# 1 基础知识

## 1.1 二进制十进制转换

例如 $(53.7)_{10} = (110101.1\overline{0110})$

$$
\begin{aligned}
53 \div 2 &= 26 \cdots 1 & \qquad 0.7 \times 2 &= 0.4 + 1 \\
26 \div 2 &= 13 \cdots 0 & 0.4 \times 2 &= 0.8 + 0 \\
13 \div 2 &= 6 \cdots 1 & 0.8 \times 2 &= 0.6 + 1 \\
6 \div 2 &= 3 \cdots 0 & 0.6 \times 2 &= 0.2 + 1 \\
3 \div 2 &= 1 \cdots 1 & 0.2 \times 2 &= 0.4 + 0 \\
1 \div 2 &= 0 \cdots 1 & 0.4 \times 2 &= 0.8 + 0
\end{aligned}
$$

## 1.2 浮点数计算

标准化 IEEE 浮点数 $\pm 1.bbb\cdots b \times 2^p$，IEEE 最近舍入法则：对 53 位，如果为 0，则舍去，如果为 1，则进位。

| 精度 | 符号 | 指数 | 尾数 |
|---|---|---|---|
| 单精度 | 1 | 8 | 23 |
| 双精度 | 1 | 11 | 52 |
| 长双精度 | 1 | 15 | 64 |

加减法时需要用 0 补齐到指数最大的数对应的位置。

$$
\begin{aligned}
(8.3)_{10} = (1000.0\overline{1001})_2 &= 1.0000\overline{1001} \times 2^3 = 1.\cdots 110011010 \times 2^3 \\
(7.3)_{10} = (111.0\overline{1001})_2 &= 1.110\overline{1{\color{red}001}} \times 2^2 = 1.\cdots 100110011 \times 2^2 \\
(8.3)_{10} - (7.3)_{10} &= 1.00001001 \cdots 10011010{\color{blue}0} \times 2^3 \\
&\quad -0.11101001 \cdots 10011001{\color{red}1} \times 2^3 \\
&= 0.00100000 \cdots 00000000{\color{red}1} \times 2^3 \\
&= 1.00000000 \cdots 00000100 \quad \times 2^0
\end{aligned}
$$

# 2 解方程

## 2.1 二分法

初始区间 $[a, b]$ 使 $f(a)f(b) < 0$，取中点 $c = (a+b)/2$，计算 $f(c)$，若 $f(a)f(c) < 0$，下一迭代区间为 $[a, c]$，若 $f(c)f(b) < 0$，下一迭代区间为 $[c, b]$，输出近似解为 $x_a = (a+b)/2$。

## 2.2 不动点迭代

将方程 $f(x) = 0$ 变换为 $g(x) = x$，可以达到线性收敛。

$$
x_{i+1} = g(x_i) \qquad \lim_{i\to\infty} \frac{e_{i+1}}{e_i} = S = |g'(r)| < 1
$$

牛顿法为特殊的不动点迭代方法，可以达到二次收敛。

$$
x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(x_{i+1})} \qquad \lim_{i\to\infty} \frac{e_{i+1}}{e_i^2} = \left|\frac{f''(r)}{2f'(r)}\right| \qquad \lim_{i\to\infty} \frac{e_{i+1}}{e_i} = \frac{m-1}{m}
$$

## 2.3 误差

近似解 $x_a$ 的前向误差为 $|r - x_a|$，后向误差为 $|f(x_a)|$。如果 $0 = f(r) = f'(r) = \cdots = f^{(m-1)}(r)$，但是 $f^{(m)}(r) \neq 0$，则 $r$ 为 $m$ 重根。

# 3 解方程组

## 3.1 高斯消元法

高斯消元的操作次数：$\frac{2}{3}n^3$。

## 3.2 LU 分解

LU 分解的操作次数：$\frac{2}{3}n^3$，每次回代的操作次数：$n^2$。

## 3.3 PA=LU 分解

部分主元：每一行根据第一列元素从大到小排序，避免湮灭问题。

$$
\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \to ① \leftrightarrow ② \to \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \to ② - ① \times \frac{2}{3} \to \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix} = U
$$

$$
Lc = Pb \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad Ux = c \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}
$$

