P80 2.4-2(a)

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\2&1&-1\\-1&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{①\leftrightarrow②}\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&1&0\\-1&1&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{②-①\times\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-1&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{③-①\times(-\frac{1}{2})}\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{②\leftrightarrow③}\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{③-②\times\frac{1}{3}}\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}\\0&0&1\end{bmatrix}=U$$

$$\therefore L=\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&1\end{bmatrix}\qquad P=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\therefore \underbrace{\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&0\\2&1&-1\\-1&1&-1\end{bmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&1\end{bmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}\\0&0&1\end{bmatrix}}_{U}$$

P80 2.4-4(a)

$$A=\begin{bmatrix}4&2&0\\4&4&2\\2&2&3\end{bmatrix}\xrightarrow[③-①\times\frac{1}{2}]{②-①}\begin{bmatrix}4&2&0\\0&2&2\\0&1&3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{③-②\times\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}4&2&0\\0&2&2\\0&0&2\end{bmatrix}=U \quad \therefore L=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}, P=E$$

$$\therefore \underset{P}{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}\underset{A}{\begin{bmatrix}4&2&0\\4&4&2\\2&2&3\end{bmatrix}}=\underset{L}{\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}}\underset{U}{\begin{bmatrix}4&2&0\\0&2&2\\0&0&2\end{bmatrix}}$$

第一次回代 $Lc=Pb$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\4\end{bmatrix}$$

第二次回代 $Ux=c$

$$\begin{bmatrix}4&2&0\\0&2&2\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$$

P91 2.4-7 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

P91 2.4-9 (a)

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{③-①\times(-1)\\ ④-①\times(-1)}]{②-①\times(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[④-②\times(-1)]{③-②\times(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{④-③\times(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = U$$

$$\therefore \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}}_{U}$$

(b) $P=E$ （E为单位阵）

$L=E+[a_{ij}]$ 当 $i>j$ 时 $a_{ij}=-1$，其余为0

$U=E+[b_{ij}]$ 当 $j=n$ 时 $a_{ij}=2^{i-1}$，再令 $a_{nn}=a_{nn}-1$

P104 2.5-2(a)

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{22}{15} \\ -\frac{11}{15} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ -\frac{11}{15} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ -\frac{11}{15} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{134}{75} \\ -\frac{208}{225} \end{bmatrix}$$

2.5-4(a) $\omega = 1.0$

$$\cancel{\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}} = \omega L + D = L + D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},\ (\omega L + D)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{15} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{15} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\left(-\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{15} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ -\frac{11}{15} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{15} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\left(-\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ -\frac{11}{15} \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{15} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{134}{75} \\ -\frac{208}{225} \end{bmatrix}$$

$\omega = 1.2$

$$\omega L + D = 1.2L + D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ \frac{6}{5} & 3 \end{bmatrix},\ (\omega L + D)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{2}{25} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{2}{25} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \left(-0.2 \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 1.2 \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + 1.2 \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{2}{25} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{36}{25} \\ -\frac{122}{125} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{2}{25} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \left(-0.2 \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - 1.2 \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} \frac{36}{25} \\ -\frac{122}{125} \end{bmatrix} + 1.2 \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{2}{25} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.08896 \\ -1.04038 \end{bmatrix}$$

P116 2.6-2(a)

$$[x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 - 3x_2^2$$

当 $x_1=1, x_2=1$ 时 $x^TAx=-2<0$，A不是正定矩阵

由楚列斯基分解式

$l_{1,1}=\sqrt{a_{11}}=1$ ~~$l_{21}=\sqrt{a_{21}-l_{21}} \ \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}}}=0 \quad a_{12}=$~~

$l_{2,2}=\sqrt{-3-0}$ 此时无法开根，楚列斯基分解无效.

P116. 2.6-8(a)

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$l_{1,1}=\sqrt{a_{11}}=2$ $\quad$ $l_{2,2}=\sqrt{a_{22}-l_{21}^2}=1$

$l_{2,1}=a_{21}/l_{11}=0$ $\quad$ $l_{32}=(a_{32}-l_{31}l_{21})/l_{22}=1$

$l_{31}=a_{31}/l_{11}=-1$ $\quad$ $l_{33}=\sqrt{a_{33}-l_{31}^2-l_{32}^2}=1$

$$\therefore R^T=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad R=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R^T C = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Rx = C \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

P117 2.6-13(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad r_0 = d_0 = b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_0 = \frac{r_0^T r_0}{d_0^T A d_0} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{1}{5}$$

$$x_1 = x_0 + \alpha_0 d_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$r_1 = r_0 - \alpha_0 A d_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$\beta_1 = \frac{r_1^T r_1}{r_0^T r_0} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{4}{25}$$

Chengdu, 610207,
Sichuan, P.R.China
Http://www.scu.edu.cn

$$d_1 = r_1 + \beta_0 d_0 = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix} + \frac{4}{25}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{25} \\ -\frac{6}{25} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \frac{r_1^T r_1}{d_1^T A d_1} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \frac{14}{25} \\ \frac{-6}{25} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{14}{25} \\ \frac{-6}{25} \end{bmatrix}} = 5$$

$$x_2 = x_1 + \alpha_1 d_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} \frac{14}{25} \\ \frac{-6}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$r_2 = r_1 - \alpha_1 A d_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{14}{25} \\ -\frac{6}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ 解为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$