院試用数学概説

目次

はじめに

本書は、大学院の院試突破のための数学についてまとめたものである。

文中で付される記号

$\therefore$	したがって (therefore)
$\because$	なぜなら (because)
$\forall$	任意の、全ての (all)
$\exists$	ある、存在する (exists)
$\mathbb{N}$	自然数
$\mathbb{Z}$	整数
$\mathbb{Q}$	有理数
$\mathbb{R}$	実数
$\mathbb{C}$	複素数
$\exp(x)$	指数関数 e^x
$\ln(x)$	自然対数 $\log x$
i	虚数単位 ($i = \sqrt{-1}$)

第 1 章

微分方程式

工学では微分方程式は重要である。研究におけるデータ解析ではコンピュータによる近似解を求めることで微分方程式を解く。

微分方程式は主に 2 つに分類される。

1. 常微分方程式 (ordinary differencial equation, ODE)
   y が 1 つの独立変数 x の関数で微分方程式が x や y とその導関数で構成されるもの
2. 偏微分方程式 (partial differercial equation, PDE)
   2 つ以上の独立変数で構成されるもの

微分方程式に含まれる導関数の最高指数のことを**階数**と呼ぶ。

表 1.1: 微分方程式の例

		階数	
		1	2
従属変数の数	1	$\dfrac{dy}{dx} = x + y + 1$	$x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$
	2〜	$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1$	$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1$

1.1 微分方程式の基本形

1.1.1 変数分離形

いま

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{1.1}$$

が与えられているとき、両辺を x で積分して

$$\int g(y)\frac{dy}{dx}dx = \int f(x)dx \tag{1.2}$$

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx \tag{1.3}$$

が得られる。

例題

$\dfrac{dy}{dx} = 1 + y^2$ を解け。

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 1 + y^2 \\ \frac{1}{1+y^2}dy &= dx \\ \int \frac{1}{1+y^2}dy &= \int dx \\ \therefore \quad \tan^{-1} y &= x + C \qquad (C : const.) \end{aligned}$$

1.1.2 同次形

$\dfrac{y}{x} = u$ とおくことで変数分離形へと変換することができる場合もある。

$$(\text{与式}) = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{dy}{dx}\right) \tag{1.4}$$

$y = ux$ より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u \tag{1.5}$$

これより

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{du}{dx}x + u \tag{1.6}$$

$$\frac{du}{dx}x = f(u) - u \tag{1.7}$$

$$\frac{1}{x}dx = \frac{1}{f(u)-u}du \tag{1.8}$$

例題

$2xy\dfrac{dy}{dx} = y^2 - x^2$ を解け。

両辺を $2xy$ で割って $u = \dfrac{y}{x}$ とすると、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy} = \frac{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\left(\dfrac{y}{x}\right)} = \frac{u^2 - 1}{2u}$$

$y = ux$ より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$$

これより

$$\begin{aligned}\frac{u^2-1}{2u} &= \frac{du}{dx}x + u\\ \frac{du}{dx}x &= \frac{-(u^2+1)}{2u}\\ \frac{1}{x}dx &= -\frac{2u}{u^2+1}du\end{aligned}$$

両辺を積分して

$$\begin{aligned}\ln|x| &= -\ln|u^2+1| + C\\ C &= \ln|x(u^2+1)|\\ \pm\mathrm{e}^C &= x(u^2+1)\\ C' &= x(u^2+1)\end{aligned}$$

$u = \dfrac{y}{x}$ より

$$\begin{aligned}C' &= x\left\{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right\}\\ &= \frac{y^2}{x} + x\\ xC' &= x^2 + y^2\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}x^2 - C'x + y^2 &= 0\\ \therefore\quad \left(x - \frac{C'}{2}\right)^2 + y^2 &= \left(\frac{C'}{2}\right)^2\end{aligned}$$

1.2 完全微分方程式

2 変数関数 $u(x,y)$ の全微分は

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \tag{1.9}$$

であるから、この性質を用いて微分方程式を元の形に戻すことを考える。

いま、微分方程式が

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1.10}$$

の形で表され

$$M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{1.11}$$

$$N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.12}$$

を満足するとき、この方程式の一般解は $u(x,y) = C \quad (C : const.)$ となる。
(1.11),(1.12) をもう一度偏微分すると、

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \tag{1.14}$$

と一致する。
(1.11) の両辺を x で積分して

$$u = \int M dx + k(y) \tag{1.15}$$

ただし、$k(y)$ は y のみを変数とする関数である。
$k(y)$ を求めるために、(1.15) を y で偏微分して

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M dx\right) + \frac{dk}{dy} = N \tag{1.16}$$

$$\frac{dk}{dy} = N - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M dx\right) \tag{1.17}$$

例題

$\cos(x+y) + \left\{3y^2 + 2y + \cos(x+y)\right\}\dfrac{dy}{dx} = 0$ を解け。

$$M = \cos(x+y)$$
$$N = 3y^2 + 2y + \cos(x+y)$$

とおき、それぞれを y、x で偏微分すると

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x \partial y} = -\sin(x+y)$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x \partial y} = -\sin(x+y)$$

これらが一致するため、完全微分方程式である。
解を $u(x,y) = C$ とすると $(C : const.)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = N$$

より

$$u = \int M dx + k(y) = \sin(x+y) + k(y)$$

これを y で偏微分して

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos(x+y) + \frac{dk}{dy} = N = 3y^2 + 2y + \cos(x+y)$$

よって

$$\frac{dk}{dy} = 3y^2 + 2y$$
$$k = y^3 + y^2 + C' \quad (C' : const.)$$

ゆえに

$$u = \sin(x+y) + y^3 + y^2 + C' = C$$
$$\therefore \quad \sin(x+y) + y^3 + y^2 + C'' = 0$$

1.2.1　積分因子を用いた完全形への変形

1 階の微分方程式が $P(x,y) + Q(x,y)\dfrac{dy}{dx} = 0$ と表され、$\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ ならば完全微分形ではない。
しかし、

$$\frac{\partial (FP)}{\partial y} = \frac{\partial (FQ)}{\partial x} \tag{1.18}$$

となるような F が存在し

$$F(x,y)P(x,y) + F(x,y)Q(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1.19}$$

となる場合がある。この F を**積分因子**とよぶ。

(1.18) の条件を書き下すと

$$\frac{\partial F}{\partial y}P + F\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x}Q + F\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{1.20}$$

(i) $F(x,y) = F(x)$ であるとき、$\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0$
このとき、(1.20) は

$$F\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{dF}{dx}Q \tag{1.21}$$

$$\frac{dF}{dx} = F\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} \tag{1.22}$$

ここで $\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ が x のみの関数であるならば変数分離形となるので、これを $g(x)$ とする。

$$\frac{dF}{dx} = Fg(x) \tag{1.23}$$

x で積分して

$$\int \frac{1}{F}dF = \int g(x)dx \tag{1.24}$$

$$\ln|F| = \int g(x)dx \tag{1.25}$$

$$F = \exp\left(\int g(x)dx\right) \tag{1.26}$$

となり、積分因子が求められる。

(ii) $F(x,y) = F(y)$ のとき、$\dfrac{dF}{dx} = 0$
同様にして

$$\frac{dF}{dy}P + F\frac{\partial P}{\partial y} = F\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{1.27}$$

$$-F\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{dF}{dy}P \tag{1.28}$$

$$\frac{dF}{dy} = -F\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{P} \tag{1.29}$$

ここで $\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{P}$ が y のみの関数であるならば変数分離形となるので、これを $g(y)$ とする。

$$\frac{dF}{dy}=-Fg(y) \tag{1.30}$$

y で積分して

$$\int\frac{1}{F}dF=-\int g(y)dy \tag{1.31}$$

$$\ln|F|=-\int g(y)dy \tag{1.32}$$

$$F=\exp\left(-\int g(y)dy\right) \tag{1.33}$$

例題

$(\mathrm{e}^{x+y}+y\mathrm{e}^{y})+(x\mathrm{e}^{y}-1)\dfrac{dy}{dx}=0$ を解け。

$$\begin{cases} P &= \mathrm{e}^{x+y}+y\mathrm{e}^{y} \\ \\ Q &= x\mathrm{e}^{y}-1 \end{cases}$$

とすると、

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} &= \mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^{y}+y\mathrm{e}^{y} \\ \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} &= \mathrm{e}^{y} \end{cases}$$

となり、$\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ であるから完全微分形ではない。
ここで積分因子を求めることを考える。

$$\begin{cases} \dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} &= \dfrac{\mathrm{e}^{y}(\mathrm{e}^{x}+y)}{x\mathrm{e}^{x}-1} \\ \\ \dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{P} &= \dfrac{\mathrm{e}^{y}(\mathrm{e}^{x}+y)}{\mathrm{e}^{y}(\mathrm{e}^{x}+y)}=1 \end{cases}$$

