

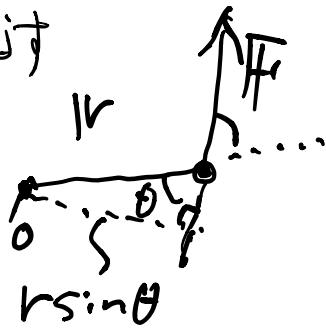
1. 力とは。  
「物体に働くと運動の状態を変化させる原因」と  
いふ作用」

$$F = m\alpha \quad F = m\alpha$$

力  $F$  : ベクトル

モーメント  $M$  : 力  $F$  が点 O 回りに働く  
モーメント

$M_F = r \times F$  : これがモーメント



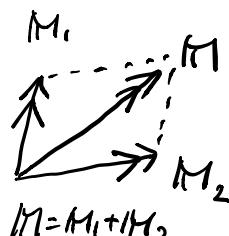
2. 力(モーメント)の合成と分解

$F, M$  もともとベクトル

合成 :  $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$

分解 :  $\bar{F}$  の  $n$  方向成分は

$$F_n = |\bar{F}| \cdot m \quad (|m|=1)$$



$$\bar{M} = M_1 + M_2$$

例えは、 $\bar{F} = F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z$  の時。

$$\bar{F} \cdot \mathbf{e}_x = F_x \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_x + F_z \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = F_x$$

3. 力のつり合ひ  
本授業では静力学を扱う  $\Rightarrow \sum F = m\ddot{Q} = 0$

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0 \quad (3\text{条件})$$

$$M_0 = \sum_{i=1}^n r_i \times F_i + \sum_{j=1}^m M_j = 0 \quad (3\text{条件})$$

$\therefore$  0点回りのモーメント  $\Rightarrow$  合計6条件

2次元問題 (物体の形状がx-y面内のみ)

$$\sum F_i \cdot Q_z = 0 \quad (2\text{方向の力の成り立つ})$$

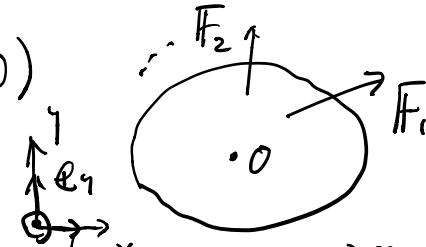
$$\textcircled{1} \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} \cdot Q_{zc} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} \cdot Q_{yc} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

$$M_0 \cdot Q_x = M_0 \cdot Q_y = 0 \quad (x軸, y軸回りのモーメントは0)$$

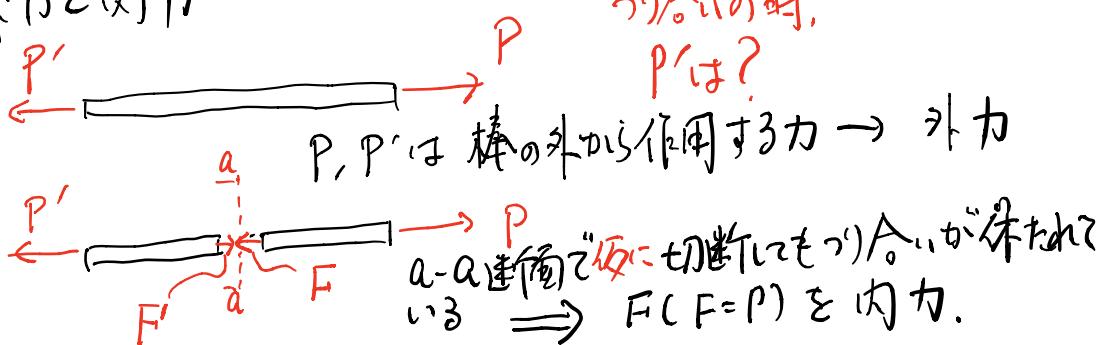
$$\textcircled{3} \quad M_0 \cdot Q_z = \sum_{i=1}^n (r_i \times F_i) \cdot Q_z + \sum_{j=1}^m M_j \cdot Q_z = \sum_{i=1}^n (r_{ix}F_{iz} - r_{iy}F_{ix}) + \sum_{j=1}^m M_{jz} = 0$$

①~③ 9 条件.



2次元問題

#### 4. 外力と内力



自由体図 (free-body diagram)

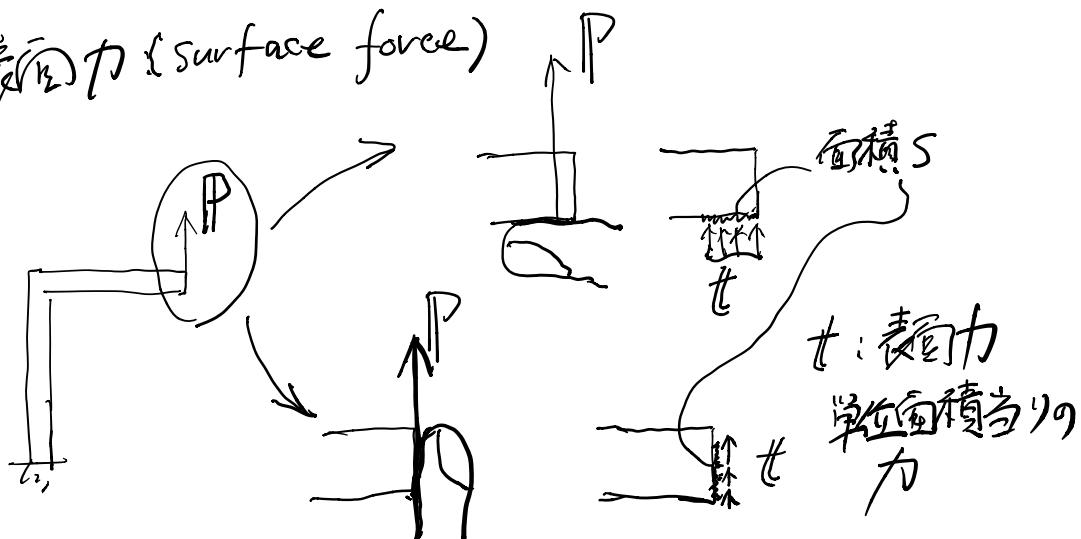
ある物体が平衡状態にあるとき、

その体のいかなる部分も平衡状態にある。

#### ⑤ 反力

## 5. 表面力と物体力

表面力 (surface force)

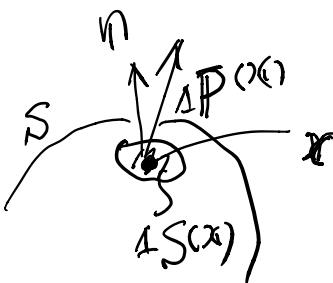


・ 表面力  $t(x)$  の定義

$$t(x) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P(x)}{\Delta S(x)}$$

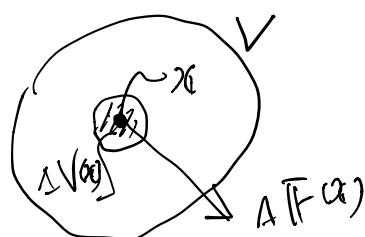
・ 上図の  $P$  と  $t$  の関係?

$$P = \int_S t(x) dS(x) \quad (\text{力の合成})$$

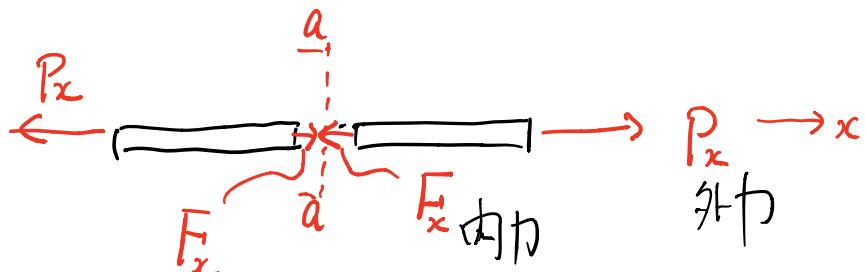


体積力 (body force) : 定常体積当たりの力

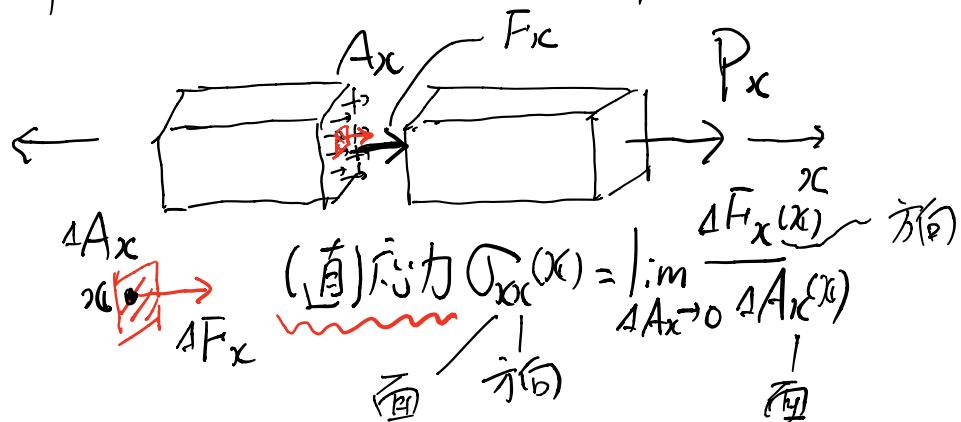
$$f(x) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta V(x)}$$



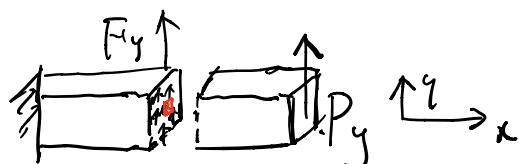
## 6. 応力 (直応力とせん断応力)



(斜面) a-a を見てみると、



$$F_x = \int_{A_x} \sigma_{xx}(x) dA_x$$



$$\tau_{xy}(x) = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y(x)}{\Delta A_x}$$

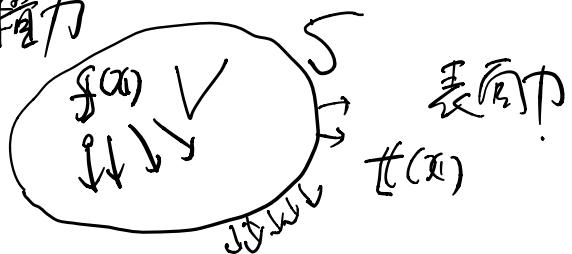
面 方向

$$F_y = \int_{A_x} \tau_{xy}(x) dA_x$$

$x$  面に  $y$  方向に作用する  
単位面積当たりの力

## 7. 戻り力のつり合い

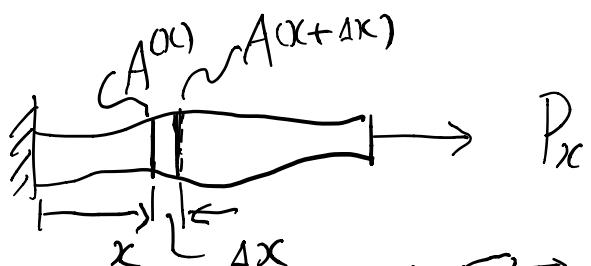
- ① 体積力



曲面  $S$ , 物体  $V$  が静止しているとき,  
力のつり合いを式で表わせさい。

$$\text{+ } \int_{\text{表面}} f(x) dV(x) = 0$$

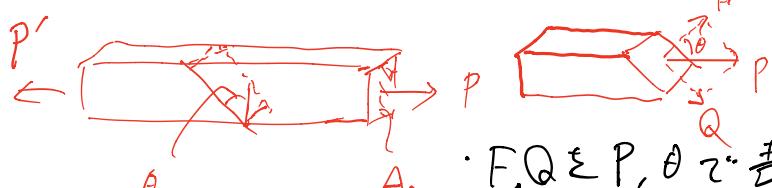
- ②



$$\sigma(x) \underset{\Delta x}{\underbrace{\left[ \begin{array}{c} \sigma(x) \\ \vdots \\ \sigma(x+\Delta x) \end{array} \right]} \approx \sigma(x) + \frac{d\sigma}{dx}(x)\Delta x}$$

$\sigma(x)$  が満足するつり合い式は?

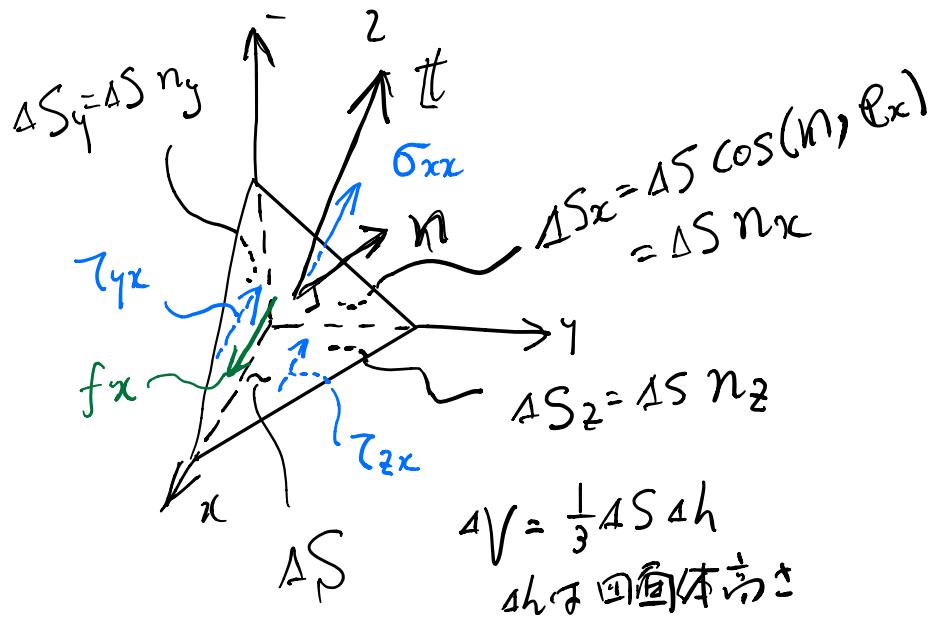
- ③



$P, Q \in P, \theta$  で表わせない。

傾いた斜面上に作用する直応力  $\sigma$  とせん断応力を  $P, A_0, \theta$  で表わせさい。

# 1-8 麥克斯well の関係式



$$\begin{aligned}
 & (t_x + O(\Delta)) \Delta S \\
 & - \{ (\sigma_{xx} + O(\Delta)) \Delta S_x + (\tau_{yx} + O(\Delta)) \Delta S_y + (\tau_{zx} + O(\Delta)) \Delta S_z \} \\
 & + (f_x + O(\Delta)) \Delta V = 0
 \end{aligned}$$

$$\{ t_x - (\sigma_{xx} n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z) \} \Delta S + O(\Delta^3) = 0$$

$$\Delta S \rightarrow 0 のとき, t_x = n_x \sigma_{xx} + n_y \tau_{yx} + n_z \tau_{zx}$$

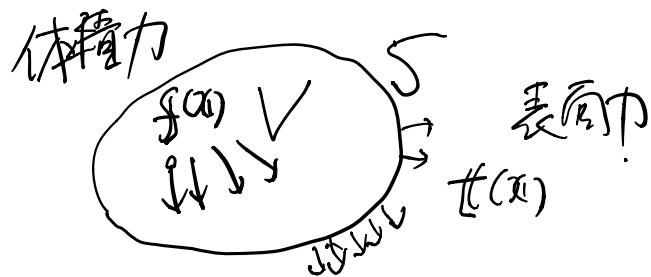
これを解く。

$$t_y = n_x \tau_{xy} + n_y \sigma_{yy} + n_z \tau_{zy}$$

$$t_z = n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz} + n_z \sigma_{zz}$$

$$t = n \cdot \vec{\sigma} + t \text{ 異なる}.$$

# 1-9 両々度、力のつり合...



→つり合の状態にある時.

$$\int_S t(x) dS(x) + \int_V f(x) dV(x) = 0$$

表面力と応力の関係:  $t = n \cdot \sigma$  代入

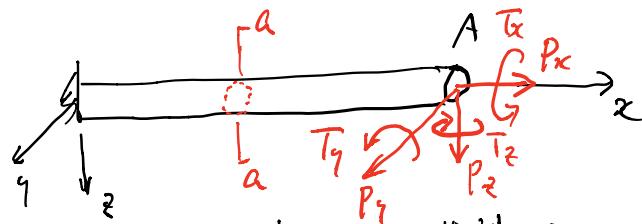
$$\int_S n(x) \cdot \sigma(x) dS(x) + \int_V f(x) dV(x) = 0$$

発散定理  $\int_S n(x) \cdot g(x) dS(x) = \int_V \nabla \cdot g(x) dV(x)$

$$\int_V \{\nabla \cdot \sigma(x) + f(x)\} dV(x) = 0$$

$\nabla \cdot \sigma(x) + f(x) = 0$   
 自由物体線図(参考),  $V$  は任意の部分体積と  
 されるので;  
 (境界問題の扱いが異なるので考慮せよ)

## 2-1 部材の力学



$y, z$  方向に比べて、 $x$  方向に長い部材に対して、その先端 A に作用し得る力(モーメント含む)を考える。

「1-3 力の釣り合い」では、3 方向 ( $x, y, z$ ) の力の釣り合いで 3 つの軸回りのモーメントの釣り合いで存在していた。

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0 \quad (3\text{条件})$$

$$M_0 = \sum_{i=1}^n r_i \times F_i + \sum_{j=1}^m T_j = 0 \quad (3\text{条件})$$

このことから、点 A には、3 つの力  $(P_x, P_y, P_z)$  とモーメント  $(T_x, T_y, T_z)$  が作用し得る。

「2  $F_i = 0, i=x, y, z$ , 3 つの力  $(P_x, P_y, P_z)$  と 3 つのモーメント  $(T_x, T_y, T_z)$  の各々が作用する時、任意断面 a-a にどのような力や応力が生じるのか、部材にどのように変形するか」等を議論する。

用いる仮定は次のとおり。

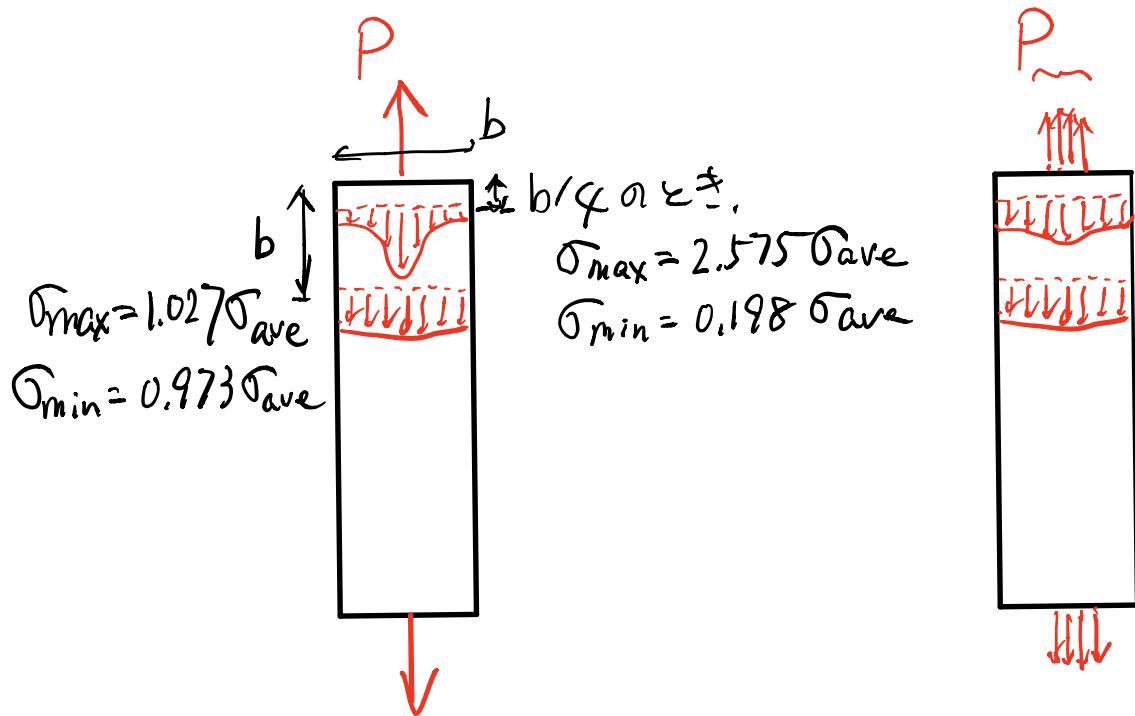
• 材料は 線形弾性体である。

• 変形は微小。

変形前は平面であった断面 a-a は変形後も平面を保つ。

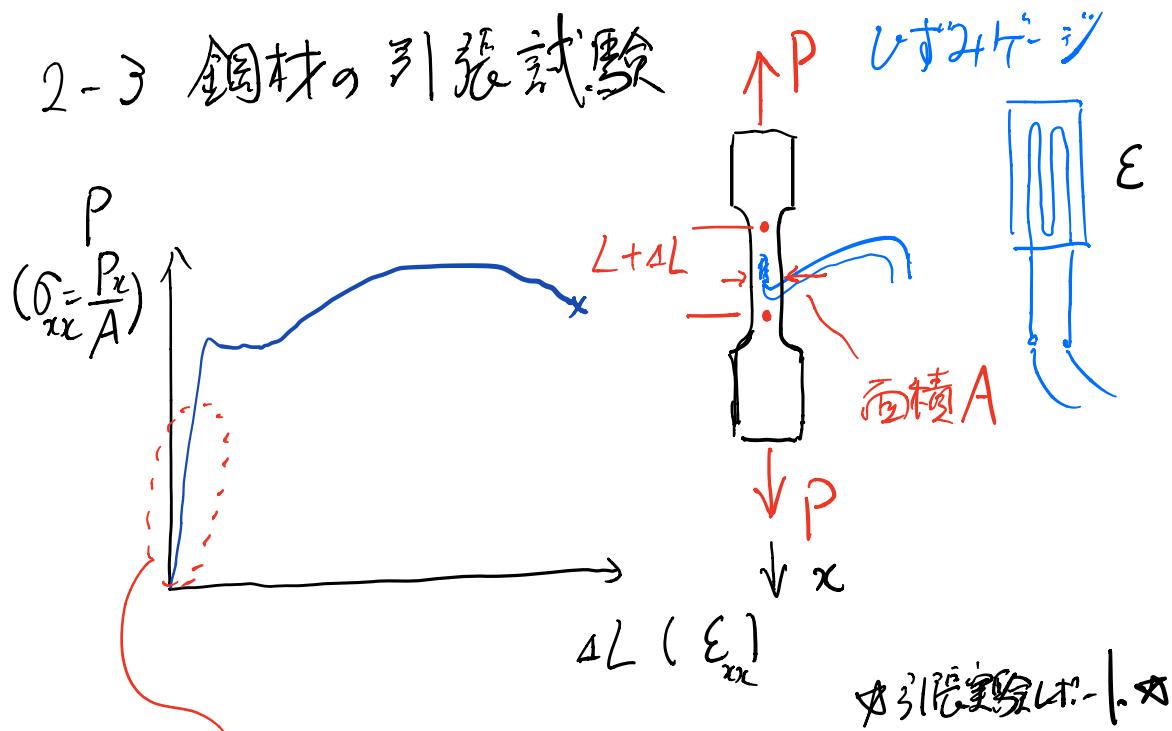
詳  
細  
は  
後  
述

## 2-2 Saint-Venant's Principle (サンヴァンタンの定理)



弾性材料の表面に作用する力の効果は、  
表面から十分離れた点では、  
静力学的に等価な力の効果と同じである。

## 2-3 鋼材の引張試験



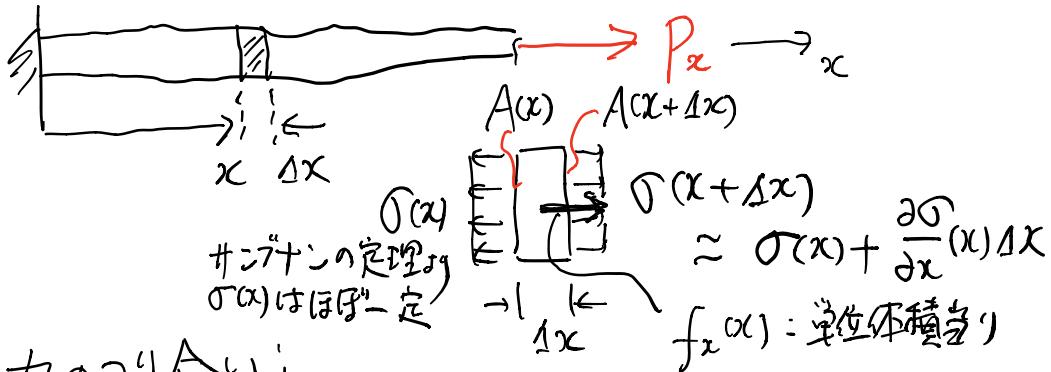
$$\text{構成式: } P \propto L$$

$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx}$  直応力: 単位長さ当りの伸び  
直応力: 単位面積当りの垂直力

