# 1.常微分方程式

2021年5月10日 月曜日 15:00

(1) $\dfrac{dy}{dx} = xy + x + y + 1$

$= (x+1)(y+1)$

$\dfrac{dy}{y+1} = (x+1)dx$

$\displaystyle\int \frac{dy}{y+1} = \int (x+1)dx$

$\log|y+1| = \dfrac{1}{2}x^2 + x + C$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$

基本解は $e^{(2+i)x}$、$e^{(2-i)x}$ より

一般解は

$y = e^{2x}(C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix})$

$= e^{2x}(C_1' \cos x + C_2' \sin x)$

(3) $9\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} - 8y = e^{2x}$

$9\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} - 8y = 0$ について

一般解は

$y_h = C_1 e^{\frac{2}{3}x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x}$

求める解はこれに特解 $y_p$ を加えた形

$r(x) = e^{2x}$ より

$y_p = ke^{2x}$ とおける

$y_p = ke^{2x}$ とおく

$y_p$を与式に代入して

$$36ke^{2x} + 12ke^{2x} - 8ke^{2x} = e^{2x}$$

$$40ke^{2x} = e^{2x}$$

したがって

$$k = \frac{1}{40}$$

ゆえに $$y = C_1 e^{\frac{2}{3}x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x} + \frac{1}{40} e^{2x}$$

# 2.行列

2021年5月10日 月曜日 15:21

Aの固有ベクトルを求める。

$$A=\begin{bmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$ について

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 & -7 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 5 & -3 & -6-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+2\lambda^2+36\lambda-72-15-21$$

$$+70-35\lambda+18-3\lambda+18+3\lambda$$

$$=-\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2$$

$$=-(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda-2)$$

$$=-(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)$$

$$=0$$

$$\lambda=-1,1,2$$

(i) $\lambda=-1$ のとき

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} 7 & -3 & -7 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & -5 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}s$

(ii) $\lambda=1$ のとき

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} 5 & -3 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -7 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}t$

(iii) $\lambda=2$ のとき

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}4 & -3 & -7\\ -1 & 0 & 1\\ 5 & -3 & -8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

固有ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}u$

ゆえに

$$P=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

# 3.確率

2021年5月10日 月曜日　　16:17

(1)
$$E = \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\times k\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\times k\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\right)$$
$$= \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right)$$
$$= \lambda\sum_{l=0}^{\infty}\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^l}{l!}\right) \quad (\because l = k-1)$$
$$= \lambda$$

(2) $k=0$ のとき

$$P(k=0) = e^{-\lambda t}$$

(3) t時間内に1人以上来客する.

$$P(k \geqq 1) = 1 - P(k=0) = 1 - e^{-\lambda t}$$

(4)

$$P(k=1) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

# 4.偏微分方程式

2021年5月10日 月曜日 16:51

(1) $$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0$$

$T(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ と表せるとすると

$$R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) = 0$$

$$r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}$$

これは変数分離形であるから

(左辺) = (右辺) = $\mu$ とおける

(左辺) = $\mu$ より

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \mu R(r) = 0 \quad \cdots ①$$

(右辺) = $\mu$ より

$$\Theta''(\theta) + \mu\Theta(\theta) = 0 \quad \cdots ②$$

(2) ①の基本解を $R(r) = r^\alpha$ とおく

$$R'(r) = \alpha r^{\alpha-1}$$

$$R''(r) = \alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}$$

これを①に代入すると

$$\alpha(\alpha-1)r^\alpha + \alpha r^\alpha - \mu r^\alpha = 0$$

$$(\alpha^2-\mu)r^\alpha = 0$$

ここで $\mu > 0$ とする

$\mu = \lambda^2$ とおくと①について

$$\alpha^2 - \mu = \alpha^2 - \lambda^2 = 0$$

$$\alpha = \pm\lambda$$

よって $R(r) = r^\alpha = r^{\pm\lambda}$

基本解の線形結合により

$$R(r) = C_1 r^\lambda + C_2 r^{-\lambda}$$

②について
基本解は $e^{\pm\lambda i\theta}$
したがって一般解は

$$\Theta(\theta) = C_3' e^{\lambda i\theta} + C_4' e^{-\lambda i\theta}$$
$$= C_3 \cos\lambda\theta + C_4 \sin\lambda\theta$$

したがって求める一般解は

$$T(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$$
$$= (C_1 r^{\lambda} + C_2 r^{-\lambda})(C_3 \cos\lambda\theta + C_4 \sin\lambda\theta)$$

(3) $f_1(\theta) = 15\cos\theta$、$f_2(\theta) = 30\sin\theta$ より.
$\lambda = 1$ とすると

$$T(r,\theta) = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r}\right)(C_3\cos\theta + C_4\sin\theta)$$

$$T(r_1,\theta) = \left(10C_1 + \frac{1}{10}C_2\right)(C_3\cos\theta + C_4\sin\theta) = 15\cos\theta$$
$$T(r_2,\theta) = \left(20C_1 + \frac{1}{20}C_2\right)(C_3\cos\theta + C_4\sin\theta) = 30\sin\theta$$