$\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{P}$ が y のみの関数であるからこれを $g(y)$ として

$$F(y)=\exp\left(-\int g(y)dy\right)=\exp\left(-\int dy\right)=\mathrm{e}^{-y}$$

これを元の微分方程式にもどして

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-y}(\mathrm{e}^{x+y}+y\mathrm{e}^{y})+\mathrm{e}^{-y}(x\mathrm{e}^{y}-1)\frac{dy}{dx}&=0 \\ \underbrace{(\mathrm{e}^{x}+y)}_{P'}+\underbrace{(x-\mathrm{e}^{-y})}_{Q'}\frac{dy}{dx}&=0 \end{aligned}$$

$\dfrac{\partial P'}{\partial y}=1, \dfrac{\partial Q'}{\partial x}=1$ より完全微分形である。
解を $u(x,y)=C$ とすると $(C:const.)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}&=P' \\ \frac{\partial u}{\partial y}&=Q' \end{aligned}$$

より

$$u=\int P'dx+k(y)=\mathrm{e}^{x}+xy+k(y)$$

これを y で偏微分して

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+\frac{dk}{dy}=Q'=x-\mathrm{e}^{-y}$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dy}&=-\mathrm{e}^{-y} \\ k&=\mathrm{e}^{-y}+C' \quad (C':const.) \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} u=\mathrm{e}^{x}+xy+\mathrm{e}^{-y}+C'&=C \\ \therefore \quad \mathrm{e}^{x}+xy+\mathrm{e}^{-y}+C''&=0 \end{aligned}$$

1.3　1 階の線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = \gamma(x) \tag{1.34}$$

で表される微分方程式を考える。ここで、

$$\begin{cases} \gamma(x) = 0 \text{ のとき} & \textbf{同次線形常微分方程式} \\ \gamma(x) \neq 0 \text{ のとき} & \textbf{非同次線形常微分方程式} \end{cases}$$

である。

(i) $\gamma(x) = 0$ のとき

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \tag{1.35}$$

変数分離形としてこれを解くと

$$\int \frac{1}{y} dy = -\int P(x)dx \tag{1.36}$$

$$\ln |y| = -\int P(x)dx + C \tag{1.37}$$

$$y = C \exp\left(-\int P(x)dx\right) \tag{1.38}$$

(ii) $\gamma(x) \neq 0$ のとき

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = \gamma(x) \tag{1.39}$$

ここで

$$\underbrace{\{P(x)y - \gamma(x)\}}_{P' \text{とする}} + \underbrace{1}_{Q' \text{とする}} \frac{dy}{dx} = 0 \tag{1.40}$$

として ($P' + Q'\dfrac{dy}{dx} = 0$ の形とみなせる)、積分因子により完全形を導く。
積分因子 $F(x, y) = F(x)$ と仮定すると、

$$\frac{dF}{dx} = F \frac{\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)}{Q} = \frac{F(P(x) - 0)}{1} = FP(x) \tag{1.41}$$

これは x のみの関数であるから、完全微分形にできる。
よって

$$\frac{1}{F}dF = P(x)dx \tag{1.42}$$

$$F = C\exp\left(\int P(x)dx\right) \tag{1.43}$$

ここで、C は任意であるから $C=1$ として積分因子 $\exp\left(\int P(x)dx\right)$ を元の式 (1.40) にかけて

$$\underbrace{\exp\left(\int P(x)dx\right)\{P(x)y-\gamma(x)\}}_{M}+\underbrace{\exp\left(\int P(x)dx\right)}_{N}\frac{dy}{dx}=0 \tag{1.44}$$

解を $u(x,y)=C$ とすると、

$$u=\int Ndy+K(x)=y\exp\left(\int P(x)dx\right)+k(x) \tag{1.45}$$

$$M=\frac{\partial u}{\partial x}=P(x)y\exp\left(\int P(x)dx\right)+\frac{dk}{dx}=\exp\left(\int P(x)dx\right)(P(x)y-\gamma(x)) \tag{1.46}$$

よって

$$\frac{dk}{dx}=-\exp\left(\int P(x)dx\right)\gamma(x) \tag{1.47}$$

$$k=-\int\exp\left(\int P(x)dx\right)\gamma(x)dx+C'' \tag{1.48}$$

$$u=y\exp\left(\int P(x)dx\right)-\int\exp\left(\int P(x)dx\right)\gamma(x)dx+C''=C' \tag{1.49}$$

整理して

$$y=\exp\left(-\int P(x)dx\right)\left\{C'''+\int\exp\left(\int P(x)dx\right)\gamma(x)dx\right\} \tag{1.50}$$

$$=\mathrm{e}^{-h}\left\{C'''+\int\mathrm{e}^{h}\gamma(x)dx\right\} \qquad \left(\because\int P(x)dx=h\right) \tag{1.51}$$

例題

$\dfrac{dy}{dx}+y\tan x=\sin 2x$ を解け。

$$\frac{dy}{dx}+y\underbrace{\tan x}_{P(x)}=\underbrace{\sin 2x}_{\gamma(x)}$$

とすると、

$$
\begin{aligned}
h &= \int P(x)dx = \int \tan x dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx = -\ln|\cos x| \\
\mathrm{e}^{-h} &= \mathrm{e}^{\ln|\cos x|} = \cos x \\
\mathrm{e}^{h} &= \frac{1}{\cos x} \\
\mathrm{e}^{h}\gamma(x) &= \frac{1}{\cos x}\sin 2x = \frac{2\sin x\cos x}{\cos x} = 2\sin x \\
\therefore \quad y &= \cos x\left(C + \int 2\sin x dx\right) = C\cos x - 2\cos^2 x
\end{aligned}
$$

1.4 2 階の線形微分方程式

$$y'' + P(x)y' + qy = \gamma(x) \tag{1.52}$$

で表される微分方程式を考える。ここで、

$$\begin{cases} \gamma(x) = 0 \text{ のとき} & \text{同次線形常微分方程式} \\ \gamma(x) \neq 0 \text{ のとき} & \text{非同次線形常微分方程式} \end{cases}$$

である。
同次線形常微分方程式には 2 つの基本解 y_1, y_2 が存在し、その線形結合も方程式の解となる (**一般解**)

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \tag{1.53}$$

特解を求めるためには 2 つの初期値が必要となる。

$$y(x_0) = k_1 \quad (k_1 : const.) \tag{1.54}$$

$$\frac{d}{dk} y(x_0) = k_2 \quad (k_2 : const.) \tag{1.55}$$

1.4.1 2 階の同次線形微分方程式

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{1.56}$$

について、1 つの基本解が判明しているときの 1 階の微分方程式での変形を行う。

判明している基本解を y_1、求めたいもう 1 つの基本解を y_2 とする。
いま、$y_2 = uy_1$ と仮定する。
このとき、

$$y_2' = u'y_1 + uy_1' \tag{1.57}$$

$$y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1 + uy_1'' \tag{1.58}$$

これを元の方程式 (1.56) に代入して

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = 0 \tag{1.59}$$

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + p(u'y_1 + uy_1') + q(uy_1) = 0 \tag{1.60}$$

$$u''y_1 + u'(2y_1' + py_1) + u(y_1'' + py_1' + qy_1) = 0 \tag{1.61}$$

$$u''y_1 + u'(2y_1' + py_1) = 0 \tag{1.62}$$

ここで $U = u', U' = u''$ とすると

$$U' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p\right)U = 0 \tag{1.63}$$

これを解くと

$$\int \frac{1}{U} dU = \int \left(\frac{-2y_1'}{y_1} - p\right) dx \tag{1.64}$$

$$\ln|U| = -2\ln|y_1| - \int p dx + C \tag{1.65}$$

$$U = \pm\frac{1}{y_1^2}\exp\left(-\int p(x)dx\right)\exp(C) = \frac{C'}{y_1^2}\exp\left(-\int p(x)dx\right) \tag{1.66}$$

$$y_2 = uy_1 = y_1\int U dx \tag{1.67}$$

例題

$(x^2 - x)y'' - xy' + y = 0$ の基本解が x のとき、もう 1 つの基本解を求めよ。

もう 1 つの基本解を y_2 とする。$y_2 = uy_1 = ux$ とすると、

$$y_2' = u'x + u$$
$$y_2'' = u''x + 2u'$$

元の方程式に代入して整理すると

$$(x^2 - x)(u''x + 2u') - x(u'x + u) + ux = 0$$
$$(x^2 - x)u'' + (x - 2)u' = 0$$

$u' = U$ として

$$x(x-1)U' + (x-2)U = 0$$
$$\int \frac{1}{U} dU = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x}\right) dx$$