ヤング係数, 強性係数:  
材料の固有の定数

鋼材の場合,  $E = 200 \text{ GPa}$

## 2-4. 軸力を定義する.



- 力のつり合ひ:

$$\sigma(x+Δx)A(x+Δx) - \sigma(x)A(x) + f_x(x)A(x+Δx)/Δx = 0$$

$$(\sigma(x) + \frac{d\sigma}{dx}Δx)(A(x) + \frac{dA}{dx}Δx) - \sigma(x)A(x) + f_x(x)(A(x) + O(Δx))/Δx = 0$$

$$\left\{ \frac{d\sigma}{dx}(0)A(x) + \sigma(x)\frac{dA}{dx}(0) \right\} Δx + \frac{d\sigma}{dx}(0)\frac{dA}{dx}(0)Δx^2 + f_x(x)A(x)/Δx + f_x'(x)O(Δx) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(\sigma(x)A(x)) + \underbrace{f_x(x)A(x)}_{f_x(x) : \text{単位長さの外力}} = 0$$

3次元について

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \quad \leftarrow \sigma_{xx} \neq 0, f_x \neq 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \quad \text{他の項は } 0$$

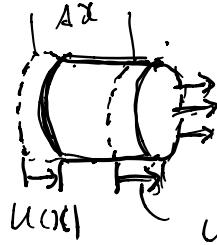
$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0$$

$$\int_A \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}(x) + f_x \right) dS = 0$$

$$\frac{d}{dx} (\sigma_{xx}(x)A(x)) + f_x(x)A(x) = 0$$

を得る。

• ひずみ - 単位



$$u(x) + \frac{du}{dx} \Delta x + O(\Delta x^2)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{du}{dx} \quad : \text{単位長さの伸び}\end{aligned}$$

★ 式の導出

力の釣り合せ:

$$\frac{d}{dx} (\sigma_{xx}(x) A(x)) + f_x(x) A(x) = 0$$

$$\text{ひずみ - 単位: } \varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} \quad \bar{f}_x$$

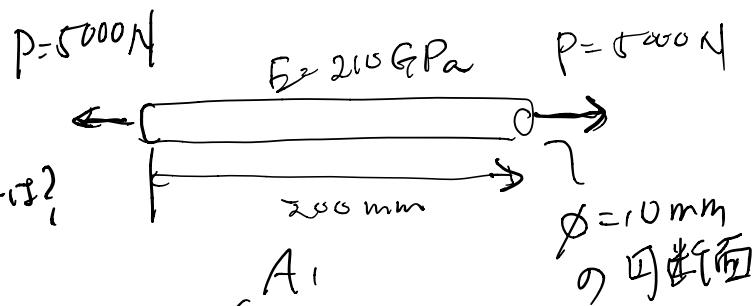
$$\text{構成式: } \sigma_{xx} = E_A \varepsilon_{xx}$$

$$\frac{d}{dx} (EA \frac{du}{dx}) + \bar{f}_x(x) = 0$$

## 2.5 例題

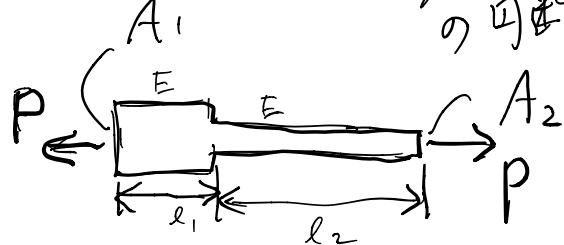
2.5.1

柱の伸び?



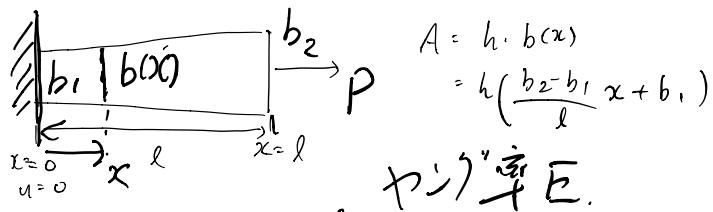
2.5.2

柱の伸び?



2.5.3

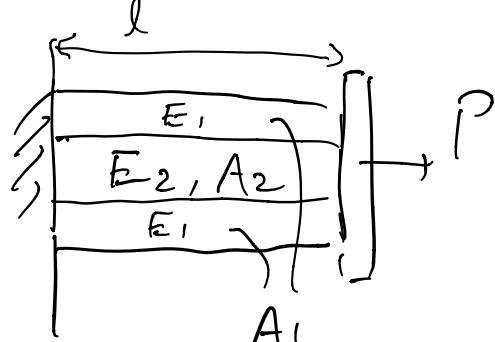
$x = l^2$  の  
変位は?



ヤング率  $E$ .

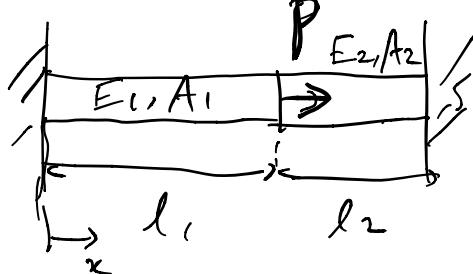
2.5.4

$x = l^2$  の  
変位は?



2.5.5

$x = l_1$  の荷重  
 $\frac{P}{A}$   
の変位?



## 2.6 溫度変化を伴う問題

温度  $\downarrow$  力  $\downarrow$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} = \varepsilon_{xx}^T + \varepsilon_{xx}^E \quad (= \alpha \Delta t)$$

$\alpha$ : 線膨張係数

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx}^E = E (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^T) = E \left( \frac{du}{dx} - \alpha \Delta t \right)$$

力のつり合ひ

$$\frac{d}{dx}(A \sigma_{xx}) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}(EA \left( \frac{du}{dx} - \alpha \Delta t \right)) = 0$$

$x=0 \sim u(0)=0$  } 境界条件  
 $x=l \sim u(l)=0$  } 解く。

$$EA \left( \frac{du}{dx} - \alpha \Delta t \right) = C_1$$

$$u = \left( \frac{C_1}{EA} + \alpha \Delta t \right) x + C_2$$

境界条件  $u(0)=0, u(l)=0 \rightarrow C_1 = -EA \alpha \Delta t, C_2 = 0$

$$\therefore u = 0$$

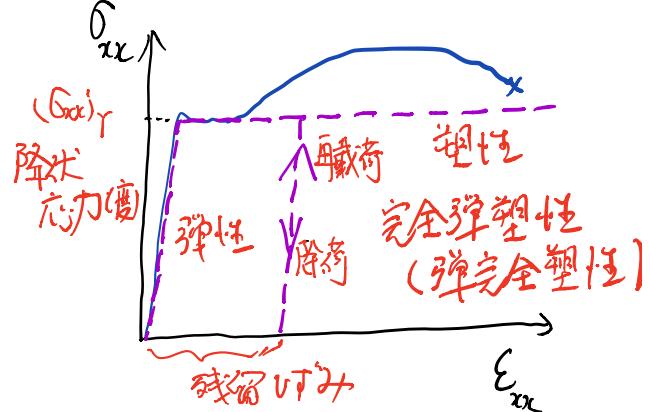
$$\sigma_{xx} = -EA \alpha \Delta t$$

$$\text{重力 } F_x = \sigma_{xx} A = -EA \alpha \Delta t$$

## 2.7 弾塑性変形

ここでは、材料の初期剛性と塑性剛性を示す。

弾性 + 塑性を扱う。



・長さ  $L = 500 \text{ mm}$ , 断面積  $A = 60 \text{ mm}^2$  の棒

弾性係数  $E = 200 \text{ GPa}$ , 降伏応力  $\sigma_y = 300 \text{ MPa}$

$\Delta L = 7 \text{ mm}$  まで引張力を載荷し、その後除荷した。

伸び変位は？

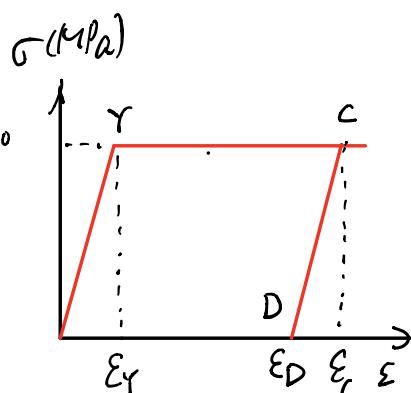
$$\varepsilon_c = \frac{\Delta L}{L} = \frac{7}{500} = 14 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} = \frac{300 \times 10^6}{200 \times 10^9} = 1.5 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_d = \varepsilon_c - \varepsilon_y = 12.5 \times 10^{-3}$$

$$u_d = \varepsilon_d \times L$$

$$= 12.5 \times 10^{-3} \times 500 \text{ mm} = 6.25 \text{ mm}$$



例題 2.7.1

(単純)  
荷重  $P$  を増加した時の  
荷重  $P$  - 变位  $\delta$  の関係を求める。

Rod の降伏時の  $(P_R)_Y$  と  $(\delta_R)_Y$  は。

$$(P_R)_Y = (\sigma_R)_Y \cdot A_R = (250 \times 10^6) \times (48 \times 10^{-6})$$

$$= 12 \text{ kN}$$

$$(\delta_R)_Y = (\varepsilon_R)_Y L = \frac{(\sigma_R)_Y L}{E_R}$$

$$= \frac{(250 \times 10^6)}{210 \times 10^9} \times 0.75 = 0.893 \text{ mm}$$

Tube の降伏時の  $(P_T)_Y$  と  $(\delta_T)_Y$  は。

$$(P_T)_Y = (\sigma_T)_Y A_T = (210 \times 10^6) (62 \times 10^{-6}) = 13.22 \text{ kN}$$

$$(\delta_T)_Y = (\varepsilon_T)_Y L = \frac{(\sigma_T)_Y L}{E_T}$$

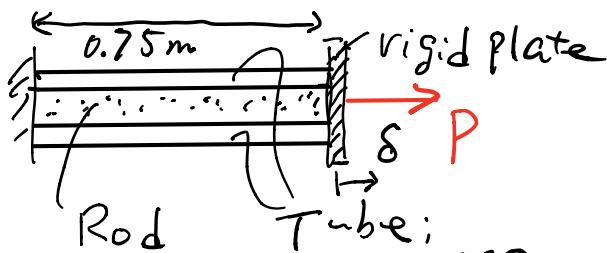
$$= \frac{310 \times 10^6}{105 \times 10^9} \cdot 0.75 = 2.21 \text{ mm}$$

$$\delta_T = 0.893 \text{ mm} \quad \text{より}, \quad P_T \text{ は},$$

$$P_T = \sigma_T A_T = E_T \frac{\delta_T}{L} A_T = 7.75 \text{ kN}$$

$$P = P_R + P_T$$

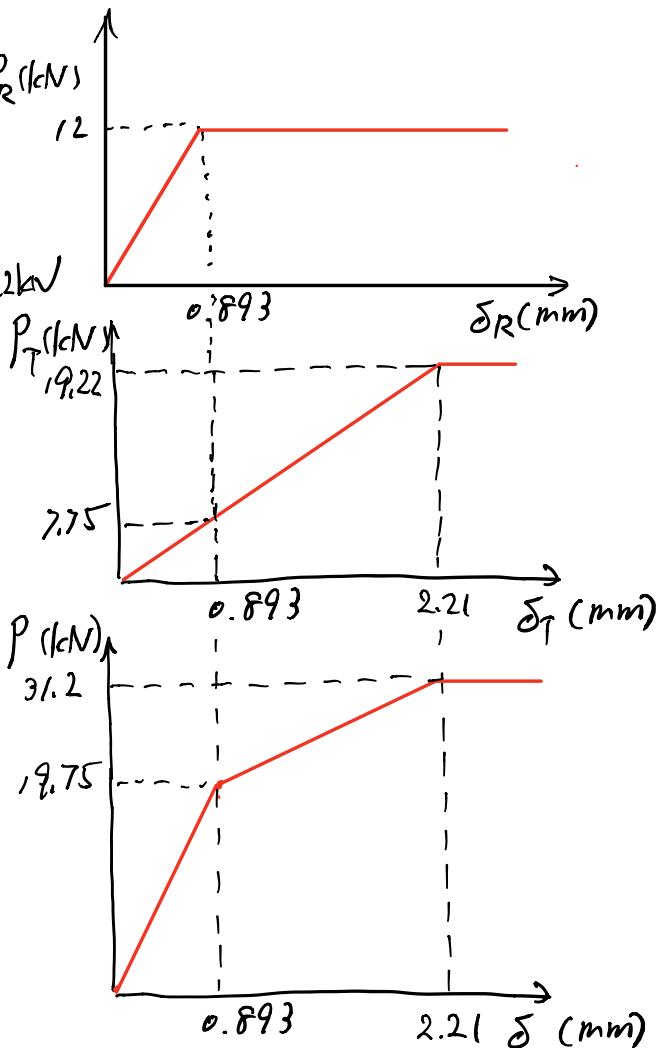
$$\delta = \delta_R + \delta_T$$



$$E_R = 210 \text{ GPa} \quad E_T = 105 \text{ GPa}$$

$$(\sigma_R)_Y = 250 \text{ MPa}, \quad (\sigma_T)_Y = 310 \text{ MPa}$$

$$A_R = 48 \text{ mm}^2 \quad A_T = 62 \text{ mm}^2$$



## 例題 2.7.1 の 統計.

荷重  $P$  を  $0 \sim 25 \text{ kN}$  まで増加させ、その後 0 に戻した。

- 1) 残留変位  $\delta_p$  はいくらく?  $\hookrightarrow$  Rod と Tube に残存する  
残留応力  $(\sigma_R)_{res}, (\sigma_T)_{res}$  はいくらく?

$P=25 \text{ kN}$  のとき、(a) (b) (c) とする。

$$P_R = 12 \text{ kN}, P_T = 13 \text{ kN}$$

(b) より、 $P_T = 13 \text{ kN}$  の時の

変位  $\delta'_T$  は、

$$\delta'_T = \epsilon'_T L = \frac{\sigma'_T}{E'_T} L = \frac{P_T}{A_T E'_T} L = \frac{13 \times 10^3 \times 0.75}{62 \times 10^6 (105 \times 10^9)} L = 1.5 \text{ mm.}$$

- 1) 図(c)より、荷重が  $25 \text{ kN} \sim 0$  に減少する時、Rod, Tube が弹性回復をする挙動を示すので、BE の位置は、AO の位置と同じである。

$$\delta' = \frac{0.893}{19.75} \times 2.5 = 1.131$$

$$\therefore \delta_p = 1.5 - \delta' = 0.369 \text{ mm}$$

- 2) 図(a), (b)において、荷重が  $\delta'_T = 1.5 \text{ mm}$  から  $\delta' = 1.131 \text{ mm}$  まで減少する時、

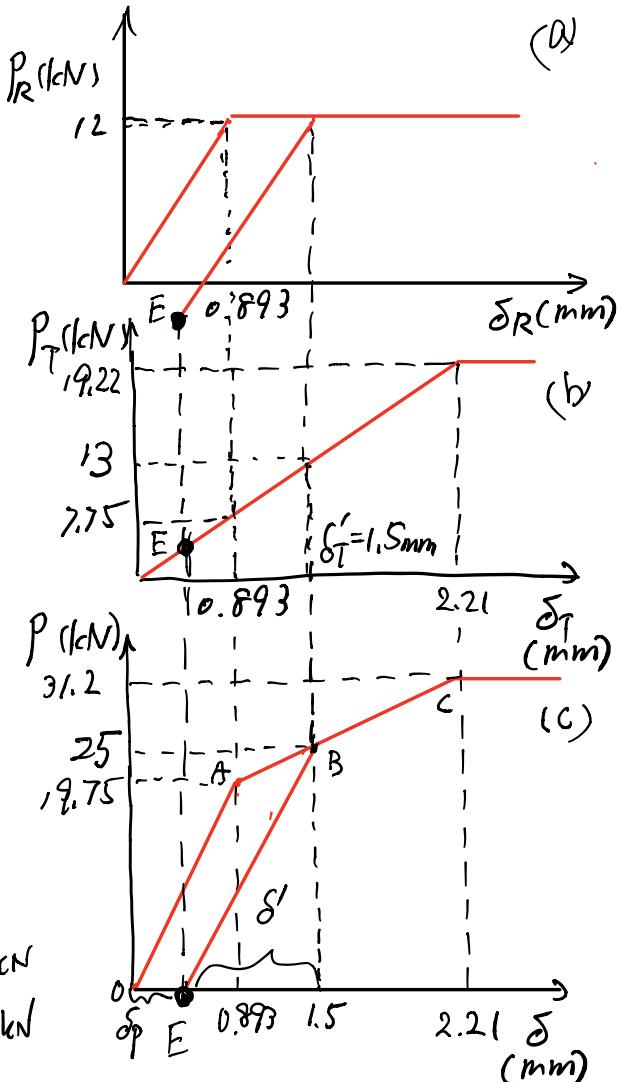
荷重は

$$P_R = 12 - \frac{12}{0.893} \times 1.131 = -3.19 \text{ kN}$$

$$P_T = 13 - \frac{7.75}{0.893} \times 1.131 = +3.19 \text{ kN}$$

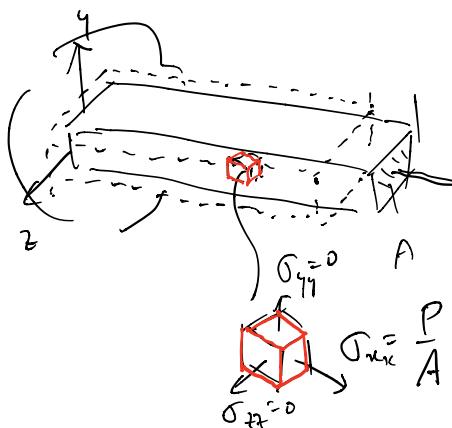
$$\sigma_R = \frac{P_R}{A_R} = -3.19 \times 10^3 / (48 \times 10^{-6}) = -66.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_T = P_T / A_T = 3.19 \times 10^3 / (62 \times 10^{-6}) = 51.5 \text{ MPa.}$$



## 2.8 一般的の応力-ひずみ関係 — 3次元弾塑性を考へる —

### ・塑性力学



$\sigma_{xx} \neq 0, \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$  の時.

$x$  方向に引張り応力が作用すると  
 $x$  方向に伸び、 $y, z$  方向には縮む。

$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} (>0), \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} \neq 0 (<0)$$

塑性力学:

$$\nu = -\frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{xx}} = -\frac{\epsilon_{zz}}{\epsilon_{xx}}$$

$\sigma_{xx} \neq 0, \sigma_{yy} \neq 0, \sigma_{zz} \neq 0$  のとき.

