

数学概説

佐々木英亮 ^{*1}

^{*1} 東京工業大学 環境・社会理工学院 土木・環境工学系

目次

はじめに	4
第 1 章 微分方程式	5
1.1 微分方程式の基本形	5
1.1.1 変数分離形	5
1.1.2 同次形	6
1.2 完全微分方程式	8
1.2.1 積分因子を用いた完全形への変形	9
1.3 1 階の線形微分方程式	13
1.4 2 階の線形微分方程式	16
1.4.1 2 階の同次線形微分方程式	16
1.4.2 2 階の同次線形微分方程式の解の性質	18
1.4.3 2 階の非同次線形微分方程式	20
1.5 連立微分方程式	24
1.5.1 連立微分方程式の例	24
1.5.2 連立非同次線形微分方程式	27
第 2 章 確率・統計	29
2.1 事象・確率	29
2.1.1 標本空間, 試行, 標本点, 事象	29
2.1.2 確率の基本的性質	29
2.1.3 条件付き確率, 独立	30
2.1.4 ベイズ (Bayes) の定理	30
2.2 確率変数と確率分布	32
2.2.1 確率変数	32
2.2.2 さまざまな確率変数	32
2.2.3 期待値	35
2.2.4 分散	38
2.2.5 共分散と相関係数	41

2.2.6	中心極限定理	42
2.3	標本、統計量、標本分布	43

はじめに

本書は工学において欠かすことのできない教養数学について簡潔にまとめたものである。主目的は著者が大学の講義で学習した内容のまとめであるが、活用の機会は多岐にわたると信じている。

文中で付される記号

\therefore	したがって (therefore)
\because	なぜなら (because)
\forall	任意の、全ての (all)
\exists	ある、存在する (exists)
\mathbb{N}	自然数
\mathbb{Z}	整数
\mathbb{Q}	有理数
\mathbb{R}	実数
\mathbb{C}	複素数
$\exp(x)$	指数関数 e^x
$\ln(x)$	自然対数 $\log x$
i	虚数単位 ($i = \sqrt{-1}$)

第 1 章

微分方程式

工学では微分方程式は重要である。研究におけるデータ解析ではコンピュータによる近似解を求めることで微分方程式を解く。

微分方程式は主に 2 つに分類される。

1. 常微分方程式 (ordinary differential equation, ODE)

y が 1 つの独立変数 x の関数で微分方程式が x や y とその導関数で構成されるもの

2. 偏微分方程式 (partial differential equation, PDE)

2 つ以上の独立変数で構成されるもの

微分方程式に含まれる導関数の最高指数のことを**階数**と呼ぶ。

表 1.1: 微分方程式の例

		階数	
		1	2
従属変数	1	$\frac{dy}{dx} = x + y + 1$	$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$
の数	2~	$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1$

1.1 微分方程式の基本形

1.1.1 変数分離形

いま

$$g(y) \frac{dy}{dx} = f(x) \quad (1.1)$$

が与えられているとき、両辺を x で積分して

$$\int g(y) \frac{dy}{dx} dx = \int f(x) dx \quad (1.2)$$

$$\int g(y) dy = \int f(x) dx \quad (1.3)$$

が得られる。

例題

$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$ を解け。

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 1 + y^2 \\ \frac{1}{1 + y^2} dy &= dx \\ \int \frac{1}{1 + y^2} dy &= \int dx \\ \therefore \tan^{-1} y &= x + C \quad (C : \text{const.}) \end{aligned}$$

1.1.2 同次形

$\frac{y}{x} = u$ とおくことで変数分離形へと変換することができる場合もある。

$$(\text{与式}) = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad (1.4)$$

$y = ux$ より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u \quad (1.5)$$

これより

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{du}{dx}x + u \quad (1.6)$$

$$\frac{du}{dx}x = f(u) - u \quad (1.7)$$

$$\frac{1}{x} dx = \frac{1}{f(u) - u} du \quad (1.8)$$

例題

$2xy \frac{dy}{dx} = y^2 - x^2$ を解け。

両辺を $2xy$ で割って $u = \frac{y}{x}$ とすると、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{u^2 - 1}{2u}$$

$y = ux$ より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$$

これより

$$\begin{aligned} \frac{u^2 - 1}{2u} &= \frac{du}{dx}x + u \\ \frac{du}{dx}x &= \frac{-(u^2 + 1)}{2u} \\ \frac{1}{x}dx &= -\frac{2u}{u^2 + 1}du \end{aligned}$$

両辺を積分して

$$\begin{aligned} \ln|x| &= -\ln|u^2 + 1| + C \\ C &= \ln|x(u^2 + 1)| \\ \pm e^C &= x(u^2 + 1) \\ C' &= x(u^2 + 1) \end{aligned}$$

$u = \frac{y}{x}$ より

$$\begin{aligned} C' &= x \left\{ \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 \right\} \\ &= \frac{y^2}{x} + x \\ xC' &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} x^2 - C'x + y^2 &= 0 \\ \therefore \left(x - \frac{C'}{2}\right)^2 + y^2 &= \left(\frac{C'}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

1.2 完全微分方程式

2 変数関数 $u(x, y)$ の全微分は

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (1.9)$$

であるから、この性質を用いて微分方程式を元の形に戻すことを考える。

いま、微分方程式が

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (1.10)$$

の形で表され

$$M(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.11)$$

$$N(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.12)$$

を満足するとき、この方程式の一般解は $u(x, y) = C$ ($C : \text{const.}$) となる。

(1.11), (1.12) をもう一度偏微分すると、

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad (1.14)$$

と一致する。

(1.11) の両辺を x で積分して

$$u = \int M dx + k(y) \quad (1.15)$$

ただし、 $k(y)$ は y のみを変数とする関数である。

$k(y)$ を求めるために、(1.15) を y で偏微分して

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M dx \right) + \frac{dk}{dy} = N \quad (1.16)$$

$$\frac{dk}{dy} = N - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M dx \right) \quad (1.17)$$

例題

$$\cos(x + y) + \{3y^2 + 2y + \cos(x + y)\} \frac{dy}{dx} = 0 \text{ を解け。}$$

$$M = \cos(x + y)$$

$$N = 3y^2 + 2y + \cos(x + y)$$

とおき、それぞれを y 、 x で偏微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x \partial y} = -\sin(x+y) \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x \partial y} = -\sin(x+y)\end{aligned}$$

これらが一致するため、完全微分方程式である。

解を $u(x, y) = C$ とすると ($C : \text{const.}$)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= M \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= N\end{aligned}$$

より

$$u = \int M dx + k(y) = \sin(x+y) + k(y)$$

これを y で偏微分して

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos(x+y) + \frac{dk}{dy} = N = 3y^2 + 2y + \cos(x+y)$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{dk}{dy} &= 3y^2 + 2y \\ k &= y^3 + y^2 + C' \quad (C' : \text{const.})\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}u &= \sin(x+y) + y^3 + y^2 + C' = C \\ \therefore \sin(x+y) + y^3 + y^2 + C'' &= 0\end{aligned}$$

1.2.1 積分因子を用いた完全形への変形

1 階の微分方程式が $P(x, y) + Q(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$ と表され、 $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ ならば完全微分形ではない。
しかし、

$$\frac{\partial(FP)}{\partial y} = \frac{\partial(FQ)}{\partial x} \tag{1.18}$$

となるような F が存在し

$$F(x, y)P(x, y) + F(x, y)Q(x, y) \frac{dy}{dx} = 0 \tag{1.19}$$

となる場合がある。この F を**積分因子**とよぶ。

(1.18) の条件を書き下すと

$$\frac{\partial F}{\partial y}P + F\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x}Q + F\frac{\partial Q}{\partial x} \quad (1.20)$$

