}^T S_1)] - S_2{}^T S_1 + \frac{1}{2}(S_2{}^T S_2 + S_1{}^T S_1)]$$

$$= N^T (S_1 - S_2)$$

H_0下G的方差为:

$$Var[G \backslash H_0] = E\left\{[G - E(G \backslash H_0)]^2 \backslash H_0\right\}$$

$$= E\left\{[N^T(S_2 - S_1)]^2\right\} = E\left\{[(S_2 - S_1)^T NN^T (S_2 - S_1)\right\}$$

$$= \sigma_n^2 (S_2 - S_1)^T (S_2 - S_1)$$

令信号平均能量为$E = \frac{1}{2} S_2^T S_2 + \frac{1}{2} S_1^T S_1$

则互相关系数: $\rho = \frac{S_2^T S_1}{E}$

$$\therefore E[G \backslash H_0] = S_2^T S_1 - \frac{1}{2}(S_2^T S_2 + S_1^T S_1)] = -E(1-\rho)$$

$$Var[G \backslash H_0] = 2\sigma_n^2 E(1-\rho)$$

$$\therefore E[G \backslash H_0] = S_2{}^T S_1 - \frac{1}{2}(S_2{}^T S_2 + S_1{}^T S_1)] = -E(1-\rho)$$

$$Var[G \backslash H_0] = 2\sigma_n^2 E(1-\rho)$$

$$\therefore f(G \backslash H_0) = \left[\frac{1}{2\pi\sigma_n^2 \cdot 2E(1-\rho)}\right]^{1/2} \exp\left\{-\frac{[G+E(1-\rho)]^2}{2\cdot 2\sigma_n^2 E(1-\rho)}\right\}$$

$$\text{同理有}: E[G \backslash H_1] = -S_2{}^T S_1 + \frac{1}{2}(S_2{}^T S_2 + S_1{}^T S_1)] = E(1-\rho)$$

$$Var[G \backslash H_1] = 2\sigma_n^2 E(1-\rho)$$

$$\therefore f(G \backslash H_1) = \left[\frac{1}{2\pi\sigma_n^2 \cdot 2E(1-\rho)}\right]^{1/2} \exp\left\{-\frac{[G-E(1-\rho)]^2}{2\cdot 2\sigma_n^2 E(1-\rho)}\right\}$$

$$\therefore P(D_1 \setminus H_0) = \int_0^{\infty} f(G \setminus H_0) dG$$

$$= \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi\sigma_n^2 \cdot 2E(1-\rho)} \right]^{1/2} \exp\left\{ -\frac{[G+E(1-\rho)]^2}{2 \cdot 2\sigma_n^2 E(1-\rho)} \right\} dG$$

令 $z = \dfrac{[G+E(1-\rho)]}{\sigma_n \cdot \sqrt{2E(1-\rho)}}, dz = \dfrac{1}{\sigma_n \cdot \sqrt{2E(1-\rho)}} dG$

$$\therefore P(D_1 \setminus H_0) = \int_{\frac{E(1-\rho)}{\sigma_n \cdot \sqrt{2E(1-\rho)}}}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{1/2} \exp[-\frac{z^2}{2}] dz$$

同理：

$$P(D_0 \setminus H_1) = \int_{-\infty}^{-\frac{E(1-\rho)}{\sigma_n \cdot \sqrt{2E(1-\rho)}}} \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{1/2} \exp[-\frac{z^2}{2}] dz$$

即：$P(D_1 \setminus H_0) = P(D_0 \setminus H_1)$

平均错误概率:

$$P_e = P(D_1 \setminus H_0) = \int_{\frac{E(1-\rho)}{\sigma_n \cdot \sqrt{2E(1-\rho)}}}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi}\right]^{1/2} \exp[-\frac{z^2}{2}]dz$$

由上有，二元确知信号的平均错误概率取决于三个因素:

(1)平均能量;

(2高斯白噪声的方差;

(3)确知信号的相关系数.

相干相移键控系统(CPSK)，在这种系统中，二元信号是相位相差180°的正弦信号，发射机发送的信号是 $s_1(t) = -A\sin\omega_c t\ (0,T)$，$s_2(t) = A\sin\omega_c t\ (0,T)$；

相干频移键控系统(CFSK)，在这种系统中，二元信号是 $s_1(t) = A\sin\omega_1 t\ (0,T)$，$s_2(t) = A\sin\omega_2 t\ (0,T)$，$\omega_1 - \omega_2 = \frac{n_1\pi}{T}$，$\omega_1 + \omega_2 = \frac{n_2\pi}{T}$，$n_2 > n_1$，都为整数。

4、连续观测样本下确知信号的检测(最佳接收机设计)

H_1：$y(t)=s_1(t)+n(t)$

H_0：$y(t)=s_2(t)+n(t)$，其中$s_1(t)$和$s_2(t)$为信号,$n(t)$为限带高斯白噪声（均值为0, 方差为σ^2).,码元间隔为T

$$P_n(\omega)=N_0/2, |\omega|<\Omega$$

由功率谱有, 限带高斯白噪声的自相关函数为:

$$R_n(\tau)=\frac{N_0\Omega}{2\pi}\frac{\sin\Omega\tau}{\Omega\tau}$$

当以$\frac{\pi}{\Omega}$间隔采样时$\Rightarrow$不相关

$$\because f(y_i \setminus H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(y_i - s_{1i})^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

$$f(y_i \setminus H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(y_i - s_{2i})^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

$$\therefore f(Y \setminus H_i) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^{\ 2}}\right)^{1/2} \exp\left[-\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - s_i\ )^2}{2\sigma_n^{\ 2}} \right]$$

$$\because R_n(0) = \frac{N_0\Omega}{2\pi} = \sigma_n^2$$

$$\Rightarrow \sigma_n^2 = \frac{N_0}{2\Delta t}$$

$$\therefore f(Y \setminus H_i) = \left(\frac{\Delta t}{\pi N_0}\right)^{1/2} \exp\left[-\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - s_i\ )^2 \Delta t}{N_0} \right]$$

$\therefore$ 当 $\Delta t \to 0$,离散样本近似为连续样本， 此时

$$f(y(t) \backslash H_i) = \lim_{\Delta t \to 0} f(Y \backslash H_i)$$

$$= (\frac{\Delta t}{\pi N_0})^{1/2} \exp\left[-\frac{1}{N_0}\int [y(t) - s_i(t)]^2 dt\right]$$

$$= K \exp\left[-\frac{1}{N_0}\int [y(t) - s_i(t)]^2 dt\right]$$

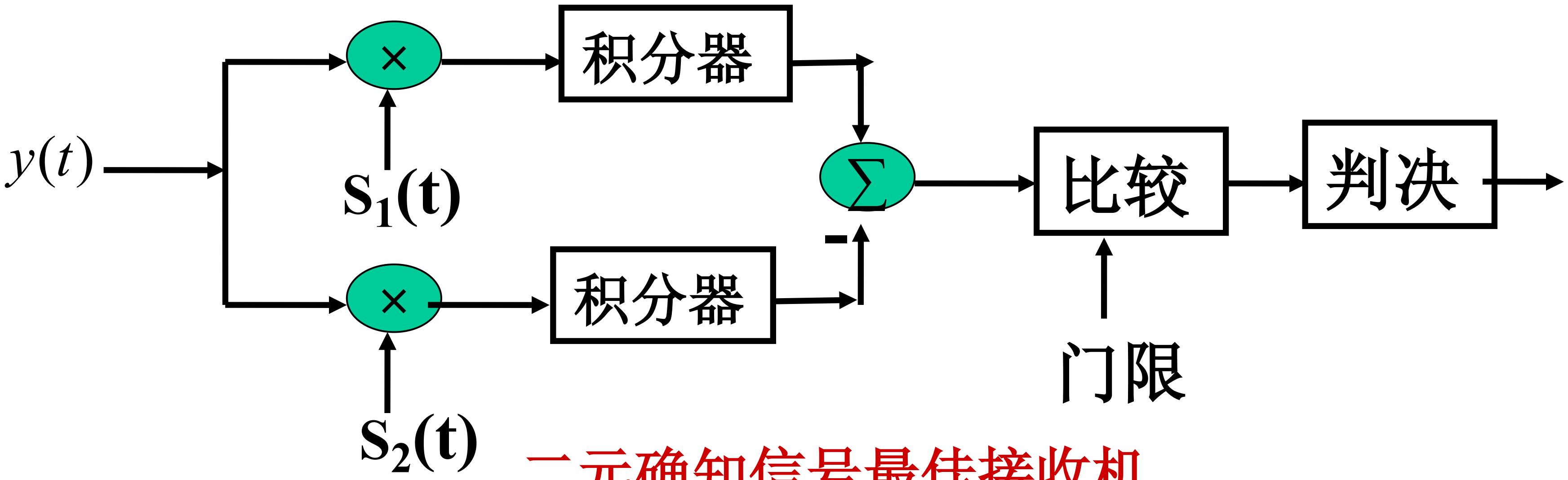
判决规则为: $\dfrac{f(y(t)\backslash H_1)}{f(y(t)\backslash H_0)} \geq \lambda$ ⟹ **H_1为真**