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} + \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E} + \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

## • せん断ひずみとせん断ひずみ

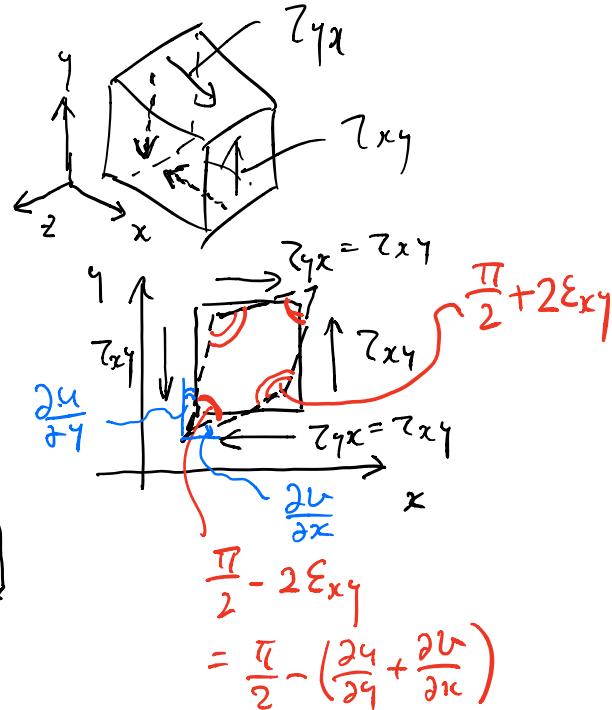
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 2G \varepsilon_{xy}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

せん断ひずみ

$G$ : せん断弾性係数

$$\left[ \begin{array}{l} \varepsilon_{xy} = \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) / 2 \\ \text{等方性の仮定} \\ \tau_{xy} = G \varepsilon_{xy} \text{ と仮定} \end{array} \right]$$



## ・ひずみと変位の関係のまとめ (等方性の場合)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} + \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E} + \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

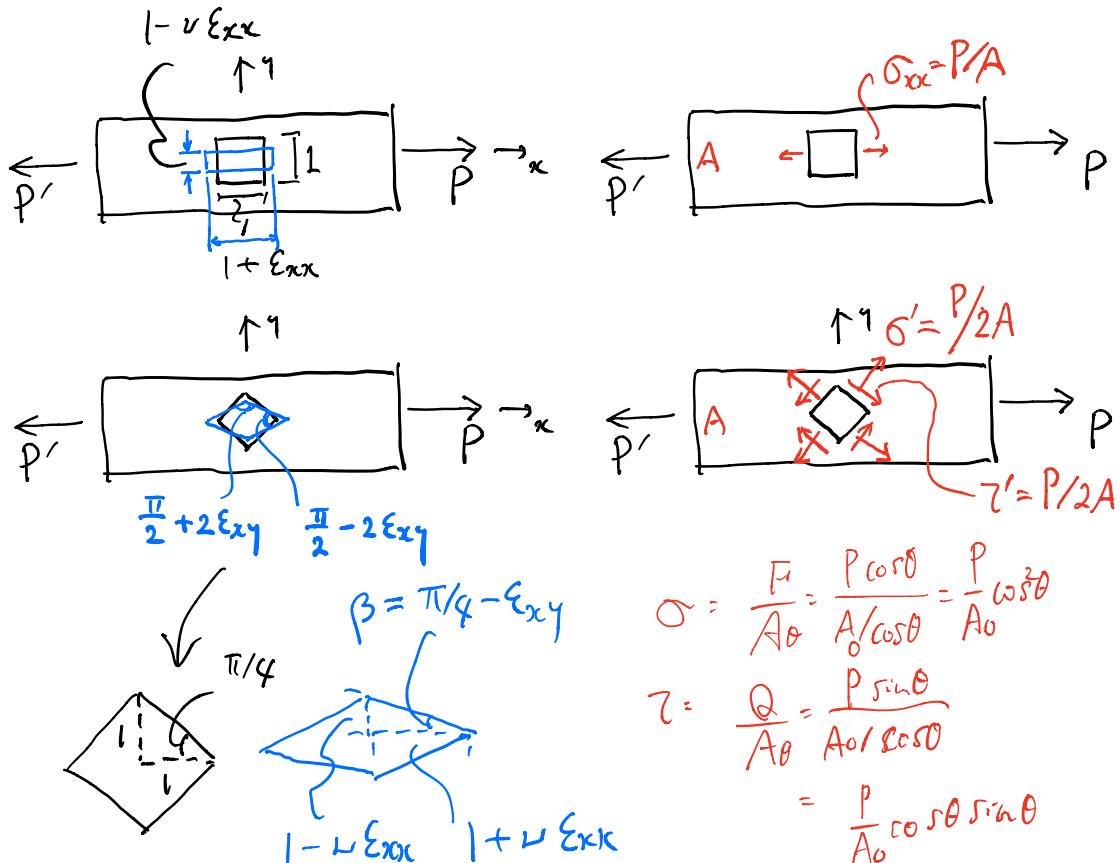
$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2G} \tau_{xy}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2G} \tau_{yz}, \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2G} \tau_{zx}$$

(等方性の場合?)

演習: 応力をひずみで表現せよ? 応力を変位( $u, v, w$ )で表現せよ?

( $\sigma_{xx} = \dots$  と...を表現せよ?)

## E, ν, G の 関係



$$\sigma = \frac{F}{A_0} = \frac{P \cos \theta}{A_0 / \cos \theta} = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta$$

$$\tau = \frac{Q}{A_0} = \frac{P \sin \theta}{A_0 / \cos \theta} = \frac{P}{A_0} \cos \theta \sin \theta$$

$$= \frac{P}{A_0} \cos \theta \sin \theta$$

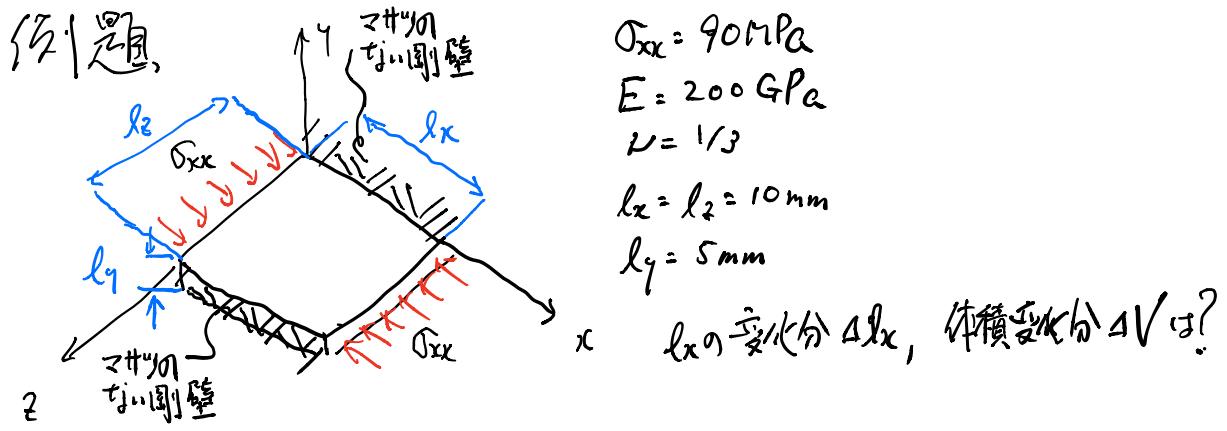
$$\begin{aligned} \tan \beta &= \tan \left( \frac{\pi}{4} - \epsilon_{xy} \right) \\ &= \frac{\tan \left( \frac{\pi}{4} \right) - \tan \epsilon_{xy}}{1 + \tan \left( \frac{\pi}{4} \right) \tan \epsilon_{xy}} \approx \frac{1 - \epsilon_{xy}}{1 + \epsilon_{xy}} = \frac{1 - \nu \epsilon_{xx}}{1 + \nu \epsilon_{xx}} \end{aligned}$$

( $\epsilon_{xy} \ll 1 \times 10^{-2}$ )

$$\epsilon_{xy} = \frac{(1+\nu) \epsilon_{xx}}{2(1 + \frac{1-\nu}{2} \epsilon_{xx})} \approx \frac{(1+\nu)}{2} \epsilon_{xx} \quad (\epsilon_{xx} \ll 1 \times 10^{-2})$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2G} \tau_{xy} = \frac{1}{2G} \frac{P}{2A}, \quad \epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} = \frac{1}{E} \frac{P}{A}$$

$$\frac{E}{2G} = (1+\nu) \Rightarrow G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{得}$$



$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} + \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

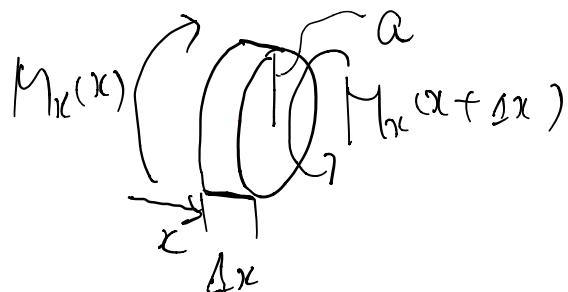
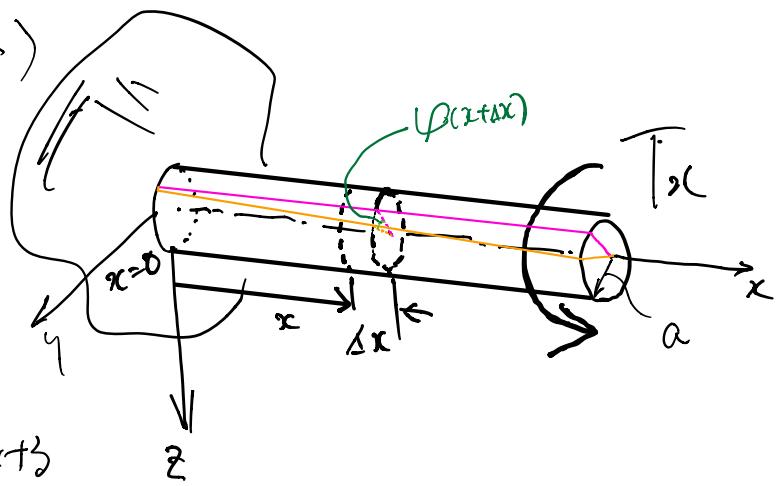
$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E} + \frac{\sigma_{zz}}{E} \quad (\text{用意})$$

$$\epsilon = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} \approx 0$$

体積変化は  $\Delta V = \epsilon V$  とすれば  $\epsilon$  は?

### 3. わく (丸棒)

半径  $a$  の丸棒の  
先端に  $T_x$  と  $T_{x+\Delta x}$   
を用いたとき、 $x = x$  のあたり  
わくの角  $\psi(x)$  と  
おもて面の分布を求める。  
おもて面の分布を求める。



#### ・力の釣り合ひ

$[x, x+\Delta x]$  の微小区間  $\Delta x$   
における角速度  $\omega$  と  $\psi$  の関係式。

$$M_x(x+\Delta x) - M_x(x) = M_x(x) + \frac{d}{dx} M_x(x) \Delta x - M_x(x) = \frac{dM_x(x)}{dx} \Delta x = \omega a^2 \Delta x$$

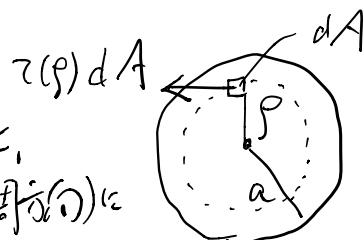
$$\Rightarrow M_x(x) : \text{一定}$$

動的平衡の成立する故。

円周上にさきの距離にある  
微小面積を  $dA$ 、そのおもて面の分布を  
右図のように、 $dA$  あたり、半径  $r$  に向かう方向(母線)に  
 $\tau(r)dA$  の力を作用する。

すなはち、わくのモーメント  $M_x$  は

$$M_x = \int_A \rho \tau(r) dA$$



## ○ 縮絃 (UTHと $\varphi$ の関係)

$x = x$  と,  $x = x + \Delta x$  の表面の  
たるみ角が  $\varphi(x), \varphi(x + \Delta x)$   
である

とすると,  $\rho = \rho$  のときの

内表面での曲率半径は,

$\rho \varphi(x) \approx \rho \varphi(x + \Delta x)$  である。

より, 表面上の正方形ABCDは, 縮絃後,

U形  $A'B'C'D'$  に変形する。

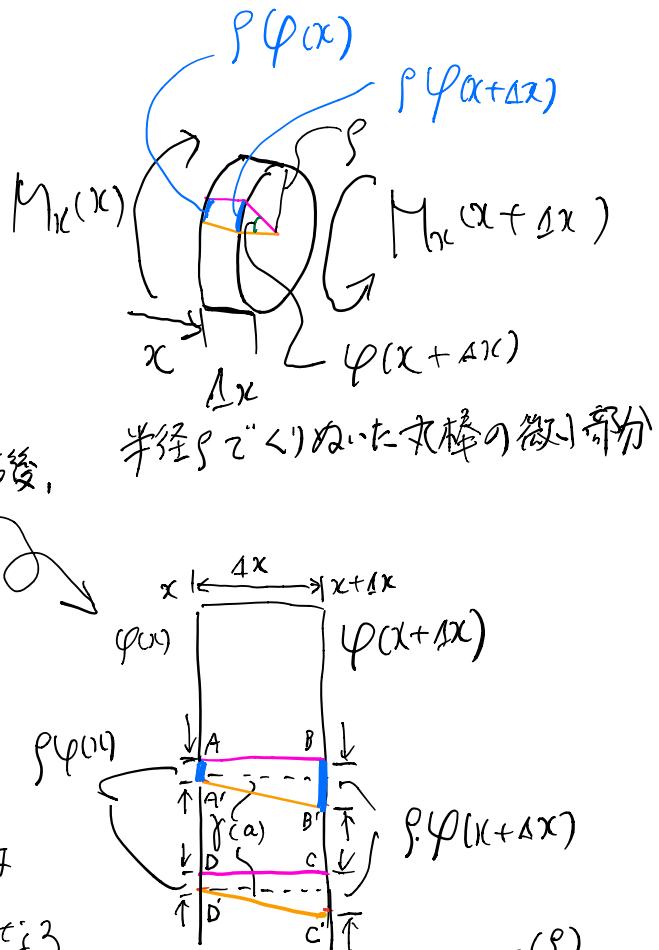
より, 面度変化  $\gamma(\rho)$  は,

$$\gamma(\rho) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\rho(\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x))}{\Delta x}$$

$$\approx \rho \frac{d\varphi(x)}{dx}$$

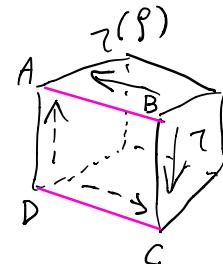
$\rho = a$  の面度変化  $\gamma(a)$  は

$$\gamma(a) = a \frac{d\varphi(x)}{dx} \text{ と } \text{です}.$$



## ○ 構成式

右のABCDは, せん断ひずみ  $\gamma(\rho)$  の下で,  
面度が  $\gamma(\rho)$  で変形する。 $\gamma$  と  $\Gamma$  は区別するが、  
 $\gamma = 2\Gamma$



$$\gamma(\rho) = G \Gamma(\rho)$$

(注)  $\gamma$ に対するUTHは  $\rho \Gamma(\rho)$  は  $\epsilon_{r\theta}$  で  $\gamma = 2\epsilon_{r\theta}$ 。  
 $\gamma = 2G\epsilon_{r\theta}$  と書ける。

力のねじりモーメント.

・力のつり合いで  $\frac{d M_x(x)}{dx} = 0$ ,

$$M_x(x) = \int_A p \tau(p) dA$$

・变形(ひずみとねじり角  $\varphi$  の関係)

$$\tau(p) = G \frac{d\varphi}{dx}(x)$$

・構成式

$$\tau(p) = G J \gamma(\varphi)$$

以上より  $M_x(x) = \int_A p G J \gamma dA = G \int_A p^2 dA \frac{d\varphi}{dx}(x) = G J \frac{d\varphi}{dx}(x)$

J: 断面2次極モーメント.

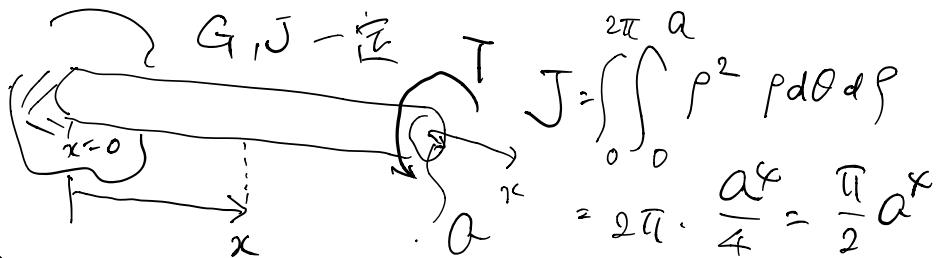
$$\frac{d M_x}{dx} = \frac{d}{dx} \left( G J \frac{d\varphi}{dx} \right) = 0$$

$$\tau = G \gamma = G S \frac{d\varphi}{dx} = G P \left( \frac{M_x}{G J} \right) = \frac{M_x}{J} S$$

$\varphi$  の支配方程式. 境界条件を用いて解く.

動力を受ける棒の場合と  
比較しよう!

3.1



左の  $x$  における  $\varphi(x)$ , 最大値  $\varphi_{\max}$  ?

$$GJ \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{C_1}{GJ}, \quad \varphi = \frac{C_1}{GJ}x + C_2$$

$$\varphi = 0 \text{ 时 } C_2 = 0$$

$$M_x(l) = T = GJ \frac{d\varphi}{dx}(l) = GJ \frac{C_1}{GJ} = C_1$$

$$\therefore \varphi = \frac{T}{GJ} x = \frac{T}{G(\frac{\pi}{2} \alpha^4)} x$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{J} \alpha = \frac{T}{J} \alpha = \left( \frac{T}{\pi \alpha^3 / 2} \right)$$

$$dx dy = r \cdot dr d\theta$$

$$x = r \cos\theta, y = r \sin\theta$$

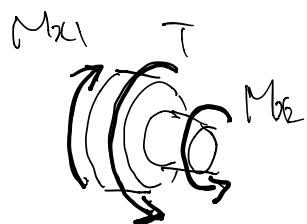
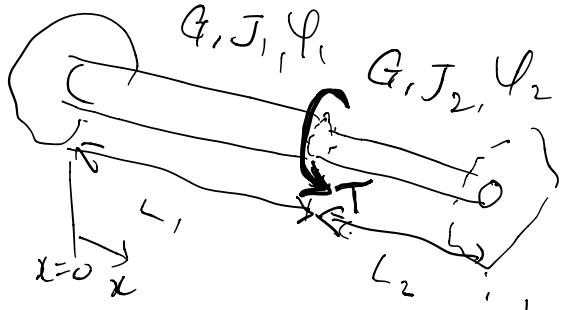
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} \cos\theta & r \sin\theta \\ \sin\theta & -r \cos\theta \end{pmatrix} = r$$

中空棒の場合,  $J$  が異なるため.



$$J = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} r^2 \rho d\theta d\rho = \frac{\pi}{2} (Q_2^2 - Q_1^2)$$

例題2(演習)



丸棒1と丸棒2は併用する  
ねじりモーメント  $M_{x1}$  と  $M_{x2}$  は?  
T- $\int T \cdot x \, dx$  の併用したものが何?

$$x = L_1 + L_2 \quad GJ_1 \frac{d^2\phi_1}{dx^2} = 0$$

$$GJ_2 \frac{d^2\phi_2}{dx^2} = 0$$

$$\phi_1 = \frac{C_1}{GJ_1} x + C_2$$

$$\phi_2 = \frac{C_3}{GJ_2} x + C_4$$

$$M_{x1} = GJ_1 \frac{d\phi_1}{dx} = C_1$$

$$M_{x2} = GJ_2 \frac{d\phi_2}{dx} = C_3$$

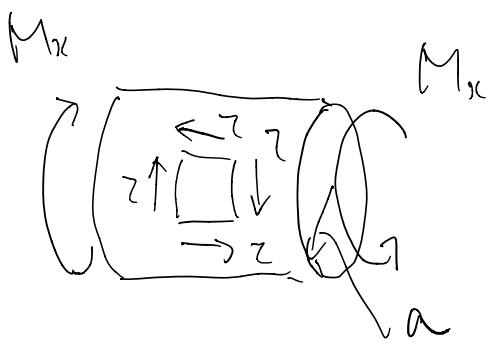
$C_1 \sim C_4$  より  $T \rightarrow$  たわみ条件で定めよ。

$$x=0 \quad \phi_1(0)=0$$

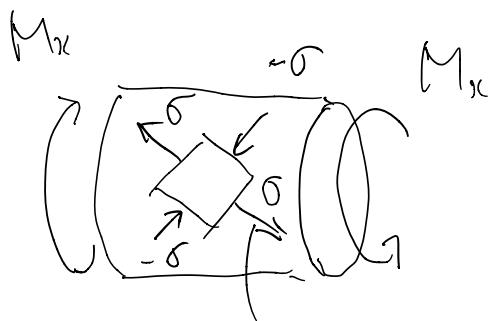
$$x=L_1+L_2, \quad \phi_2(L_1+L_2)=0$$

$$x=L_1, \quad T + M_{x2} - M_{x1}=0$$

$$\phi_1(L_1) = \phi_2(L_1)$$



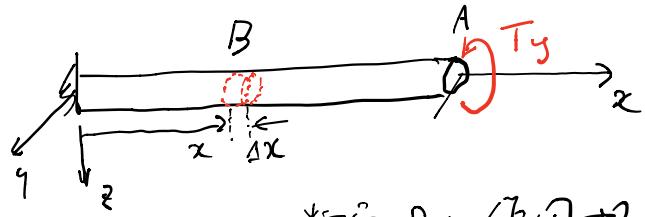
$$F = \frac{2A_0}{\sqrt{2}} \times 2 = \sqrt{2} 2A_0$$



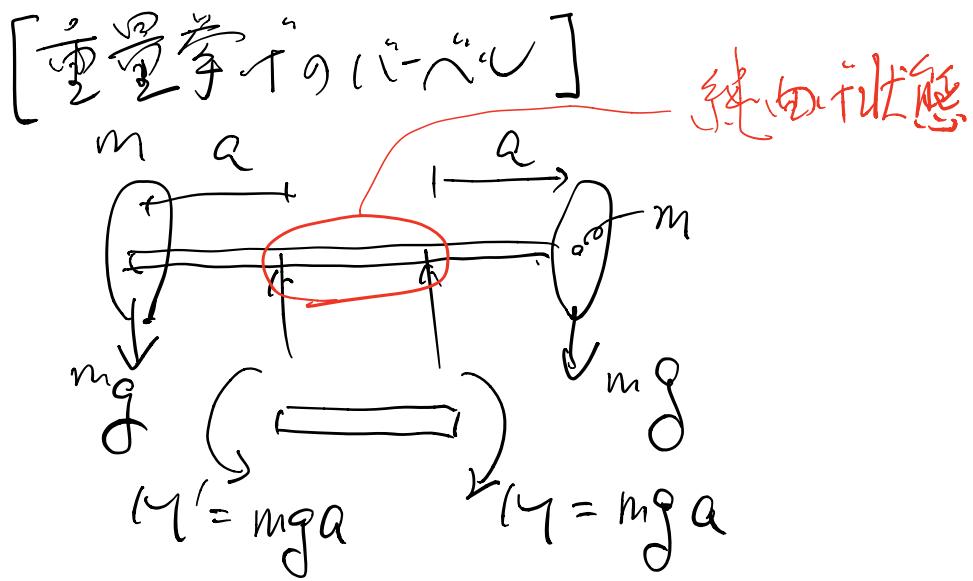
$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{\sqrt{2} 2A_0}{\sqrt{2} A_0} = 2 = \frac{M_{ix}}{J} Q$$

$\Rightarrow 42-79$   
 七五七三

## 4. 純ねじり



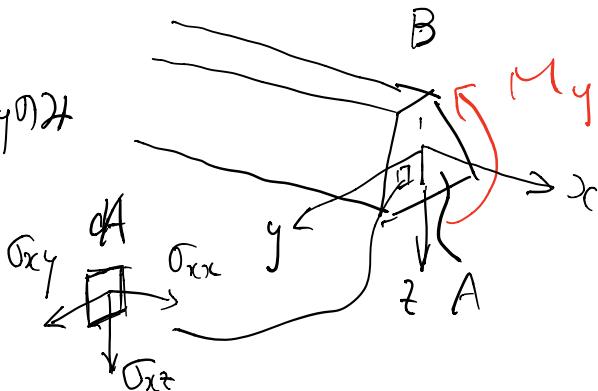
$T_y$  が作用する時に、断面Bに作用する力の分布、梁の変形を求める。



・ 力  $(\tau_{xz} - \tau_{xy})$  のつり合ひ.