(i) $F(x, y) = F(x)$ であるとき、 $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$
このとき、(1.20) は

$$F\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{dF}{dx}Q \quad (1.21)$$

$$\frac{dF}{dx} = F\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} \quad (1.22)$$

ここで $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ が x のみの関数であるならば変数分離形となるので、これを $g(x)$ とする。

$$\frac{dF}{dx} = Fg(x) \quad (1.23)$$

x で積分して

$$\int \frac{1}{F}dF = \int g(x)dx \quad (1.24)$$

$$\ln |F| = \int g(x)dx \quad (1.25)$$

$$F = \exp\left(\int g(x)dx\right) \quad (1.26)$$

となり、積分因子が求められる。

(ii) $F(x, y) = F(y)$ のとき、 $\frac{dF}{dx} = 0$
同様にして

$$\frac{dF}{dy}P + F\frac{\partial P}{\partial y} = F\frac{\partial Q}{\partial x} \quad (1.27)$$

$$-F\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{dF}{dy}P \quad (1.28)$$

$$\frac{dF}{dy} = -F\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} \quad (1.29)$$

ここで $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P}$ が y のみの関数であるならば変数分離形となるので、これを $g(y)$ とする。

$$\frac{dF}{dy} = -Fg(y) \quad (1.30)$$

y で積分して

$$\int \frac{1}{F} dF = - \int g(y) dy \quad (1.31)$$

$$\ln |F| = - \int g(y) dy \quad (1.32)$$

$$F = \exp \left(- \int g(y) dy \right) \quad (1.33)$$

例題

$(e^{x+y} + ye^y) + (xe^y - 1) \frac{dy}{dx} = 0$ を解け。

$$\begin{cases} P &= e^{x+y} + ye^y \\ Q &= xe^y - 1 \end{cases}$$

とすると、

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} &= e^{x+y} + e^y + ye^y \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= e^y \end{cases}$$

となり、 $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ であるから完全微分形ではない。
ここで積分因子を求めることを考える。

$$\begin{cases} \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{e^y(e^x + y)}{xe^x - 1} \\ \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} = \frac{e^y(e^x + y)}{e^y(e^x + y)} = 1 \end{cases}$$

$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P}$ が y のみの関数であるからこれを $g(y)$ として

$$F(y) = \exp \left(- \int g(y) dy \right) = \exp \left(- \int dy \right) = e^{-y}$$

これを元の微分方程式にもどして

$$\begin{aligned} e^{-y}(e^{x+y} + ye^y) + e^{-y}(xe^y - 1) \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \underbrace{(e^x + y)}_{P'} + \underbrace{(x - e^{-y})}_{Q'} \frac{dy}{dx} &= 0 \end{aligned}$$

$\frac{\partial P'}{\partial y} = 1, \frac{\partial Q'}{\partial x} = 1$ より完全微分形である。

解を $u(x, y) = C$ とすると ($C : \text{const.}$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= P' \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= Q' \end{aligned}$$

より

$$u = \int P' dx + k(y) = e^x + xy + k(y)$$

これを y で偏微分して

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + \frac{dk}{dy} = Q' = x - e^{-y}$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dy} &= -e^{-y} \\ k &= e^{-y} + C' \quad (C' : \text{const.}) \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} u &= e^x + xy + e^{-y} + C' = C \\ \therefore e^x + xy + e^{-y} + C' &= 0 \end{aligned}$$

1.3 1 階の線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = \gamma(x) \quad (1.34)$$

で表される微分方程式を考える。ここで、

$$\begin{cases} \gamma(x) = 0 \text{ のとき} & \text{同次線形常微分方程式} \\ \gamma(x) \neq 0 \text{ のとき} & \text{非同次線形常微分方程式} \end{cases}$$

である。

(i) $\gamma(x) = 0$ のとき

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \quad (1.35)$$

変数分離形としてこれを解くと

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int P(x) dx \quad (1.36)$$

$$\ln |y| = - \int P(x) dx + C \quad (1.37)$$

$$y = C \exp \left(- \int P(x) dx \right) \quad (1.38)$$

(ii) $\gamma(x) \neq 0$ のとき

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = \gamma(x) \quad (1.39)$$

ここで

$$\underbrace{\{P(x)y - \gamma(x)\}}_{P' \text{ とする}} + \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{Q' \text{ とする}} = 0 \quad (1.40)$$

として ($P' + Q' \frac{dy}{dx} = 0$ の形とみなせる)、積分因子により完全形を導く。
積分因子 $F(x, y) = F(x)$ と仮定すると、

$$\frac{dF}{dx} = F \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right)}{Q} = \frac{F(P(x) - 0)}{1} = FP(x) \quad (1.41)$$

これは x のみの関数であるから、完全微分形にできる。

よって

$$\frac{1}{F}dF = P(x)dx \quad (1.42)$$

$$F = C \exp \left(\int P(x)dx \right) \quad (1.43)$$

ここで、 C は任意であるから $C = 1$ として積分因子 $\exp \left(\int P(x)dx \right)$ を元の式 (1.40) にかけて

$$\underbrace{\exp \left(\int P(x)dx \right) \{P(x)y - \gamma(x)\}}_M + \underbrace{\exp \left(\int P(x)dx \right) \frac{dy}{dx}}_N = 0 \quad (1.44)$$

解を $u(x, y) = C$ とすると、

$$u = \int N dy + K(x) = y \exp \left(\int P(x)dx \right) + k(x) \quad (1.45)$$

$$M = \frac{\partial u}{\partial x} = P(x)y \exp \left(\int P(x)dx \right) + \frac{dk}{dx} = \exp \left(\int P(x)dx \right) (P(x)y - \gamma(x)) \quad (1.46)$$

よって

$$\frac{dk}{dx} = -\exp \left(\int P(x)dx \right) \gamma(x) \quad (1.47)$$

$$k = -\int \exp \left(\int P(x)dx \right) \gamma(x)dx + C'' \quad (1.48)$$

$$u = y \exp \left(\int P(x)dx \right) - \int \exp \left(\int P(x)dx \right) \gamma(x)dx + C'' = C' \quad (1.49)$$

整理して

$$y = \exp \left(-\int P(x)dx \right) \left\{ C''' + \int \exp \left(\int P(x)dx \right) \gamma(x)dx \right\} \quad (1.50)$$

$$= e^{-h} \left\{ C''' + \int e^h \gamma(x)dx \right\} \quad \left(\because \int P(x)dx = h \right) \quad (1.51)$$

例題

$\frac{dy}{dx} + y \tan x = \sin 2x$ を解け。

$$\frac{dy}{dx} + y \underbrace{\tan x}_{P(x)} = \underbrace{\sin 2x}_{\gamma(x)}$$

とすると、

$$\begin{aligned}h &= \int P(x)dx = \int \tan x dx = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\ln |\cos x| \\e^{-h} &= e^{\ln |\cos x|} = \cos x \\e^h &= \frac{1}{\cos x} \\e^h \gamma(x) &= \frac{1}{\cos x} \sin 2x = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x} = 2 \sin x \\\therefore y &= \cos x \left(C + \int 2 \sin x dx \right) = C \cos x - 2 \cos^2 x\end{aligned}$$