即: $\int_{-\infty}^{\infty} y(t)s_1(t)dt - \int_{-\infty}^{\infty} y(t)s_2(t) \geq \frac{N_0}{2}\ln\lambda + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} [s_1^2(t) - s_2^2(t)]\, dt = th$

判决门限: $th = \frac{N_0}{2}\ln\lambda + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} [s_1^2(t) - s_2^2(t)]\, dt$

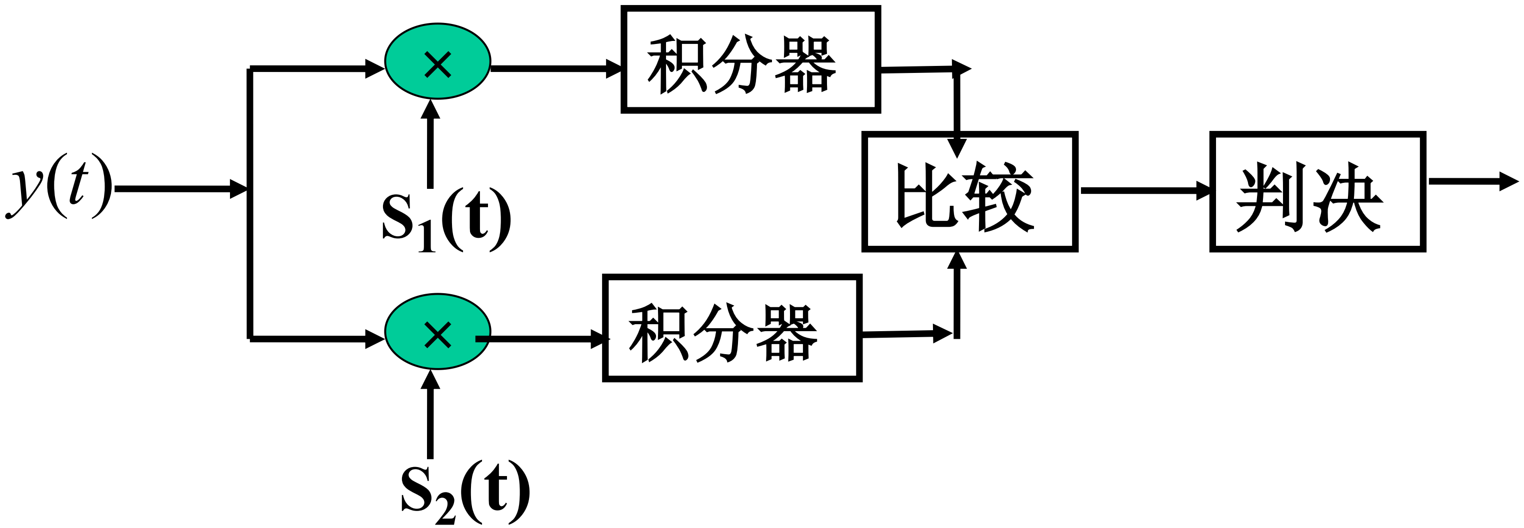
若$P(H_0) = P(H_1)$,同样可得相关接收的判决规则为:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t)s_1(t)dt - \int_{-\infty}^{\infty} y(t)s_2(t) \geq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} [s_1^2(t) - s_2^2(t)]\, dt$$



二元确知信号最佳接收机

若$P(H_0)=P(H_1)$, $s_1(t)$与$s_2(t)$能量相等，则有：$\int_{-\infty}^{\infty} y(t)s_1(t)dt-\int_{-\infty}^{\infty} y(t)s_2(t)\geq 0$



二元ASK通信系中,发送确知信号$S_1(t)=A\cos 2\pi f_c t$, $S_2(t)=0$,发送概率相等,信道加性高斯白噪声,功率谱为N/2,设计最佳接收机

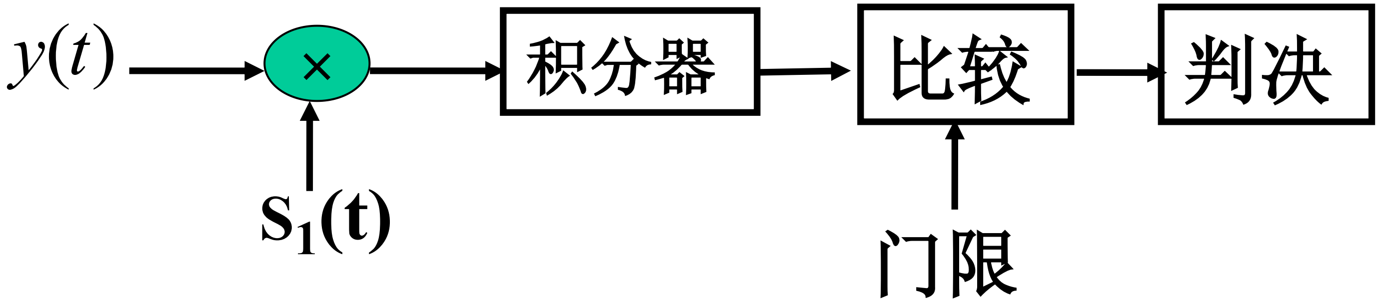
解:由题有: $\int_{-\infty}^{\infty} y(t)s_1(t)dt-\int_{-\infty}^{\infty} y(t)s_2(t)dt\ge\frac{N_0}{2}\ln\lambda+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[s_1^2(t)-s_2^2(t)]\,dt=th$

判决门限: $th=\frac{N_0}{2}\ln\lambda+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[s_1^2(t)-s_2^2(t)]\,dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[s_1^2(t)-s_2^2(t)]\,dt$

$\because\int_0^T s_1^2(t)dt=\frac{A^2T}{2},\int_0^T s_2^2(t)dt=0$

$\therefore$判决规则为:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t)s_1(t)dt\ge\frac{A^2T}{4}$$



3.4 多观测样本的累积效应

平均错误概率:

$$P_e = P(D_1 \backslash H_0) = \int_{\frac{E(1-\rho)}{\sigma_n \cdot \sqrt{2E(1-\rho)}}}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi}\right]^{1/2} \exp[-\frac{z^2}{2}]dz$$

由上有，二元确知信号的平均错误概率取决于三个因素:

(1) 平均能量;

(2）高斯白噪声的方差;

(3) 确知信号的相关系数.

意味着: 增加信噪比和减小相关系数可提高检测性能.

增加信噪比途径:增加信号发射功率;增加观测样本等.

H_1： $Y = A + N$， $A > 0$

H_0： $Y = N$， N高斯白噪声（均值为0, 方差为σ^2）.

样本数m,虚警概率给定.

$$则 Z = \frac{f(Y \backslash H_1)}{f(Y \backslash H_0)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{f(y_i \backslash H_1)}{f(y_i \backslash H_0)}$$

$$\because f(y_i \backslash H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(y_i - A)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$f(y_i \backslash H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{{y_i}^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$\therefore Z = \frac{f(Y \backslash H_1)}{f(Y \backslash H_0)} = \exp\left[\sum_{i=1}^{m} \frac{2Ay_i - A^2}{2\sigma^2}\right]$$

采用Neyman-pearson准则，则得判决规则为：

$$\therefore Z=\frac{f(Y\backslash H_1)}{f(Y\backslash H_0)}=\exp\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{2Ay_i-A^2}{2\sigma^2}\right]\geq th$$

判为H_1, 否则,

判为H_0

则等效判决规则为：

$$\therefore \sum_{i=1}^{m}\frac{2Ay_i-A^2}{2\sigma^2}\geq th'=\ln th$$

$$\therefore z=\sum_{i=1}^{m}y_i\geq th1$$

$$z'=\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{i=1}^{m}y_i\geq\frac{1}{\sqrt{m}}th1=th2$$

判为H_1,

否则, 判为H_0

检验统计量z'仍是高斯随机变量

H_1下z的均值和方差为:

$$E[z' \backslash H_1] = E[\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{i=1}^{m} y_i \backslash H_1] = E[\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{i=1}^{m}(n_i + A)] = \sqrt{m}A$$

$$\mathrm{var}[z' \backslash H_1] = E[z'^2 \backslash H_1] = E[(\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{i=1}^{m} n_i)^2] = \sigma^2$$

H_0下z的均值和方差为:

$$E[z' \backslash H_0] = E[\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{i=1}^{m} y_i \backslash H_0] = E[\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{i=1}^{m} n_i] = 0$$

$$\mathrm{var}[z' \backslash H_0] = E[z'^2 \backslash H_0] = E[(\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{i=1}^{m} y_i)^2 \backslash H_0] = \sigma^2$$

$$\therefore\ f(z' \backslash H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{z'^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$f(z' \backslash H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(z-\sqrt{m}A)^2}{2\sigma^2}\right]$$

则门限可由下式确定:

$$P_{fa}=\int_{th2}^{\infty}f(z'\backslash H_0)dz'=\int_{th2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left[-\frac{z'^2}{2\sigma^2}\right]dz'$$

根据上式可知,门限与样本数无关.

