工作进展回报

基于 Kramers-Kronig 关系的相位恢复方法

Julian OU

College of Physics, Sichuan University, Chengdu 610064, China

2021 年 5 月 18 日

目录

描述

在 x 的上半平面上解析的平方可积函数 $f(x)$ 满足方程

$$\Im[f(x)] = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Re[f(x')]}{x' - x} \, \mathrm{d}x' \tag{1}$$

其中 P 为柯西主值

如果一个复变函数，已知其实部，且满足以上条件，那么就可以使用 KK 关系推出其虚部。

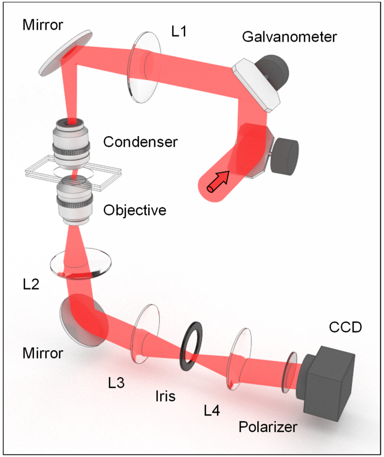
把电场写作复振动，对电场取对数，便可以把强度与相位进行分离。

$$\Re[\ln E] = \ln I/2 \tag{2}$$

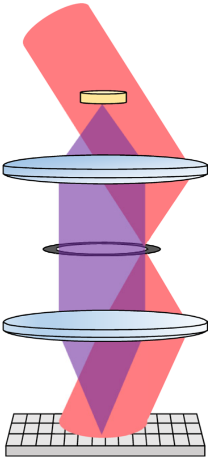
$$\Im[\ln E] = \arg(E) \tag{3}$$

如果 $\ln E$ 的实部与虚部之间满足 KK 关系，就可以从强度图像中恢复相位，但是 $\ln E$ 并不总是在上半平面上解析。

目录



光源	超辐射发光二极管
振镜系统	控制入射角
透镜 1	聚焦
condenser 聚光镜	会聚光源，透射场照明
objective 物镜	显微镜物镜，消像差
透镜 2	产生平行光束
光阑	提供截止空间角频率
透镜 3+ 透镜 4	4f 系统
偏振片	保证线偏振光，基于标量场模型
CCD	接收信号



在实验上使电场的传播符合 KK 关系的条件

- 入射波的横向波矢量为光阑的截止空间角频率
- 非散射光强于散射光

其次，要在实验上实现相位恢复，还需要考虑离散的强度图像是否兼容 KK 关系，以及数值计算方法。

目录

考虑将电场写作：

$$\varepsilon(\vec{r}) = \left|E(\vec{r})\right| \exp(-i\vec{k}_{inc} \cdot \vec{r}) \tag{4}$$

表示具有一定倾角的入射，其中 $\vec{k}_{inc}$ 为入射波的横向波矢，构建一个复变函数：

$$\chi(\vec{r}) = \ln \varepsilon(\vec{r}) = \ln E(\vec{r}) - i\vec{k}_{inc} \cdot \vec{r} \tag{5}$$

实部为 $\ln I/2$，虚部为 $\arg(E) - \vec{k}_{inc} \cdot \vec{r}$

考虑单色入射光是沿着 x 方向倾斜的平面波：

$$E_{inc} = \left|E_{inc}(\vec{r})\right| \exp(-i\vec{k}_{inc} \cdot \vec{r}) = \left|E_{inc}(\vec{r})\right| \exp(-ik_{inc}x) \tag{6}$$

在照射到物体以后，会产生散射光，考虑带限为 $-k_0 \sim k_0$ 的出射波：

$$\varepsilon(\vec{r}) = E_u(\vec{r}) + E_s(\vec{r}) \tag{7}$$

其中 $E_u(\vec{r}) = \left|E_u(\vec{r})\right| \exp(-ik_{inc}x)$ 为与入射波具有相同频率的无散射场，E_s 为由除了 k_{inc} 以外频率组成的散射场。

因此 (4) 式可以写作：

$$\chi(\vec{r}) = \ln\left[E_u(\vec{r}) + E_s(\vec{r})\right] = \ln[1 + \frac{E_s(\vec{r})}{E_u(\vec{r})}] + \ln|E_u| \tag{8}$$

其中 $\ln|E_u|$ 为常数，不会对解析性产生影响，当非散射场强度大于散射场，即 $|E_u| > |E_s|$ 时，对数项可以进行幂级数展开：

$$\ln[1 + \frac{E_s(\vec{r})}{E_u(\vec{r})}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1^n}{n+1}\left(\frac{E_s}{E_u}\right)^{n+1} \tag{9}$$

因此只要我们证明了 E_s/E_u 是解析的，就可以证明 $\chi(\vec{r})$ 是解析的。

Titschmarch theorem

如果函数 $f(x)$ 的傅里叶变换在 $k_x < 0$ 时为零，那么 $f(x)$ 在 x 的上半平面上解析。

对 E_s/E_u 作傅里叶变换（$E_u(\vec{r}) = \left|E_u(\vec{r})\right| \exp(-ik_{inc}x)$），得

$$\mathcal{F}[\frac{E_s}{E_u}](\vec{k}) = \int \frac{E_s}{|E_u|} \exp[-(\vec{k} - \vec{k}_{inc}) \cdot \vec{r}]\, \mathrm{d}\vec{r} = \frac{1}{|E_u|}\mathcal{F}[E_s](\vec{k} - k_{inc}\vec{e_{kx}}) \quad (10)$$

联系到实验上，成像系统的带通受到傅里叶平面上的光阑限制，波矢空间取值范围为 $-k_0 \sim k_0$。

$$\mathcal{F}[\frac{E_s}{E_u}](\vec{k}) = \frac{1}{|E_u|}\mathcal{F}[E_s](\vec{k} - k_{inc}\vec{e_{kx}}) \tag{11}$$

如果 $k_{inc} = k_0$，那么在上式中，对于 $k_x < 0$ 的区域，傅里叶变换的值就为零，便证明了 E_s/E_u 在上半平面上解析，因此证明了 (9)(9) 在上半平面上解析，利用 KK 关系，电场于是电场的表达式可以写为

$$E(\vec{r}) = \exp\{[\frac{\ln I(\vec{r})}{2} - \frac{i}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln I(\vec{r'})}{2(r'_{\parallel} - r_{\parallel})}\mathrm{d}\vec{r'}] + i\vec{k}_{inc}\cdot\vec{r}\} \tag{12}$$