これより

$$\begin{aligned}
\ln|U| &= \ln|x-1| - \ln|x^2| + C_1 \\
U &= \pm \mathrm{e}^{C_1}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \\
\therefore \quad y_2 &= ux \\
&= x\int U dx \\
&= \pm \mathrm{e}^{C_1} x \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx \\
&= \pm \mathrm{e}^{C_1} x \left(\ln|x| + \frac{1}{x} + C_2\right) \\
&= \underbrace{(\pm \mathrm{e}^{C_1})}_{C_3} x \left(\ln|x| + \frac{1}{x}\right) + \underbrace{(\pm \mathrm{e}^{C_1}) C_2}_{C_4} x \\
&= C_3(x\ln|x| + 1) + C_4 x
\end{aligned}$$

となり線形結合の形となった。x はすでに判明している基本解であるから、もう 1 つの基本解は $(x\ln|x| + 1)$ である。

1.4.2 2 階の同次線形微分方程式の解の性質

$$y'' + ay' + by = 0 (a, b : const.) \tag{1.68}$$

の解が $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ で表されるとする。(このとき、$\dfrac{d^n}{dx^n} y = \lambda^n \mathrm{e}^{\lambda x}$)
これを方程式 (1.68) に代入すると、

$$\lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x} + a\lambda \mathrm{e}^{\lambda x} + b\mathrm{e}^{\lambda x} = 0 \tag{1.69}$$

$$(\underbrace{\lambda^2 + a\lambda + b}_{\text{特性方程式}})\mathrm{e}^{\lambda x} = 0 \tag{1.70}$$

$\mathrm{e}^{\lambda x} \neq 0$ より、

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{1.71}$$

このとき、この特性方程式の判別式を D とすると、

$$D = a^2 - 4b \begin{cases} > 0 : 2\text{ つの実数解をもつ} & (i) \\ = 0 : 1\text{ つの実重根をもつ} & (ii) \\ < 0 : 2\text{ つの虚数解をもつ} & (iii) \end{cases}$$

(i) $D > 0$ のとき
2 つの 1 次独立な基本解 $\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ が求められるので、一般解は $y = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$

(ii) $D = 0$ のとき

もう 1 つの基本解を求めるために、1 つの基本解からもう 1 つの基本解を求める。

1 つの基本解が $y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} = \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}$ として、もう 1 つの基本解を $y_2 = uy_1 = u\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}$ とすると

$$y_2'' + ay_2' + by_2 = 0 \tag{1.72}$$

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + a(u'y_1 + uy_1') + b(uy_1) = 0 \tag{1.73}$$

$$u''y_1 + u'(2y_1' + ay_1) + u(y_1'' + ay_1' + by_1) = 0 \tag{1.74}$$

$$u''y_1 + u'\left(2\left(-\frac{a}{2}\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}\right) + a\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}\right) + u(y_1'' + ay_1' + by_1) = 0 \tag{1.75}$$

$$u''y_1 = 0 \tag{1.76}$$

$$\tag{1.77}$$

よって

$$u'' = 0 \tag{1.78}$$

$$u' = S \tag{1.79}$$

$$u = sx + t \qquad (s, t : const.) \tag{1.80}$$

$$y_2 = uy_1 = (sx + t)\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x} \tag{1.81}$$

一般解は

$$y = C_1\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x} + C_2(sx + t)\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x} \tag{1.82}$$

$$= (\underbrace{C_1 + C_2t}_{C_1'})\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x} + \underbrace{C_2s}_{C_2'}x\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x} \tag{1.83}$$

$$= (C_1' + C_2'x)\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x} \tag{1.84}$$

(iii) $D < 0$ のとき

特性方程式の解を

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = -\frac{a}{2} \pm i\frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} = -\frac{a}{2} \pm i\omega \quad (i, \omega \in \mathbb{R}) \tag{1.85}$$

このとき一般解は

$$y = C_1^*\mathrm{e}^{\left(-\frac{a}{2}+i\omega\right)x} + C_2^*\mathrm{e}^{\left(-\frac{a}{2}-i\omega\right)x} \tag{1.86}$$

ここでオイラーの公式

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{1.87}$$

を用いると、

$$y = \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}(C_1^*\mathrm{e}^{i\omega x} + C_2^*\mathrm{e}^{-i\omega x}) \tag{1.88}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}\left\{C_1^*(\cos\omega x + i\sin\omega x) + C_2^*(\cos\omega x - i\sin\omega x)\right\} \tag{1.89}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}\{\underbrace{(C_1^* + C_2^*)}_{C_1'}\cos\omega x + \underbrace{i(C_1^* - C_2^*)}_{C_2'}\sin\omega x\} \tag{1.90}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}(C_1'\cos\omega x + C_2'\sin\omega x) \tag{1.91}$$

1.4.3 2 階の非同次線形微分方程式

$$y'' + P(x)y' + q(x)y = \gamma(x) \tag{1.92}$$

の一般解は、$\gamma(x) = 0$ とした同次方程式の解

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 \tag{1.93}$$

と非同次方程式の特解 y_p により

$$y = y_h + y_p \tag{1.94}$$

$$= C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p \tag{1.95}$$

と表せる。(y_p に任意定数が含まれないことに注意)
y_p の求め方として、**未定係数法**と**定数変化法**がある。

未定係数法

特解の関数形式を決めてから、その係数を決定することで解を求める方法である。以下のルールに従って関数形式を決定する。

(i) 基本ルール
$\gamma(x)$ の形式に従って y_p の形式を決定する。

表 1.2: 未定係数法　基本ルール

$\gamma(x)$ に含まれる項	y_p の形式
$k\mathrm{e}^{nx}$	$K\mathrm{e}^{nx}$
$kx^n \quad (n = 0, 1, \cdots)$	$K_n x^n + K_{n-1}x^{n-1} + K_{n-2}x^{n-2} + \cdots + K_1 x + K_0$
$k\cos\omega x, k\sin\omega x$	$K\cos\omega x + M\sin\omega x$
$k\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\omega x, k\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\omega x$	$\mathrm{e}^{\alpha x}(K\cos\omega x + M\sin\omega x)$

(ii) 修正ルール
y_p の候補が同次方程式の基本解と一致する場合、y_p に x を乗じたものが y_p の候補となる。
また、同次方程式の特性方程式が重根をもつときは、x^2 を乗じたものが y_p の候補となる。

(iii) 和のルール
$\gamma(x)$ が複数の種類の関数の線形和で表されるとき、y_p の候補は対応する y_p の候補の線形和で表される。

例題

$y'' - 16y = 9.6\mathrm{e}^{4x} + 30\mathrm{e}^{x}$ の一般解を求めよ。

同次方程式の一般解は

$$y_h = C_1\mathrm{e}^{-4x} + C_2\mathrm{e}^{4x}$$

与式の非同次方程式の右辺第 1 項は、同次方程式の基本解の 1 つ e^{4x} の実数倍より、
特解は

$$y_p = Kx\mathrm{e}^{4x} + M\mathrm{e}^{x}$$

これを x で微分して

$$\begin{aligned} y_p' &= K\mathrm{e}^{4x} + 4Kx\mathrm{e}^{4x} + M\mathrm{e}^{x} \\ y_p'' &= 8K\mathrm{e}^{4x} + 16Kx\mathrm{e}^{4x} + M\mathrm{e}^{x} \end{aligned}$$

これらを元の式に代入すると

$$\begin{aligned} K &= \frac{9.6}{8} = 1.2 \\ M &= -2 \end{aligned}$$

よって非同次方程式の解は

$$y = C_1\mathrm{e}^{-4x} + C_2\mathrm{e}^{4x} + 1.2x\mathrm{e}^{4x} - 2\mathrm{e}^{x}$$

定数変化法

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ の一般解が $y = C_1y_1 + C_2y_2$ で表され、y_1, y_2 が互いに独立であるとき、$C_1y_1 + C_2y_2 = 0$ となるのは $C_1 = C_2 = 0$ のときのみである。
ここに新たに $C_1y_1' + C_2y_2' = 0$ という条件を加えると

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.96}$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1.97}$$

であれば $C_1 = C_2 = 0$ が解となるのでこれが y_1, y_2 が一次独立となる条件となる。この W を**ロンスキアン**とよぶ。

$y'' + p(x)y' + q(x)y = \gamma(x)$ の一般解が $y_h = C_1y_1 + C_2y_2$ で表されるとする。
C_1, C_2 は x の関数 $C_1(x), C_2(x)$ として、$y_p = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ としこれを求めることを考える。

$$y_p' = C_1'y_1 + C_1y_1' + C_2'y_2 + C_2y_2' \tag{1.98}$$

$$= (C_1y_1' + C_2y_2') + (C_1'y_1 + C_2'y_2) \tag{1.99}$$

新たな条件を $C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0$ とすると、(方程式を満足する C_1, C_2 を見つけさえすればよいため、このような仮定をしてよい)

$$y_p' = C_1y_1' + C_2y_2' \tag{1.100}$$
$$y_p'' = C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2'y_2' + C_2y_2'' \tag{1.101}$$