- ・ 断面は左右対称とする
- ・ 断面に作用する断面力は  $M_y$  のみ

断面力と応力の関係



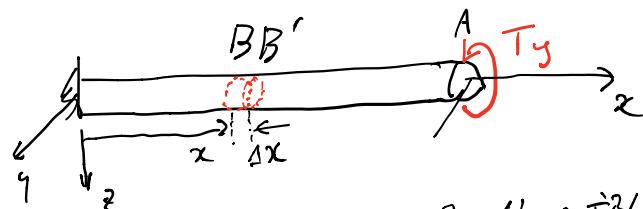
$$F_x = 0 = \int_A \sigma_{xx} dA$$

$$F_y = 0 = \int_A \tau_{xy} dA, F_z = 0 = \int_A \tau_{xz} dA$$

$$M_y = \int_A \sigma_{xx} z dA, M_z = 0 = - \int_A \sigma_{xy} y dA$$

$$M_x = 0 = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA$$

次に示すように、純曲げを受ける断面 A に作用する力は  $\tau_{xy}$  と  $\sigma_{xy} \neq 0$  で、 $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$  である。⇒ 上記の式が成り立つ！



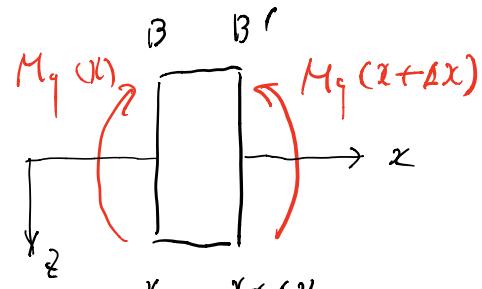
位置  $x$  の断面 B と  $(x + \Delta x)$  の断面  $B'$  の間に作用する

$\tau_{xy}$  のつり合ひを定義する。

$$M_y(x + \Delta x) - M_y(x)$$

$$= M_y(x) + \frac{\partial M_y(x)}{\partial x} \Delta x - M_y(x)$$

$$= \frac{\partial M_y}{\partial x} \Delta x = 0$$



・変形(ひずみと曲率)  
仮定: 微小変形, 平面保持

- 純曲げ状態では、梁の上面は縮む、下面は伸びる。伸び縮みした面を中立面といい、 $z=0$ とする。

- 位置 $x$ の至る所、曲げモーメント $M_y$ は同じ。 $\Rightarrow$ 中立面は円弧。

- 円弧の中心を $O$ とし、 $O$ から中立面までの距離(半径)を $R$ とする。 $\Delta\theta = \Delta x / R$ とする。

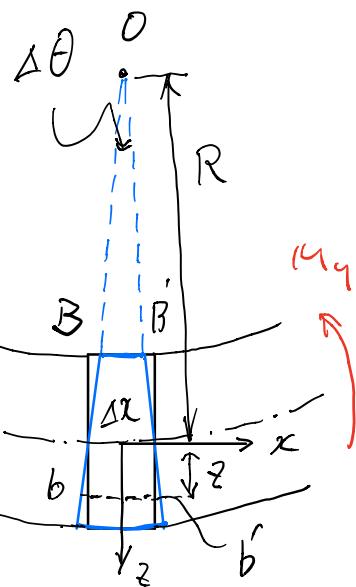
- $z=z$  の線素 $bb'$ の $\epsilon_{xx}$ は、 $R\Delta\theta(\Delta x)$ と $(R+z)\Delta\theta$ との $z^2$ 、  
 $z=z$ における直ひずみ $\epsilon_{xz}$ は。  

$$\epsilon_{xx} = \frac{(R+z)\Delta\theta - R\Delta\theta}{R\Delta\theta} = \frac{z}{R} = \kappa z \quad \kappa = \frac{1}{R}$$

中立面  $z=0$ から断面内の最遠の線素 $z$ の

距離は $C$ とすると、 $\epsilon_{xx}$ の最大絶対値は

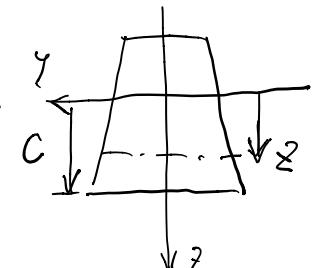
$$|\epsilon_{xx}|_{\max} = C/R = \kappa C \text{ となる。}$$



- $x$ の至る所、中立面に垂直な断面は変形後も中立面に垂直。  
(平面保持)

したがって $\epsilon_{xz} = \epsilon_{xy} = 0$ となる。

$\epsilon_{xz}, \epsilon_{xy} \neq 0$ 。



・構成式：線形弹性.

$$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx}$$

より  $\left\{ \begin{array}{l} \text{力のつり合}: \frac{d}{dx} M_y(0) = 0 \Rightarrow M_y = T_y \\ \text{变形}: \epsilon_{xx} = K z = \frac{1}{R} z \\ \text{構成式}: \sigma_{xx} = E \epsilon_{xx} = E K z = \frac{E}{R} z \end{array} \right.$

・面積、断面力と弯曲の関係.

$$T_{xy} = Z_{xy} = 0 \quad \delta y,$$

$$F_y = 0 = \int_A T_{xy} dA, F_z = 0 = \int_A Z_{xz} dA, M_x = 0 = \int_A (Z_{xz} y - Z_{xy} z) dA.$$

$$M_z = - \int_A \sigma_{xx} y dA = - \int_A E K z y dA = 0 \quad (\text{断面が左右対称})$$

$$F_x = \int_A \sigma_{xx} dA = \int_A E K z dA = E K \int_A z dA = 0 \quad \begin{array}{l} \text{断面1次モーメント} \\ \int_A z^2 dA = 0 \end{array}$$

$$M_y = \int_A \sigma_{xx} z dA = \int_A (E K z) z dA \quad \text{決める.}$$

$$= E K \int_A z^2 dA = E I_y K = T_y$$

$I_y$ :  $y$  軸回りの断面2次モーメント.

$\delta z$

$$K = \frac{1}{R} = \frac{M_y}{E I_y} \left( = \frac{T_y}{E I_y} \right), \sigma_{xx} = E K z = \frac{E}{R} z = \frac{M_y}{I_y} z \left( = \frac{T_y}{I_y} z \right)$$

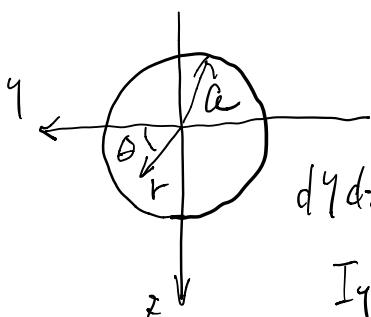
これは、外力  $T_y$  と曲率  $K$  の関係式（力と変形の式）

• 断面2次モーメント  $I_y$  の計算

$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} z^2 d\gamma dz = b \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{bh^3}{12}$$

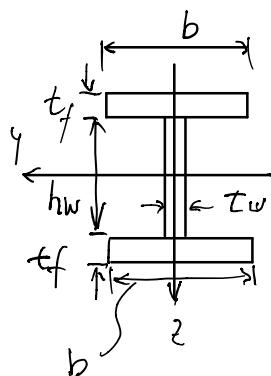
$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \int_{-b_2/2}^{b_2/2} z^2 d\gamma dz - \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \int_{-b_1/2}^{b_1/2} z^2 d\gamma dz$$

$$= \frac{b_2 h_2^3}{12} - \frac{b_1 h_1^3}{12}$$



$$d\gamma dz = r dr d\theta, \quad z = r \sin \theta \quad \gamma = r \cos \theta$$

$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_0^{2\pi} \int_0^r (rs \sin \theta)^2 r dr d\theta = \frac{\pi}{4} r^4$$

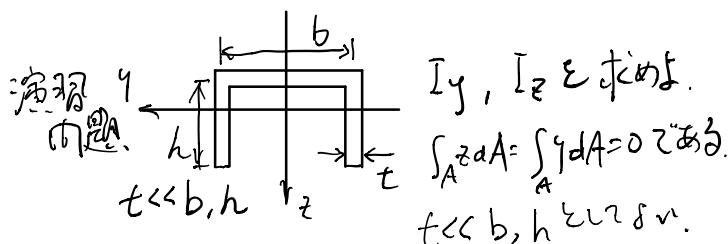
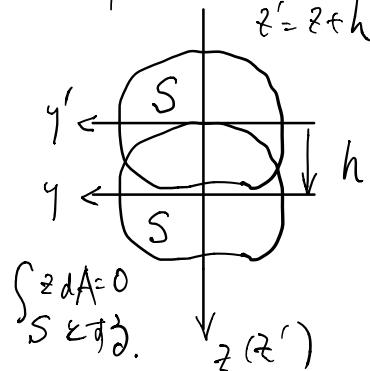


$$I_y = \int_A z^2 dA$$

$$= \frac{b + (t_f)^3}{12} + \frac{t_w(h_w)^3}{12} + \frac{b_f(t_f)^3}{12}$$

$$+ \left( \frac{h_w}{2} + \frac{t_f}{2} \right)^2 (t_f \times b_f) \times 2$$

$$\approx \frac{t_w h_w^3}{12} + 2 \times \left( \frac{h_w}{2} \right)^2 (t_f \times b_f)$$



$$I_y, I_z \text{ は同じ.}$$

$$\int_A z^2 dA = \int_A \gamma dA = 0$$

$$t \ll b, h \text{ のとき.}$$

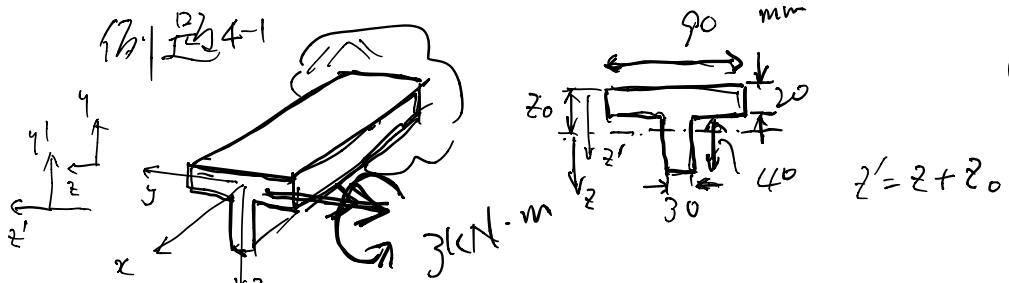
$$I_y = \int_S z^2 dA$$

$$I_{y1} = \int_S z'^2 dA = \int_S (z + h)^2 dA$$

$$= \int_S z^2 dA + 2h \int_S z dA + h^2 \int_S dA$$

~~$\int_S z dA = 0$~~

$$= I_y + h^2 S$$



$$\sigma = -\frac{M_y z}{I_y}$$

$$z' = z + z_0$$

$$E = 165 \text{ GPa} \quad \sigma_{\max} ? \quad \sigma_{\min} ? \quad R ?$$

$$M_y = -3 \text{ kN m}$$

~~中立軸の位置~~

中立軸の位置 ( $\int_A \sigma_{xx} dA = 0 \rightarrow \int_A z dA = 0$ )

$$\int_A z dA = \int_A (z' - z_0) dA = 0 \quad \text{for} \quad \int_A z' dA - z_0 \int_A dA = 0$$

$$z_0 = \frac{\int_A z' dA}{A} = \boxed{\quad} \text{ mm}$$

中立軸の位置を求める式

$$I_y = \int_A z^2 dA = \boxed{\quad} \text{ m}^4$$

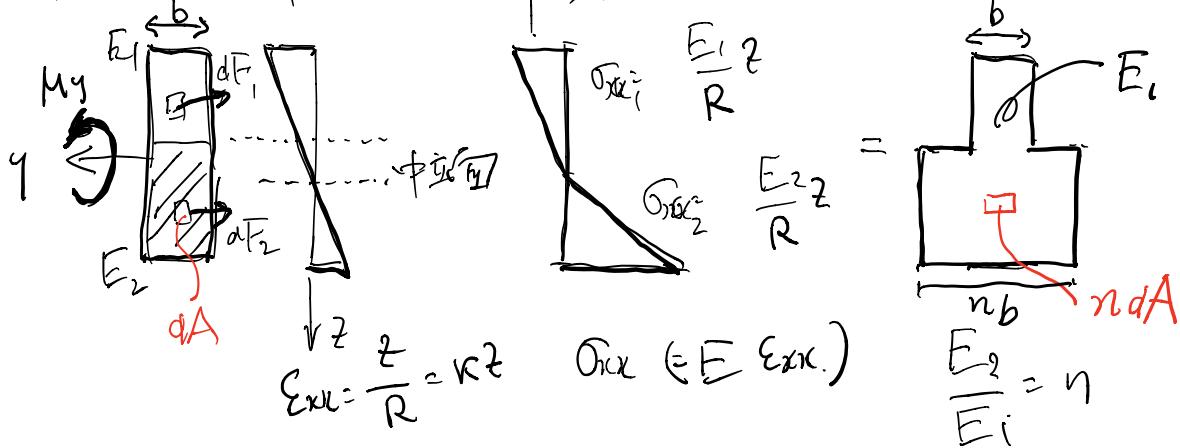
$\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$  の計算  $z = -22 \text{ mm}, 38 \text{ mm}$  の位置での  $\sigma$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_y}{I_y} z \Big|_{z=-22 \text{ mm}} = \boxed{\quad} \text{ Pa}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{M_y}{I_y} z \Big|_{z=38 \text{ mm}} = \boxed{\quad} \text{ Pa}$$

$$\frac{1}{R} = K = \frac{M}{EI_y} = \boxed{\quad} \text{ m}^{-1} \quad R = \boxed{47.7} \text{ m}$$

①複合材料 加工与3D打印



## 第四章 計力

$$F_x = \int_A \sigma_{xx} dA = 0$$

$$M_y = \int_A z \sigma_{xx} dA$$

$$\sigma_{xx} = -\frac{E_1}{\rho} y = -\frac{M_2 y}{I_2}$$

$\sigma_{xx} = -\frac{E_2}{\rho} y \cdot \left( \frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{E_1}{\rho} y \right)$

$\approx$

$$= M \cdot \left( -\frac{M_2 y}{I_2} \right)$$

$$dF_1 = \sigma_{xx} dA = \frac{EI}{R} z^2 dA$$

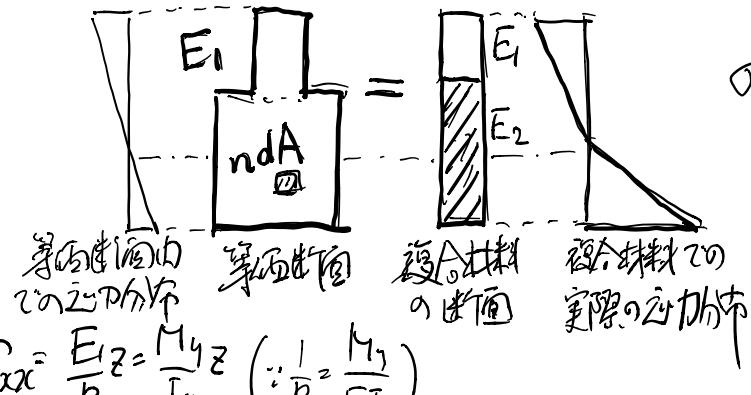
$$dF_2 = \sigma_{xx} dA = \frac{E_2}{R} z dA = \frac{E_1}{R} z \left( \frac{E_2}{E_1} \right) dA$$

$dA$

ヤンゲ率が異なる複合材料の場合、  
E<sub>1</sub>を基準とすると、全断面のヤンゲ率はE<sub>1</sub>で、  
E<sub>2</sub>の部分の面積とひき力(左断面)を持つ  
部分と等しくあるとして計算。

$\nabla$  or  $\epsilon$  find?

## 応力 $\sigma_{xx}$ を求めると時 の経過点

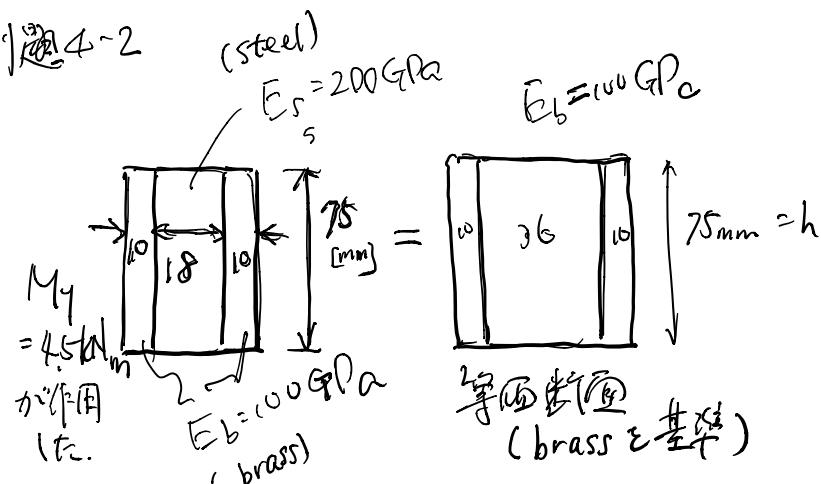


$$G_{xx} = \frac{E_l}{R} z = \frac{M_l}{I_l} z \quad \left( \because \frac{1}{R} = \frac{M_l}{E_l I_l} \right)$$

$$\sigma_{xx} = \begin{cases} \frac{E_1}{R} z = \frac{M_y}{I_y} z & E = E_1 \\ \frac{E_2}{R} z = \frac{E_2}{E_1} \left( \frac{E_1}{R} z \right) & E = E_2 \end{cases}$$

www \ Ig e)  
n (E T) ee  
Cogni /

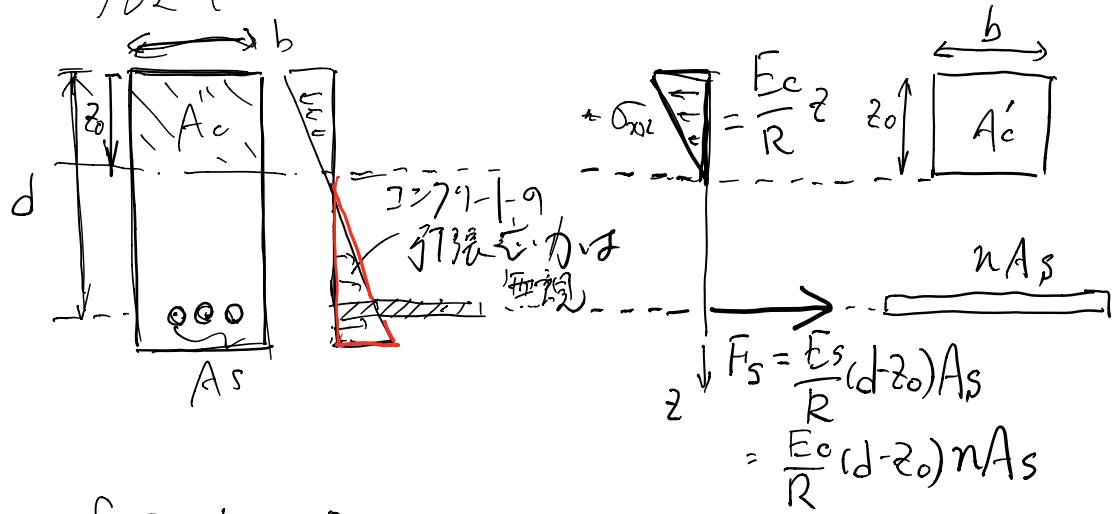
例題4-2



Steel & brass の  
発生する最大応力は?

$$I_y = \frac{56 \times 75^3}{12} = 1.9688 \times 10^6 \text{ mm}^4$$
$$\sigma_{\max} = \frac{M_y}{I_y} \frac{h}{2} = \boxed{\quad} \text{ MPa.}$$
$$(\sigma_b)_{\max} = \sigma_{\max} = \boxed{\quad} \text{ MPa}$$
$$(\sigma_s)_{\max} = \frac{E_s}{E_b} \sigma_{\max} = \boxed{\quad} \text{ MPa.}$$

• 弯曲变形



$$\int_A \sigma_{c,z} dA = 0 \quad \text{by}$$

$$\int_{A_c} \frac{E_c}{R} z dA + \frac{E_c}{R} (d - z_0) n A_s = 0$$

$$b z_0 \cdot \frac{z_0}{2} - n A_s (d - z_0) = 0 \quad (1)$$

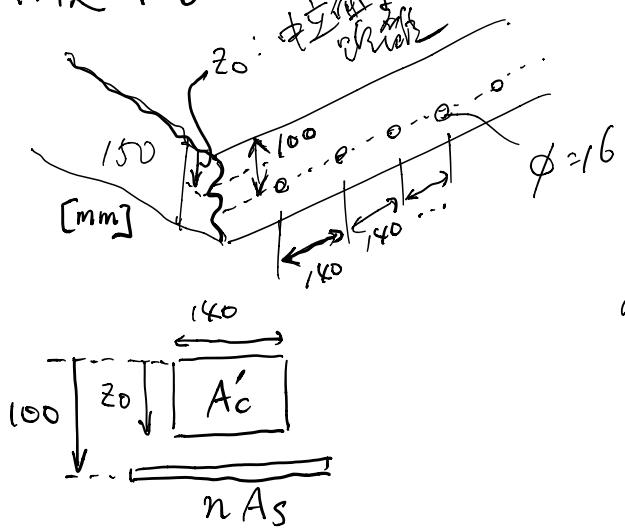
中立軸の位置  $z_0$  を得る.

断面2次モーメント  $I_y$  を求める

$$\sigma_c = \frac{E_c}{R} z = \frac{M_y}{I_y} z, \quad \sigma_s = \frac{E_s}{R} z = \frac{E_s}{E_c} \frac{E_c}{R} z = \frac{E_s}{E_c} \frac{M_y}{I_y} z$$

∴ 引張力区

例題 4-3



$$E_c = 20 \text{ GPa} \quad n = 10$$

$$E_s = 200 \text{ GPa}$$

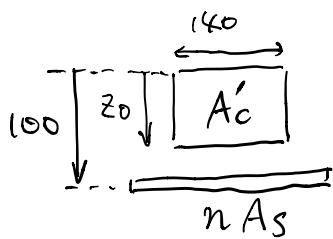
$$(\sigma_c)_{all} = 9 \text{ MPa}$$

$$(\sigma_s)_{all} = 140 \text{ MPa}$$

許容応力

の時、1m<sup>2</sup>の面積に

最大曲げモーメント？  
(M<sub>max</sub>)



- 式(1):  $b z_0 \frac{z_0}{2} - n A_s (d - z_0) = 0 \text{ N}$   $z_0 = \boxed{\quad} \text{ mm}$

- 断面2種類のI<sub>y</sub>:  $I_y = \frac{b z_0^3}{12} + b z_0 \times \left(\frac{z_0}{2}\right)^2 + n A_s \times (100 - z_0)^2 = \boxed{\quad} \text{ mm}^4$

- 応力  $\sigma = n \frac{M_y z}{I_y} \text{ MPa}$ ,  $M_y = \frac{\sigma}{n} \frac{I_y}{z}$ .

