1 基础知识

1.1 二进制十进制转换

例如 $(53.7)_{10} = (110101.1\overline{0110})$

$$
\begin{aligned}
53 \div 2 &= 26 \cdots 1 \qquad & 0.7 \times 2 &= 0.4 + 1 \\
26 \div 2 &= 13 \cdots 0 & 0.4 \times 2 &= 0.8 + 0 \\
13 \div 2 &= 6 \cdots 1 & 0.8 \times 2 &= 0.6 + 1 \\
6 \div 2 &= 3 \cdots 0 & 0.6 \times 2 &= 0.2 + 1 \\
3 \div 2 &= 1 \cdots 1 & 0.2 \times 2 &= 0.4 + 0 \\
1 \div 2 &= 0 \cdots 1 & 0.4 \times 2 &= 0.8 + 0
\end{aligned}
$$

1.2 浮点数计算

标准化 IEEE 浮点数 $\pm 1.bbb\cdots b \times 2^p$，IEEE 最近舍入法则：对 53 位，如果为 0，则舍去，如果为 1，则进位。

精度	符号	指数	尾数
单精度	1	8	23
双精度	1	11	52
长双精度	1	15	64

加减法时需要用 0 补齐到指数最大的数对应的位置。

$$
\begin{aligned}
(8.3)_{10} = (1000.0\overline{1001})_2 = 1.0000\overline{1001} \times 2^3 &= 1.\cdots 110011010 \times 2^3 \\
(7.3)_{10} = (111.0\overline{1001})_2 = 1.110\overline{1001} \times 2^2 &= 1.\cdots 100110011 \times 2^2 \\
(8.3)_{10} - (7.3)_{10} &= 1.00001001 \cdots 100110100 \times 2^3 \\
&\quad -0.11101001 \cdots 100110011 \times 2^3 \\
&= 0.00100000 \cdots 000000001 \times 2^3 \\
&= 1.00000000 \cdots 00000100 \quad \times 2^0
\end{aligned}
$$

2 解方程

2.1 二分法

初始区间 $[a,b]$ 使 $f(a)f(b) < 0$，取中点 $c = (a+b)/2$，计算 $f(c)$，若 $f(a)f(c) < 0$，下一迭代区间为 $[a,c]$，若 $f(c)f(b) < 0$，下一迭代区间为 $[c,b]$，输出近似解为 $r = (a+b)/2$。

2.2 不动点迭代

将方程 $f(x) = 0$ 变换为 $g(x) = x$。

$$x_{i+1} = g(x_i) \qquad\qquad |g'(r)| < 1$$

牛顿法为特殊的不动点迭代方法，可以达到二次收敛。

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(x_{i+1})} \qquad \lim_{i\to\infty} \frac{e_{i+1}}{e_i^2} = \left|\frac{f''(r)}{2f'(r)}\right| \qquad \lim_{i\to\infty} \frac{e_{i+1}}{e_i} = \frac{m-1}{m}$$

3 解方程组

3.1 高斯消元法

高斯消元的操作次数：$\frac{2}{3}n^3$。

3.2 LU 分解

LU 分解的操作次数：$\frac{2}{3}n^3$，每次回代的操作次数：n^2。

3.3 PA=LU 分解

部分主元：每一行根据第一列元素从大到小排序，避免湮灭问题。

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \to ① \leftrightarrow ② \to \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \to ② - ① \times \frac{2}{3} \to \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix} = U$$

$$Lc = Pb \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Ux = c \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

3.4 迭代方法

要求矩阵 A 为严格对焦占优矩阵，$|a_{ii}| > \sum_{i\neq j} |a_{ij}|$，$D$ 表示 A 的主对角线矩阵，L 表示 A 的下三角矩阵，U 表示 A 的上三角矩阵。

雅可比方法

$$x_{k+1} = D^{-1}(b - (L+U)x_k)$$

高斯-赛德尔方法

$$x_{k+1} = D^{-1}(b - Ux_k - Lx_{k+1})$$

连续过松弛 $\omega > 1$，$\omega = 1$ 时，退化为高斯-赛德尔方法

$$x_{k+1} = (\omega L + D)^{-1}[(1-\omega)Dx_k - \omega Ux_k - Lx_{k+1}] + \omega(D + \omega L)^{-1}b$$

4 插值

4.1 拉格朗日插值

对 n 个数据点 $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$，有 $n-1$ 阶多项式

$$L_k(x) = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

$$P_{n-1}(x) = y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x)$$

$$P_2(x) = y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \frac{(x-x_3)(x-x_1)}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)} + y_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

4.2 牛顿商差

$$
\begin{array}{c|ccc}
x_1 & f[x_1] & & \\
 & & f[x_1\, x_2] & \\
x_2 & f[x_2] & & f[x_1\, x_2\, x_3] \\
 & & f[x_2\, x_3] & \\
x_3 & f[x_3] & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
f[x_k] &= f(x_k) \\
f[x_k\, x_{k+1}] &= \frac{f[x_{k+1}] - f[x_k]}{x_{k+1} - x_k} \\
f[x_k\, x_{k+1}\, x_{k+2}] &= \frac{f[x_{k+1}\, x_{k+2}] - f[x_k\, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}
\end{aligned}
$$

$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f[x_1 \cdots x_i](x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})$$

4.3 切比雪夫插值