これらを元の方程式に代入して整理すると

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = \gamma(x) \tag{1.102}$$
$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 & = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' & = \gamma \end{cases} \tag{1.103}$$
$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \end{pmatrix} \tag{1.104}$$
$$\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{y_1y_2' - y_1'y_2} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{\gamma}{W} \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \tag{1.105}$$

以上から

$$C_1 = \int -\frac{y_2\gamma}{W}dx \tag{1.106}$$
$$C_2 = \int \frac{y_1\gamma}{W}dx \tag{1.107}$$
$$y_p = -y_1 \underbrace{\int \frac{y_2\gamma}{W}dx}_{C_1(x)} + y_2 \underbrace{\int \frac{y_1\gamma}{W}dx}_{C_2(x)} \tag{1.108}$$

例題

$y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ の一般解を求めよ。

同次方程式の一般解は

$$\begin{aligned} y_h &= C_1y_1 + C_2y_2 \\ &= C_1\cos x + C_2\sin x \end{aligned}$$

C_1, C_2 が x の関数として、特解を求める。

y_1, y_2 に関するロンスキアン W は

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \cos x\cos x - (-\sin x)\sin x \\ &= 1 \end{aligned}$$

特解は

$$
\begin{aligned}
y_p &= -y_1 \int \frac{y_2 \gamma}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 \gamma}{W} dx \\
&= -\cos x \int \frac{\sin x}{\cos x} dx + \sin x \int dx \\
&= \cos x \ln |\cos x| + x \sin x
\end{aligned}
$$

一般解は

$$
y = (C_1 + \ln |\cos x|) \cos x + (C_2 + x) \sin x
$$

1.5 連立微分方程式

今まで取り扱った微分方程式を拡張した連立微分方程式により、2 個の異なる事象の関係を記述することが可能である。

1.5.1 連立微分方程式の例

連立微分方程式の例として、以下の例が挙げられる。

- Richardson の軍拡競争モデル

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & k \\ h & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- Strogatz の恋愛モデル

$$\begin{aligned} \text{ロミオがジュリエットを好きになる気持ち} \quad \frac{dR}{dt} &= aJ \\ \text{ジュリエットがロミオを好きになる気持ち} \quad \frac{dJ}{dt} &= -bR \\ \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例題

$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ を解け。[a]

[a] ヒント：解を $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ として解く。

$y_1 = y, y_2 = \dfrac{dy}{dx}$ とする。
このとき

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 3\frac{dy}{dx} - 2y = -2y_1 + 3y_2 \\ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_2 \\ -2y_1 + 3y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで、$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ とすると、上式は

$$\frac{dY}{dx} = AY$$

と表せる。
ここで $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ として解を $Y = \mathrm{e}^{\lambda x} B$ とすると、

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \frac{dY}{dx} = \frac{d}{dx}(\mathrm{e}^{\lambda x} B) = \mathrm{e}^{\lambda x} \lambda B \\ (\text{右辺}) &= AY = \mathrm{e}^{\lambda x} AB \end{aligned}$$

(左辺) = (右辺) より、$\lambda B = AB$ を満足する λ, B を求めればよい。
固有方程式は

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

固有値は $\lambda = 1, 2$
$\lambda = 1$ のとき $B = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$、$\lambda = 2$ のとき $B = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
微分方程式の解は

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{x} C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{2x} C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

このとき、

$$\begin{aligned} y = y_1 &= C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{2x} \\ \frac{dy}{dx} = y_2 &= C_1 \mathrm{e}^{x} + 2C_2 \mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

である。

例題

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - z \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 2y + 2z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x + y + 2x \end{cases}$$

を解け。

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると

$$\frac{d}{dt}X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} X$$

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ として $X = \mathrm{e}^{\lambda t} B$ とすると以下の固有方程式が導ける。

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

これを解くと $\lambda = 1, 2$(重解)

$\lambda = 1$ のとき $B = s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R})$ よって $X = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ -2\mathrm{e}^t \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda = 2$ のとき $B = s'\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (s' \in \mathbb{R})$ よって $X = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} \\ -2\mathrm{e}^{2t} \\ -\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$

ここで、$\lambda = 2$ に対するもう 1 つの解を

$$X = \begin{pmatrix} (k+t)\mathrm{e}^{2t} \\ (m-2t)\mathrm{e}^{2t} \\ (n-t)\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$$

とする。[*1]

$$X = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}(1+2k+2t) \\ \mathrm{e}^{2t}(-2+2m-4t) \\ \mathrm{e}^{2t}(-1+2n-2t) \end{pmatrix}$$

これらを元の式に入れて整理すると、

$k = s''$ として、$m = -1-2s'', n = -1-s''$

$s'' = 0$ として

$$X = \begin{pmatrix} t\mathrm{e}^{2t} \\ -(1+2t)\mathrm{e}^{2t} \\ -(1+t)\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ -2\mathrm{e}^t \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} \\ -2\mathrm{e}^{2t} \\ -\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} t\mathrm{e}^{2t} \\ -(1+2t)\mathrm{e}^{2t} \\ -(1+t)\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$$

[*1] 重解のときは $(A+Bt)\mathrm{e}^{\lambda t}$、3 重解のときは $(A'+B't+C't^2)\mathrm{e}^{\lambda t}$ を仮定する。

$D<0$ のときは、$D>0$ の場合と同様に解いてオイラーの公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を用いてまとめる。

1.5.2　連立非同次線形微分方程式

例題

x, y を t の関数とするとき、

$$\begin{cases} x' = 2x - y + e^{2t} \\ y' = 5x - 4y + e^{-t} \end{cases}$$ を解け。

同次形 (e^{2t}, e^{-t} の項が存在しない) のときを考える。
固有方程式は

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 5 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+3)(\lambda-1) = 0 \qquad \lambda = -3, 1$$

ゆえにこれを解くと

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-3t} \\ y = C_1 e^t + 5C_2 e^{-3t} \end{cases}$$

定数変化法を考え、C_1, C_2 が t の関数であるとすると

$$\begin{cases} x = C_1(t) e^t + C_2(t) e^{-3t} \\ y = C_1(t) e^t + 5C_2(t) e^{-3t} \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = C_1'(t)e^t + C_1(t)e^t + C_2'(t)e^{-3t} - 3C_2(t)e^{-3t}$$
$$\frac{dy}{dt} = C_1'(t)e^t + C_1(t)e^t + 5C_2'(t)e^{-3t} - 15C_2(t)e^{-3t}$$

これらを元の式に代入して整理すると

$$e^t C_1'(t) + e^{-3t} C_2'(t) = e^{2t}$$
$$e^t C_1'(t) + 5e^{-3t} C_2'(t) = e^{-t}$$

これから

$$C_1'(t) = \frac{1}{4}(5e^t - e^{-2t})$$
$$C_2'(t) = \frac{1}{4}(e^{2t} - e^{5t})$$

積分して

$$C_1(t) = \frac{1}{4}\left(5e^t + \frac{1}{2}e^{-2t}\right) + C_3$$
$$C_2(t) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{5t}\right) + C_4$$

ゆえに求める一般解は

$$\begin{cases} x = C_1\mathrm{e}^{t} + C_2\mathrm{e}^{-3t} + \dfrac{6}{5}\mathrm{e}^{2t} + \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-t} \\ y = C_1\mathrm{e}^{t} + 5C_2\mathrm{e}^{-3t} + \mathrm{e}^{2t} + \dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

第 2 章

確率・統計

2.1　事象・確率

2.1.1　標本空間，試行，標本点，事象

コインを投げる場合を考える。このとき、コインは表か裏のどちらかを示すが、表か裏かは実験や観測, 偶然に左右される。このような行為を**試行 (trial)** と呼び、試行によって起こり得る結果の全体からなる集合を**標本空間 (sample space)** とし Ω で表す。Ω の各要素で、それ以上分割できない事象を**標本点 (sample point)** もしくは**根元事象 (elementary event)** という。Ω の部分集合を**事象 (event)** といい、標本空間は**全事象**ともいう。

集合論の場合と同様に

共通集合 (積集合)$A \cap B$
A か B の両方に属する標本点全体の集合
和集合 $A \cup B$
A か B のいずれかに属する標本点全体の集合
空事象 ϕ
標本点が何も含まれない事象
補集合 $A^c, \overline{A}$
A に属さない標本点全体の集合 特に $\Omega^c = \phi$

が定義される。

2.1.2　確率の基本的性質

確率 P は、各事象と 0 から 1 までの数と対応しており、

1. 任意の事象 A について $0 \leq P(A) \leq 1$

2. 全事象 Ω に対して $P(\Omega) = 1$、空集合 ϕ に対して $P(\phi) = 0$
3. 事象 A, B が排反 $(A \cap B = \phi)$ なら $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

