1 基础知识

1.1 二进制十进制转换

例如 $(53.7)_{10} = (110101.1\overline{0110})$

$$
\begin{aligned}
53 \div 2 &= 26 \cdots 1 & \qquad 0.7 \times 2 &= 0.4 + 1 \\
26 \div 2 &= 13 \cdots 0 & \qquad 0.4 \times 2 &= 0.8 + 0 \\
13 \div 2 &= 6 \cdots 1 & \qquad 0.8 \times 2 &= 0.6 + 1 \\
6 \div 2 &= 3 \cdots 0 & \qquad 0.6 \times 2 &= 0.2 + 1 \\
3 \div 2 &= 1 \cdots 1 & \qquad 0.2 \times 2 &= 0.4 + 0 \\
1 \div 2 &= 0 \cdots 1 & \qquad 0.4 \times 2 &= 0.8 + 0
\end{aligned}
$$

1.2 浮点数计算

标准化 IEEE 浮点数 $\pm 1.bbb\cdots b \times 2^p$，IEEE 最近舍入法则：对 53 位，如果为 0，则舍去，如果为 1，则进位。

精度	符号	指数	尾数
单精度	1	8	23
双精度	1	11	52
长双精度	1	15	64

加减法时需要用 0 补齐到指数最大的数对应的位置。

$$
\begin{aligned}
(8.3)_{10} = (1000.0\overline{1001})_2 = 1.0000\overline{1001} \times 2^3 &= 1.\cdots 110011010 \times 2^3 \\
(7.3)_{10} = (111.0\overline{1001})_2 = 1.110\overline{1001} \times 2^2 &= 1.\cdots 100110011 \times 2^2 \\
(8.3)_{10} - (7.3)_{10} &= 1.00001001 \cdots 100110100 \times 2^3 \\
& -0.11101001 \cdots 100110011 \times 2^3 \\
\hline
&= 0.00100000 \cdots 000000001 \times 2^3 \\
&= 1.00000000 \cdots 00000100 \quad \times 2^0
\end{aligned}
$$

2 解方程

2.1 二分法

Input: 初始区间 $[a, b]$ 使 $f(a)f(b) < 0$
while $(b - a)/2 > TOL$ **do**
  $c = (a + b)/2$
  if $f(c) = 0$ **then**
    break
  end
  if $f(a)f(c) < 0$ **then**
    $b = c$
  else
    $a = c$
  end
end
Output: 近似根 $r = (a + b)/2$

2.2 不动点迭代

$$x_{i+1} = g(x_i) \qquad\qquad |g'(r)| < 1$$

2.3 牛顿方法

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(x_{i+1})} \qquad \lim_{i\to\infty} \frac{e_{i+1}}{e_i^2} = \left|\frac{f''(r)}{2f'(r)}\right| \qquad \lim_{i\to\infty} \frac{e_{i+1}}{e_i} = \frac{m-1}{m}$$

3 解方程组

3.1 高斯消元法

高斯消元的操作次数：$\frac{2}{3}n^3$

3.2 LU 分解

LU 分解的操作次数：$\frac{2}{3}n^3$，每次回代的操作次数：n^2

3.3 PA=LU 分解

部分主元：每一行根据第一列元素从大到小排序，避免湮灭问题。

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \to ① \leftrightarrow ② \to \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \to ② - ① \times \frac{2}{3} \to \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix} = U$$

$$Lc = Pb \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad Ux = c \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

3.4 迭代方法

要求矩阵 A 为严格对焦占优矩阵，$|a_{ii}| > \sum_{i\neq j} |a_{ij}|$