1.4 2 階の線形微分方程式

$$y'' + P(x)y' + qy = \gamma(x) \quad (1.52)$$

で表される微分方程式を考える。ここで、

$$\begin{cases} \gamma(x) = 0 \text{ のとき} & \text{同次線形常微分方程式} \\ \gamma(x) \neq 0 \text{ のとき} & \text{非同次線形常微分方程式} \end{cases}$$

である。

同次線形常微分方程式には 2 つの基本解 y_1, y_2 が存在し、その線形結合も方程式の解となる (一般解)

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad (1.53)$$

特解を求めるためには 2 つの初期値が必要となる。

$$y(x_0) = k_1 \quad (k_1 : \text{const.}) \quad (1.54)$$

$$\frac{d}{dk} y(x_0) = k_2 \quad (k_2 : \text{const.}) \quad (1.55)$$

1.4.1 2 階の同次線形微分方程式

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (1.56)$$

について、1 つの基本解が判明しているときの 1 階の微分方程式での変形を行う。

判明している基本解を y_1 、求めたいもう 1 つの基本解を y_2 とする。

いま、 $y_2 = uy_1$ と仮定する。

このとき、

$$y_2' = u'y_1 + uy_1' \quad (1.57)$$

$$y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' \quad (1.58)$$

これを元の方程式 (1.56) に代入して

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = 0 \quad (1.59)$$

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + p(u'y_1 + uy_1') + q(uy_1) = 0 \quad (1.60)$$

$$u''y_1 + u'(2y_1' + py_1) + u(y_1'' + py_1' + qy_1) = 0 \quad (1.61)$$

$$u''y_1 + u'(2y_1' + py_1) = 0 \quad (1.62)$$

ここで $U = u', U' = u''$ とすると

$$U' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p \right) U = 0 \quad (1.63)$$

これを解くと

$$\int \frac{1}{U} dU = \int \left(\frac{-2y_1'}{y_1} - p \right) dx \quad (1.64)$$

$$\ln |U| = -2 \ln |y_1| - \int p dx + C \quad (1.65)$$

$$U = \pm \frac{1}{y_1^2} \exp \left(- \int p(x) dx \right) \exp(C) = \frac{C'}{y_1^2} \exp \left(- \int p(x) dx \right) \quad (1.66)$$

$$y_2 = uy_1 = y_1 \int U dx \quad (1.67)$$

例題

$(x^2 - x)y'' - xy' + y = 0$ の基本解が x のとき、もう 1 つの基本解を求めよ。

もう 1 つの基本解を y_2 とする。 $y_2 = uy_1 = ux$ とすると、

$$\begin{aligned} y_2' &= u'x + u \\ y_2'' &= u''x + 2u' \end{aligned}$$

元の方程式に代入して整理すると

$$\begin{aligned} (x^2 - x)(u''x + 2u') - x(u'x + u) + ux &= 0 \\ (x^2 - x)u'' + (x - 2)u' &= 0 \end{aligned}$$

$u' = U$ として

$$\begin{aligned} x(x - 1)U' + (x - 2)U &= 0 \\ \int \frac{1}{U} dU &= \int \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{2}{x} \right) dx \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}
 \ln |U| &= \ln |x-1| - \ln |x^2| + C_1 \\
 U &= \pm e^{C_1} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \\
 \therefore y_2 &= ux \\
 &= x \int U dx \\
 &= \pm e^{C_1} x \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx \\
 &= \pm e^{C_1} x \left(\ln |x| + \frac{1}{x} + C_2 \right) \\
 &= \underbrace{(\pm e^{C_1})}_{C_3} x \left(\ln |x| + \frac{1}{x} \right) + \underbrace{(\pm e^{C_1}) C_2}_{C_4} x \\
 &= C_3 (x \ln |x| + 1) + C_4 x
 \end{aligned}$$

となり線形結合の形となった。 x はすでに判明している基本解であるから、もう 1 つの基本解は $(x \ln |x| + 1)$ である。

1.4.2 2 階の同次線形微分方程式の解の性質

$$y'' + ay' + by = 0 (a, b : \text{const.}) \quad (1.68)$$

の解が $y = e^{\lambda x}$ で表されたとする。(このとき、 $\frac{d^n}{dx^n} y = \lambda^n e^{\lambda x}$)
これを方程式 (1.68) に代入すると、

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a \lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0 \quad (1.69)$$

$$\underbrace{(\lambda^2 + a\lambda + b)}_{\text{特性方程式}} e^{\lambda x} = 0 \quad (1.70)$$

$e^{\lambda x} \neq 0$ より、

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad (1.71)$$

このとき、この特性方程式の判別式を D とすると、

$$D = a^2 - 4b \begin{cases} > 0 : 2 \text{ つの実数解をもつ} & (i) \\ = 0 : 1 \text{ つの実重根をもつ} & (ii) \\ < 0 : 2 \text{ つの虚数解をもつ} & (iii) \end{cases}$$

(i) $D > 0$ のとき

2 つの 1 次独立な基本解 $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$ が求められるので、一般解は $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

(ii) $D = 0$ のとき

もう 1 つの基本解を求めるために、1 つの基本解からもう 1 つの基本解を求める。

1 つの基本解が $y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{-\frac{a}{2}x}$ として、もう 1 つの基本解を $y_2 = uy_1 = ue^{-\frac{a}{2}x}$ とすると

$$y_2'' + ay_2' + by_2 = 0 \quad (1.72)$$

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + a(u'y_1 + uy_1') + b(uy_1) = 0 \quad (1.73)$$

$$u''y_1 + u'(2y_1' + ay_1) + u(y_1'' + ay_1' + by_1) = 0 \quad (1.74)$$

$$u''y_1 + u' \left(2 \left(-\frac{a}{2} e^{-\frac{a}{2}x} \right) + a e^{-\frac{a}{2}x} \right) + u(y_1'' + ay_1' + by_1) = 0 \quad (1.75)$$

$$u''y_1 = 0 \quad (1.76)$$

$$(1.77)$$

よって

$$u'' = 0 \quad (1.78)$$

$$u' = S \quad (1.79)$$

$$u = sx + t \quad (s, t : \text{const.}) \quad (1.80)$$

$$y_2 = uy_1 = (sx + t)e^{-\frac{a}{2}x} \quad (1.81)$$

一般解は

$$y = C_1 e^{-\frac{a}{2}x} + C_2 (sx + t)e^{-\frac{a}{2}x} \quad (1.82)$$

$$= \underbrace{(C_1 + C_2 t)}_{C'_1} e^{-\frac{a}{2}x} + \underbrace{C_2 s}_{C'_2} x e^{-\frac{a}{2}x} \quad (1.83)$$

$$= (C'_1 + C'_2 x) e^{-\frac{a}{2}x} \quad (1.84)$$

(iii) $D < 0$ のとき

特性方程式の解を

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = -\frac{a}{2} \pm i \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} = -\frac{a}{2} \pm i\omega \quad (i, \omega \in \mathbb{R}) \quad (1.85)$$

このとき一般解は

$$y = C_1^* e^{(-\frac{a}{2} + i\omega)x} + C_2^* e^{(-\frac{a}{2} - i\omega)x} \quad (1.86)$$

ここでオイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1.87)$$

を用いると、

$$y = e^{-\frac{a}{2}x} (C_1^* e^{i\omega x} + C_2^* e^{-i\omega x}) \quad (1.88)$$

$$= e^{-\frac{a}{2}x} \{C_1^* (\cos \omega x + i \sin \omega x) + C_2^* (\cos \omega x - i \sin \omega x)\} \quad (1.89)$$

$$= e^{-\frac{a}{2}x} \left\{ \underbrace{(C_1^* + C_2^*)}_{C'_1} \cos \omega x + i \underbrace{(C_1^* - C_2^*)}_{C'_2} \sin \omega x \right\} \quad (1.90)$$

$$= e^{-\frac{a}{2}x} (C'_1 \cos \omega x + C'_2 \sin \omega x) \quad (1.91)$$

1.4.3 2 階の非同次線形微分方程式

$$y'' + P(x)y' + q(x)y = \gamma(x) \quad (1.92)$$

の一般解は、 $\gamma(x) = 0$ とした同次方程式の解

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad (1.93)$$

と非同次方程式の特解 y_p により

$$y = y_h + y_p \quad (1.94)$$

$$= C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p \quad (1.95)$$

と表せる。 $(y_p$ に任意定数が含まれないことに注意)

y_p の求め方として、**未定係数法**と**定数変化法**がある。

未定係数法

特解の関数形式を決めてから、その係数を決定することで解を求める方法である。以下のルールに従って関数形式を決定する。

(i) 基本ルール

$\gamma(x)$ の形式に従って y_p の形式を決定する。

表 1.2: 未定係数法 基本ルール

$\gamma(x)$ に含まれる項	y_p の形式
ke^{nx}	Ke^{nx}
$kx^n \quad (n = 0, 1, \dots)$	$K_n x^n + K_{n-1} x^{n-1} + K_{n-2} x^{n-2} + \dots + K_1 x + K_0$
$k \cos \omega x, k \sin \omega x$	$K \cos \omega x + M \sin \omega x$
$ke^{\alpha x} \cos \omega x, ke^{\alpha x} \sin \omega x$	$e^{\alpha x} (K \cos \omega x + M \sin \omega x)$

(ii) 修正ルール

y_p の候補が同次方程式の基本解と一致する場合、 y_p に x を乗じたものが y_p の候補となる。

また、同次方程式の特性方程式が重根をもつときは、 x^2 を乗じたものが y_p の候補となる。

(iii) 和のルール

$\gamma(x)$ が複数の種類の関数の線形和で表されるとき、 y_p の候補は対応する y_p の候補の線形和で表される。

例題

$y'' - 16y = 9.6e^{4x} + 30e^x$ の一般解を求めよ。

同次方程式の一般解は

$$y_h = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{4x}$$

与式の非同次方程式の右辺第 1 項は、同次方程式の基本解の 1 つ e^{4x} の実数倍より、特解は

$$y_p = Kx e^{4x} + M e^x$$

これを x で微分して

$$\begin{aligned} y_p' &= K e^{4x} + 4Kx e^{4x} + M e^x \\ y_p'' &= 8K e^{4x} + 16Kx e^{4x} + M e^x \end{aligned}$$

これらを元の式に代入すると

$$\begin{aligned} K &= \frac{9.6}{8} = 1.2 \\ M &= -2 \end{aligned}$$

よって非同次方程式の解は

$$y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{4x} + 1.2x e^{4x} - 2e^x$$

定数変化法

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ の一般解が $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ で表され、 y_1, y_2 が互いに独立であるとき、 $C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0$ となるのは $C_1 = C_2 = 0$ のときのみである。

ここに新たに $C_1 y_1' + C_2 y_2' = 0$ という条件を加えると

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.96)$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1.97)$$

であれば $C_1 = C_2 = 0$ が解となるのでこれが y_1, y_2 が一次独立となる条件となる。この W を**ロンスキアン**とよぶ。

$y'' + p(x)y' + q(x)y = \gamma(x)$ の一般解が $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$ で表されたとする。

C_1, C_2 は x の関数 $C_1(x), C_2(x)$ として、 $y_p = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ としこれを求めることを考える。

$$y_p' = C_1' y_1 + C_1 y_1' + C_2' y_2 + C_2 y_2' \quad (1.98)$$

$$= (C_1 y_1' + C_2 y_2') + (C_1' y_1 + C_2' y_2) \quad (1.99)$$

新たな条件を $C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0$ とすると、(方程式を満足する C_1, C_2 を見つけさえすればよいため、このような仮定をしてよい)

$$y_p' = C_1 y_1' + C_2 y_2' \quad (1.100)$$

$$y_p'' = C_1' y_1' + C_1 y_1'' + C_2' y_2' + C_2 y_2'' \quad (1.101)$$

これらを元の方程式に代入して整理すると

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = \gamma(x) \quad (1.102)$$

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = \gamma \end{cases} \quad (1.103)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (1.104)$$

$$\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{y_1 y_2' - y_1' y_2} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{\gamma}{W} \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad (1.105)$$

以上から

$$C_1 = \int -\frac{y_2 \gamma}{W} dx \quad (1.106)$$

$$C_2 = \int \frac{y_1 \gamma}{W} dx \quad (1.107)$$

$$y_p = -y_1 \underbrace{\int \frac{y_2 \gamma}{W} dx}_{C_1(x)} + y_2 \underbrace{\int \frac{y_1 \gamma}{W} dx}_{C_2(x)} \quad (1.108)$$

例題

$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$ の一般解を求めよ。

同次方程式の一般解は

$$\begin{aligned} y_h &= C_1 y_1 + C_2 y_2 \\ &= C_1 \cos x + C_2 \sin x \end{aligned}$$

C_1, C_2 が x の関数として、特解を求める。

y_1, y_2 に関するロンスキアン W は

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \cos x \cos x - (-\sin x) \sin x \\ &= 1 \end{aligned}$$

特解は

$$\begin{aligned}y_p &= -y_1 \int \frac{y_2 \gamma}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 \gamma}{W} dx \\&= -\cos x \int \frac{\sin x}{\cos x} dx + \sin x \int dx \\&= \cos x \ln |\cos x| + x \sin x\end{aligned}$$

一般解は

$$y = (C_1 + \ln |\cos x|) \cos x + (C_2 + x) \sin x$$

1.5 連立微分方程式

今まで取り扱った微分方程式を拡張した連立微分方程式により、2 個の異なる事象の関係を記述することが可能である。

1.5.1 連立微分方程式の例

連立微分方程式の例として、以下の例が挙げられる。

- Richardson の軍拡競争モデル

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & k \\ h & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- Strogatz の恋愛モデル

$$\begin{aligned} \text{ロミオがジュリエットを好きになる気持ち} & \quad \frac{dR}{dt} = aJ \\ \text{ジュリエットがロミオを好きになる気持ち} & \quad \frac{dJ}{dt} = -bR \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例題

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0 \text{ を解け。}^a$$

^a ヒント：解を $y = e^{\lambda x}$ として解く。

$y_1 = y, y_2 = \frac{dy}{dx}$ とする。
このとき

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = 3 \frac{dy}{dx} - 2y = -2y_1 + 3y_2 \\ \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_2 \\ -2y_1 + 3y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで、 $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ とすると、上式は

$$\frac{dY}{dx} = AY$$

と表せる。

ここで $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ として解を $Y = e^{\lambda x} B$ とすると、

$$(\text{左辺}) = \frac{dY}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\lambda x} B) = e^{\lambda x} \lambda B$$

$$(\text{右辺}) = AY = e^{\lambda x} AB$$

(左辺) = (右辺) より、 $\lambda B = AB$ を満足する λ, B を求めればよい。

固有方程式は

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)$$

固有値は $\lambda = 1, 2$

$\lambda = 1$ のとき $B = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 、 $\lambda = 2$ のとき $B = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

微分方程式の解は

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = e^x C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2x} C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

このとき、

$$y = y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = y_2 = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}$$