これらの基本的性質から以下の性質が導かれる。

1. A が B の部分集合なら $P(A) \leq P(B)$
2. 事象 A, B に対して $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
3. 互いに排反な事象 $A_1, A_2, ..., A_n (i \neq j$ なら $A_i \cap A_j = \phi)$ に対して
   $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
4. 事象 $A_1, A_2, ..., A_n$ に対して (排反とは限らない)
   $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
5. 事象 A とその補事象 A^c に対して $P(A^c) = 1 - P(A)$

2.1.3 条件付き確率，独立

事象 A, B があって、$P(A) < 1$ のとき、

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{2.1}$$

を A が起きたときの B の**条件付き確率 (conditional probability)** と定義する。$P(B|A)$ は確率の基本性質を満たすことを示せる。

ふたつの事象 A, B が

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{2.2}$$

を満たすとき、A と B は**独立 (independent)** であるという。このとき、$P(A) > 0$ ならば $P(B|A) = P(B)$ となり、事象 A が起きたことは事象 B の起こる確率に影響を及ぼさない。同様に逆も成り立つ。

2.1.4 ベイズ（Bayes) の定理

全事象 Ω が互いに排反な事象 $A_1, A_2, ..., A_n$ に分割されるとする。(つまり $i \neq j$ なら $A_i \cap A_j = \phi$)

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \tag{2.3}$$

このとき、任意の事象 B に対して

$$P(B) = {}_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) \tag{2.4}$$

が成り立つ。
ここで、

$$P(A_i \cap B) = P(B)P(A_i|B) = P(A_i)P(B|A_i) \tag{2.5}$$

より、$P(A_i) > 0 (i = 1, 2, ..., n)$ ならば任意の事象 B に対して

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)} \tag{2.6}$$

これを**ベイズ (Bayes) の定理**という。

　ベイズの定理を使うことで、$P(A_i)$ と $P(B|A_i)(i = 1, 2, ..., n)$ から $P(A_i|B)$ を求めることができる。ここで、
$P(A_i)$ を (事象 B が起こる前の事象 A_i の) 事前確率
$P(A_i|B)$ を (事象 B が起きた後の事象 A_i の) 事後確率
$P(B|A_i)$ を (事象 A_i が起きたときに事象 B が起こる) 尤度[*1]という。
A_i が起こる確率と A_i が起きたときに B が起こる確率から、実際に B を観察したときに A_i が起きている確率を計算できる。

[*1] 「ゆうど」と読む。

2.2 確率変数と確率分布

2.2.1 確率変数

例えば、2 個のサイコロを投げたときの出た目の和を考えるとする。このとき出た目の和を X とすると、X は $2, 3, ..., 12$ の値をとる変数であり、X のとる値に対して以下のような確率となる。

X の値	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

この X のように、とりうる値に対して確率が対応する変数を**確率変数**と呼ぶ。また, 確率変数のとりうる値とその確率を一緒にして**確率分布**と呼ぶ。

これを一般化して、変数 X のとりうる値を $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$、その確率を $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ とする。すなわち

$$P(X = x_k) = p_k \quad (k = 1, 2, 3, ..., n) \tag{2.7}$$

となる。このとき

$$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = \sum_{k=1}^{n} p_k = 1 \tag{2.8}$$

2.2.2 さまざまな確率変数

確率変数には以下のものが知られている。

離散型確率変数

- 離散型一様分布
  とりうる値をすべて同じ確率でとる分布
  $$P(X = x_k) = \frac{1}{n} \quad (k = 1, 2, ..., n) \tag{2.9}$$
- 二項分布 $B(n, p)$
  事象 A の起こる確率を p として、この試行を n 回繰り返したとき、n 回のうち A の起こった回数が k である確率
  $$P(X = k) = {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, ..., n) \tag{2.10}$$
- ポアソン分布 $Po(\lambda)$
  p が小さい場合の離散型確率分布

与えられた時間内に平均で λ 回発生する事象がちょうど k 回発生する確率

$$P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!} \tag{2.11}$$

二項分布の $np = \lambda$ として $n \to \infty$ とするとポアソン分布に近づく。

例題

不良率 0.02 の生産ラインがあるとする。無作為に 100 個抽出したとき、不良品が 4 つ以上含まれる確率を求めよ。

不良率が 0.02 と小さいのでポアソン分布で近似することができる。X は $B(100, 0.02)$ に従うから、近似的に

$$\lambda = np = 100 \times 0.02 = 2$$

のポアソン分布 $Po(2)$ に従う。したがって

$$\begin{aligned}
\text{不良品が 0 個ある確率 } P(X = 0) &= \mathrm{e}^{-2}\frac{2^0}{0!} = 0.135 \\
\text{不良品が 1 個ある確率 } P(X = 1) &= \mathrm{e}^{-2}\frac{2^1}{1!} = 0.271 \\
\text{不良品が 2 個ある確率 } P(X = 2) &= \mathrm{e}^{-2}\frac{2^2}{2!} = 0.271 \\
\text{不良品が 3 個ある確率 } P(X = 3) &= \mathrm{e}^{-2}\frac{2^3}{3!} = 0.180
\end{aligned}$$

以上より、求める確率 $P(X \geq 4)$ は

$$\begin{aligned}
P(X \geq 4) &= 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)\} \\
&= 0.143
\end{aligned}$$

連続型確率変数

確率変数 X が連続的な実数値をとる場合を考える。
連続型確率変数 X が $a \leq X \leq b$ の値をとる確率 $P(a \leq X \leq b)$ が

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b p(x)dx \tag{2.12}$$

と表され、$p(x)$ が

$$p(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1 \tag{2.13}$$

を満たすとき、$p(x)$ を X **の確率密度関数 (probability density function)** という。また、

$$p(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx \tag{2.14}$$

を**確率分布関数 (probability distribution function)** または**累積分布関数 (cumulative distribution function)** という。

連続型確率変数には以下のものが知られている。

- 連続型一様分布
  確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & (a \leq x \leq b) \\ 0 & (x < a, b < x) \end{cases} \tag{2.15}$$

  で与えられる確率分布
- 指数分布
  確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} e^{-(\frac{1}{\alpha})x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \tag{2.16}$$

  で与えられる確率分布
- 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$
  確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (-\infty < x < \infty) \tag{2.17}$$

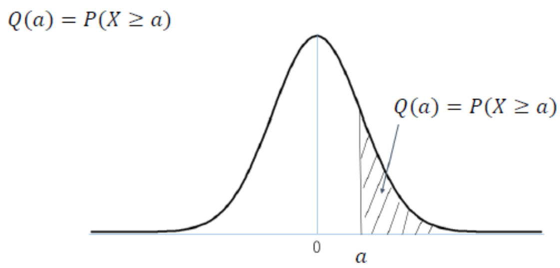
  で与えられる確率分布を、平均 μ 分散 σ^2 の正規分布といい $N(\mu, \sigma^2)$ で表わす。特に $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ の場合、つまり $N(0, 1)$ のときを**標準正規分布**とよぶ。
  - 正規分布の基準化
    確率変数 X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従っているとき、$y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。この変換を行うことを **X の基準化**という。

$$P\left(a \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq b\right) = P(a\sigma + \mu \leq X \leq b\sigma + \mu) \tag{2.18}$$

$$= \int_{a\sigma+\mu}^{b\sigma+\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \tag{2.19}$$

$$= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right) dy \tag{2.20}$$

  - 標準正規分布の上側確率
    確率変数 X が標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとき、X が a 以上になる確率を $Q(a)$ で表し、標準正規分布の上側確率とよぶ。上側確率 $Q(a)$ を求めるには正規分布表を用いる。



上側確率 $Q(a)$ を求めるには正規分布表を用いる。

例題

日本人 20 歳男性の身長 X(cm) は正規分布 $N(171, 5^2)$ に従っていると考えられる。20 歳男性の人口は約 62 万人であるとき、身長が 166cm 以上 176cm 未満の人数を概算せよ。

確率変数 X が正規分布 $N(171, 5^2)$ に従っているとき、$y = \dfrac{X-171}{5}$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。
したがって

$$\text{身長 166cm 以上の割合 P(X} \geq 166) = P\left(y \geq \frac{166-171}{5}\right) = Q(-1.0) = 0.8413$$

$$\text{身長 176cm 以上の割合 P(X} \geq 176) = P\left(y \geq \frac{176-171}{5}\right) = Q(1.0) = 0.1587$$

身長が 166cm 以上 176cm 未満の割合は

$$P(166 \leq X < 176) = P(X \geq 166) - P(X \geq 176) = 0.6826$$

ゆえに求める人数は

$$620000 \times P(166 \leq X < 176) = 423212 \quad \therefore \textbf{約 42 万人}$$

2.2.3 期待値

確率変数 X のとりうる値とその確率をかけて合算したものを**期待値 (expected value)**(または平均) とよび $E(x)$ で表す。
離散型確率分布の場合、確率変数 X が $x_i (1 \leq i \leq n)$ をとる確率を p_i とすれば、期待値 $E(x)$ は下式で表せる。

$$E(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

連続型確率分布の場合、確率密度関数が $f(x)$ で与えられるとき、期待値 $E(x)$ は下式で表せる。

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

確率変数 Y が確率変数 X の関数 $Y=u(X)$ で与えられる場合、期待値は

$$\begin{cases} \text{離散型確率分布のとき} \quad E(Y)=E[u(X)]=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u(x_i)p_i \\ \\ \text{連続型確率分布のとき} \quad E(Y)=E[u(X)]=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u(x)f(x)dx \end{cases} \tag{2.21}$$