则检测概率为:

$$P_d=\int_{th2}^{\infty}f(z'\backslash H_1)dz'=\int_{th2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left[-\frac{(z'-\sqrt{m}A)^2}{2\sigma^2}\right]dz'$$

当m增大时,检测概率也增大; m越大,检测概率也越大。

m增大时,检测概率也增大的原因分析

H_1下检验统计量z'为:

$$z' = \frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{i=1}^{m}(n_i + A) = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{n_i}{\sqrt{m}} + \frac{A}{\sqrt{m}}\right) = \underbrace{\sum_{i=1}^{m}\frac{n_i}{\sqrt{m}}}_{\text{噪声}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m}\frac{A}{\sqrt{m}}}_{\text{信号}}$$

检验统计量z'中信噪比为:

$$\frac{S}{N} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{A}{\sqrt{m}}\right)^2}{E\left[\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{n_i}{\sqrt{m}}\right)^2\right]} = \frac{(\sqrt{m}A)^2}{E\left[\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{n_i}{\sqrt{m}}\right)^2\right]} = \frac{(\sqrt{m}A)^2}{\sigma^2}$$

结论: 多观测样本条件下，检验统计量中信号相对于噪声的信噪比增加了m倍。

3.5 匹配滤波器

滤波器是一种以物理硬件或计算机软件形式，从含噪声的观测数据中抽取信号的装置。滤波器可以实现滤波、平滑和预测等信息处理的基本任务。

两种常用的最优滤波器——匹配滤波器和Wiener滤波器。

匹配滤波器设计准则：使滤波器的输出达到最大信噪比。

Wiener滤波器设计准则： 输出滤波器的均方估计误差为最小。

一、白噪声下的匹配滤波器

1、匹配滤波器频域和时域特性：

观测信号：$y(t)=s(t)+n(t)$　且$P_n(\omega)=N_0/2$

$$y(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y_0(t)=s_0(t)+n_0(t)$$

最大信噪比准则：输出信号的瞬时功率与输出噪声平均功率比值最大。

假定t_0时刻输出信号峰值，则:

$$(SNR)_o=\frac{|s_o(t_0)|^2}{E\{n_0^2(t)\}}$$

一、白噪声下的匹配滤波器

借助于许瓦兹不等式，可得 $H(f)$

许瓦兹不等式：

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} u(f)v(f)df\right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} |u(f)|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |v(f)|^2 df$$

且当 $u(f)=cv^*(f)$ 时，上式等号成立。c为任意常数。

$$\therefore (\mathrm{SNR})_o = \frac{|s_o(t_0)|^2}{E\{n_0^2(t)\}} = \frac{\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)H(\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right|^2}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N_0}{2}|H(\omega)|^2 d\omega}$$

$$\Downarrow$$

$$\therefore (\mathrm{SNR})_o = \frac{|s_o(t_0)|^2}{E\{n_0^2(t)\}} \le \frac{(\frac{1}{2\pi})^2\int |S(\omega)|^2 d\omega \cdot \int |H(\omega)|^2 d\omega}{\frac{1}{2\pi}\int \frac{N_0}{2}|H(\omega)|^2 d\omega}$$

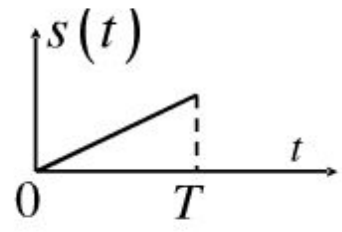
$$\le \frac{\frac{1}{2\pi}\int |S(\omega)|^2 d\omega}{N_0/2} = \frac{E_s}{N_0/2}$$

当且仅当$H(\omega) = CS^*(\omega)e^{-j\omega t_0}$,信噪比达最大

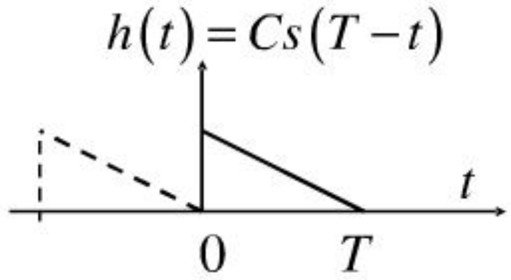
匹配滤波器频域特性：

$$H(\omega)=CS^*(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

时域特性：



$$h(t)=Cs(-t+t_0)=s(-t+t_0)\quad(令C=1)$$



且 $h(t_0/2)=s(t_0/2)$

$$h(t_0/2-\Delta)=s(t_0/2+\Delta)$$

一般取 $t_0\geq T$,T为s(t)持续期.

通常希望匹配滤波尽快实现输出信噪比的最大化，因此选取t_0＝T作为最大输出信噪比的时刻。

$$h(t)=s(T-t)\quad(令C=1)$$

一般来说，对于数字信号， $t_0=T$ ，即**MF**的输出在码元的最后时刻采样。

$$y_s(t)=s(t)*h(t)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}s(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

when $0\le t<T$

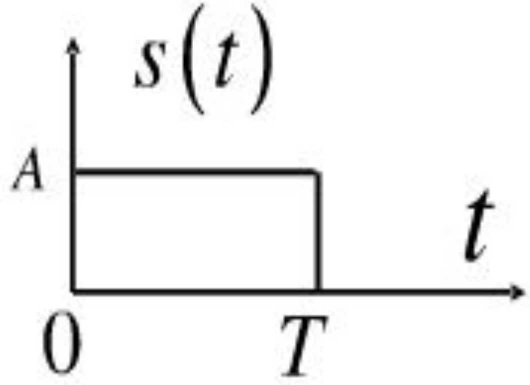
$$y_s(t)=\int_0^t A\cdot Ad\tau=A^2t$$

when $T\le t<2T$

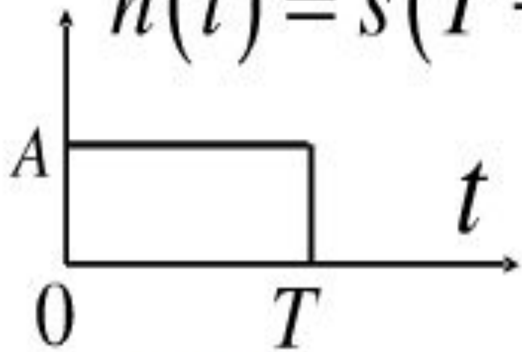
$$y_s(t)=\int_{t-T}^{T} A\cdot Ad\tau=A^2(2T-t)$$

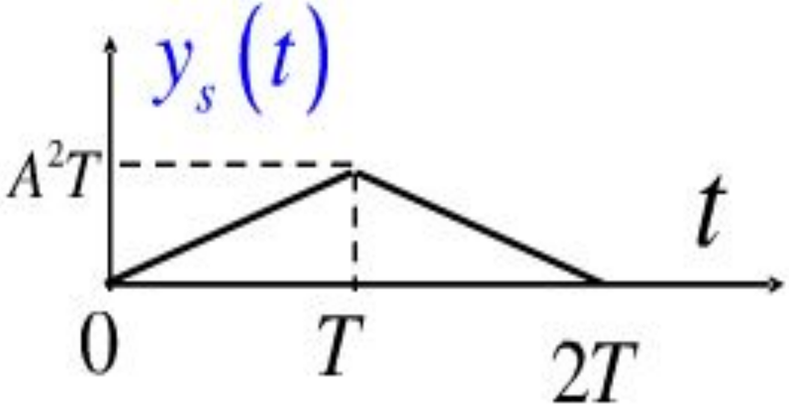
when t is other, $y_s(t)=0$

例**1**:



$$h(t)=s(T-t)$$





2、匹配滤波器性质：

- 在所有线性滤波器中，匹配滤波器的输出信噪比达最大。
- 匹配滤波器若对s(t)匹配,则也对As(t-τ)匹配。匹配滤波器对波形相同而幅值不同的时延信号具有适应性。
- 匹配滤波器对频移信号不匹配。