である。

例題

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - z \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 2y + 2z \\ \frac{dz}{dt} = 2x + y + 2z \end{cases} \quad \text{を解け。}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ とすると}$$

$$\frac{d}{dt}X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} X$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ として } X = e^{\lambda t} B \text{ とすると以下の固有方程式が導ける。}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

これを解くと $\lambda = 1, 2$ (重解)

$$\begin{aligned} \lambda = 1 \text{ のとき } B = s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}) \quad & \text{よって } X = \begin{pmatrix} e^t \\ -2e^t \\ 0 \end{pmatrix} \\ \lambda = 2 \text{ のとき } B = s' \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (s' \in \mathbb{R}) \quad & \text{よって } X = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -2e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで、 $\lambda = 2$ に対するもう 1 つの解を

$$X = \begin{pmatrix} (k+t)e^{2t} \\ (m-2t)e^{2t} \\ (n-t)e^{2t} \end{pmatrix}$$

とする。^{*1}

$$X = \begin{pmatrix} e^{2t}(1+2k+2t) \\ e^{2t}(-2+2m-4t) \\ e^{2t}(-1+2n-2t) \end{pmatrix}$$

これらを元の式に入れて整理すると、

$$k = s'' \text{ として、 } m = -1 - 2s'', n = -1 - s''$$

$$s'' = 0 \text{ として}$$

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} te^{2t} \\ -(1+2t)e^{2t} \\ -(1+t)e^{2t} \end{pmatrix} \\ \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= C_1 \begin{pmatrix} e^t \\ -2e^t \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -2e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} te^{2t} \\ -(1+2t)e^{2t} \\ -(1+t)e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

^{*1} 重解のときは $(A + Bt)e^{\lambda t}$ 、3 重解のときは $(A' + B't + C't^2)e^{\lambda t}$ を仮定する。

$D < 0$ のときは、 $D > 0$ の場合と同様に解いてオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を用いてまとめる。

1.5.2 連立非同次線形微分方程式

例題

x, y を t の関数とすると、

$$\begin{cases} x' = 2x - y + e^{2t} \\ y' = 5x - 4y + e^{-t} \end{cases} \quad \text{を解け。}$$

同次形 (e^{2t}, e^{-t} の項が存在しない) のときを考える。

固有方程式は

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 5 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 3)(\lambda - 1) = 0 \quad \lambda = -3, 1$$

ゆえにこれを解くと

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-3t} \\ y = C_1 e^t + 5C_2 e^{-3t} \end{cases}$$

定数変化法を考え、 C_1, C_2 が t の関数であるとする

$$\begin{cases} x = C_1(t)e^t + C_2(t)e^{-3t} \\ y = C_1(t)e^t + 5C_2(t)e^{-3t} \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = C_1'(t)e^t + C_1(t)e^t + C_2'(t)e^{-3t} - 3C_2(t)e^{-3t}$$

$$\frac{dy}{dt} = C_1'(t)e^t + C_1(t)e^t + 5C_2'(t)e^{-3t} - 15C_2(t)e^{-3t}$$

これらを元の式に代入して整理すると

$$e^t C_1'(t) + e^{-3t} C_2'(t) = e^{2t}$$

$$e^t C_1'(t) + 5e^{-3t} C_2'(t) = e^{-t}$$

これから

$$C_1'(t) = \frac{1}{4}(5e^t - e^{-2t})$$

$$C_2'(t) = \frac{1}{4}(e^{2t} - e^{5t})$$

積分して

$$C_1(t) = \frac{1}{4} \left(5e^t + \frac{1}{2}e^{-2t} \right) + C_3$$

$$C_2(t) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{5t} \right) + C_4$$

ゆえに求める一般解は

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-3t} + \frac{6}{5} e^{2t} + \frac{1}{4} e^{-t} \\ y = C_1 e^t + 5C_2 e^{-3t} + e^{2t} + \frac{3}{4} e^{-t} \end{cases}$$

第 2 章

確率・統計

2.1 事象・確率

2.1.1 標本空間，試行，標本点，事象

コインを投げる場合を考える。このとき、コインは表か裏のどちらかを示すが、表か裏かは実験や観測、偶然に左右される。このような行為を**試行 (trial)** と呼び、試行によって起こり得る結果の全体からなる集合を**標本空間 (sample space)** とし Ω で表す。 Ω の各要素で、それ以上分割できない事象を**標本点 (sample point)** もしくは**根元事象 (elementary event)** という。 Ω の部分集合を**事象 (event)** といい、標本空間は**全事象**ともいう。

集合論の場合と同様に

共通集合 (積集合) $A \cap B$

A か B の両方に属する標本点全体の集合

和集合 $A \cup B$

A か B のいずれかに属する標本点全体の集合

空事象 ϕ

標本点は何も含まれない事象

補集合 A^c, \bar{A}

A に属さない標本点全体の集合 特に $\Omega^c = \phi$

が定義される。

2.1.2 確率の基本的性質

確率 P は、各事象と 0 から 1 までの数と対応しており、

1. 任意の事象 A について $0 \leq P(A) \leq 1$

2. 全事象 Ω に対して $P(\Omega) = 1$ 、空集合 ϕ に対して $P(\phi) = 0$
3. 事象 A, B が排反 ($A \cap B = \phi$) なら $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

これらの基本的性質から以下の性質が導かれる。

1. A が B の部分集合なら $P(A) \leq P(B)$
2. 事象 A, B に対して $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
3. 互いに排反な事象 A_1, A_2, \dots, A_n ($i \neq j$ なら $A_i \cap A_j = \phi$) に対して

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$
4. 事象 A_1, A_2, \dots, A_n に対して (排反とは限らない)

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$$
5. 事象 A とその補事象 A^c に対して $P(A^c) = 1 - P(A)$

2.1.3 条件付き確率，独立

事象 A, B があって、 $P(A) < 1$ のとき、

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (2.1)$$

を A が起きたときの B の**条件付き確率 (conditional probability)** と定義する。 $P(B|A)$ は確率の基本的性質を満たすことを示せる。

ふたつの事象 A, B が

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (2.2)$$

を満たすとき、 A と B は**独立 (independent)** であるという。このとき、 $P(A) > 0$ ならば $P(B|A) = P(B)$ となり、事象 A が起きたことは事象 B の起こる確率に影響を及ぼさない。同様に逆も成り立つ。

2.1.4 ベイズ (Bayes) の定理

全事象 Ω が互いに排反な事象 A_1, A_2, \dots, A_n に分割されたとする。(つまり $i \neq j$ なら $A_i \cap A_j = \phi$)

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \quad (2.3)$$

このとき、任意の事象 B に対して

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap B) \quad (2.4)$$

が成り立つ。

ここで、

$$P(A_i \cap B) = P(B)P(A_i|B) = P(A_i)P(B|A_i) \quad (2.5)$$

より、 $P(A_i) > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ ならば任意の事象 B に対して

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j)P(B|A_j)} \quad (2.6)$$

これを**ベイズ (Bayes) の定理**という。

ベイズの定理を使うことで、 $P(A_i)$ と $P(B|A_i) (i = 1, 2, \dots, n)$ から $P(A_i|B)$ を求めることができる。ここで、