とできる。したがって、以下の線形性が成り立つ。

1. X を確率変数、a,b を定数とするとき、
$$E(aX+b)=aE(X)+b \tag{2.22}$$
2. 2 つの確率変数 X,Y と定数 a,b,c に対して
$$E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c \tag{2.23}$$

ここで、代表的な確率分布における期待値を考える。

- 離散型一様分布
  1 から n までの数字から 1 つ選ぶ場合
$$E(x)=\sum_{i=1}^{n} i\cdot\frac{1}{n}=\frac{1+n}{2} \tag{2.24}$$
- 二項分布 $B(n,p)$
  確率 p で起こる事象が n 回の試行で k 回起こる場合
$$P(X=k)={}_nC_kp^k(1-p)^{n-k} \quad (k=0,1,2,...,n) \tag{2.25}$$
$$E(x)=\sum_{k=0}^{n} k\cdot{}_nC_k\cdot p^k(1-p)^{n-k} \tag{2.26}$$
$$=\sum_{k=0}^{n} k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \tag{2.27}$$
$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\{(n-1)-(k-1)\}!}p^{(k-1)}(1-p)^{\{(n-1)-(k-1)\}} \tag{2.28}$$
$$=np\sum_{l=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{l!\{(n-1)-l\}!}p^l(1-p)^{\{(n-1)-l\}} \quad (\because l=k-1) \tag{2.29}$$
$$=np\sum_{l=0}^{n-1}{}_{n-1}C_l\cdot p^l(1-p)^{\{(n-1)-l\}} \tag{2.30}$$
$$=np \tag{2.31}$$
- ポアソン分布 $Po(\lambda)$
  与えられた時間内に平均で λ 回発生する事象がちょうど k 回発生する確率 $Po(\lambda)=\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!}$ に

ついて

$$E(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!} \tag{2.32}$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^{\mathrm{k}-1}}{(\mathrm{k}-1)!} \tag{2.33}$$

$$= \lambda \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^{\mathrm{l}}}{\mathrm{l}!} \tag{2.34}$$

$$= \lambda \tag{2.35}$$

- 連続型一様分布
  確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & (a \leq x \leq b) \\ 0 & (x < a, b < x) \end{cases} \tag{2.36}$$

で与えられるとき

$$E(x) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx \tag{2.37}$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2} \cdot \frac{1}{b-a} \tag{2.38}$$

$$= \frac{a+b}{2} \tag{2.39}$$

- 指数分布
  確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \tag{2.40}$$

で与えられるとき

$$E(x) = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)\mathrm{x}} \mathrm{dx} \tag{2.41}$$

$$= \alpha \tag{2.42}$$

- 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$

$$N(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \tag{2.43}$$

について

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \tag{2.44}$$

$$= \mu \int_{-\infty}^{\infty} N(\mu, \sigma^2)dx + \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) \cdot N(\mu, \sigma^2)dx \tag{2.45}$$

$$= \mu + \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right\} dt \quad (\because x-\mu = t) \tag{2.46}$$

$$= \mu + \left[-\sigma^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right\}\right]_{-\infty}^{\infty} \tag{2.47}$$

$$= \mu \tag{2.48}$$

2.2.4 分散

確率変数 x の分散 (variance)$V(x)$ は下式で定義される。

$$V(x) = E[(x-\mu)^2] = E[(x-E(x))^2] \tag{2.49}$$

分散は平均の周りの散らばり度合いを示す、つまり分散が大きければ平均を離れた値をとる確率が大きい。

分散 $V(x)$ について

$$V(x) = E[(x-\mu)^2] \tag{2.50}$$

$$= E(x^2 - 2\mu x + \mu^2) \tag{2.51}$$

$$= E(x^2) - 2\mu E(x) + \mu^2 \tag{2.52}$$

$$= E(x^2) - \mu^2 \tag{2.53}$$

$$V(ax+b) = E[\{ax+b-E(ax+b)\}^2] \tag{2.54}$$

$$= E[\{ax+b-(a\mu+b)\}^2] \tag{2.55}$$

$$= E[\{a(x-\mu)\}^2] \tag{2.56}$$

$$= a^2 E[(x-\mu)^2] \tag{2.57}$$

$$= a^2 V(x) \tag{2.58}$$

が成り立つ。

また、標準偏差 (standard deviation)$D(x)$ は

$$D(x) = \sqrt{V(x)} \tag{2.59}$$

と定義される。確率変数 $Y = ax$ について

$$V(Y) = V(ax) = a^2 V(x) \tag{2.60}$$

$$D(Y) = D(ax) = aD(x) \tag{2.61}$$

となる。ここで、代表的な確率分布における分散について述べる。

- 離散型一様分布
  1 から n までの数字から 1 つ選ぶ場合 $(p(x) = \dfrac{1}{n})$

$$V(x) = E(x^2) - \mu^2 \tag{2.62}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} i^2 \cdot \frac{1}{n} - \left(\frac{1+n}{2}\right)^2 \tag{2.63}$$
$$= \frac{(2n+1)(n+1)}{2} - \frac{(n+1)^2}{4} \tag{2.64}$$
$$= \frac{n^2-1}{12} \tag{2.65}$$

- 二項分布 $B(n,p)$
  確率 p で起こる事象が n 回の試行で k 回起こる場合

$$P(X=k) = {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, ..., n) \tag{2.66}$$

について

$$E(x) = np \tag{2.67}$$
$$E[x(x-1)] = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \cdot {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} \tag{2.68}$$
$$= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \tag{2.69}$$
$$= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!\{(n-2)-(k-2)\}!} p^{k-2} (1-p)^{\{(n-2)-(k-2)\}} \tag{2.70}$$
$$= n(n-1)p^2 \sum_{l=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{l!\{(n-2)-l\}!} p^l (1-p)^{\{(n-2)-l\}} \tag{2.71}$$
$$= n(n-1) \cdot p^2 \tag{2.72}$$
$$E(x^2) = E[x(x-1)] + E[x] \tag{2.73}$$
$$= n(n-1)p^2 + np \tag{2.74}$$
$$V(x) = E(x^2) - \mu^2 \tag{2.75}$$
$$= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 \tag{2.76}$$
$$= np(1-p) \tag{2.77}$$

- ポアソン分布 $Po(\lambda)$
  与えられた時間内に平均で λ 回発生する事象がちょうど k 回発生する確率 $Po(\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\mathrm{\lambda^k}}{\mathrm{k!}}$ に

ついて

$$E(x) = \lambda \tag{2.78}$$
$$E[x(x-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\cdot \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!} \tag{2.79}$$
$$= \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{\mathrm{k=2}}}{(\mathrm{k}-2)!} \tag{2.80}$$
$$= \lambda^2 \tag{2.81}$$
$$E[x^2] = E[x(x-1)] + E(x) \tag{2.82}$$
$$= \lambda^2 + \lambda \tag{2.83}$$
$$V(x) = E(x^2) - \mu^2 \tag{2.84}$$
$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \tag{2.85}$$
$$= \lambda \tag{2.86}$$

- 連続型一様分布
  確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & (a \leq x \leq b) \\ \\ 0 & (x < a, b < x) \end{cases} \tag{2.87}$$

で与えられるとき

$$E(x) = \frac{a+b}{2} \tag{2.88}$$
$$E(x^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}dx = \frac{a^2+ab+b^2}{3} \tag{2.89}$$
$$V(x) = E(x^2) - \mu^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{2.90}$$

- 指数分布
  確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}e^{-(\frac{1}{\alpha})x} & (x \geq 0) \\ \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \tag{2.91}$$