设$s_1(t)$是$s(t)$的频移信号，则:

$$S_1(\omega)=S(\omega+\omega_0)$$

对应于$s_1(t)$的匹配滤波器的频率响应为:

$$H_1(\omega)=S_1^*(\omega)e^{-j\omega t_0'}=S^*(\omega+\omega_0)e^{-j\omega t_0'}\neq H(\omega)$$

● 匹配滤波器的输出信号是s(t)的自相关函数。

$$s_0(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$= \int_0^T s(\tau) s(T - t + \tau) d\tau \ ,$$

$$= \int_0^T s(\tau) s(T - t + \tau) d\tau = R_s(t - T)$$

匹配滤波器的输出信号的整个波形相当于s(t)的自相关函数。

● 对s(t)的匹配滤波器，当输入y(t)= s(t)+ n(t)时，输出信号是s(t)与y(t)的互相关函数。

$$y_0(t) = y(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

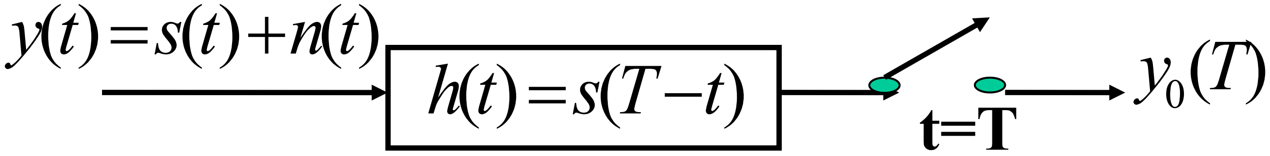
$$= \int_0^T s(T-\tau) y(t-\tau) d\tau$$

$$= R_{sy}(T-t)$$

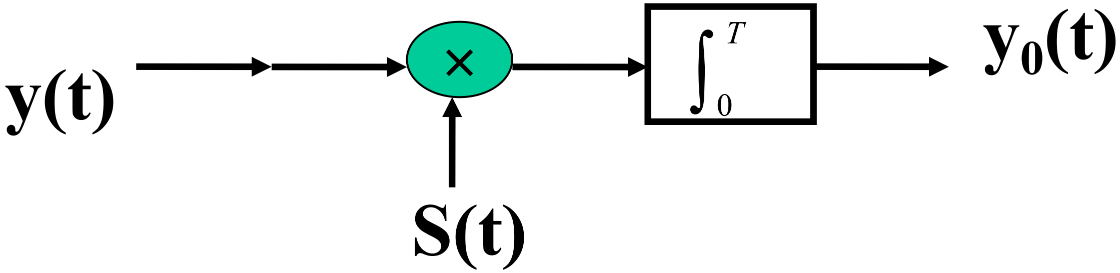
当$t = T$时，$y_0(T) = \int_0^T h(\tau) y(t-\tau) d\tau = \int_0^T s(T-\tau) y(T-\tau) d\tau$

令$T-\tau = \tau'$，有：

$$y_0(T) = \int_0^T s(\tau') y(\tau') d\tau' = \int_0^T s(t) y(t) dt$$



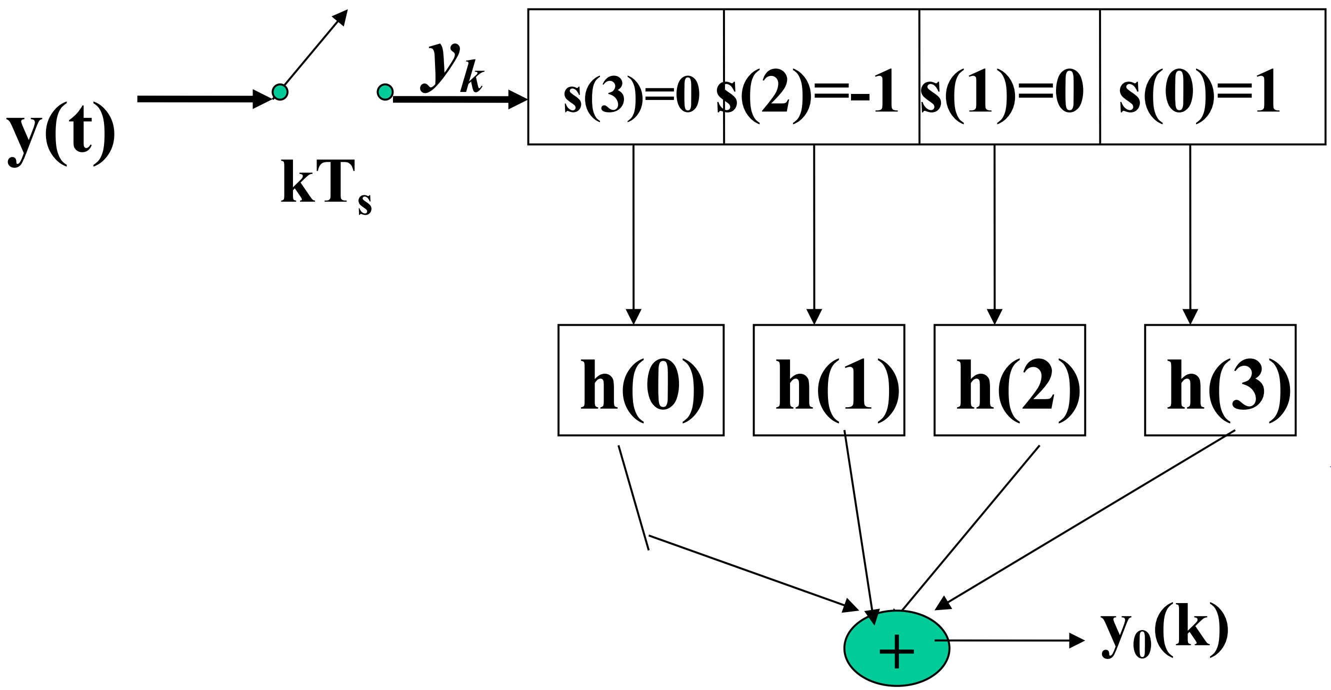
相关接收机中观测样本与确知信号的相关可通过确知信号的匹配滤波器在t=T的输出值得到。



• 数字技术和采样实现相关

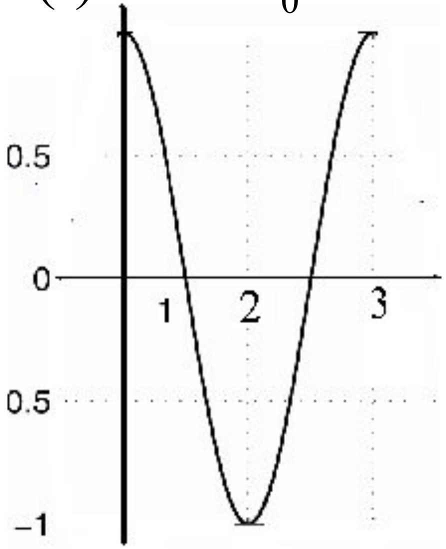
每个码元持续时间为T，以T_s间隔采样，k表示第k个采样点；则第k个采样点的输出为：