$P(A_i)$ を (事象 B が起こる前の事象 A_i の) 事前確率

$P(A_i|B)$ を (事象 B が起きた後の事象 A_i の) 事後確率

$P(B|A_i)$ を (事象 A_i が起きたときに事象 B が起こる) 尤度^{*1}という。

A_i が起こる確率と A_i が起きたときに B が起こる確率から、実際に B を観察したときに A_i が起きている確率を計算できる。

*1 「ゆうど」と読む。

2.2 確率変数と確率分布

2.2.1 確率変数

例えば、2個のサイコロを投げたときの出た目の和を考えると。このとき出た目の和を X とすると、 X は 2, 3, ..., 12 の値をとる変数であり、 X のとる値に対して以下のような確率となる。

X の値	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

この X のように、とりうる値に対して確率が対応する変数を**確率変数**と呼ぶ。また、確率変数のとりうる値とその確率を一緒にして**確率分布**と呼ぶ。

これを一般化して、変数 X のとりうる値を $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 、その確率を $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ とする。すなわち

$$P(X = x_k) = p_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (2.7)$$

となる。このとき

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = \sum_{k=1}^n p_k = 1 \quad (2.8)$$

2.2.2 さまざまな確率変数

確率変数には以下のものが知られている。

離散型確率変数

- 離散型一様分布

とりうる値をすべて同じ確率でとる分布

$$P(X = x_k) = \frac{1}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2.9)$$

- 二項分布 $B(n, p)$

事象 A の起こる確率を p として、この試行を n 回繰り返したとき、 n 回のうち A の起こった回数が k である確率

$$P(X = k) = {}_n C_k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (2.10)$$

- ポアソン分布 $Po(\lambda)$

p が小さい場合の離散型確率分布

与えられた時間内に平均で λ 回発生する事象がちょうど k 回発生する確率

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (2.11)$$

二項分布の $np = \lambda$ として $n \rightarrow \infty$ とするとポアソン分布に近づく。

例題

不良率 0.02 の生産ラインがあるとする。無作為に 100 個抽出したとき、不良品が 4 つ以上含まれる確率を求めよ。

不良率が 0.02 と小さいのでポアソン分布で近似することができる。 X は $B(100, 0.02)$ に従うから、近似的に

$$\lambda = np = 100 \times 0.02 = 2$$

のポアソン分布 $Po(2)$ に従う。したがって

$$\text{不良品が 0 個ある確率 } P(X = 0) = e^{-2} \frac{2^0}{0!} = 0.135$$

$$\text{不良品が 1 個ある確率 } P(X = 1) = e^{-2} \frac{2^1}{1!} = 0.271$$

$$\text{不良品が 2 個ある確率 } P(X = 2) = e^{-2} \frac{2^2}{2!} = 0.271$$

$$\text{不良品が 3 個ある確率 } P(X = 3) = e^{-2} \frac{2^3}{3!} = 0.180$$

以上より、求める確率 $P(X \geq 4)$ は

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)\} \\ &= 0.143 \end{aligned}$$

連続型確率変数

確率変数 X が連続的な実数値をとる場合を考える。

連続型確率変数 X が $a \leq X \leq b$ の値をとる確率 $P(a \leq X \leq b)$ が

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b p(x) dx \quad (2.12)$$

と表され、 $p(x)$ が

$$p(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (2.13)$$

を満たすとき、 $p(x)$ を X の**確率密度関数 (probability density function)** という。また、

$$p(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx \quad (2.14)$$

を**確率分布関数** (probability distribution function) または**累積分布関数** (cumulative distribution function) という。

連続型確率変数には以下のものが知られている。

- 連続型一様分布

確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & (a \leq x \leq b) \\ 0 & (x < a, b < x) \end{cases} \quad (2.15)$$

で与えられる確率分布

- 指数分布

確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{-(\frac{1}{\alpha})x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (2.16)$$

で与えられる確率分布

- 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$

確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (2.17)$$

で与えられる確率分布を、平均 μ 分散 σ^2 の正規分布といい $N(\mu, \sigma^2)$ で表わす。特に $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ の場合、つまり $N(0, 1)$ のときを**標準正規分布**とよぶ。

– 正規分布の基準化

確率変数 X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従っているとき、 $y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。この変換を行うことを X の**基準化**という。

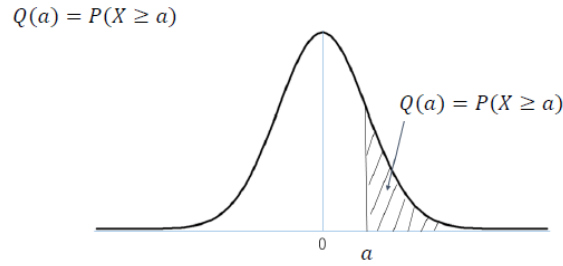
$$P\left(a \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq b\right) = P(a\sigma + \mu \leq X \leq b\sigma + \mu) \quad (2.18)$$

$$= \int_{a\sigma+\mu}^{b\sigma+\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\} dx \quad (2.19)$$

$$= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{y^2}{2} \right) dy \quad (2.20)$$

– 標準正規分布の上側確率

確率変数 X が標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとき、 X が a 以上になる確率を $Q(a)$ で表し、標準正規分布の上側確率とよぶ。上側確率 $Q(a)$ を求めるには正規分布表を用いる。



上側確率 $Q(a)$ を求めるには正規分布表を用いる。

例題

日本人 20 歳男性の身長 $X(\text{cm})$ は正規分布 $N(171, 5^2)$ に従っていると考えられる。20 歳男性の人口は約 62 万人であるとき、身長が 166cm 以上 176cm 未満の人数を概算せよ。

確率変数 X が正規分布 $N(171, 5^2)$ に従っているとき、 $y = \frac{X - 171}{5}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

したがって

$$\text{身長 } 166\text{cm 以上の割合 } P(X \geq 166) = P\left(y \geq \frac{166 - 171}{5}\right) = Q(-1.0) = 0.8413$$

$$\text{身長 } 176\text{cm 以上の割合 } P(X \geq 176) = P\left(y \geq \frac{176 - 171}{5}\right) = Q(1.0) = 0.1587$$

身長が 166cm 以上 176cm 未満の割合は

$$P(166 \leq X < 176) = P(X \geq 166) - P(X \geq 176) = 0.6826$$

ゆえに求める人数は

$$620000 \times P(166 \leq X < 176) = 423212 \quad \therefore \text{約 } 42 \text{ 万人}$$

2.2.3 期待値

確率変数 X のとりうる値とその確率をかけて合算したものを**期待値 (expected value)**(または平均) とよび $E(x)$ で表す。

離散型確率分布の場合、確率変数 X が $x_i (1 \leq i \leq n)$ をとる確率を p_i とすれば、期待値 $E(x)$ は下式で表せる。

$$E(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

連続型確率分布の場合、確率密度関数が $f(x)$ で与えられるとき、期待値 $E(x)$ は下式で表せる。

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

確率変数 Y が確率変数 X の関数 $Y = u(X)$ で与えられる場合、期待値は

$$\begin{cases} \text{離散型確率分布のとき} & E(Y) = E[u(X)] = \sum_{i=1}^n u(x_i)p_i \\ \text{連続型確率分布のとき} & E(Y) = E[u(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)f(x)dx \end{cases} \quad (2.21)$$