で与えられるとき

$$E(x) = \alpha \tag{2.92}$$

$$E(x^2) = \int_0^\infty x^2 \cdot \frac{1}{\alpha} \mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)\mathrm{x}} \mathrm{dx} \tag{2.93}$$

$$= \left[x^2 \left(-\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)\mathrm{x}}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty -\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)\mathrm{x}} \cdot 2\mathrm{xdx} \tag{2.94}$$

$$= \left[2x(-\alpha)\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)\mathrm{x}}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -2\alpha \mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)\mathrm{x}} \mathrm{dx} \tag{2.95}$$

$$= \left[-2\alpha^2 \mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)\mathrm{x}}\right]_0^\infty \tag{2.96}$$

$$= \alpha^2 \tag{2.97}$$

$$V(x) = E(x^2) - \mu^2 \tag{2.98}$$

$$= 2\alpha^2 - \alpha^2 \tag{2.99}$$

$$= \alpha^2 \tag{2.100}$$

- 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$

$$N(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{2.101}$$

について

$$E(x) = \mu \tag{2.102}$$

ここで、$t = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ とすると

$$V(x) = E[(x-\mu)^2] = \int_{-\infty}^\infty (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \tag{2.103}$$

$$= \sigma^2 \int_{-\infty}^\infty t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \tag{2.104}$$

$$= \sigma^2 \left[-t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\right]_{-\infty}^\infty + \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \tag{2.105}$$

$$= \sigma^2 \tag{2.106}$$

2.2.5　共分散と相関係数

2 つの確率変数 (X, Y) に対して、$\mu_x = E(X), \mu_y = E(Y)$ とおくとき、共分散 $Cov(X, Y)$ は

$$Cov(X, Y) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \tag{2.107}$$

例えば、$(X, Y) = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots (x_n, y_n), \}$ の n 個のデータがある場合、

$$Cov(X, Y) = \frac{(x_1 - \mu_x)(y_1 - \mu_y) + (x_2 - \mu_x)(y_2 - \mu_y) + \cdots + (x_n - \mu_x)(y_n - \mu_y)}{n} \tag{2.108}$$

である。$Cov(X, Y) > 0$ のとき X が大きくなれば Y も大きくなり、$Cov(X, Y) < 0$ のとき X が大きくなれば Y は小さくなる。

また、相関係数 $\rho(X, Y)$ は

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \tag{2.109}$$

により定義される。相関係数は確率変数 X, Y の単位に依存せず、また $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$ を満たす。

2.2.6 中心極限定理

確率分布は先述の通り様々あるが、試行回数 n が十分大きい場合正規分布に近づくことが知られている。これを**中心極限定理 (central limit theorem)** と呼ぶ。

例えば、二項分布 $B(n, p)$ も n が大きい場合は正規分布 $N(np, np(1-p))$ として近似できる。基準化すれば、確率変数 $\dfrac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。数学的に記述すれば、二項分布に従う確率変数 $X = B(n, p)$ は

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}} \leq x\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-t^2/2} dt \tag{2.110}$$

と表せる。

例題

サイコロを 500 回振って 1 の目が出る回数が 80 回以上 100 回以下となる確率を求めよ。

確率変数 $X = B(500, \frac{1}{6})$ は正規分布 $N(\frac{500}{6}, \frac{2500}{36})$ に従うので、確率変数 $z = \dfrac{X - \frac{500}{6}}{\sqrt{\frac{2500}{36}}}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。つまり

$$\begin{aligned}
P(80 \leq X \leq 100) &= P\left(\frac{80 - \frac{500}{6}}{\frac{50}{6}} \leq \frac{X - \frac{500}{6}}{\frac{50}{6}} \leq \frac{100 - \frac{500}{6}}{\frac{50}{6}}\right) \\
&= P\left(-\frac{2}{5} \leq x \leq 2\right) \\
&= P\left(-\frac{2}{5} \leq z\right) - P(2 \leq z) \\
&= 0.6326
\end{aligned}$$

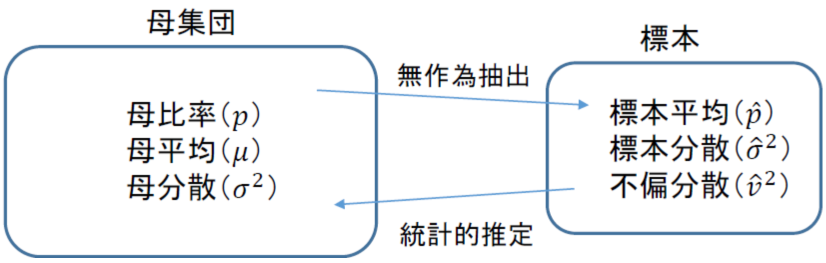
ただし、実際の二項分布の正規近似では半数補正を行った方がよく近似できる。半数補正を行えば

$$
\begin{aligned}
P(80 \leq X \leq 100) &= P\left(\frac{80 - \frac{500}{6} - \frac{1}{2}}{\frac{50}{6}} \leq \frac{X - \frac{500}{6}}{\frac{50}{6}} \leq \frac{100 - \frac{500}{6} + \frac{1}{2}}{\frac{50}{6}}\right) \\
&= P(-0.046 \leq x \leq 2.06) \\
&= P(-0.046 \leq z) - P(2.06 \leq z) \\
&= 0.6575
\end{aligned}
$$

2.3 標本、統計量、標本分布

2.3.1 標本

例えば、内閣の支持率を調査したいとする。しかし、国民全員に対して調査するのは無理がある。したがって、このようなとき、母集団から無作為に一部を抽出し調査を行うことで全体の支持率を推定する。このような調査を標本調査とよぶ。一方で、国勢調査は国民全員に対して行われるものであり、このように母集団に対して行う調査を全数調査とよぶ。ここでは、標本について取り扱う。



母集団分布
二項分布 $B(1,p)$ のように母集団に想定される確率分布
母比率 p
母集団での比率
母平均 μ
母集団での平均
母分散 σ^2
母集団での分散
標本平均 $\hat{p}$
標本での平均（母平均の不偏推定量）
標本分散 $\hat{\sigma}^2$
標本での分散
不偏分散 $\hat{v}^2$
母分散の不偏推定量

ここで、

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{p})^2 \tag{2.111}$$

である。変形すると

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{p})^2 && (2.112)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{(X_i - \mu) - (\hat{p} - \mu)\}^2 && (2.113)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{p} - \mu)^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)(\hat{p} - \mu) && (2.114)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 + \frac{n}{n}(\hat{p} - \mu)^2 - \frac{2}{n}(\hat{p} - \mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) && (2.115)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 + (\hat{p} - \mu)^2 - 2(\hat{p} - \mu)\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{n} && (2.116)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 + (\hat{p} - \mu)^2 - 2(\hat{p} - \mu)(\hat{p} - \mu) && (2.117)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - (\hat{p} - \mu)^2 && (2.118)
\end{aligned}
$$

標本分散 $\hat{\sigma}^2$ の期待値は

$$
\begin{aligned}
E[\hat{\sigma}^2] &= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - (\hat{p} - \mu)^2\right] && (2.119)\\
&= E[\frac{1}{n}((X_1 - \mu)^2 + (X_2 - \mu)^2 + \cdots + (X_n - \mu)^2) - (\hat{p} - \mu)^2] && (2.120)\\
&= \frac{1}{n}(E[(X_1 - \mu)^2] + E[(X_2 - \mu)^2] + \cdots + E[(X_n - \mu)^2]) - E[(\hat{p} - \mu)^2] && (2.121)\\
&= \frac{1}{n}n\sigma^2 - \frac{1}{n}\sigma^2 && (2.122)\\
&= \frac{n-1}{n}\sigma^2 && (2.123)
\end{aligned}
$$

母分散と一致するように不偏分散の期待値を設定するためには $n/(n-1)$ を乗ずればよい。したがって

$$
\hat{v}^2 = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{p})^2 \tag{2.124}
$$

不偏分散 $\hat{v}^2$ を求める際は (標本数-1) で除することに留意する必要がある。標本は母集団から無作為に抽出したものであるから偏りを含んでおり、その偏りを補正して母分散に近づいていくという意味が含まれている。

2.3.2　区間推定

区間推定とは、区間 (a, b) に母数が含まれる確率が定められた割合となるように a, b を定めることである。ここで、定められた割合を**信頼度**または**信頼係数**、区間 (a, b) を信頼区間とよぶ。例えば、

区間 (a, b) が 95% 信頼区間のとき、標本データの 95% が区間 (a, b) に含まれているとできる[*2]。

母平均の区間推定

正規分布に従う確率変数の和や定数倍は、正規分布に従う。したがって母集団が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ のとき、n 個の無作為標本の標本平均 $\hat{p}$ は正規分布 $N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。また、それを標準化した

$$\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}} \times (\hat{p} - \mu) \tag{2.125}$$

は標準正規分布に従う。95% 信頼区間については

$$-1.96 < \sqrt{\frac{n}{\sigma^2}} \times (\hat{p} - \mu) < 1.96 \tag{2.126}$$

より母平均 μ の 95% 信頼区間は

$$\hat{p} - 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} < \mu < \hat{p} + 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \tag{2.127}$$

と求められる。これより、標本平均 $\hat{p}$ と母分散 σ より母平均 μ の区間推定ができる。なお、標本数 n が十分大きい場合について、母集団が正規分布でないとしても、無作為標本は母平均 μ、母分散 σ^2 として正規分布 $N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従うとしてよい。