- $(\sigma_c)_{max} = (\sigma_c)_{all} \text{ のとき}, n = 1, (z_c)_{max} = z_0 \text{ MPa}$

$$M_y^c = \frac{(\sigma_c)_{all}}{1} \cdot \frac{I_y}{z_0} = \boxed{\quad} \text{ kNm}$$

- $(\sigma_s)_{max} = (\sigma_s)_{all} \text{ のとき}, n = 10, (z_s)_{max} = (100 - z_0) \text{ mm MPa}$

$$M_y^s = \frac{(\sigma_s)_{all}}{10} \cdot \frac{I_y}{(100 - z_0) \times 10^3} = \boxed{\quad} \text{ kNm}$$

- $M_y^c \text{ と } M_y^s \text{ のうち}, \boxed{\quad} \text{ 方が大きい} \Rightarrow M_{max} = \boxed{\quad} \text{ kNm}$

## 4.5 純曲げと複合の非対称断面

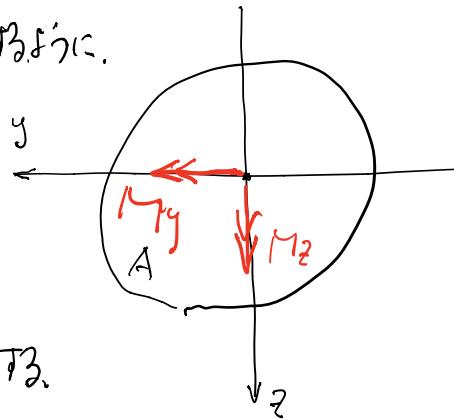
- $y-z$  軸の原点を決定.

$$\int_A y dA = \int_A z dA = 0 \text{ を満足するように.}$$

- 断面の非対称軸,  $\int_A yz dA \neq 0$

- $y$  軸および  $z$  軸回りの回転モーメント  $M_y, M_z$  が作用.

- 平面保持の仮定は成立すると.



直立式  $\sigma_{xx} = a y + b z$  (平面)

直立式.  $\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx} = E a y + E b z = \bar{a} y + \bar{b} z$

- 断面力と弯曲.

$$F_x = \int_A \sigma_{xx} dA = \int_A (\bar{a} y + \bar{b} z) dA = 0$$

$$M_y = \int_A \sigma_{xx} z dA = \bar{a} \int_A y z dA + \bar{b} \int_A z^2 dA \Rightarrow M_y = \bar{a} I_{yz} + \bar{b} I_y$$

$$M_z = - \int_A \sigma_{xx} y dA = - \bar{a} \int_A y^2 dA - \bar{b} \int_A y z dA \Rightarrow M_z = - \bar{a} I_z - \bar{b} I_{yz}$$

$$\bar{a} = - \frac{I_y M_z + I_{yz} M_y}{I_y I_z - I_{yz}^2}, \quad \bar{b} = \frac{I_z M_y + I_{yz} M_z}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

$$\sigma_{xx} = - \frac{I_y M_z + I_{yz} M_y}{I_y I_z - I_{yz}^2} y + \frac{I_z M_y + I_{yz} M_z}{I_y I_z - I_{yz}^2} z$$

- $I_{yz} = 0$  のとき,  $y-z$  軸回りの回転モーメント  $M_y, M_z$  が作用.

$$\sigma_{xx} = - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

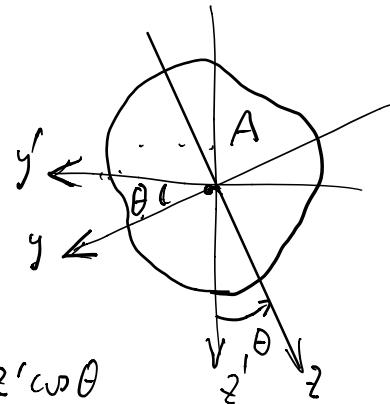
⑤  $I_{y'z'} \neq 0$  は 3 軸対称断面に対するもの

なぜか  $I_{y'z'} = 0$  を満たす  $y-z$  断面は存在するのか?

$I_{y'}, I_{z'}, I_{y'z'} (\neq 0)$ : given で,

$y-z$  断面が  $y-z$  断面を  $\theta$  だけ回転した形。

$$y = y' \cos \theta + z' \sin \theta, z = -y' \sin \theta + z' \cos \theta$$



$$\begin{aligned} I_y &= \int_A z^2 dA = \int_A (-y' \sin \theta + z' \cos \theta)^2 dA = \sin^2 \theta \int_A y'^2 dA + \cos^2 \theta \int_A z'^2 dA - 2 \omega s \theta \sin \theta \int_A y' z' dA \\ &= \cos^2 \theta I_{y'} + \sin^2 \theta I_{z'} - 2 \omega s \theta \sin \theta I_{y'z'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_z &= \int_A y^2 dA = \int_A (y' \cos \theta + z' \sin \theta)^2 dA = \omega s^2 \theta \int_A y'^2 dA + \sin^2 \theta \int_A z'^2 dA + 2 \omega s \theta \sin \theta \int_A y' z' dA \\ &= \sin^2 \theta I_{y'} + \cos^2 \theta I_{z'} + 2 \omega s \theta \sin \theta I_{y'z'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{y'z'} &= \int_A y' z' dA = \int_A (y' \cos \theta + z' \sin \theta) (-y' \sin \theta + z' \cos \theta) dA \\ &= -\sin \theta \omega \theta \int_A y'^2 dA + (\omega s^2 \theta - \sin^2 \theta) \int_A y' z' dA + \sin \theta \omega \theta \int_A z'^2 dA \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\theta (I_{y'} - I_{z'}) + \cos 2\theta I_{y'z'} \end{aligned}$$

$I_{y'z'} = 0$  のとき

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{2 I_{y'z'}}{I_{z'} - I_{y'}} \Rightarrow \theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2 I_{y'z'}}{I_{z'} - I_{y'}} \right)$$

これが回転した  $y-z$  断面の条件

$$I_{y'z'} = 0. //$$

例題 4-4  
非対称断面での応力

(1)  $\int_A y' dA = \int_A z' dA = 0$  より原点を定めると?  
( $\int_A y dA = \int_A z dA = 0$  も満足)

(2)  $\int_A y z dA = 0$  より

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2I_{yz'}}{I_{z'} - I_{y'}} \right) =$$

$$(3) I_z = \int_A y^2 dA = \int_A (y' \cos\theta + z' \sin\theta)^2 dA \\ = \sin^2\theta I_{y'} + \cos^2\theta I_{z'} + 2\cos\theta \sin\theta I_{yz'} \\ =$$

$$=$$

$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_A (-y' \sin\theta + z' \cos\theta)^2 dA = \sin^2\theta I_{z'} + \cos^2\theta I_{y'} - 2\cos\theta \sin\theta I_{yz'} =$$

(4)  $M_y, M_z$  を求めよ。

$$M_y =$$

$$, M_z =$$

$$(5) 点 A の y, z 座標を求める。y_A = y'_A \cos\theta + z'_A \sin\theta =$$

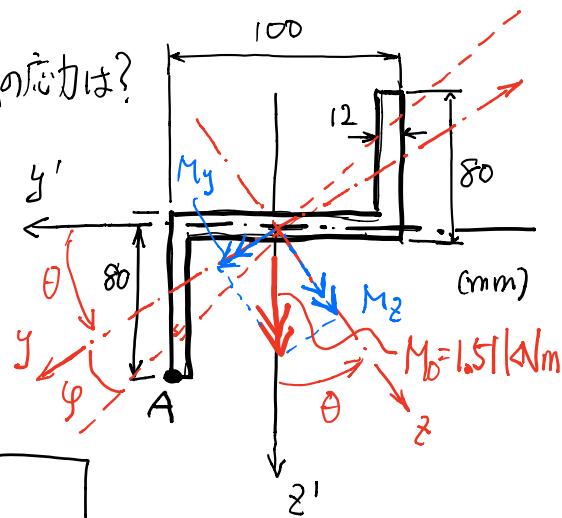
$$z_A = -y'_A \sin\theta + z'_A \cos\theta =$$

(6) 点 A の応力  $\sigma_{xx}$

$$(\sigma_{xx})_A =$$

$(\sigma_{xx})_A = 0$  となる中立軸の角度  $\varphi$  は、 $(\sigma_{xx})_A = -\frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z = 0$  す。

$$\tan \varphi = \frac{z}{y} = \frac{M_z}{I_z} \frac{I_y}{M_y} = \frac{1142}{6.62} \times \frac{0.81}{972}, \quad \varphi = 8.18^\circ$$



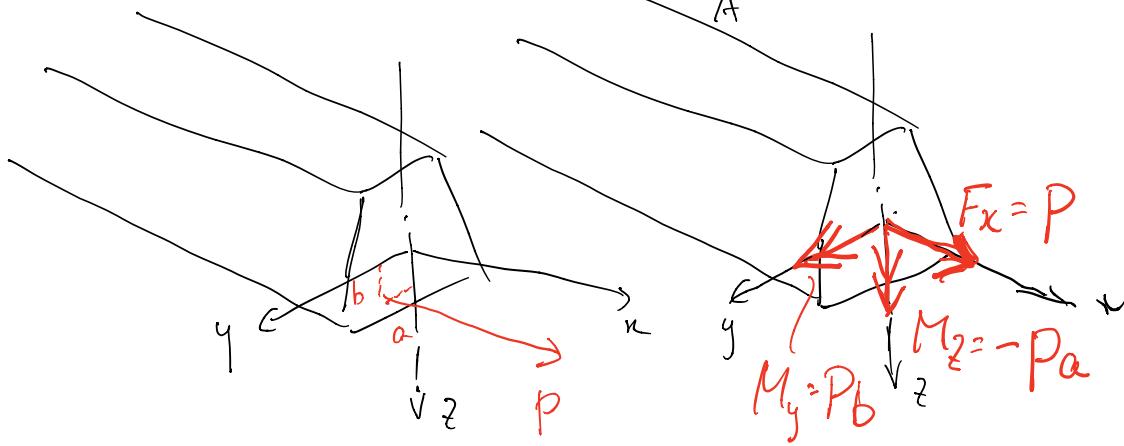
$$I_y = 3.25 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_{z'} = 4.18 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_{yz'} = 2.87 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

## 4.6 - 與(b) 偏心荷重

$$\int_A y_2 dA = 0 \text{ 滿足 } T_3.$$



$$Q_{xz} = \frac{F_x}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

$$= \frac{P}{A} + \frac{PQ}{I_z} y + \frac{Pb}{I_y} z$$

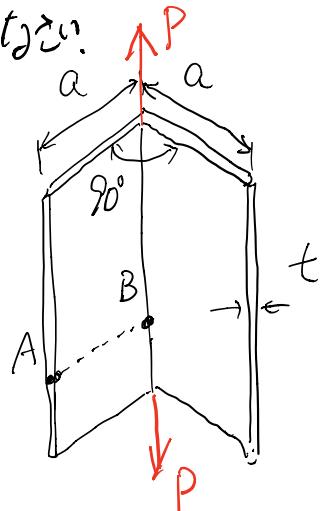
中立軸:

$$Q_{xz} = 0 \Leftrightarrow \frac{P}{A} + \frac{PQ}{I_z} y + \frac{Pb}{I_y} z = 0$$

例題  $t \ll a \approx c$ , 点A, Bの応力を求める。

(1) 中心Oの位置を求める。

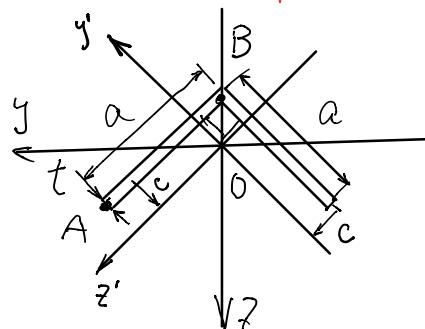
$$\int_A z' dA = 0 \quad \text{すなはち}$$



(2)  $y-z'$ 軸に沿う直線を通る面2次モーメントは。 $t \ll a \approx c$

$$I_{y'} = \int_A z'^2 dA = I_{z'} = \int_A y'^2 dA = \boxed{\quad}$$

$$\underline{I_{yz'}} = \int_A y' z' dA = \boxed{\quad}$$



(3)  $y-z'$ 軸に垂直な直線2次モーメント

$$I_y = \sin^2 45^\circ I_{z'} + \cos^2 45^\circ I_{y'} - 2 \cos 45^\circ \sin 45^\circ I_{yz'} = \boxed{\quad}$$

$$I_z = \cos^2 45^\circ I_{z'} + \sin^2 45^\circ I_{y'} + 2 \cos 45^\circ \sin 45^\circ I_{yz'} = \boxed{\quad}$$

$$I_{yz} = (I_y - I_z) \frac{1}{2} \sin(2 \times 45^\circ) + I_{yz'} \cos(2 \times 45^\circ) = \boxed{\quad}$$

(4)  $y, z$ 座標での転動、曲げモーメント。 $F_x = \boxed{\quad}$ ,  $M_y = \boxed{\quad}$ ,  $M_z = \boxed{\quad}$

(5) 点A, Bの  $y, z$ 座標。  $A: (\boxed{\quad}, \boxed{\quad})$ ,  $B(\boxed{\quad}, \boxed{\quad})$

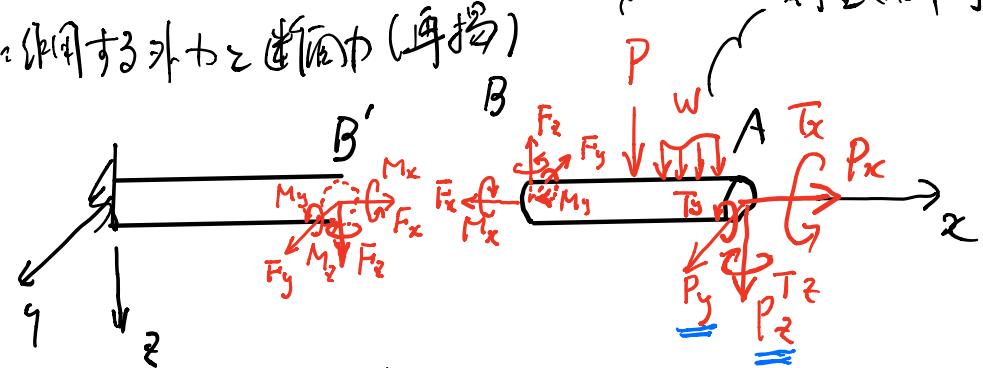
$$(6) \sigma_{xx} = \frac{F_x}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \quad \text{すなはち}$$

$$(\sigma_{xx})_A = \boxed{\quad}$$

$$(\sigma_{xx})_B = \boxed{\quad}$$

## 5. 曲げ<sup>ひく</sup>の解析

### 5.1 滑り作用する外力と断面力(彎揚)



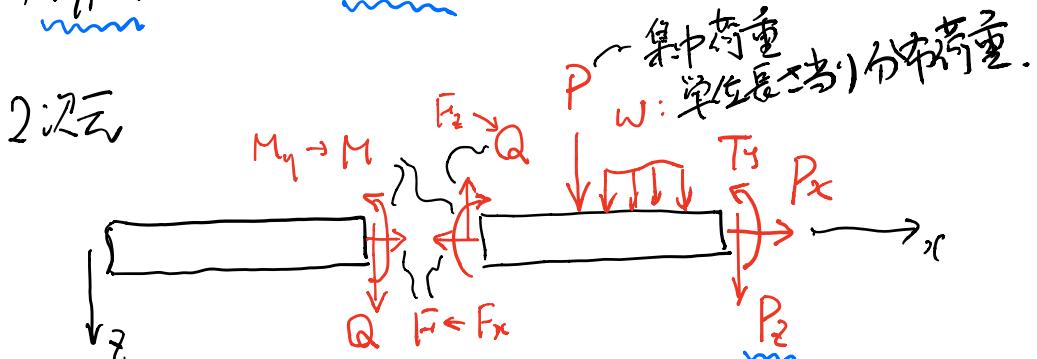
外力  
断面力

$P_x \longrightarrow F_x$ : 軸力 (第2章)

$T_x \longrightarrow M_x$ : 曲げモーメント (第3章)

$T_y, T_z \longrightarrow M_y, M_z$ : 曲げモーメント (第4章)

$P, w, P_y, P_z \longrightarrow F_y, F_z$ : せん断力 (第5章)



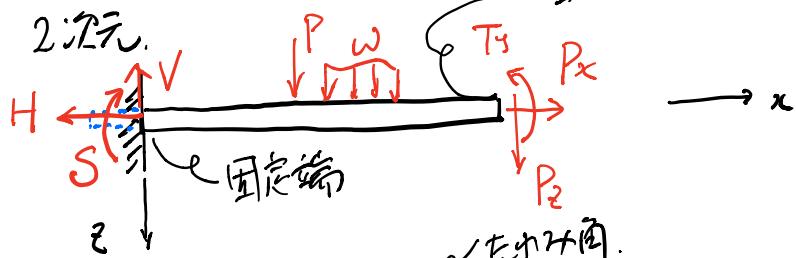
外力  
断面力

$P_x \longrightarrow F$ : 軸力 (第2章)

$T_y \longrightarrow M$ : 曲げモーメント (第4章)

$P, w, P_z \longrightarrow Q$ : せん断力 (第5章)

## 5.2 梁の支持形式



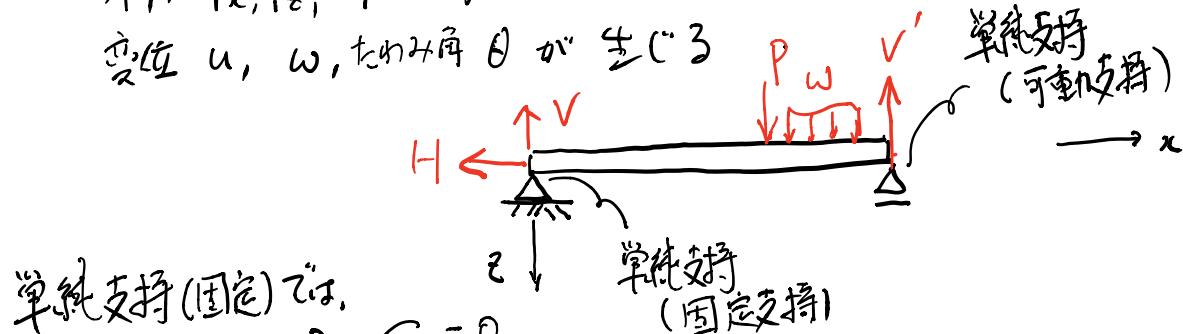
$u$ :  $x$  方向変位  
 $\omega$ :  $z$  方向変位.

固定端では.  
 $u=0, \omega=0, \theta = \frac{d\omega}{dx} = 0.$

反力  $H, V, S$  (たわみ角  $\theta$  なし) が生じる.  
自由端では

外力  $P_x, P_z, T_y$  が与えられる.

変位  $u, \omega, \text{たわみ角 } \theta$  が生じる



單純支持 (固定) では.  
 $u=0, \omega=0, S=0$

反力  $H, V, \text{たわみ角 } \theta$  が生じる.

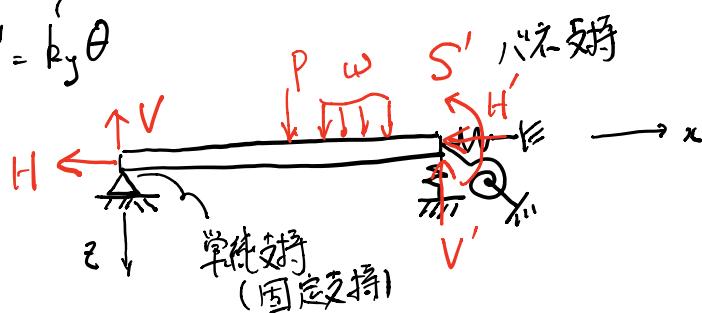
單純支持 (可動) では.

$$\omega=0, H'=0, S'=0$$

反力  $V'$ , 変位  $u$ ,  $\text{たわみ角 } \theta$  が生じる.