$$y_0(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)s(k-n)$$



忽略噪声下K=3时移位寄存器内容

$s(t) = \cos\omega_0 t$

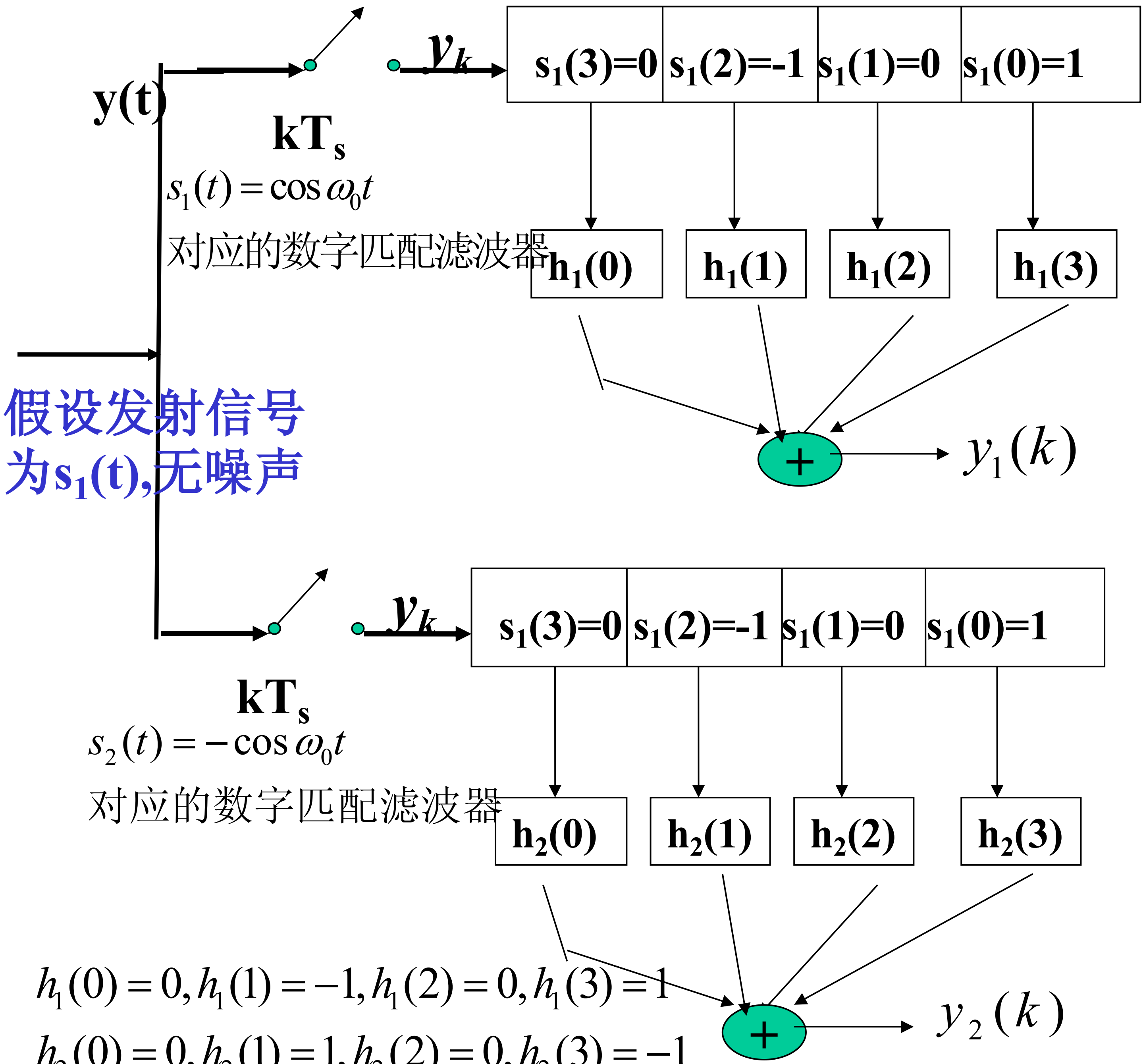


$$s(0)=1, s(1)=0, s(2)=-1, s(3)=0$$

$$h(0)=0, h(1)=-1, h(2)=0, h(3)=1$$

$$y_0(k)=\sum_{n=0}^{N-1} s(k-n)h(n)$$

$k=3$，$N=4$时，$y_0(3)=\sum_{n=0}^{4} s(3-n)h(n)=2$



假设发射信号为$s_1(t)$,无噪声

$$h_1(0)=0, h_1(1)=-1, h_1(2)=0, h_1(3)=1$$

$$h_2(0)=0, h_2(1)=1, h_2(2)=0, h_2(3)=-1$$

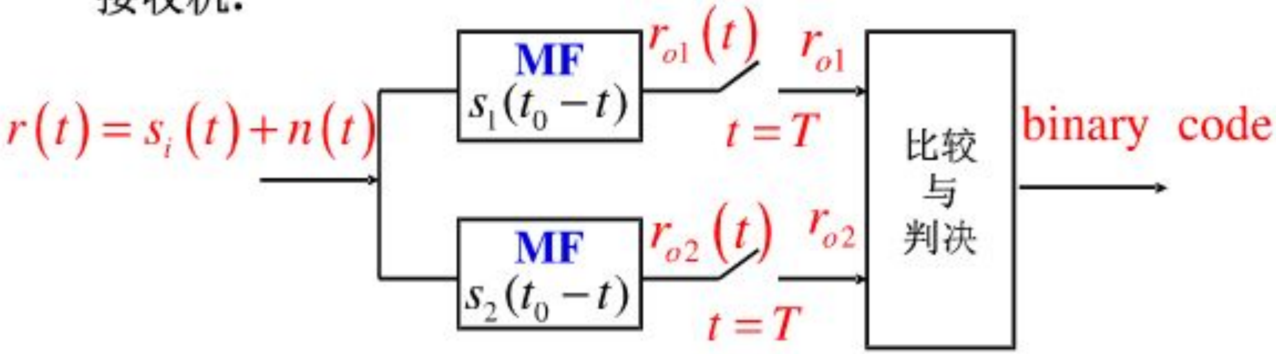
□ 二进制匹配滤波接收机

（1） 一般的二进制 MF 接收机

设信道是理想的， 噪声为 AWGN.

发射机：
$$\begin{cases} s_1(t), \text{发 "1"} \\ s_2(t), \text{发 "0"} \end{cases}$$

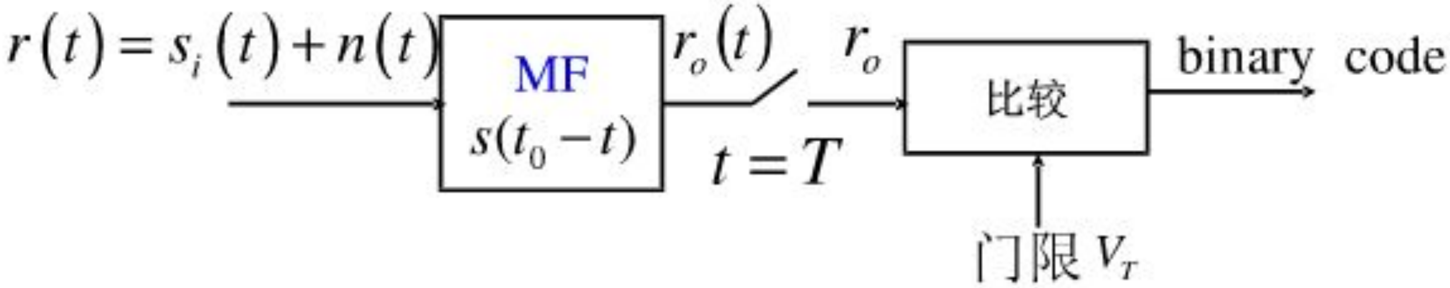
接收机:



$$\text{如果}: r_{o1} > r_{o2} \rightarrow \text{发 "1"}$$
$$\text{否则} \rightarrow \text{发 "0"}$$

（2）　　当$s_1(t), s_2(t)$具有相同的形状（单极性，双极性，ASK，BPSK…）

即: $\begin{cases} s_1(t) = s(t) \\ s_2(t) = -s(t) \quad or \ \ 0 \end{cases}$



$$\text{如果}: r_o > V_T \rightarrow \text{发 "1"} \quad \text{否则} \rightarrow \text{发 "0"}$$