とできる。したがって、以下の線形性が成り立つ。

1. X を確率変数、 a, b を定数とすると、

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad (2.22)$$

2. 2つの確率変数 X, Y と定数 a, b, c に対して

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c \quad (2.23)$$

ここで、代表的な確率分布における期待値を考える。

- 離散型一様分布

1 から n までの数字から 1 つ選ぶ場合

$$E(x) = \sum_{i=1}^n i \cdot \frac{1}{n} = \frac{1+n}{2} \quad (2.24)$$

- 二項分布 $B(n, p)$

確率 p で起こる事象が n 回の試行で k 回起こる場合

$$P(X = k) = {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (2.25)$$

$$E(x) = \sum_{k=0}^n k \cdot {}_nC_k \cdot p^k (1-p)^{n-k} \quad (2.26)$$

$$= \sum_{k=0}^n k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \quad (2.27)$$

$$= np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!\{(n-1)-(k-1)\}!} p^{(k-1)} (1-p)^{\{(n-1)-(k-1)\}} \quad (2.28)$$

$$= np \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{l!\{(n-1)-l\}!} p^l (1-p)^{\{(n-1)-l\}} \quad (\because l = k-1) \quad (2.29)$$

$$= np \sum_{l=0}^{n-1} {}_{n-1}C_l \cdot p^l (1-p)^{\{(n-1)-l\}} \quad (2.30)$$

$$= np \quad (2.31)$$

- ポアソン分布 $Po(\lambda)$

与えられた時間内に平均で λ 回発生する事象がちょうど k 回発生する確率 $Po(\lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ に

ついて

$$E(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (2.32)$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \quad (2.33)$$

$$= \lambda \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^l}{l!} \quad (2.34)$$

$$= \lambda \quad (2.35)$$

- 連続型一様分布

確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & (a \leq x \leq b) \\ 0 & (x < a, b < x) \end{cases} \quad (2.36)$$

で与えられるとき

$$E(x) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx \quad (2.37)$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2} \cdot \frac{1}{b-a} \quad (2.38)$$

$$= \frac{a+b}{2} \quad (2.39)$$

- 指数分布

確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{-(\frac{1}{\alpha})x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (2.40)$$

で与えられるとき

$$E(x) = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot e^{-(\frac{1}{\alpha})x} dx \quad (2.41)$$

$$= \alpha \quad (2.42)$$

- 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$

$$N(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (2.43)$$

について

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \quad (2.44)$$

$$= \mu \int_{-\infty}^{\infty} N(\mu, \sigma^2) dx + \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) \cdot N(\mu, \sigma^2) dx \quad (2.45)$$

$$= \mu + \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right\} dt \quad (\because x-\mu=t) \quad (2.46)$$

$$= \mu + \left[-\sigma^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right\} \right]_{-\infty}^{\infty} \quad (2.47)$$

$$= \mu \quad (2.48)$$

2.2.4 分散

確率変数 x の分散 (variance) $V(x)$ は下式で定義される。

$$V(x) = E[(x-\mu)^2] = E[(x-E(x))^2] \quad (2.49)$$

分散は平均の周りの散らばり度合いを示す、つまり分散が大きければ平均を離れた値をとる確率が大い。

分散 $V(x)$ について

$$V(x) = E[(x-\mu)^2] \quad (2.50)$$

$$= E(x^2 - 2\mu x + \mu^2) \quad (2.51)$$

$$= E(x^2) - 2\mu E(x) + \mu^2 \quad (2.52)$$

$$= E(x^2) - \mu^2 \quad (2.53)$$

$$V(ax+b) = E[\{ax+b-E(ax+b)\}^2] \quad (2.54)$$

$$= E[\{ax+b-(a\mu+b)\}^2] \quad (2.55)$$

$$= E[\{a(x-\mu)\}^2] \quad (2.56)$$

$$= a^2 E[(x-\mu)^2] \quad (2.57)$$

$$= a^2 V(x) \quad (2.58)$$

が成り立つ。

また、標準偏差 (standard deviation) $D(x)$ は

$$D(x) = \sqrt{V(x)} \quad (2.59)$$

と定義される。確率変数 $Y = ax$ について

$$V(Y) = V(ax) = a^2 V(x) \quad (2.60)$$

$$D(Y) = D(ax) = aD(x) \quad (2.61)$$

となる。ここで、代表的な確率分布における分散について述べる。

- 離散型一様分布

1 から n までの数字から 1 つ選ぶ場合 ($p(x) = \frac{1}{n}$)

$$V(x) = E(x^2) - \mu^2 \quad (2.62)$$

$$= \sum_{i=1}^n i^2 \cdot \frac{1}{n} - \left(\frac{1+n}{2} \right)^2 \quad (2.63)$$

$$= \frac{(2n+1)(n+1)}{2} - \frac{(n+1)^2}{4} \quad (2.64)$$

$$= \frac{n^2 - 1}{12} \quad (2.65)$$

- 二項分布 $B(n, p)$

確率 p で起こる事象が n 回の試行で k 回起こる場合

$$P(X = k) = {}_n C_k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (2.66)$$

について

$$E(x) = np \quad (2.67)$$

$$E[x(x-1)] = \sum_{k=0}^n k(k-1) \cdot {}_n C_k p^k (1-p)^{n-k} \quad (2.68)$$

$$= \sum_{k=2}^n k(k-1) \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \quad (2.69)$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{(k-2)!\{(n-2)-(k-2)\}!} p^{k-2} (1-p)^{\{(n-2)-(k-2)\}} \quad (2.70)$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{l=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{l!\{(n-2)-l\}!} p^l (1-p)^{\{(n-2)-l\}} \quad (2.71)$$

$$= n(n-1) \cdot p^2 \quad (2.72)$$

$$E(x^2) = E[x(x-1)] + E[x] \quad (2.73)$$

$$= n(n-1)p^2 + np \quad (2.74)$$

$$V(x) = E(x^2) - \mu^2 \quad (2.75)$$

$$= n(n-1)p^2 + np - n^2 p^2 \quad (2.76)$$

$$= np(1-p) \quad (2.77)$$

- ポアソン分布 $Po(\lambda)$

与えられた時間内に平均で λ 回発生する事象がちょうど k 回発生する確率 $Po(\lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ に

ついて

$$E(x) = \lambda \quad (2.78)$$

$$E[x(x-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (2.79)$$

$$= \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \quad (2.80)$$

$$= \lambda^2 \quad (2.81)$$

$$E[x^2] = E[x(x-1)] + E(x) \quad (2.82)$$

$$= \lambda^2 + \lambda \quad (2.83)$$

$$V(x) = E(x^2) - \mu^2 \quad (2.84)$$

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \quad (2.85)$$

$$= \lambda \quad (2.86)$$

- 連続型一様分布

確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & (a \leq x \leq b) \\ 0 & (x < a, b < x) \end{cases} \quad (2.87)$$

で与えられるとき

$$E(x) = \frac{a+b}{2} \quad (2.88)$$

$$E(x^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \quad (2.89)$$

$$V(x) = E(x^2) - \mu^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (2.90)$$

- 指数分布

確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{-(\frac{1}{\alpha})x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (2.91)$$