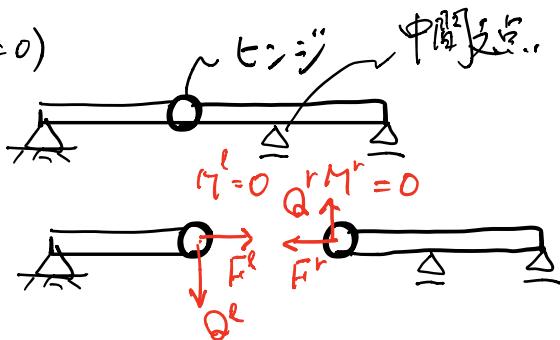
「支擋」の定義

$$H' = k_x u, V' = k_z \omega, S' = k_y \theta$$



ヒンジ接合点では、 $(M^l = M^r = 0)$

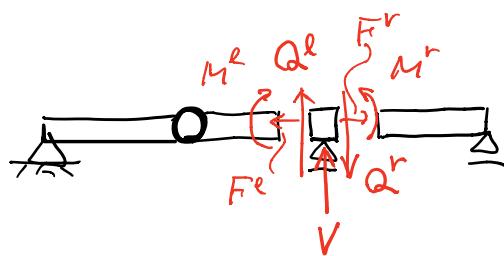
- $u^l = u^r, \omega^l = \omega^r, M = 0$
- $F^l = F^r, Q^l = Q^r, \theta^l \neq \theta^r$



中間支点では、

$$u^l = u^r, \omega^l = \omega^r = 0, \theta^l = \theta^r$$

$$F^l = F^r, Q^r = Q^l + V, M_y^l = M_y^r$$



### 5.3 梁の断面力図

#### ・单纯梁

反力を求める。(力のつもり)

$$\left\{ \sum_i H^i = 0, \sum_i V^i = 0 \right.$$

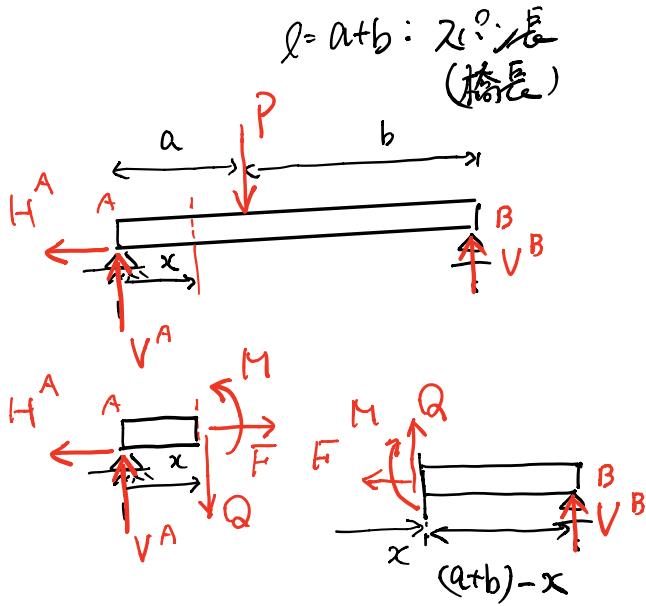
$$\left\{ \sum_i S^i = 0 \quad \text{よし} \right.$$

$$\left\{ H^A = 0 \right.$$

$$P - V^A - V^B = 0$$

$$\sum_i S^i = 0 = V^B \cdot (a+b) - PA = 0$$

$$V^B = \frac{PA}{a+b}, V^A = \frac{Pb}{a+b}, H^A = 0 //$$

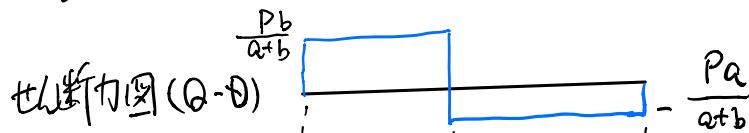


自由物体線図を用い?

$$0 < x < a \text{ のとき} \\ F = 0, Q = V^A = \frac{Pb}{a+b}, M = V^A \cdot x = \frac{Pb}{a+b} \cdot x$$

$$a < x < a+b \\ F = 0, Q = -V^B = -\frac{Pa}{a+b}, M = V^B \cdot [(a+b)-x] = \frac{Pa}{a+b} (a+b-x)$$

$Q, M \in x$  の関数として表わすと、



絶対

$$\sigma_{xz} \text{ の最大値は?} \\ |\sigma_{xz}|_m = \left| \frac{M_{max}}{I_y Z_m} \right| = \frac{ab}{a+b} P$$

$W_g$ : 断面係数



### ・片持り梁

$\chi = \chi$  が各部材の力をつける合計

$$\left( \sum_i H^i = 0, \sum_i V^i = 0, \sum_i S^i = 0 \right)$$

$$\left\{ F_r = 0, \omega x + Q = 0 \right.$$

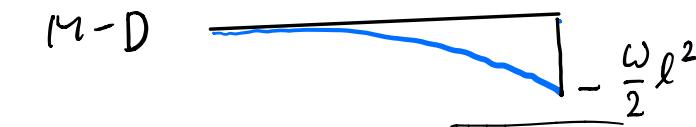
$$\left. \sum_A S^i = 0 = \omega x \cdot \frac{x}{2} + M = 0 \right.$$

$$F_r = 0, Q = -\omega x, M = -\frac{\omega}{2} x^2$$

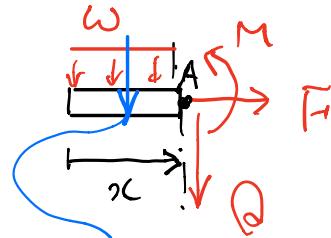
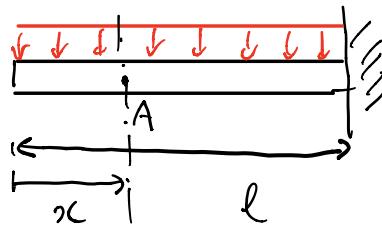
Q-D



M-D



$\omega$  (単位長さ)



$$P = \omega x$$

$$|O_{ax}|_m = \left| \frac{M_{max}}{I_y} z_m \right| = \frac{\left| -\frac{\omega}{2} l^2 \right|}{w_y}$$

### ・3点支持梁

力のつり合せ

$$H^B = 0, \omega a + P = V^A + V^B \quad \stackrel{P = \frac{a}{2}}{=}$$

$$\sum S^i_B = \omega a \cdot \frac{5}{2} a + P \cdot a - V^A \cdot 2a - T = 0$$

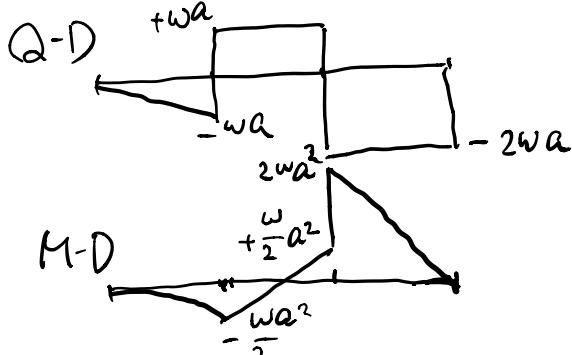
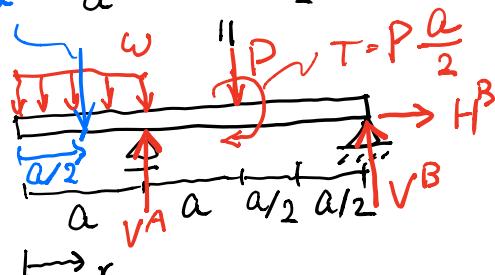
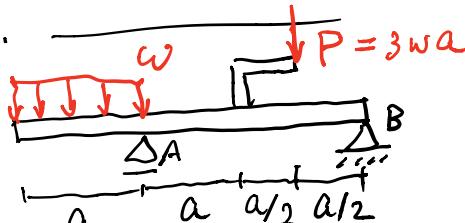
$$V^A = \frac{1}{4} (P + 5\omega a) \Big|_{P=3\omega a} = 2\omega a$$

$$V^B = \frac{1}{4} (3P - \omega a) \Big|_{P=3\omega a} = 2\omega a$$

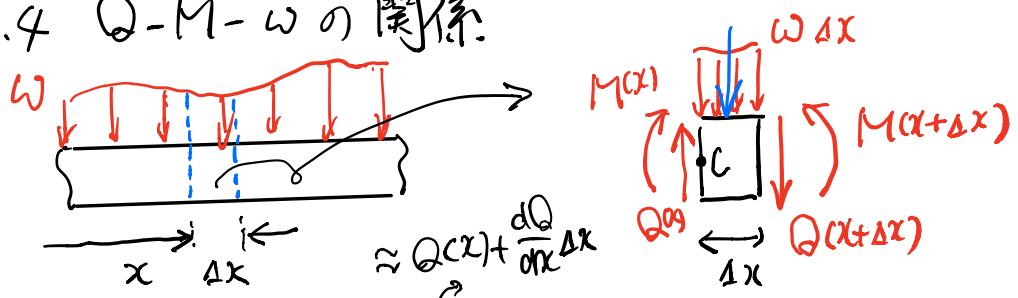
$$0 < x < a \quad Q = -\omega x \\ M = -\frac{\omega}{2} x^2$$

$$a < x < 2a \quad Q = V^A - \omega a = \omega a \\ M = -\omega a(x - \frac{a}{2}) + V^A(x - a) \\ = \omega a x - \frac{3}{2} \omega a^2$$

$$2a < x < 3a \quad Q = -V^B = -2\omega a \\ M = V^B(3a - x) = 2\omega a(3a - x)$$



## 5.4 Q-M-ω の関係



$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_i V_i = 0 \text{ すなはち } Q(x+\Delta x) - Q(x) + \omega \Delta x = 0$$

$$\frac{dQ}{dx} = -\omega \quad (1)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_i M_v \Big|_C = 0 \text{ すなはち } M(x+\Delta x) - M(x) - Q(x+\Delta x) \Delta x - \omega \Delta x \frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\Rightarrow M(x) + \frac{dM}{dx} \Delta x \approx Q(x) + \frac{dQ}{dx} \Delta x$$

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad (2)$$

式(1)より、Qは  $-\omega$  を積分して得られる。 $\omega=0$  の時、Qは一定である。  
 式(2)より、Mと Qを積分して得られる。

## 曲げモーメントの設計

① M-D により 曲げモーメント M の最大値を求める

(Q=0)

$$② \sigma_{max} = \frac{|M|_{max}}{I_y} C = \frac{|M|_{max}}{W} \sim \frac{|M|_{max}}{W = I_y/C}$$

中立軸からの  
最遠綫荷重  
距離

③  $\sigma_{max} \leq \sigma_{all}$   
を満足するか?

$|M|_{max}$

距離

- M-D, Q-D を示して下さい。  
•  $(M)_{\max}$  を求めなさい.
  - 断面が "b×h の長方形の時.  
 $\sigma_{\max}$  を求めなさい.
  - 同じ梁に対して、許容応力値  $\sigma_{all}$  と  
断面幅  $b$  が既知のとき、  
断面高さ  $h$  の最小値を求めて下さい

## 6. 梁断面におけるせん断力

第5章で、任意断面の断面力

せん断力  $Q$  とねじモーメント  $M$  が求められる

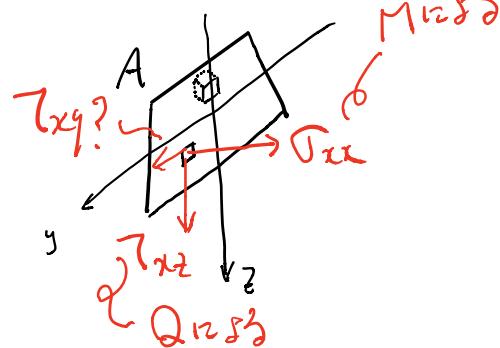
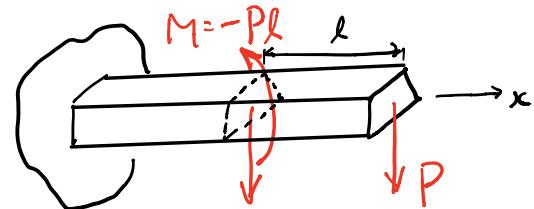


断面に作用する応力の分布は？

$$(\text{第4章 p.1}) \text{ ねじモーメント } M \rightarrow \sigma_{xx} = \frac{M}{I} z$$

せん断力  $Q \rightarrow ??$

要素の間にせん断と断面を持つ  
片持ち梁。



断面力を計算.

$\tau_{xz}$  の分布を  
求める！

$$\int_A \sigma_{xx} = F_x = 0$$

$$\int_A \tau_{xz} dA = Q (= F_z)$$

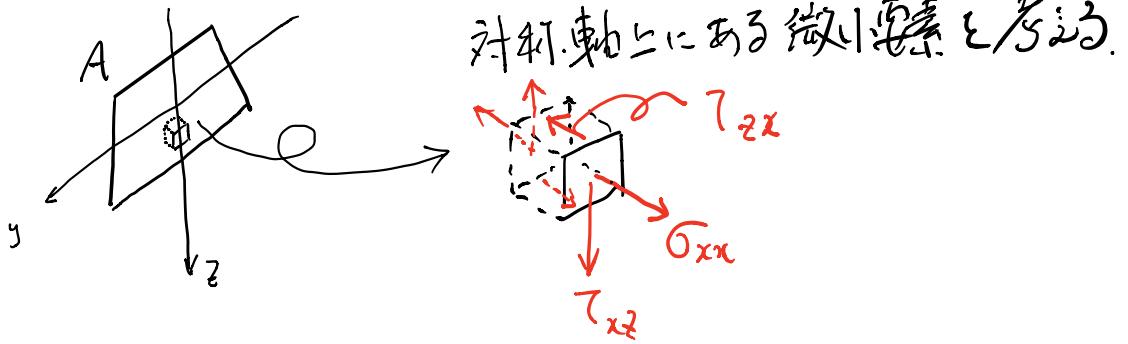
$$\int_A \tau_{xy} dA = 0 (= F_y)$$

$$\int_A \sigma_{xx} z dA = M (= M_y)$$

$$\int_A \sigma_{xx} y dA = 0 (= M_z)$$

$$\int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA = 0 (= M_x)$$

計算より自明。

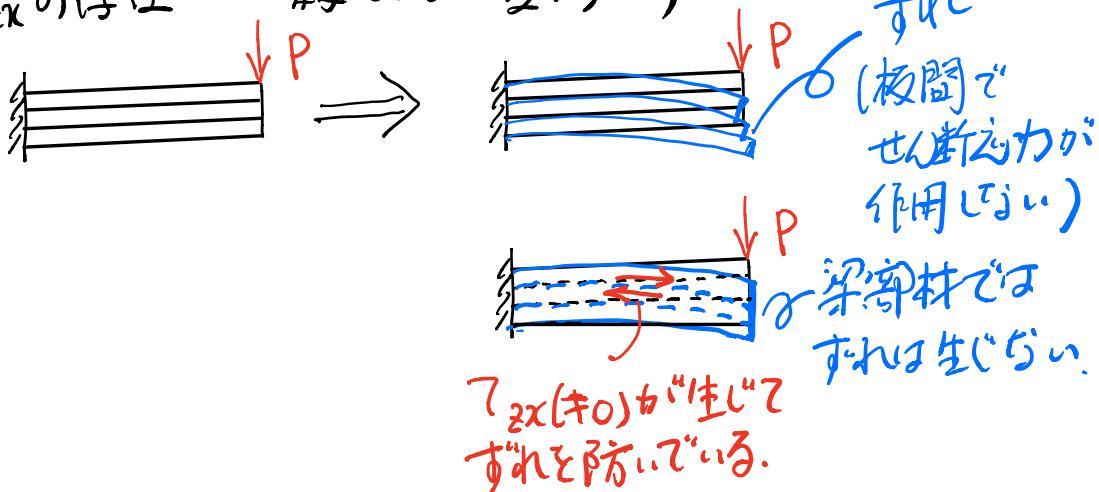


$\tau_{xz}$  の分布を知りたい

$$\Downarrow \quad \uparrow \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} \text{ (応力の対称性)} \\ \Downarrow \quad \uparrow$$

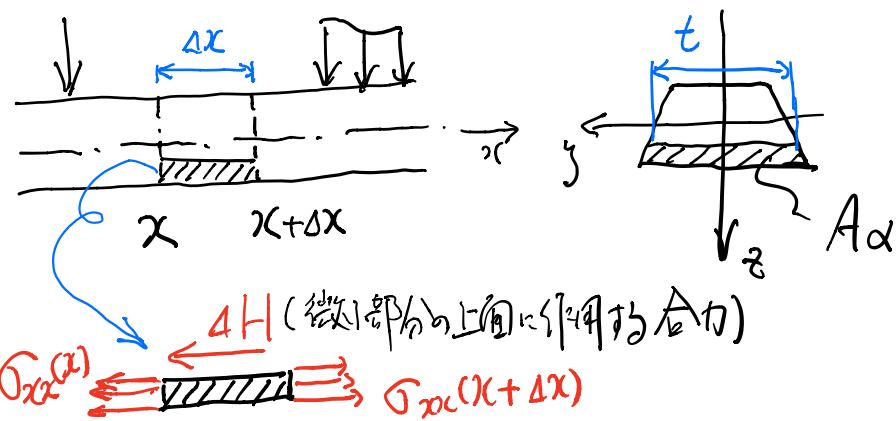
$\tau_{zx}$  の値を求める。

$\tau_{zx}$  の存在 — 枠組みの変形よ。)



## 6.1 2次の水平面に作用する軸方向抵抗力

鉛直荷重を受ける対称一様断面



$x$  方向の力のつもり

$$\Delta H + \int_{A_d} (\sigma_{xx}(x) - \sigma_{xx}(x+\Delta x)) dA = 0$$

$\sigma_{xx} = \frac{M_y(x)}{I_y} z$

$$\begin{aligned} \Delta H &= \int_{A_d} \{ \sigma_{xx}(x+\Delta x) - \sigma_{xx}(x) \} dA = \int_{A_d} \frac{d\sigma_{xx}}{dx} dx dA \\ &= \frac{\frac{dM_y}{dx} |x|}{I_y} \int_{A_d} z dA = \frac{Q}{I_y} S \Delta x \end{aligned}$$

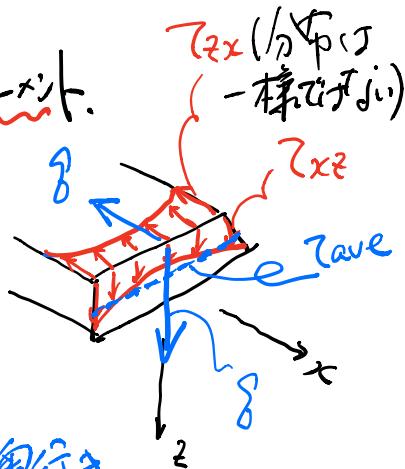
$S$ : 断面  $A_d$  の塑性係数。

せん断流れ shear flow  $g = \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{Q}{I_y} S$

平均せん断流速  $\bar{z}_{ave} = \frac{\Delta H}{t \Delta x} = \frac{Q}{I_y t} \cdot S$

( $z_{zx}$  の分布は一様  $z_{ave}$  のみ)  
平均速度の計算可能

$t$ : 深奥行



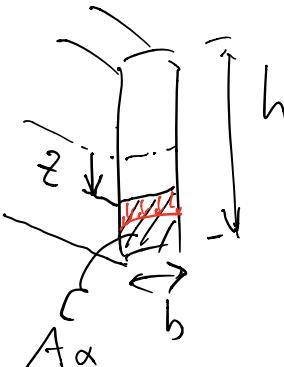
## 6.2. いくつかの断面におけるせん断ひずみ

### ・長方形断面

$$b \leq \frac{h}{4} のとき,$$

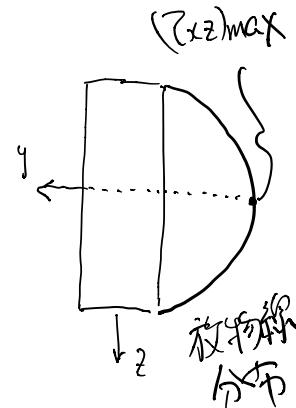
$$\left| \frac{\tau_{xz} - \tau_{ave}}{\tau_{ave}} \right| \leq 0.8\%$$

$$S = \int_{A_\alpha} z \alpha A = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} z dz dy = \frac{b}{2} \left( \left(\frac{h}{2}\right)^2 - z^2 \right)$$



$$\underline{\underline{\tau_{xz}}} \approx \tau_{ave} = \frac{Q}{I_y b} S$$

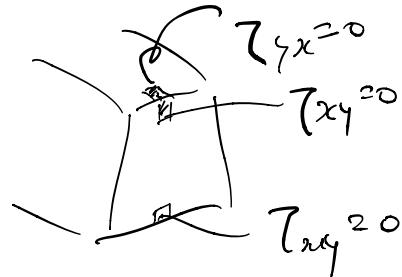
$$= \frac{b}{2} \left( \left(\frac{h}{2}\right)^2 - z^2 \right) Q = \frac{3}{2} \frac{Q}{A} \left( 1 - \frac{z^2}{(h/2)^2} \right)$$



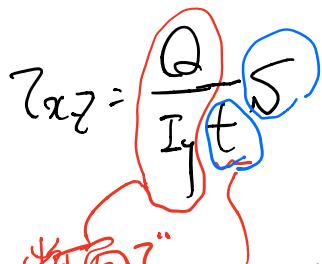
- $(\tau_{xz})_{max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{A} \quad (z=0 \text{ または } z=h)$

- $z = \pm \frac{h}{2}$  のとき,  $\tau_{xz} = 0$

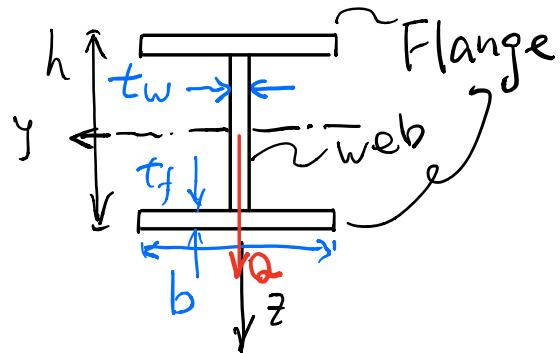
(上下面では  $\tau_{yz}=0$  である, 当然.)



## I型断面



一応  
Web<sup>z</sup>, t<sub>w</sub>  
flange<sup>z</sup>, b



$$S = \int_{A_s} z dA = b \int_{\Delta}^{h/2} z dz = \frac{b}{2} \left( \left(\frac{h}{2}\right)^2 - \Delta^2 \right)$$

(下端より離れた距離)

$$\int_{A_s} z dA = b \int_{h/2 - t_f}^{h/2} z dt + t_w \int_{h/2 - t_f}^{h/2} z dz$$

(上端より離れた距離)

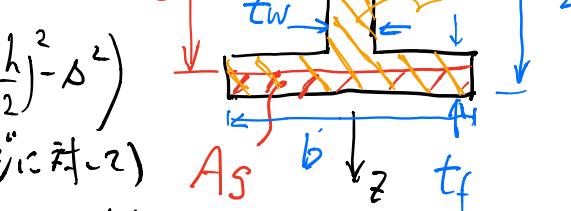
$$= \frac{b}{2} (h - t_f) t_f + \frac{t_w}{2} \left( \left(\frac{h}{2} - t_f\right)^2 - \Delta'^2 \right)$$

- $b = 100, h = 200, t_w = 10, t_f = 20$  [mm] と

( $t_c$ を0),  $S/t$ の分布  $\Rightarrow$  8.1.2

I型断面では、(はく離)せん断力を

2つで受け持つ。  
2つ。



$$(z_x)_{max}$$

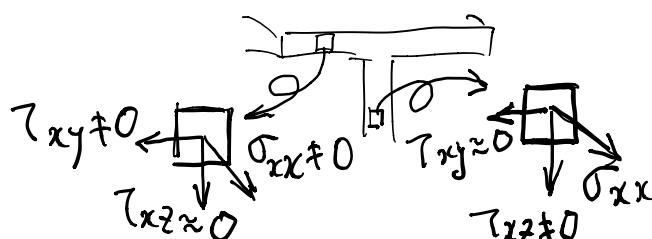
$$(z_x)_{min}$$

- $t \ll b, h$  のとき、

フランジ、ワーフにせいぜい。

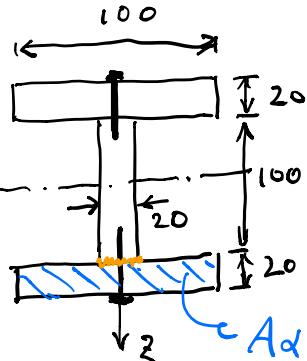
せん断モーメント、板厚方向の

せん断応力はほぼ0。



例題 Q = 500N, 鉗間隔  $\Delta x = 25\text{mm}$   
のとき、鉗(本当)のせん断力は?