□ 相关接收机

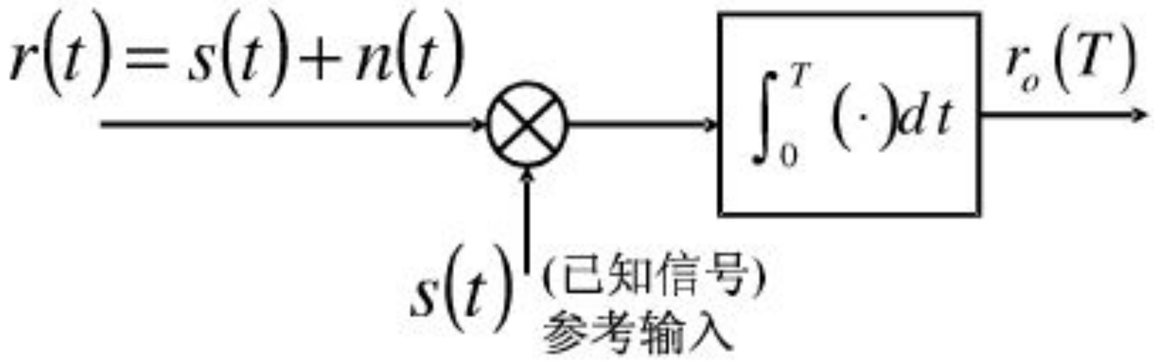
相关接收机和匹配滤波器的输出值在采样时刻相等

定理：对于白噪声的情形，匹配滤波器可以由相关器实现， 即

$$r_o(T)=\int_0^T r(t)\cdot s(t)\,dt$$

其中：　　$\boldsymbol{s(t)}$ --- 已知信号波形

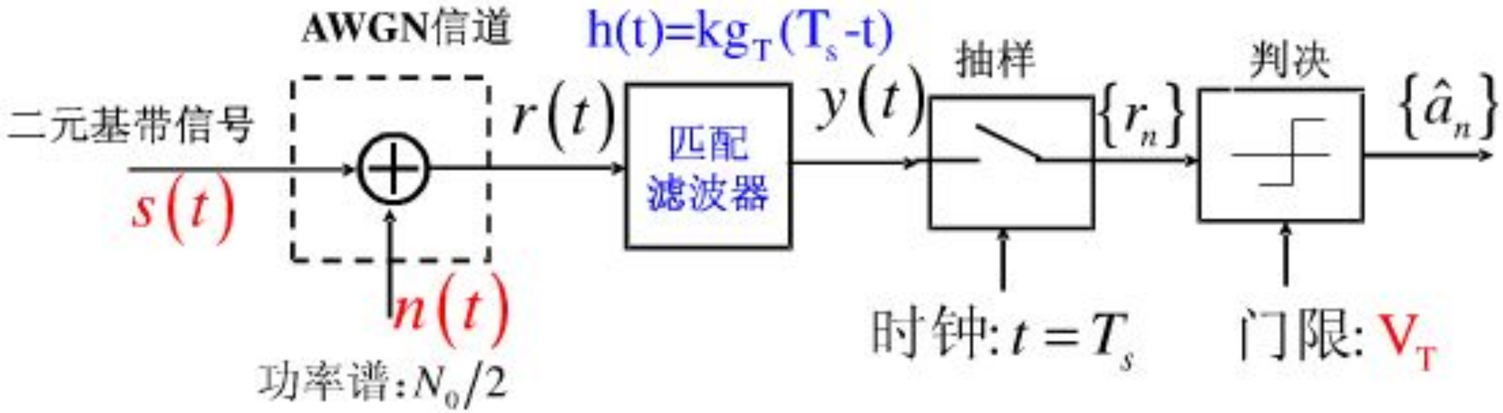
　　　　　$\boldsymbol{r(t)}$ --- 接收机的输入信号



利用匹配滤波的最佳接收方法

$s_0(t) = A_0 g_T(t)$
$s_1(t) = A_1 g_T(t)$

匹配滤波与脉冲 $g_T(t)$ “相匹配”，在 $t = nT_s$ 处抽样输出，具有最大的信噪比。

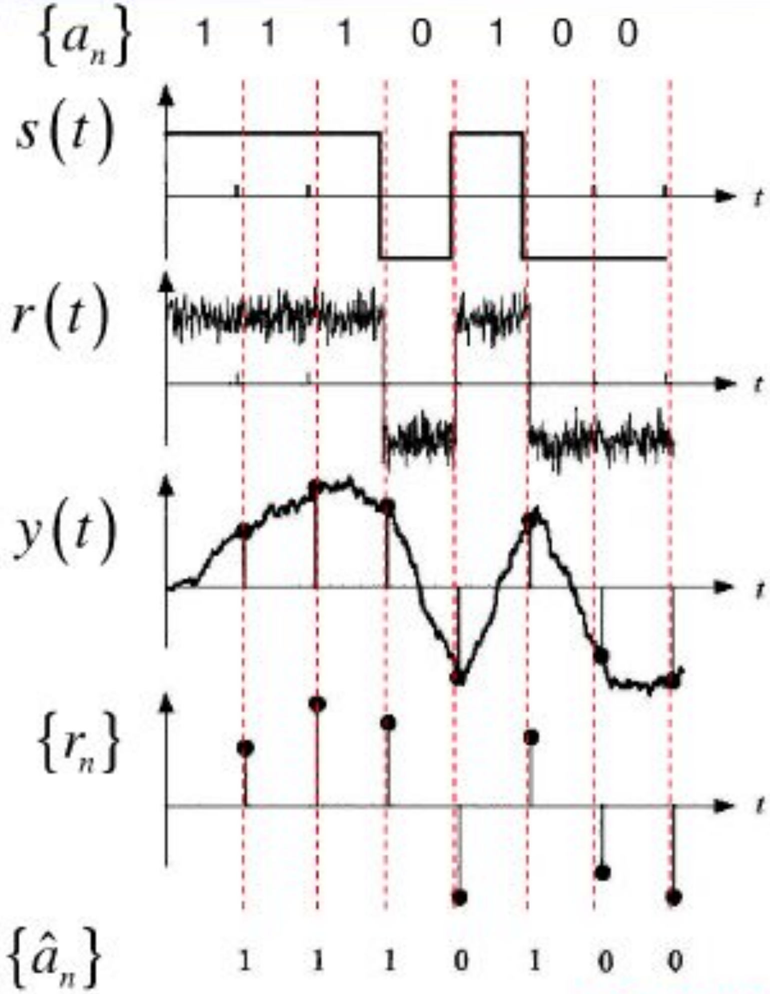


（**1**） $h(t) = kg_T(T_s - t)$

（**2**）在时隙的末端抽样

（**3**）判决门限两种输出峰值的中心。

MF输出的两种信号峰值



MF输出的两种信号峰值

例　采用匹配滤波器接收的双极性**2PAM**传输系统：假定双极性**NRZ**信号的幅度分别为**-A**与**+A**，**AWGN**信道的双边功率谱为 $\mathbf{N_0/2}$ 。计算匹配滤波器系统的 y_{s0}、y_{s1} 与 σ_n^2 ；并给出抽样值 r 的条件概率密度。

$g_T(t)$ 为单位幅度的矩形

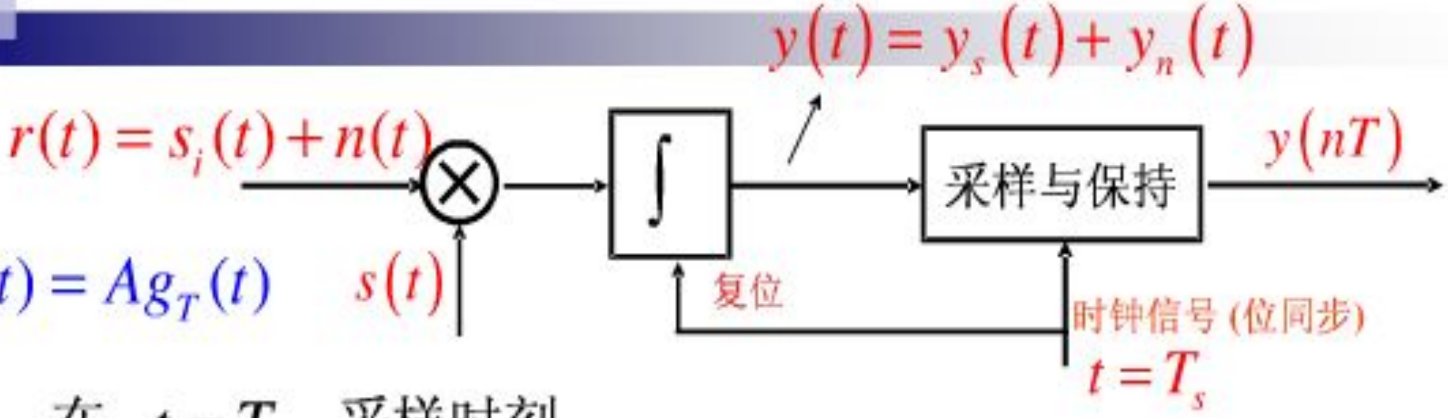
解：发 $s_0(t) = -Ag_T(t) \quad ,0 \le t < T_s\text{ , data} = 0$

$$s_1(t) = Ag_T(t) \quad ,0 \le t < T_s\text{ , data} = 1$$

MF: $h(t) = Ag_T(T_s - t) = Ag_T(t)$

MF输出信号分量：

$$\begin{cases} y_{s0}(t) = s_0(t) * h(t) = -A^2 g_T(t) * g_T(T_s - t) \\ y_{s1}(t) = s_1(t) * h(t) = +A^2 g_T(t) * g_T(T_s - t) \end{cases}$$