## 3.4 迭代方法

要求矩阵 $A$ 为严格对焦占优矩阵，$|a_{ii}| > \sum_{i\neq j}|a_{ij}|$，$D$ 表示 $A$ 的主对角线矩阵，$L$ 表示 $A$ 的下三角矩阵，$U$ 表示 $A$ 的上三角矩阵。

雅可比方法

$$
x_{k+1} = D^{-1}(b - (L+U)x_k)
$$

高斯-赛德尔方法

$$
x_{k+1} = D^{-1}(b - Ux_k - Lx_{k+1})
$$

连续过松弛 $\omega > 1$，$\omega = 1$ 时，退化为高斯-赛德尔方法

$$
x_{k+1} = (\omega L + D)^{-1}[(1-\omega)Dx_k - \omega U x_k - L x_{k+1}] + \omega(D + \omega L)^{-1} b
$$

## 3.5 误差

近似解 $x_a$ 的余项为 $r = b - Ax_a$，前向误差为 $\|x - x_a\|$，后向误差为 $\|b - Ax_a\|_\infty$。

# 4 插值

## 4.1 拉格朗日插值

对 $n$ 个数据点 $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$，有 $n-1$ 阶多项式

$$
L_k(x) = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}
$$

$$
P_{n-1}(x) = y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x)
$$

$$
P_2(x) = y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2\frac{(x-x_3)(x-x_1)}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)} + y_3\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}
$$

## 4.2 牛顿商差

$$
\begin{array}{c|ccc}
x_1 & f[x_1] & & \\
 & & f[x_1\,x_2] & \\
x_2 & f[x_2] & & f[x_1\,x_2\,x_3] \\
 & & f[x_2\,x_3] & \\
x_3 & f[x_3] & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
f[x_k] &= f(x_k) \\
f[x_k\,x_{k+1}] &= \frac{f[x_{k+1}] - f[x_k]}{x_{k+1} - x_k} \\
f[x_k\,x_{k+1}\,x_{k+2}] &= \frac{f[x_{k+1}\,x_{k+2}] - f[x_k\,x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k} \\
P_{n-1}(x) &= \sum_{i=1}^{n} f[x_1 \cdots x_i](x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})
\end{aligned}
$$

## 4.3 切比雪夫插值

在区间 $[a, b]$ 内，切比雪夫插值节点

$$
x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{(2i-1)\pi}{2n} \qquad i = 1, 2, \cdots, n
$$

使以下不等式在 $[a, b]$ 内成立

$$
\left|(x-x_i)\cdots(x-x_n)\right| \leqslant \frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^n}{2^{n-1}}
$$

## 4.4 插值误差

插值误差公式，以及误差上界，其中 $x_{min} < c < x_{max}$，

$$
f(x) - P(x) = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{n!} f^{(n)}(c)
$$

$$
\left|f(x) - P(x)\right| \leqslant \frac{\left|(x-x_1)\cdots(x-x_n)\right|}{n!} \left|f^{(n)}(x)\right|_{max}
$$

# 5 最小二乘法

## 5.1 不一致方程组

对于不一致系统 $Ax=b$，求解 $A^TA\bar{x}=A^Tb$

## 5.2 数据拟合

多项式（线性）模型，周期型数据，指数模型的线性化。

$$y=c_1+c_2t+c_3t^2+\cdots \qquad y=c_1+c_2\cos 2\pi t+c_3\sin 2\pi t$$

$$y=c_1e^{c_2t}\Rightarrow \ln y=\ln c_1+c_2t \qquad y=c_1te^{c_2t}\Rightarrow \ln y-\ln t=\ln c_1+c_2t$$

## 5.3 误差

最小二乘解 $\bar{x}$ 的余项为 $r=b-A\bar{x}$，后向误差（二范数误差，欧式长度）为

$$\|r\|_2=\sqrt{r_1^2+\cdots+r_m^2}$$

平方误差，均方根误差，以及三者直接的关系分别为

$$SE=r_1^2+\cdots+r_m^2 \qquad RMSE=\sqrt{\frac{r_1^2+\cdots+r_m^2}{m}} \qquad RMSE=\frac{\sqrt{SE}}{\sqrt{m}}=\frac{\|r\|_2}{\sqrt{m}}$$