鉗は単位長さ当たり  $\bar{\delta} = \frac{Q}{I_y} S_y$   
せん断力を受持つ。



$$S_y = \int_{A_d}^2 dA = \boxed{\text{図示}}$$

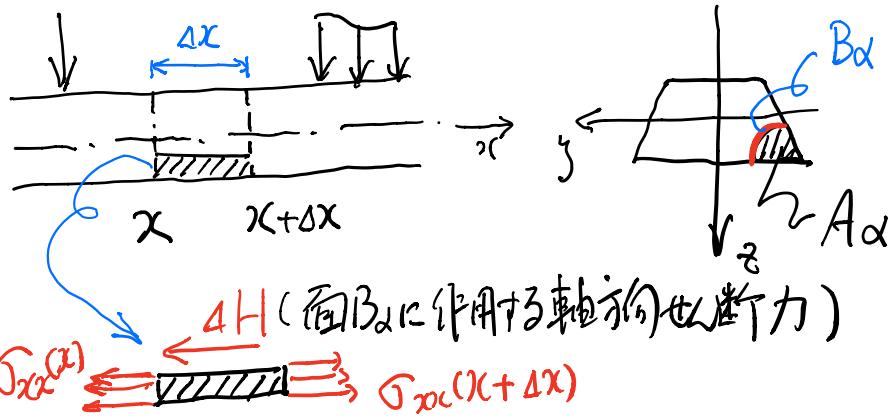
$$I_y = \frac{0.02 \times (0.1)^3}{12} + 2 \left( \frac{0.1 \times (0.02)^3}{12} + (0.1 \times 0.02) \times (0.06)^2 \right) = 16.20 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$\bar{\delta} = \frac{500 \times \boxed{\text{図示}}}{16.20 \times 10^{-6}} = \boxed{\text{図示}} \text{ N/m (単位長さのせん断力)}$$

鉗(本当)のせん断力

$$f = \bar{\delta} \times \boxed{\text{図示}} = \boxed{\text{図示}} \text{ N}$$

### 6.3 深の任意断面における軸方向せん断力



6.1と全く同じ議論

$x$  方向の力のつもり

$$\Delta H + \int_{A_d} (\sigma_{xx}(x) - \sigma_{xx}(x + \Delta x)) dA = 0$$

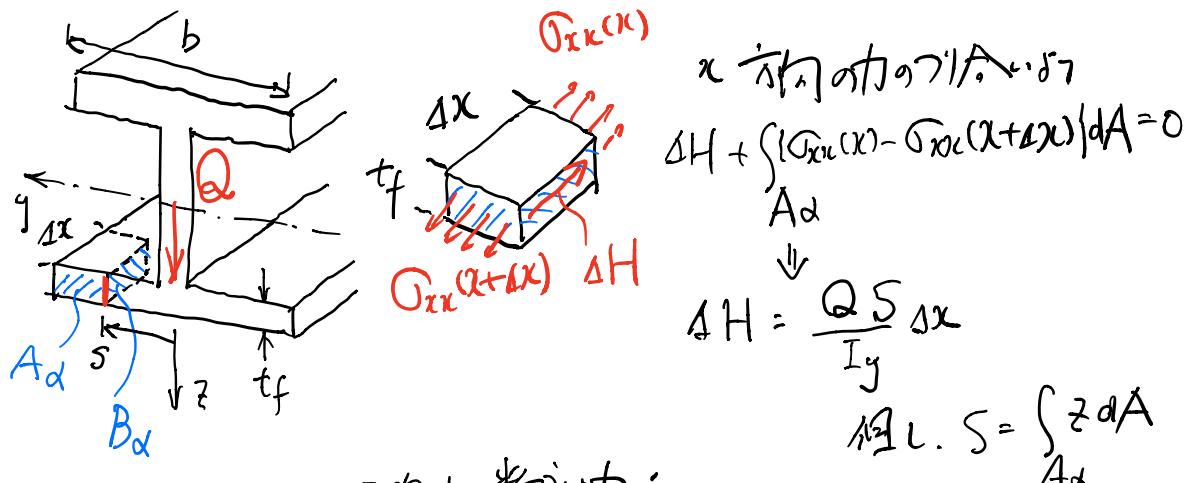
$$\Delta H = \frac{Q}{I_y} S \Delta x$$

せん断流れ shear flow  $\delta = \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{Q}{I_y} S$

平均せん断力  $\tau_{ave} = \frac{\Delta H}{t \Delta x} = \frac{Q}{I_y t} S$

} 面 $B_2$ に  
作用する  
せん  
断力！

## 6.4 代表的) 薄肉部材の塑性内力と塑性モーメント



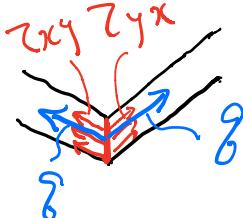
平均塑性抵抗:

$$Z_{ave} = \frac{\Delta H}{t_f \Delta x} = \frac{Q S}{I_y t_f} \approx Z_{yx} = Z_{xy}$$

( $t_f \ll b t_j$  のとき)

塑性流動:

$$\delta = \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{Q}{I_y} S$$



• I型断面でのせん断流れ  
 $-\frac{h}{2} < \delta' < h/2$  のとき、

$$S = \int_{A_{\delta'}} z dA = b \int_{z=t_w}^{h/2} z dz + t_w \int_{\delta'}^{h/2 - t_f} z dz$$

$$= \frac{b}{2} (h - t_f) t_f + \frac{t_w}{2} \left( \left(\frac{h}{2} - t_f\right)^2 - \delta'^2 \right)$$

$$\approx \frac{bh}{2} t_f + \frac{t_w h^2}{2} - \frac{t_w \delta'^2}{2}$$

$0 < \delta < b/2$  のとき。

$$S = \int_{A_{\delta}} z dA \approx (b/2 - \delta) t_f \cdot \frac{h}{2}$$

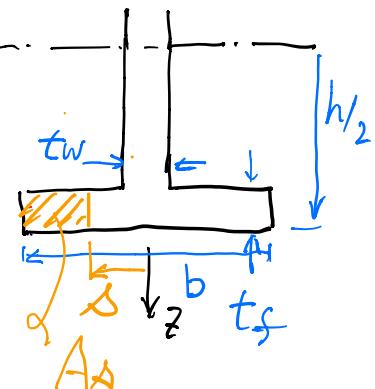
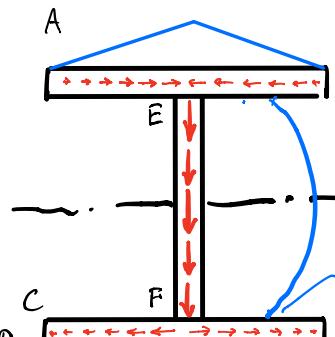
せん断流れ  $f = \frac{Q}{I_y} S$

分布は  $S$  による。

(右図 参照)

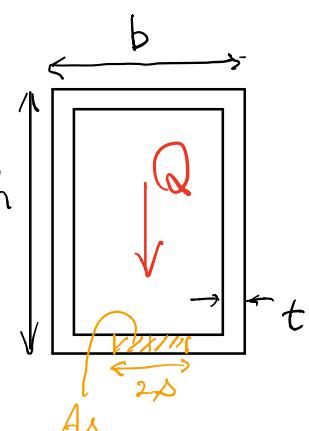
- 点 A, B はせん断流れの外れ出し
- 接合部 E では上フランジの左端からのせん断流れがウェブに流入
- 接合部 F ではウェブのせん断流れが下フランジの左端に分流
- 点 C, D は吸い込み。

↓  
水の流れを想像。



漏斗。

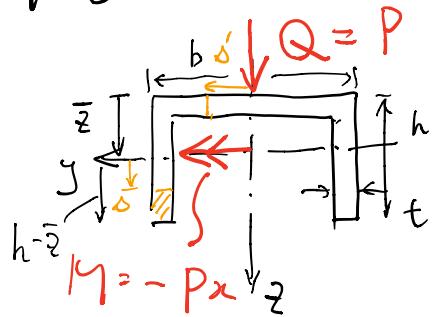
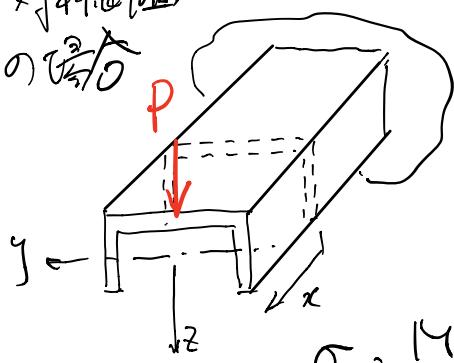
右図の断面  
 におけるせん断  
 流れの分布を  
 示す。



## 6.5 剪断力を受ける非均一薄内脚材

### — 剪断中心 —

・対称断面の偏心



$$\sigma_{\text{ax}} = \frac{M}{I_y} z, \quad f = \frac{Q}{I_y} S, \quad z_{\text{ave}} = \frac{\delta}{t} = \frac{Q S}{I_y t}$$

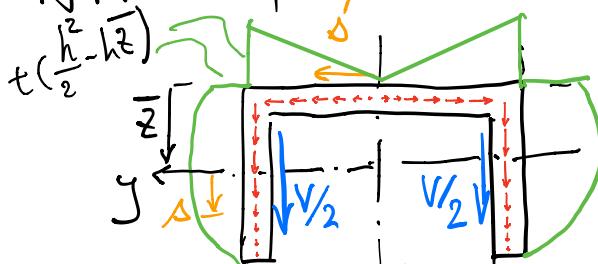
$$-\bar{z} < \delta < h - \bar{z} \quad S = \int_A z dA = \int_{A_s}^{\frac{b}{2}} dz \int_{\frac{b}{2}-t}^{h-\bar{z}} z dz = t \left( \frac{(h-\bar{z})^2}{2} - \frac{\delta^2}{2} \right)$$

$\bar{z} = h^2/(b+2h)$

$$0 < x' < \frac{b}{2} \quad S = \int_{A_s'} z dA = \int_{\frac{b}{2}-t}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\bar{z}}^{h-\bar{z}} z dz + \int_{\frac{b}{2}-t}^{\frac{b}{2}} dy \int_{\delta'-\bar{z}}^{-\bar{z}+t} z dz = t \left( \frac{h^2}{2} - \frac{(\bar{z}-\delta')^2}{2} \right) + \left( \frac{b}{2} - \delta' \right) \bar{z} t$$

$S, f, z_{\text{ave}}$  の分布は下図の緑線や赤矢印のようになります。

ただし、これは仮定です。

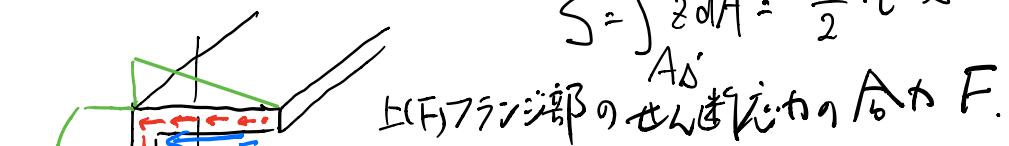
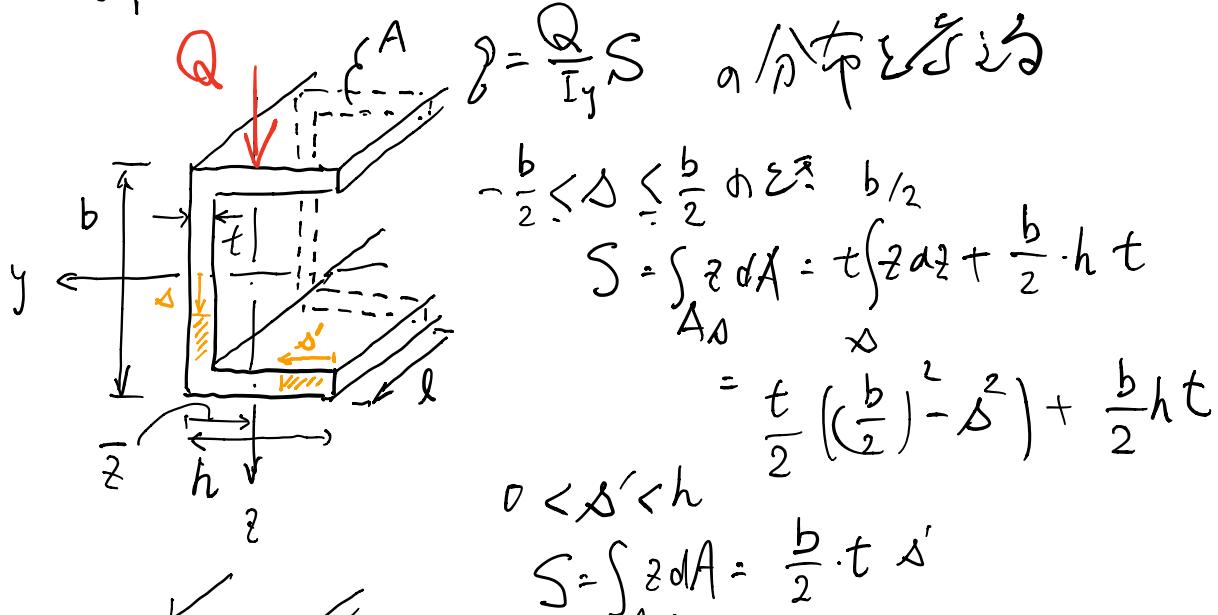


（この部分） $\int V_1 ds$

$$V_1 = \int_{-\bar{z}}^{h-\bar{z}} f ds = \frac{Q}{I_y} \int_{-\bar{z}}^{h-\bar{z}} t \left( \frac{(h-\bar{z})^2}{2} - \frac{\delta^2}{2} \right) ds = \frac{Q}{2} \quad \left( I_y = \frac{(2b+h)h^3 t}{3(b+2h)} \right)$$

$$V = Q$$

・3) 斜材の横圧+Z軸上のQ の場合

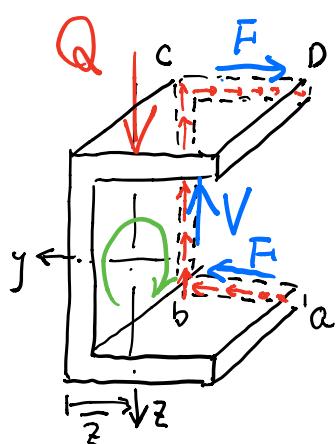


$$F = \int_{-h/2}^{h/2} \delta d\delta' = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Q}{I_y} \frac{b}{2} t \delta' d\delta' = \frac{Q}{I_y} \frac{b}{4} t h^2$$

$$V = \int_{-b/2}^{b/2} \delta d\delta' = \frac{Q}{I_y} \left\{ \frac{t}{2} \left( \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \delta^2 \right) + \frac{b}{2} h t \right\} d\delta'$$

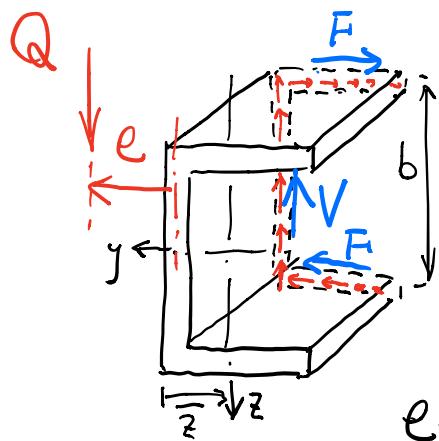
$$= \frac{Q}{I_y} \frac{(b+6h)}{12} t b^2 = Q$$

$(I_y = \frac{b+6h}{12} t b^2 \text{ です})$



$x$  軸回りの Z-x' +  $V \times z + F \times b = Q \times z + \frac{Q}{I_y} \frac{b^2 t}{4} h^2 \neq 0$  です

ねじり角が発生する場合！



ねじりが発生するせん断力の  
載荷位置  $e$  は.

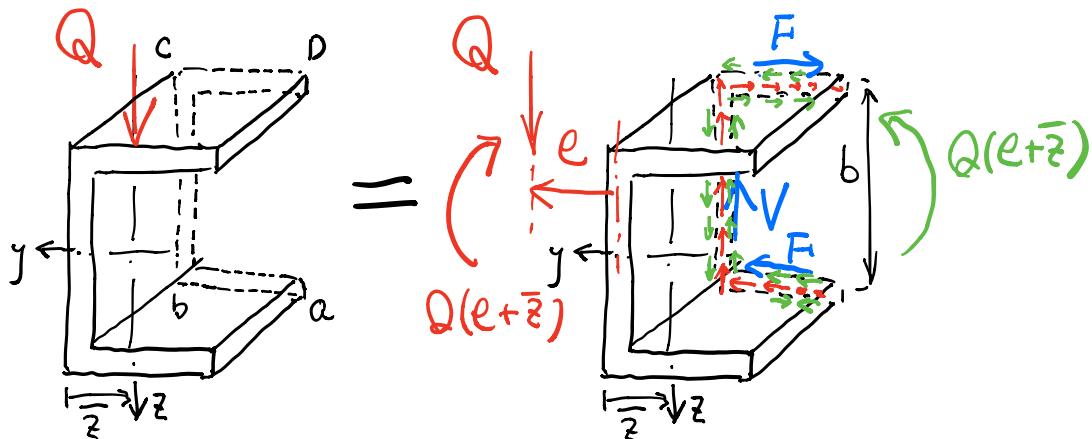
$$Qe = Fb$$

$$e = \frac{Fb}{Q} = \frac{Qbt}{I_y} \frac{h^2}{4} \frac{b}{Q} = \frac{b^2 h^2 t}{4 I_y}$$

$$= \frac{b^2 h^2 t}{4 \left( \frac{b+6h}{12} \cdot tb^2 \right)} = \frac{3h^2}{b+6h}$$

t(断面積)

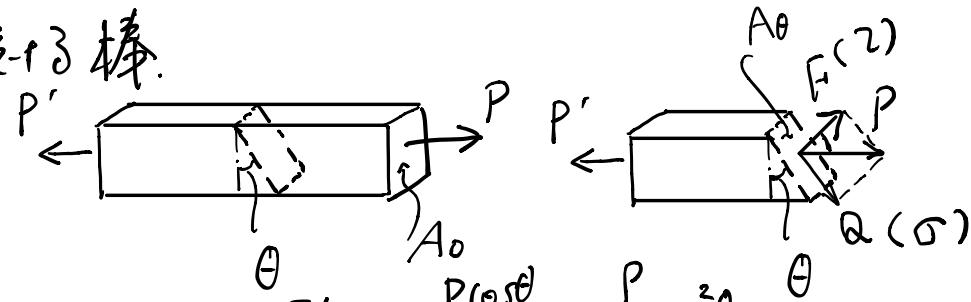
せん断力  $Q$  がせん断中心以外の場合、ねじりモーメントが発生する。  
 $Q(e+\bar{z})$



左の場合はねじりモーメント  $Q(e+\bar{z})$  と  
右の分布モーメント(緑の矢印)が  
発生する。

## 7. 応力の変換

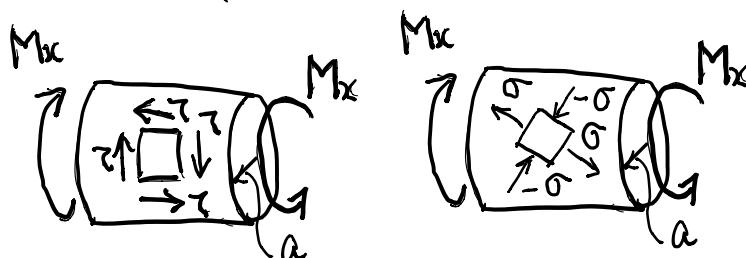
・軸力を受ける棒.



$$\sigma = F/A_\theta = \frac{P \cos \theta}{A_0 / \cos \theta} = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta$$

$$T = Q/A_0 = \frac{P \sin \theta}{A_0 / \cos \theta} = \frac{P}{A_0} \cos \theta \sin \theta$$

・ねじりを受ける棒.

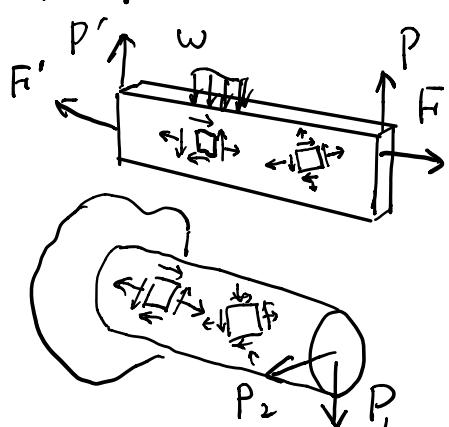


$$F = \frac{\sqrt{2} A_0}{\sqrt{2}} \times 2 = \sqrt{2} 2 A_0$$

$$A = \sqrt{2} A_0$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{\sqrt{2} 2 A_0}{\sqrt{2} A_0} = 2 = \frac{M_x}{J} \alpha$$

・横荷重を受ける梁



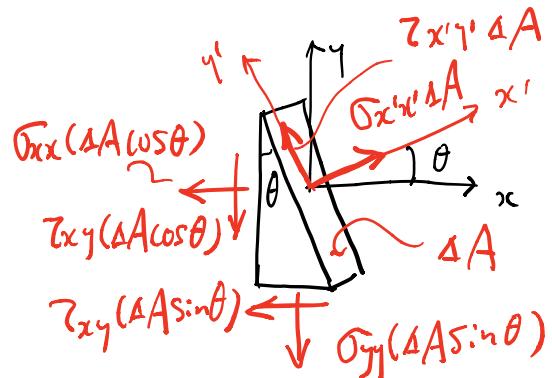
2. 応力分布 (平面応力状態)  
(面内垂直方向の応力成分なし)

- 一般の応力状態と之と
- 要素の回転による (座標系の回転)
- 形状/寸法の変化.