$s(t)=Ag_T(t)$

在 $t=T_s$ 采样时刻

$$\begin{cases} y_{s0}=-\int_0^{T_s}A^2g_T^2(t)dt=-\int_0^{T_s}s^2(t)dt=-E_s \\ y_{s1}=\int_0^{T_s}A^2g_T^2(t)dt=\int_0^{T_s}s^2(t)dt=E_s \end{cases}$$

$$E_s=\int_0^{T_s}s_1^2(t)dt=\int_0^{T_s}s_0^2(t)dt=A^2T_s \longrightarrow \text{平均码元能量}$$

白噪声通过 $h(t)$ 的输出噪声采样值:

$$y_n(T_s)=\int_0^{T_s}n(t)\cdot Ag_T(t)dt=\int_0^{T_s}An(t)dt$$

白噪声通过 $h(t)$ 的输出噪声功率 $t_0 = T_s$

$$\sigma_n^2 = E\left[y_n^{\ 2}(T_s)\right] = E\left[\int_0^{T_s} An(t)dt\int_0^{T_s} An(\tau)d\tau\right]$$

$$= A^2 E\left[\int_0^{T_s}\int_0^{T_s} n(\tau)n(t)d\tau dt\right] = A^2\int_0^{T_s}\int_0^{T_s} E\left[n(\tau)n(t)\right]d\tau dt$$

$$= A^2\int_0^{T_s}\int_0^{T_s}\frac{N_0}{2}\delta(t-\tau)\,d\tau dt = \frac{N_0}{2}A^2 T_s = \frac{N_0}{2}E_s$$

总之，
$$\begin{cases} y_{s0} = -E_s \\ y_{s1} = +E_s \end{cases}$$

与 $\sigma_n^2 = N_0 E_s / 2$

$y_{s0} = -E_s$, $y_{s1} = +E_s$, $\sigma_n^2 = N_0 E_s / 2$

抽样值***r***的条件概率密度：

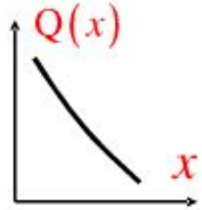
$$\begin{cases} f(r|0) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi N_0 E_s}} e^{-\frac{(r+E_s)^2}{N_0 E_s}} \\ f(r|1) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi N_0 E_s}} e^{-\frac{(r-E_s)^2}{N_0 E_s}} \end{cases}$$

$$P_{eMF} = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s(1-\rho)}{N_0}}\right)$$

$$V_T = \frac{y_{s1} + y_{s0}}{2} = 0$$

Q函数：$Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

$Q(-x) = 1 - Q(x)$

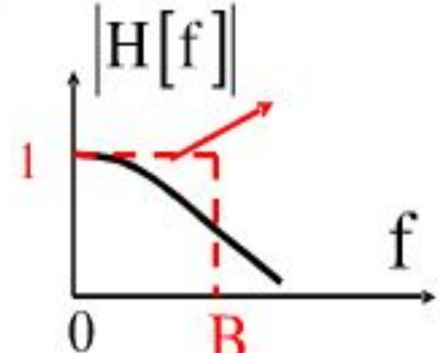


$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{(y_{s1} - y_{s0})^2}{4\sigma_n^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)$$

例 采用LPF接收的 极性2PAM(NRZ)传输系统：

幅度为-A与+A，LPF带宽为B。计算接收系统的 y_{s0}、y_{s1} 与 σ_n^2；并给出抽样值 r 的条件概率密度。

解：信号几乎完全通过LPF，



$$P_n(f)=\frac{N_0}{2}|H(f)|^2=\frac{N_0}{2} \quad ,|f|\le B$$

$$\begin{cases} y_{s0}\approx -A \\ y_{s1}\approx +A \end{cases}$$

$$V_T=\frac{y_{s1}+y_{s0}}{2}=0$$

$$\begin{cases} f(r|0)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi N_0 B}}e^{-\frac{(r+A)^2}{2N_0B}} \\ f(r|1)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi N_0 B}}e^{-\frac{(r-A)^2}{2N_0B}} \end{cases}$$

典型系统的 y_{s0}、y_{s1} 与 σ_n^2

模式	接收滤波器	y_{s0}	y_{s1}	σ_n^2
双极性	LPF	$-A$	$+A$	$N_0 B$
	匹配滤波器 $E_s=\int_{-\infty}^{+\infty} s_1^2(t)dt$	$-E_s$	$+E_s$	$\frac{N_0 E_s}{2}$
单极性	LPF	0	$+A$	$N_0 B$
	匹配滤波器 $E_s=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} s_1^2(t)dt$	0	$+2E_s$	$N_0 E_s$

$$E_s = A^2 T_s$$

$$E_s = \frac{A^2 T_s}{2}$$

E_s:平均码元能量

二、有色噪声下的匹配滤波器（广义匹配滤波器)

预白化：对有色噪声预处理，即设计一系统，使有色噪声通过后输出为白噪声。

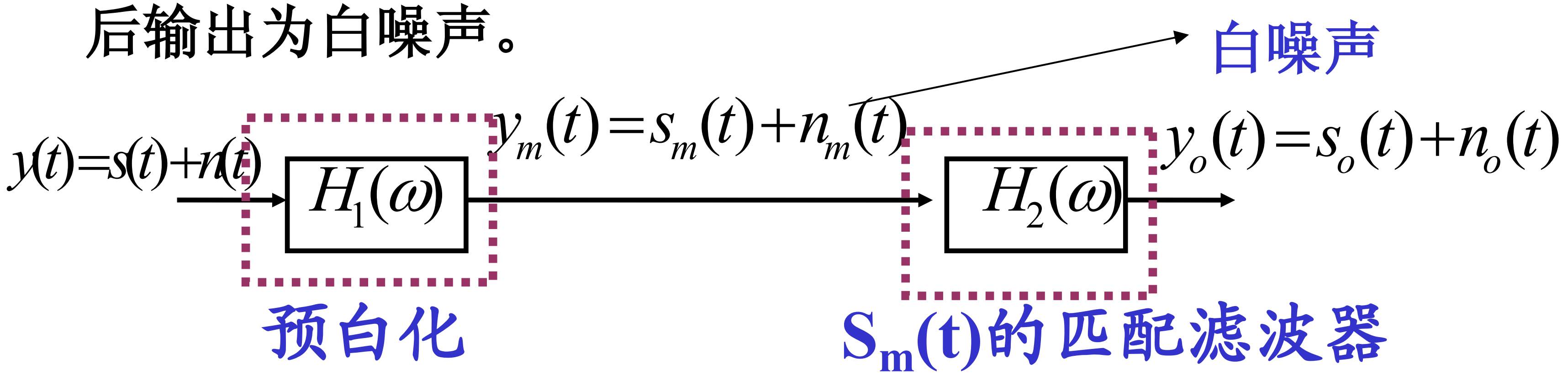


Figure:匹配滤波器

预白化滤波器: 假定$n_m(t)$功率谱为1,则：

$$P_{n_m} = P_{n_i} \cdot |H_1(\omega)|^2 = 1$$

$$\therefore \quad H_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{P_{n_i}}}$$

输入噪声功率谱

$S_m(t)$的匹配滤波器：

$$H_2(\omega)=S_m{}^*(\omega)e^{-j\omega t_0}=H_1^*(\omega)S^*(\omega)e^{-j\omega T}=\frac{S^*(\omega)e^{-j\omega T}}{\sqrt{P_{n_i}}}$$

广义匹配滤波器：

$$H(\omega)=H_1(\omega)\cdot H_2(\omega)=\frac{S^*(\omega)e^{-j\omega T}}{P_{n_i}}$$

三、匹配滤波器的实现

●在许多实际应用中，只能已知信号的功率谱，在这类情况下，需要从功率谱中分离出信号的频谱表达式S(ω)，然后设计匹配滤波器的传递函数。

●另外，在设计一有色噪声的白化滤波器时．也往往只知道噪声的功率谱。为了设计白化滤波器，也需要分解噪声功率谱。

谱分解：

谱分解：由功率谱获得频谱的过程称为功率谱的因式分解，简称谱分解。

对于任何一个平稳信号s(t)，其功率谱密度一般为有理函数，即可表示为：

$$P(\omega)=k\frac{(j\omega+z_1)(j\omega+z_2)\cdots(j\omega+z_m)}{(j\omega+p_1)(j\omega+p_2)\cdots(j\omega+p_n)}$$

由于功率谱是非负的实、偶函数，即：

$$P(\omega)=P^*(\omega)=P(-\omega)$$

$$P(\omega)=\left[\sqrt{k}\frac{(j\omega+\alpha_1)\cdots(j\omega+\alpha_q)}{(j\omega+\beta_1)\cdots(j\omega+\beta_p)}\right]\cdot\left[\sqrt{k}\frac{(-j\omega+\alpha_1)\cdots(-j\omega+\alpha_q)}{(-j\omega+\beta_1)\cdots(-j\omega+\beta_p)}\right]$$

其中α_i,β_i为左半平面零极点.