で与えられるとき

$$E(x) = \alpha \quad (2.92)$$

$$E(x^2) = \int_0^\infty x^2 \cdot \frac{1}{\alpha} e^{-(\frac{1}{\alpha})x} dx \quad (2.93)$$

$$= \left[x^2 \left(-e^{-(\frac{1}{\alpha})x} \right) \right]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-(\frac{1}{\alpha})x} \cdot 2x dx \quad (2.94)$$

$$= \left[2x(-\alpha)e^{-(\frac{1}{\alpha})x} \right]_0^\infty - \int_0^\infty -2\alpha e^{-(\frac{1}{\alpha})x} dx \quad (2.95)$$

$$= \left[-2\alpha^2 e^{-(\frac{1}{\alpha})x} \right]_0^\infty \quad (2.96)$$

$$= \alpha^2 \quad (2.97)$$

$$V(x) = E(x^2) - \mu^2 \quad (2.98)$$

$$= 2\alpha^2 - \alpha^2 \quad (2.99)$$

$$= \alpha^2 \quad (2.100)$$

- 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$

$$N(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (2.101)$$

について

$$E(x) = \mu \quad (2.102)$$

ここで、 $t = \frac{x - \mu}{\sigma}$ とすると

$$V(x) = E[(x - \mu)^2] = \int_{-\infty}^\infty (x - \mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} dx \quad (2.103)$$

$$= \sigma^2 \int_{-\infty}^\infty t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) dt \quad (2.104)$$

$$= \sigma^2 \left[-t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) \right]_{-\infty}^\infty + \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) dt \quad (2.105)$$

$$= \sigma^2 \quad (2.106)$$

2.2.5 共分散と相関係数

2つの確率変数 (X, Y) に対して、 $\mu_x = E(X)$, $\mu_y = E(Y)$ とおくとき、共分散 $Cov(X, Y)$ は

$$Cov(X, Y) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \quad (2.107)$$

例えば、 $(X, Y) = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n), \}$ の n 個のデータがある場合、

$$Cov(X, Y) = \frac{(x_1 - \mu_x)(y_1 - \mu_y) + (x_2 - \mu_x)(y_2 - \mu_y) + \dots + (x_n - \mu_x)(y_n - \mu_y)}{n} \quad (2.108)$$

である。 $Cov(X, Y) > 0$ のとき X が大きくなれば Y も大きくなり、 $Cov(X, Y) < 0$ のとき X が大きくなれば Y は小さくなる。

また、相関係数 $\rho(X, Y)$ は

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \quad (2.109)$$

により定義される。相関係数は確率変数 X, Y の単位に依存せず、また $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$ を満たす。

2.2.6 中心極限定理

確率分布は先述の通り様々あるが、試行回数 n が十分大きい場合正規分布に近づくことが知られている。これを**中心極限定理 (central limit theorem)**と呼ぶ。

例えば、二項分布 $B(n, p)$ も n が大きい場合は正規分布 $N(np, np(1-p))$ として近似できる。基準化すれば、確率変数 $\frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。数学的に記述すれば、二項分布に従う確率変数 $X = B(n, p)$ は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}} \leq x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad (2.110)$$

と表せる。

例題

サイコロを 500 回振って 1 の目が出る回数が 80 回以上 100 回以下となる確率を求めよ。

確率変数 $X = B(500, \frac{1}{6})$ は正規分布 $N(\frac{500}{6}, \frac{2500}{36})$ に従うので、確率変数 $z = \frac{X - \frac{500}{6}}{\sqrt{\frac{2500}{36}}}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。つまり

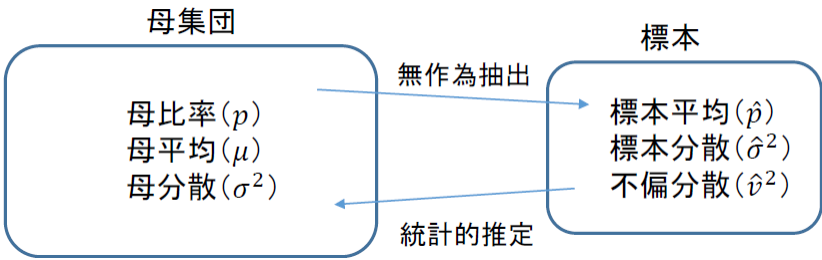
$$\begin{aligned} P(80 \leq X \leq 100) &= P\left(\frac{80 - \frac{500}{6}}{\frac{50}{6}} \leq \frac{X - \frac{500}{6}}{\frac{50}{6}} \leq \frac{100 - \frac{500}{6}}{\frac{50}{6}}\right) \\ &= P\left(-\frac{2}{5} \leq x \leq 2\right) \\ &= P\left(-\frac{2}{5} \leq z\right) - P(2 \leq z) \\ &= 0.6326 \end{aligned}$$

ただし、実際の二項分布の正規近似では半数補正を行った方がよく近似できる。半数補正を行えば

$$\begin{aligned} P(80 \leq X \leq 100) &= P\left(\frac{80 - \frac{500}{6} - \frac{1}{2}}{\frac{50}{6}} \leq \frac{X - \frac{500}{6}}{\frac{50}{6}} \leq \frac{100 - \frac{500}{6} + \frac{1}{2}}{\frac{50}{6}}\right) \\ &= P(-0.046 \leq x \leq 2.06) \\ &= P(-0.046 \leq z) - P(2.06 \leq z) \\ &= 0.6575 \end{aligned}$$

2.3 標本、統計量、標本分布

例えば、内閣の支持率を調査したいとする。しかし、国民全員に対して調査するのは無理がある。したがって、このようなとき、母集団から無作為に一部を抽出し調査を行うことで全体の支持率を推定する。このような調査を標本調査とよぶ。一方で、国勢調査は国民全員に対して行われるものであり、このように母集団に対して行う調査を全数調査とよぶ。ここでは、標本について取り扱う。



- 母集団分布
- 二項分布 $B(1, p)$ のように母集団に想定される確率分布
- 母比率 p
- 母集団での比率
- 母平均 μ
- 母集団での平均
- 母分散 σ^2
- 母集団での分散
- 標本平均 \hat{p}
- 標本での平均（母平均の不偏推定量）
- 標本分散 $\hat{\sigma}^2$
- 標本での分散
- 不偏分散 \hat{v}^2
- 母分散の不偏推定量

ここで、

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{p})^2 \quad (2.111)$$

である。変形すると

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{p})^2 \quad (2.112)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{(X_i - \mu) - (\hat{p} - \mu)\}^2 \quad (2.113)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{p} - \mu)^2 - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)(\hat{p} - \mu) \quad (2.114)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 + \frac{n}{n} (\hat{p} - \mu)^2 - \frac{2}{n} (\hat{p} - \mu) \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \quad (2.115)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 + (\hat{p} - \mu)^2 - 2(\hat{p} - \mu) \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{n} \quad (2.116)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 + (\hat{p} - \mu)^2 - 2(\hat{p} - \mu)(\hat{p} - \mu) \quad (2.117)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - (\hat{p} - \mu)^2 \quad (2.118)$$

標本分散 $\hat{\sigma}^2$ の期待値は

$$E[\hat{\sigma}^2] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - (\hat{p} - \mu)^2\right] \quad (2.119)$$

$$= E\left[\frac{1}{n} \{(X_1 - \mu)^2 + (X_2 - \mu)^2 + \cdots + (X_n - \mu)^2\} - (\hat{p} - \mu)^2\right] \quad (2.120)$$

$$= \frac{1}{n} \{E[(X_1 - \mu)^2] + E[(X_2 - \mu)^2] + \cdots + E[(X_n - \mu)^2]\} - E[(\hat{p} - \mu)^2] \quad (2.121)$$

$$= \frac{1}{n} n\sigma^2 - \frac{1}{n} \sigma^2 \quad (2.122)$$

$$= \frac{n-1}{n} \sigma^2 \quad (2.123)$$

母分散と一致するように不偏分散の期待値を設定するためには $n/(n-1)$ を乗ずればよい。したがって

$$\hat{v}^2 = \frac{n}{n-1} \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{p})^2 \quad (2.124)$$

不偏分散 \hat{v}^2 を求める際は (標本数-1) で除することに留意する必要がある。標本は母集団から無作為に抽出したものであるから偏りを含んでおり、その偏りを補正して母分散に近づいていくという意味が含まれている。