Convergence of e

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0}\frac{1}{n^0}+\binom{n}{1}\frac{1}{n^1}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\frac{1}{n^3}+\binom{n}{4}\frac{1}{n^4}+\cdots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

$$= 1\cdot\frac{1}{1}+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\frac{1}{n^4}+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$= 1+1+\frac{n(n-1)}{n^2}\frac{1}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\frac{1}{3!}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{n^4}\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{n^n}\frac{1}{n!}$$

$$= 2+\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{2!}+\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right)\frac{1}{3!}+\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right)\left(\frac{n-3}{n}\right)\frac{1}{4!}+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right)\cdots\left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n!}$$

$$= 2+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\frac{1}{4!}+\cdots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-2}{n}\right)\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!}$$

$$< 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!} < 2+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

$$\therefore e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$$