## 5.4 QR 分解

使用格拉姆-斯密特正交找出 $A=(A_1|\cdots|A_n)$ 的消减 QR 分解

$$y_j=A_j-q_1(q_1^TA_j)-q_2(q_2^TA_j)-\cdots--q_{j-1}(q_{j-1}^TA_j) \qquad q_j=\frac{y_j}{\|y_j\|_2}$$

$$\begin{cases} r_{jj}=\|y_j\|_2 \\ r_{ij}=q_i^TA_j \end{cases} \quad A=(q_1|\cdots|q_n)\begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & r_{nn} \end{bmatrix}=QR$$

对 $A=(A_1|\cdots|A_n)$ 补齐 $(m-n)$ 个向量 $[1,0,\cdots,0]^T$，计算 $q_{n+1},\cdots,q_{n+m}$，得到完全 QR 分解，并通过回代 $R\bar{x}=Q^Tb$，求解最小二乘问题（虚线以下部分直接扔掉）

$$A=(q_1|\cdots|q_m)\begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & r_{nn} \\ \hline 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}=QR \qquad \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & r_{nn} \\ \hline 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_1^T \\ \vdots \\ q_m^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \\ \hline d_{n+1} \\ \vdots \\ d_{n+m} \end{bmatrix}$$

# 6 数值微分积分

## 6.1 数值微分

二点前向差分公式（一阶导一阶公式），三点中心差分公式（一阶导二阶公式）

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{h}{2}f''(c) \qquad f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-\frac{h^2}{6}f'''(c)$$

二阶导数的三点中心差分公式（二阶导二阶公式），都可以由泰勒展开推导而来。

$$f''(x)=\frac{f(x-h)-2f(x)+f(x+h)}{h^2}-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(c)$$

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\cdots+\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x)+\cdots$$

## 6.2 外推

对 $n$ 阶近似公式 $F_n(x)$ 外推，至少可以得到 $(n+1)$ 阶近似 $Q$ 的公式

$$Q\approx\frac{2^nF(h/2)-F(h)}{2^n-1}$$

## 6.3 数值积分

梯形法则与复合梯形法则

$$\int_{x_0}^{x_1}f(x)\,dx=\frac{h}{2}(y_0+y_1)-\frac{h^3}{12}f''(c) \qquad h=x_1-x_0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{h}{2}\left(y_0+y_m+2\sum_{i=1}^{m-1}y_i\right)-\frac{(b-a)h^2}{12}f''(c) \qquad h=\frac{b-a}{m}$$

辛普森法则与复合辛普森法则

$$\int_{x_0}^{x_3}f(x)\,dx=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(c) \qquad h=x_1-x_0=x_2-x_1$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{h}{3}\left(y_0+y_{m2}+4\sum_{i=1}^{m}y_{2i-1}+2\sum_{i=1}^{m-1}y_{2i}\right)-\frac{(b-a)h^4}{180}f^{(4)}(c) \quad h=\frac{b-a}{2m}$$

中点法则与复合中点法则

$$\int_{x_0}^{x_1}f(x)\,dx=hf(x0+\frac{h}{2})+\frac{h^3}{24}f''(c) \qquad h=x_1-x_0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=h\sum_{i=0}^{m-1}f(x_i+\frac{h}{2})+\frac{(b-a)h^2}{24}f''(c) \qquad h=\frac{b-a}{m}$$

## 6.4 龙贝格积分

添加数据进行扩展，直到达到指定的精度，龙贝格积分是对复合梯形法则的外推。

$$h_j=\frac{b-a}{2^{j-1}} \qquad R_{11}=\frac{h_1}{2}(f(a)+f(b)) \qquad R_{j1}=\frac{1}{2}R_{j-1,1}+h_j\sum_{i=1}^{2^{j-2}}f(a+(2i-1)h_j)$$

$$\begin{matrix} R_{11} & & \\ R_{21} & R_{22} & \\ \vdots & & \ddots \end{matrix} \qquad R_{jk}=\frac{4^{k-1}R_{j,k-1}-R_{j-1,k-1}}{4^{k-1}-1}$$

$R_j j$即为定积分的$2j$阶近似

## 6.5 高斯积分