ただし母分散が未知の場合については、標本平均 $\hat{p}$ と不偏分散 $\hat{v}^2$ より母平均 μ を推定することができる。

n を自然数として、確率密度関数 $f_n(x)$ が

$$f_n(x) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \tag{2.128}$$

で与えられる関数 T_n を**自由度 n の t 分布**とよぶ。ただし、$\Gamma(s)$ はガンマ関数で

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\mathrm{dx} \qquad (\mathrm{s} > 0) \tag{2.129}$$

である。

母平均 μ、標本平均 $\hat{p}$、不偏分散 $\hat{v}^2$ より求める統計量 t

$$t = \frac{\hat{p} - \mu}{\sqrt{\dfrac{\hat{v}^2}{n}}} \tag{2.130}$$

は自由度 $n-1$ の t 分布に従う。ただし、標本数 n が十分大きい場合には t 分布のかわりに正規分布を利用してよい。

[*2] 逆にいえば 5% は区間 (a, b) に含まれない。

母分散の区間推定

不偏分散 $\hat{v}^2$ より母分散 σ^2 を推定することができる。

標本数 n として、統計量 χ^2 を下式の通り定める。

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\hat{v}^2}{\sigma^2} \tag{2.131}$$

このとき、χ^2 は自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従う。これより、母分散の信頼区間を求めることが出来る。ただし、χ^2 分布は非対称であるために、両端の値をそれぞれ読み取ることに留意する。

母比率の区間推定

確率変数 X が二項分布 $B(n,p)$ に従うとき、中心極限定理により正規分布 $N(np, np(1-p))$ に従う。また、それを標準化した

$$\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \tag{2.132}$$

は標準正規分布に従う。ここで、標本比率を $\hat{p} = X/n$ とするとき

$$\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\dfrac{X}{n} - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} \tag{2.133}$$

n が十分大きいとき、$p = \hat{p}$ として

$$\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} \simeq \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \tag{2.134}$$

が標準正規分布に従うとして信頼区間を求めればよい。

2.4 統計的仮定検定

得られたデータを基に、データが従っている母集団分布についての疑わしい仮説を確率的に判断する。これを検定とよぶ。

2.4.1 検定の考え方

例えば、硬貨を 10 回投げて表が 9 回出たとする。このとき、硬貨には表が出るように細工が施されている可能性がある。あるいは、たまたま表が出やすかっただけの可能性もある。

硬貨の表が出る確率を p としたとき、$p = \dfrac{1}{2}$ とすると、硬貨を 10 回投げて 9 回表が出る確率は二項分布 $B\left(10, \dfrac{1}{2}\right)$ より

$$ {}_{10}\mathrm{C}_9 \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^1 = \frac{10}{2^{10}} \simeq 0.00977 \tag{2.135} $$

となる。統計学では確率の小さいことは起きにくいと考え、もし起こったならば理由があると考える。「起こりにくい」と判断する基準は**有意水準** α とよばれる。$\alpha = 0.05$ がよく用いられる。

2.4.2 仮説検定の手順

ステップ 1 帰無仮説、対立仮説を設け、有意水準 α を定める

否定したいこと、あるいは疑問に思っていることを**帰無仮説** H_0 とし、検定により主張したいことを**対立仮説**とする。

例えば、「硬貨を 10 回投げて表が 9 回出た」ことから、表が出やすくなっているのではないかと考えたとき、帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 をそれぞれ

$$ H_0 : p = \frac{1}{2} $$
$$ H_1 : p > \frac{1}{2} $$

とする。ただし、H_0, H_1 のどちらかは正しいとする。つまり $p < \dfrac{1}{2}$ は考えない。また、ここでは有意水準 $\alpha = 0.05$ とする。

ステップ 2 検定統計量の実現値を求める

帰無仮説 H_0 が正しい、すなわち $p = \dfrac{1}{2}$ とする。

硬貨を 10 回投げて表の出る回数を X とすると、X は二項分布 $B\left(10, \dfrac{1}{2}\right)$ に従う。この X のような仮説検定を行うための統計量を仮説統計量とよぶ。$X = 9$ となる確率

$P(X=9)$ は

$$P(X=9) = {}_{10}\mathrm{C}_9 \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(1-\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{10}{2^{10}} \simeq 0.00977 \tag{2.136}$$

ステップ 3 棄却域を求める

棄却域 $W=9,10$ とする。X の実現値 x が W に含まれる確率は

$$P(W) = {}_{10}\mathrm{C}_9 \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(1-\frac{1}{2}\right)^1 + {}_{10}\mathrm{C}_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left(1-\frac{1}{2}\right)^0 \simeq 0.0107 \tag{2.137}$$

であり $P(W) < \alpha$ よりこの棄却域は有意水準を満たす。

ステップ 4 帰無仮説が棄却されるかどうかを判定する

実現値 x が W に含まれる場合は、H_0 は棄却される。つまり H_1 と判断できる。逆に実現値 x が W に含まれない場合は、H_0 は棄却されない。つまり H_0 といえなくもない。

2.4.3　仮説検定で起こる誤り

仮説検定には 2 種類の誤りを犯す可能性がある。H_0 が正しいにの関わらず H_0 が棄却される誤りを**第 1 種の誤り (偽陽性)**、H_1 が正しいにの関わらず H_0 が棄却されない誤りを**第 2 種の誤り (偽陰性)** とよぶ。

2.4.4　棄却域の設定

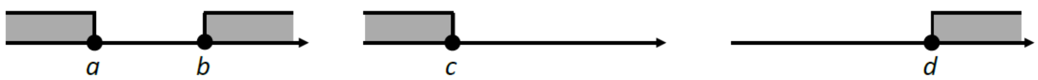
一般に、第 1 種の誤りの確率が大きくなると第 2 種の誤りの確率は小さくなる。逆に第 1 種の誤りの確率が小さくなると第 2 種の誤りの確率は大きくなる。したがって、両方を同時に小さくすることは出来ない。

仮説検定では、まず有意水準 α を定め第 1 種の誤りの確率を α 以下とし、第 2 種の誤りの確率ができるだけ小さくなるように棄却域を設定する。棄却域には次の 3 通りの設定がある。

(i) 両側検定　$(-\infty, a] \cup [b, \infty)$

(ii) 左片側検定　$(-\infty, c]$

(iii) 右片側検定　$[d, \infty)$



(i) 両側検定　(ii) 左片側検定　(iii) 右片側検定

例題

あるスナック菓子は 1 袋の内容量が 100g と表示されている。ここで、ある生産ラインで製造されたスナック菓子から無作為に 40 袋を選び内容量を計測したところ、標本平均 $\overline{x} = 101$, 母分散 $\sigma^2 = 5.0$ であった。標本平均と表示の内容量には差があるが、この差は統計的に有意な差であるか。有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定せよ。ただし内容量は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従っているものと仮定する。

母集団はこの生産ラインで製造されたスナック菓子全体で、その母平均 μ が表示の 100 と異なるかを考える。

$$\text{帰無仮説 } H_0 : \mu = 100$$
$$\text{対立仮説 } H_1 : \mu \neq 100$$

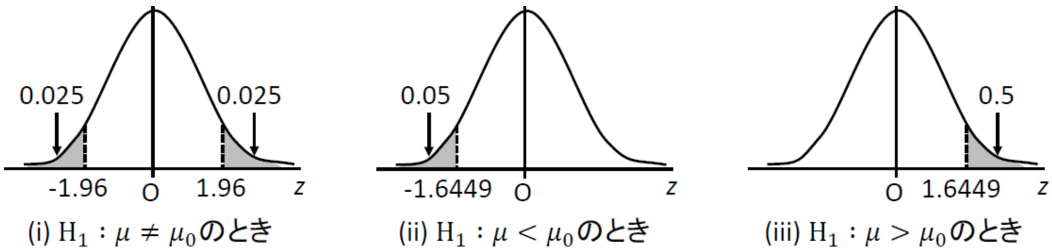
とする。つまり $\mu = 100$ を否定して $\mu \neq 100$ を主張したい。

母分散が既知であるから、帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$ のもとで、

$$Z = \sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}(\overline{x} - \mu_0)$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

一方で、対立仮説 $H_1 : \mu \neq \mu_0$ のもとで、$\mu < \mu_0$ ならば Z は小さくなり、$\mu > \mu_0$ ならば Z は大きくなる。このことから、有意水準 $\alpha = 0.05$ の棄却域は $W = (-\infty, -1.96] \cup [1.96, \infty)$ となる[*3]。



Z の実現値 z は

$$z = \sqrt{\frac{40}{5}} \times (101 - 100) \simeq 2.83$$

これは W に含まれるから、H_0 は棄却される。つまり、この生産ラインで製造されたスナック菓子の内容の母平均 μ は 100 と異なると判断される。

[*3] 今回は、母平均 μ が大きすぎても小さすぎても棄却されるから、両側検定を採用する。両側検定では左端右端それぞれに棄却域を設定するため、それぞれの棄却域の面積は片側検定の半分とする。