令$P^+(\omega)=\sqrt{k}\frac{(j\omega+\alpha_1)\cdots(j\omega+\alpha_q)}{(j\omega+\beta_1)\cdots(j\omega+\beta_p)}$,

$$P^-(\omega)=\sqrt{k}\frac{(-j\omega+\alpha_1)\cdots(-j\omega+\alpha_q)}{(-j\omega+\beta_1)\cdots(-j\omega+\beta_p)}$$

则$P(\omega)=P^+(\omega)P^-(\omega)$

此式称为谱分解

为了使匹配滤波器是物理可实现的，只要取：

则$S(\omega)=P^+(\omega)$

同样，只要取：

则 $$H_1(\omega)=\frac{1}{P_n^+(\omega)}$$

即可得到物理可实现的白化滤波器。

3.7 非参量恒虚警检测

- 存在干扰时,观测样本的概率密度函数未知,只知道分布特性的一些信息,如具有对称性等等.
- 非参量恒虚警检测有:符号检测,t检测

符号检测（最简单的非参量检测）

- 基本思想：根据观测样本的符号进行判决.
- 假设n(t)零中值，偶对称，独立同分布.

$$H_1: \ y(t)=s(t)+n(t) \Rightarrow y_k=s_k+n_k; s_k>0$$

$$H_0: \ y(t)=n(t) \qquad \Rightarrow \ y_k=n_k,$$

观测样本$Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)^T$

(1) n_k是零中值，即：$\mathrm{P}(n_k\le 0)=\ \mathrm{P}(n_k\ge 0)=0.5$

(2) 令$P\{y_k>0\}$为观测样本大于0的概率

则 $H_0: P_{H_0}=P\{y_k>0 \mid H_0\}=0.5,$

$$H_1: P_{H_1}=P\{y_k>0 \mid H_1\}>0.5$$

(3) 令$f^{+}=f(y_k \backslash y_k>0)$为观测样本大于0的概率密度函数

$f^{-}=f(y_k \backslash y_k \leq 0)$为观测样本小于等于0的概率密度函数

则 $H_0: \quad f\{y_k \mid H_0\}=Pf^{+}+(1-P)f^{-}=\dfrac{f^{+}+f^{-}}{2}$

$H_1: \quad f\{y_k \mid H_1\}=Pf^{+}+(1-P)f^{-}=P_{H_1}f^{+}+(1-P_{H_1})f^{-}$

(4)计算似然函数

$$\frac{f(y_k|\mathrm{H}_1)}{f(y_k|\mathrm{H}_0)}=\frac{2P_{\mathrm{H}_1}f^{+}+2(1-P_{\mathrm{H}_1})f^{-}}{f^{+}+f^{-}}=\begin{cases}2P_{\mathrm{H}_1}; & y_k>0\\ 2(1-P_{\mathrm{H}_1}); & y_k\leq 0\end{cases}$$

$$\therefore \frac{f(Y|\mathrm{H}_1)}{f(Y|\mathrm{H}_0)}=\prod_{k=1}^{n}\frac{f(y_k|\mathrm{H}_1)}{f(y_k|\mathrm{H}_0)}$$

$$\frac{f(y_k|\mathrm{H}_1)}{f(y_k|\mathrm{H}_0)}=\frac{2P_{\mathrm{H}_1}f^{+}+2(1-P_{\mathrm{H}_1})f^{-}}{f^{+}+f^{-}}=\begin{cases}2P_{\mathrm{H}_1}; & y_k>0\\ 2(1-P_{\mathrm{H}_1}); & y_k\le 0\end{cases}$$

$$\therefore\frac{f(Y|H_1)}{f(Y|H_0)}=\prod_{k=1}^{n}\frac{f(y_k|H_1)}{f(y_k|H_0)}$$

设n个样本中有n_+个样本大于0, $n-n_+$个样本小于等于0

$$\text{则}\frac{f(Y|\mathrm{H}_1)}{f(Y|\mathrm{H}_0)}=\prod_{k=1}^{n}\frac{f(y_k|\mathrm{H}_1)}{f(y_k|\mathrm{H}_0)}=\prod_{y_k>0}\frac{f(y_k|\mathrm{H}_1)}{f(y_k|\mathrm{H}_0)}\cdot\prod_{y_k\le 0}\frac{f(y_k|\mathrm{H}_1)}{f(y_k|\mathrm{H}_0)}$$

$$=(2P_{\mathrm{H}_1})^{n^+}[2(1-P_{\mathrm{H}_1})]^{n-n^+}=2^n(1-P_{\mathrm{H}_1})^n\left(\frac{P_{\mathrm{H}_1}}{1-P_{\mathrm{H}_1}}\right)^{n^+}$$

判决规则为：

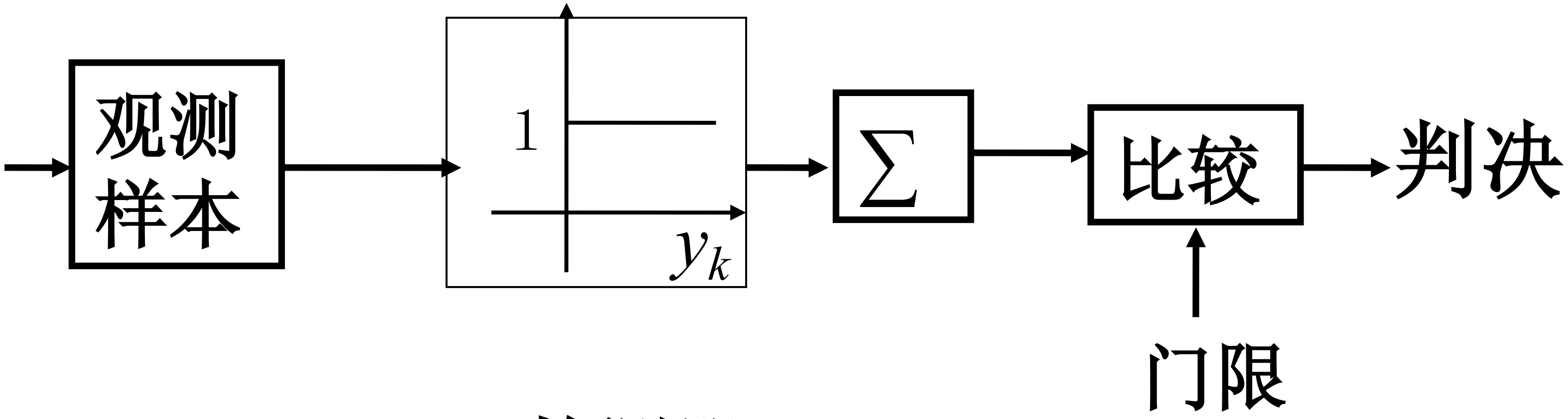
$$\frac{f(Y \backslash H_1)}{f(Y \backslash H_0)} = (2P_{\mathrm{H}_1})^{n^+}[2(1-P_{\mathrm{H}_1})]^{n-n^+} = 2^n(1-P_{\mathrm{H}_1})^n\left(\frac{P_{\mathrm{H}_1}}{1-P_{\mathrm{H}_1}}\right)^{n^+} \geq \mathrm{th}$$

$\Longrightarrow$ H_1为真，否则，H_0为真

$$\because \frac{P_{\mathrm{H}_1}}{1-P_{\mathrm{H}_1}} > 1$$

所以等效判决规则为：

$$n^+ = \sum_{k=1}^{n} u(y_k) \geq \mathrm{th}' = \mathrm{T}$$



检测器

等效判决规则为:

$$\sum_{k=1}^{n} Sgn(y_k) \geq \text{th}''$$

检测性能分析:

$$\alpha = P(D_1 \setminus H_0) = P\{\sum_{k=1}^{n} u(y_k) \geq \mathrm{T} \setminus H_0\}$$

$$= \sum_{k=T}^{n} C_n^k P_{H_0}^k (1 - P_{H_0})^{n-k} = \sum_{k=T}^{n} C_n^k (0.5)^n$$

$$\beta = P(D_1 \setminus H_1) = P\{\sum_{k=1}^{n} u(y_k) \geq \mathrm{T} \setminus H_1\}$$

$$= \sum_{k=T}^{n} C_n^k P_{H1}^k (1 - P_{H1})^{n-k}$$