## 7.1 2D Ziegler's Method

$$\sum F_{x'} = 0$$

$$\begin{aligned}
 &= \sigma_{xx}(\Delta A \cos \theta) - \sigma_{xx}(\Delta A \cos \theta) \cos \theta \\
 &\quad - \tau_{xy}(\Delta A \cos \theta) \sin \theta \\
 &\quad - \tau_{xy}(\Delta A \sin \theta) \cos \theta \\
 &\quad - \sigma_{yy}(\Delta A \sin \theta) \sin \theta
 \end{aligned}$$



$$\sum F_{y'} = 0$$

$$\begin{aligned}
 &= \tau_{x'y'}(\Delta A) + \sigma_{xx}(\Delta A \cos \theta) \sin \theta - \tau_{xy}(\Delta A \cos \theta) \cos \theta \\
 &\quad + \tau_{xy}(\Delta A \sin \theta) \sin \theta - \sigma_{yy}(\Delta A \sin \theta) \cos \theta
 \end{aligned}$$

∴,

$$\begin{aligned}
 \sigma_{x'x'} &= \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta \quad (1) \\
 &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\theta + 2\tau_{xy} \sin 2\theta
 \end{aligned}$$

$$\sigma_{y'y'} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\theta - 2\tau_{xy} \sin 2\theta \quad (2)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta \quad (3)$$

$$\sigma_{xx'} = \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta \quad (1)$$

$$= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{yy'} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (2)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (3)$$

$$\left( (1) - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + (3)^2 \neq 0$$

$$\left( \sigma_{xx'} - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \underbrace{\left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}_{R^2}$$

圆环形.

$$\sigma_{max, min} = \sigma_{ave} \pm R$$

$$= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

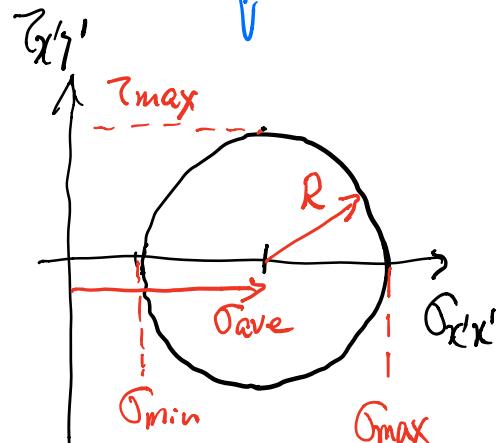
$$\frac{\partial \sigma_{x'y'}}{\partial \theta} = 0 \text{ (d), } \sigma_{max, min} \text{ と } \theta \text{ の関係,}$$

$$\tan 2\theta_m = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

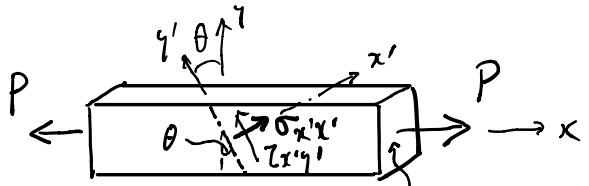
$$\tau_{max} = R = \sqrt{\left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\frac{\partial \tau_{x'y'}}{\partial \theta} = 0 \text{ (d), } \tau_{max} \text{ と } \theta \text{ の関係.}$$

$$\tan 2\theta_m = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\tau_{xy}}$$



例題



7.Q 軸力と受ける棒.

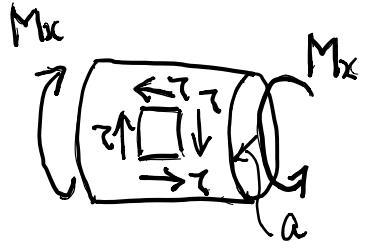
軸力  $P$  を受けて回り合っている棒がある。  
 $\theta$  だけ回転して作用する直応力  $\sigma_{xy}$  とせん断応力  $\tau_{xy}$  が  
最大に達するときの値を角度  $\theta$  を求めよ。

7.b 振れを受ける棒

ねじモーメント  $M_x$  を受ける棒の

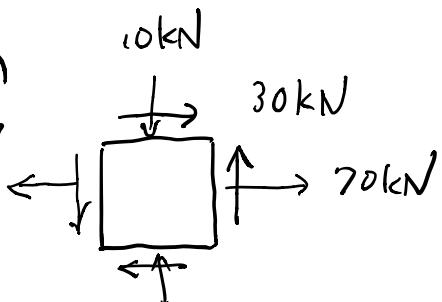
表面における  $\sigma_{max,min}$  と  $\theta_{cm}$  を

求め、応力状態を図示せよ。



7.c 右図のまくらぎ状態にある点で

(1) 立方圧, (2) 立方圧, (3) 最大せん



ひ力を求めよ。

## 7.2 $\tau$ - $\nu$ の応力 [F] (Otto Mohr 1835-1918)

$$\sigma_{x'x'} = \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta \quad (1)$$

$$= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{y'y'} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (2)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (3)$$

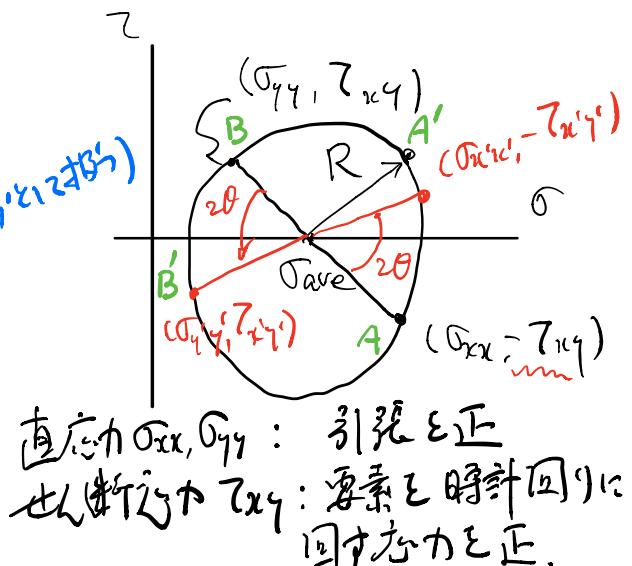
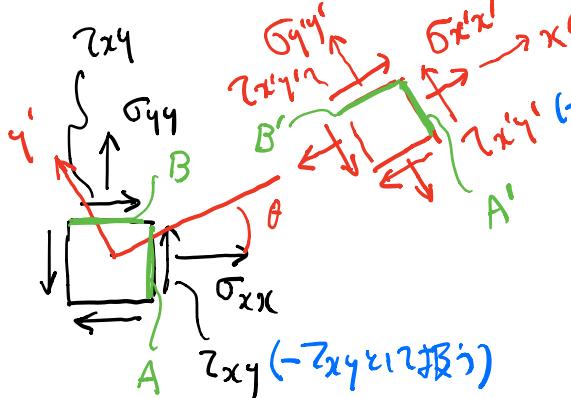
(1), (3)  $\delta^\circ$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} - \sigma_{ave} \\ -\tau_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_{ave} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

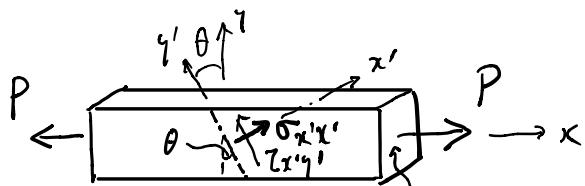
← 両度2θの回転行列

(2), (3)  $\delta^\circ$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{y'y'} - \sigma_{ave} \\ +\tau_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{yy} - \sigma_{ave} \\ +\tau_{xy} \end{Bmatrix}$$



例題 以下の問題をモールの応力円を用いて解きなさい。



7. a) 摩擦を受ける棒.

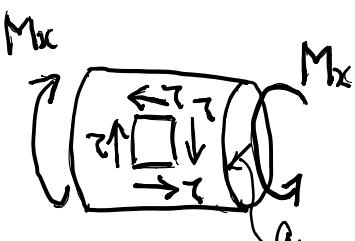
摩擦力  $P$  を受けて回り合っている棒がある。  
 $\theta$ だけ回転して面に作用する直応力  $\sigma_{xx'}$  とせん断応力  $\tau_{xy'}$  が  
最大に達するまでの逆時計回り角度  $\theta$  を求めなさい。

7. b) 摩擦を受ける棒

ねじりモーメント  $M_x$  を受ける棒の

表面における  $\sigma_{\max, \min}$  と  $\theta_{\sigma_m}$  を

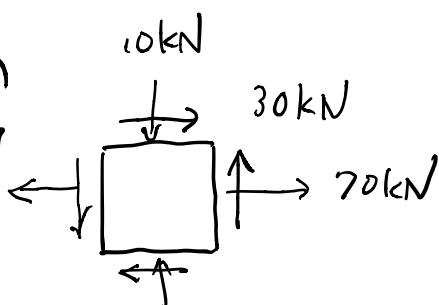
求め、応力状態を図示せよ。



7. c) 右図のように応力状態のある点Pの

(1) 主応力, (2) 主忯力面, (3) 最大せん

断力を求めなさい。



### 7.3 主応力と固有値問題

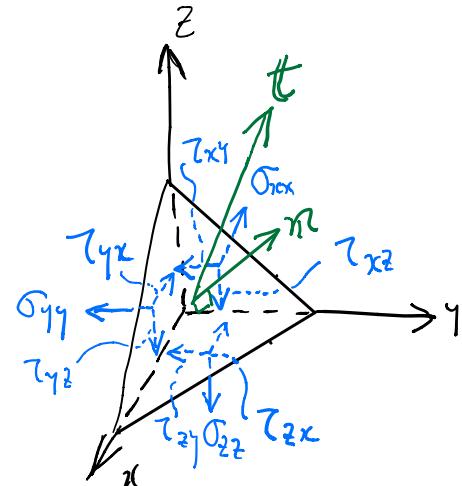
1.8 表面力と応力の関係式: より

$$t_x = n_x \sigma_{xx} + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz}$$

$$t_y = n_x \tau_{xy} + n_y \sigma_{yy} + n_z \tau_{yz}$$

$$t_z = n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz} + n_z \sigma_{zz}$$

主応力面では、主応力が直角に面に対して  
面に垂直に作用し、せん断応力はゼロ。



ある主応力面での表面力  $t$  は  $t = \sigma n$  とする。

$$t_x = n_x \sigma_{xx} + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz} = \sigma n_x \quad (\sigma \text{は主応力})$$

$$t_y = n_x \tau_{xy} + n_y \sigma_{yy} + n_z \tau_{yz} = \sigma n_y \quad \begin{matrix} \tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0 \\ 2: 2\text{次元平面応力の時,} \\ \square \text{の部分のみを} \end{matrix}$$

$$t_z = n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz} + n_z \sigma_{zz} = \sigma n_z \quad \begin{matrix} \tau_{xy} = \tau_{yz} = \sigma_x = 0 \\ \text{考えればよい!} \end{matrix}$$

固有  
方程式

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$n$  がゼロでないとき。

主応力  $\sigma$  は

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \text{固有値} \\ \text{主応力面の法線ベクトル} \\ n = \{n_x, n_y, n_z\} \text{ は} \end{matrix}$$

実数の対称行列の固有値は実数

例題 7.3.1 右図のようすの力を  
受ける薄い平板の応力と  
主応力面を求めなさい。

$$\sigma_{xx} = 70 \text{ [kN]}, \tau_{xy} = 30, \sigma_{yy} = -10, \tau_{zx} = 100 \text{ [kN]}$$

$$\sigma_{zz} = 100, \tau_{zy} = \tau_{xz} = 0$$

$\sigma = \boxed{\quad}, \boxed{\quad}, \boxed{\quad}$  kN を得る。

$$\begin{vmatrix} 70-\sigma & 30 & 0 \\ 30 & -10-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 100-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$\sigma = \boxed{\quad}$  のとき,  $m = (\quad, \quad, \quad)^T$

$\sigma = \boxed{\quad}$  のとき,  $m = (\quad, \quad, \quad)^T$

$\sigma = \boxed{\quad}$  のとき,  $m = (\quad, \quad, \quad)^T$

例題 7.3.2 2次元応力状態の応力と主応力面

$$\sigma_{xx} = 46, \tau_{xy} = -12, \sigma_{yy} = 14$$

$$\begin{vmatrix} 46-\sigma & -12 \\ -12 & 14-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$\sigma = \boxed{\quad}, \boxed{\quad}$  を得る。

$\sigma = \boxed{\quad}$  のとき,  $m = (\quad, \quad, \quad)^T$

$\sigma = \boxed{\quad}$  のとき,  $m = (\quad, \quad, \quad)^T$

## 7.4 3次元応力状態のモードの応力因.

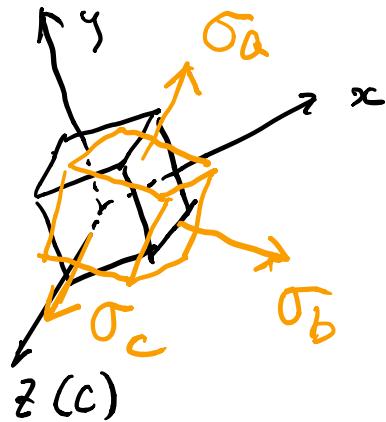
3次元では 3つの主軸と主応力面がある。  
 $(\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c)$

2軸を主軸の1つ(C軸)とする。  
 2軸の方向を固定(主応力 $\sigma_c$ を一定)  
 (たまに、x-y軸を回転した。



2次元応力状態と等価。

主応力 $\sigma_a, \sigma_b$ が発生する  
 軸a,bが存在する。

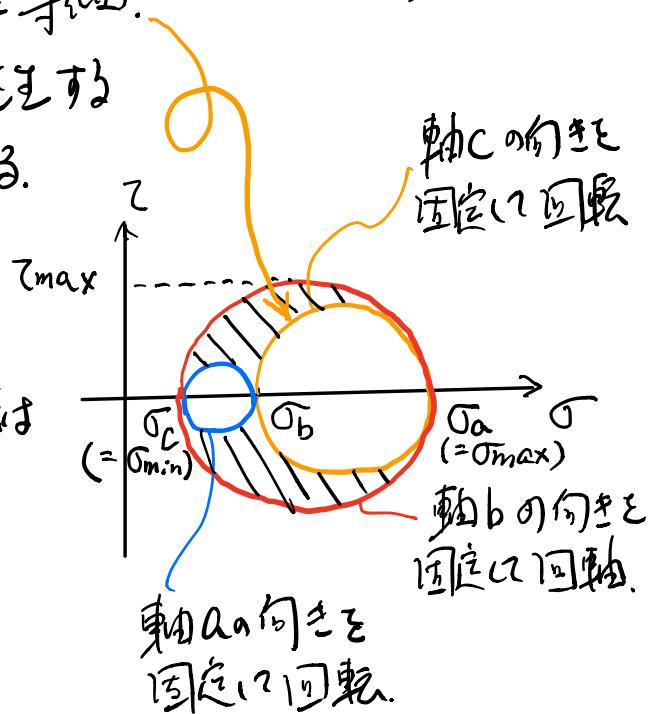


任意の3次元応力状態は  
 四の斜線部にある。

最大せん断応力 $\tau_{max}$

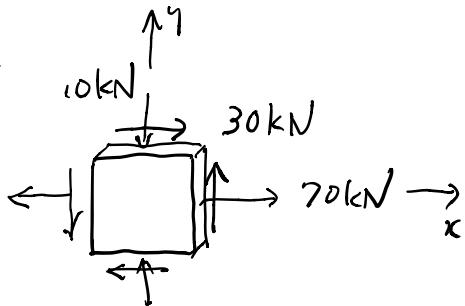
$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

が、面aから面cに軸b(45°)に45°回転させた面に  
 生じる。



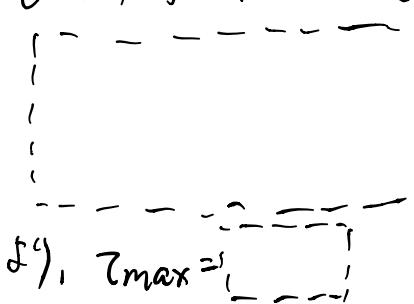
例題 7.3.3 右図のよごじき力を  
受ける薄い平板における

最大せん断ひきごとをとれり  
生じる面の方向を求めてせん。



$$\text{主ひきごと } \sigma = 80, -20, 0.$$

モルの因. 1.2 F のよごじき。



$$\sigma = 80 \text{ のとき}, n = \left( \frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, 0 \right)^T$$

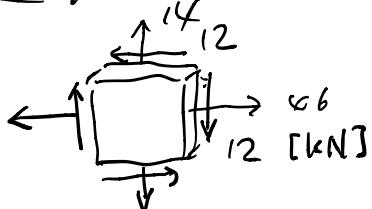
$$\sigma = -20 \text{ のとき}, n = \left( \frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}, 0 \right)^T$$

$$\sigma = 0 \text{ のとき}, n = (0, 0, 1)^T$$

5.1)  $\tau_{max}$  が生じる面の法線。



例題 7.3.4



$\tau_{max}$  とその面の法線をとれり。

面の方向

応力

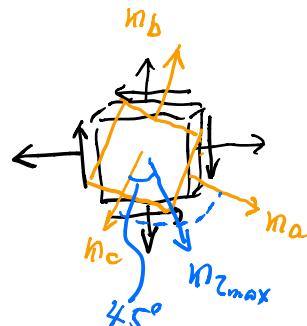
方向

$$\sigma = 50, 10, 0 \text{ のとき}.$$

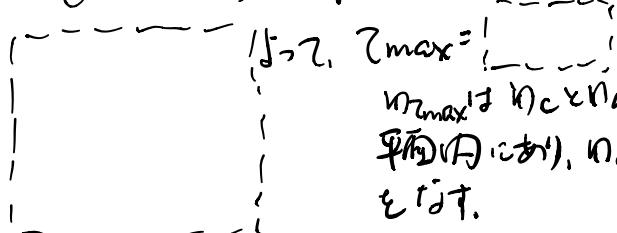
$$\sigma = 50 \text{ のとき}, n_a = \left( \frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}, 0 \right)^T$$

$$\sigma = 10 \text{ のとき}, n_b = \left( \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}, 0 \right)^T$$

$$\sigma = 0 \text{ のとき}, n_c = (0, 0, 1)^T$$



モルの因. 1.2, 図のとおり。



$$n_{2max} = (3d, -d, \beta) \text{ とす。}$$

$$n_a \cdot n_{2max} = \beta = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|n_{2max}| = 1 \text{ とす}$$

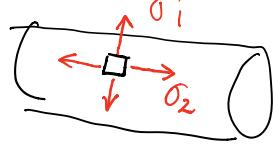
$$9d^2 + d^2 + \beta^2 = 10d^2 + \frac{1}{2} = 1$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{20}},$$

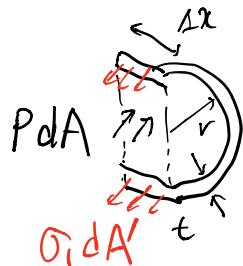
$$n_{2max} = \left( \frac{3}{\sqrt{20}}, -\frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

## 7.5 円筒殻、球殼、梁部材における主応力.

- 内圧を受ける円筒殻の応力.



$\sigma_1$ : hoop stress (周方向応力)



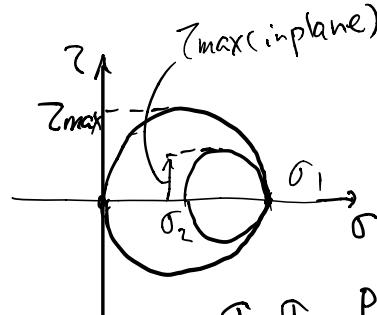
$$\sigma_1(2\pi r \Delta x) - p \cdot 2r \Delta x = 0$$

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t}$$



$$\sigma_2(2\pi r t) - p(\pi r^2) = 0$$

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t}$$

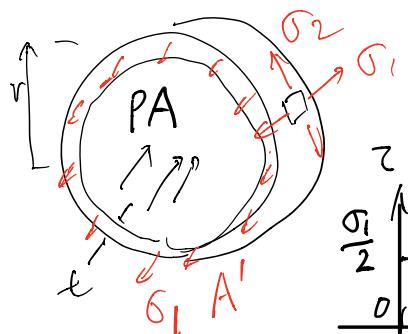


$$\tau_{max(inplane)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{pr}{4t}$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{pr}{2t} > \tau_{max(inplane)}$$

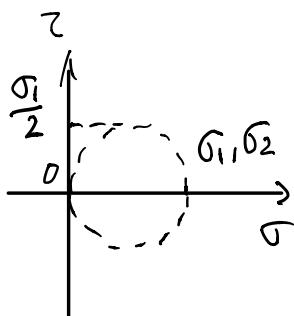
$\sigma_1$  の主応力面から、円筒面に  
45°傾いた面に作用する。

- 内圧を受ける球殼の応力



$$P(\pi r^2) = \sigma_1(2\pi r t)$$

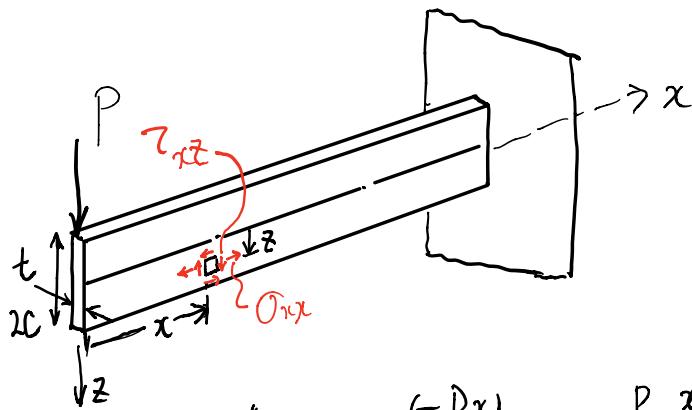
$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \quad (t \rightarrow 0 \text{ の時 } \sigma_1 \rightarrow \infty)$$



$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{pr}{4t}$$

球殼表面から45°傾いた  
任意の面に作用する。

## 梁部材の主応力(長方形断面)



$x=z$  の場合における

$$M_y = -Px, Q = -P$$

$$I_y = \frac{t(2c)^3}{12} = \frac{Ac^2}{3}$$

$$S = \int_{Ad} z dz = t \int_{-c}^c z dz = \frac{t}{2} (c^2 - (-c)^2)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{M_y}{I_y} z = \frac{(-Px)}{\left(\frac{Ac^2}{3}\right)} z = -3 \frac{P}{A} \frac{xz}{c^2}$$

$$\tau_{xz} = \frac{QS}{I_y t} = \frac{(-P) \frac{t}{2} (c^2 - z^2)}{\left(\frac{Ac^2}{3}\right) t} = -\frac{3}{2} \frac{P}{A} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$$

$$\sigma_{zz} = 0$$

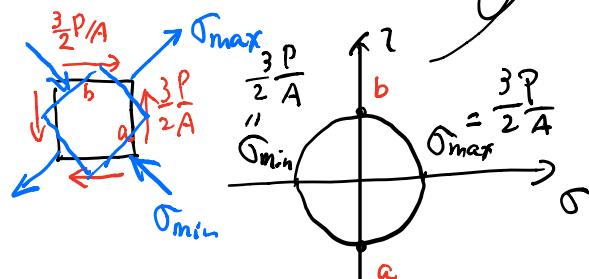
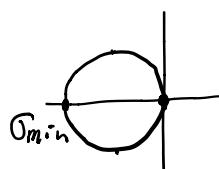
$z=0$  (中立軸)において、

$$\sigma_{xx} = 0, \sigma_{zz} = 0, \tau_{xz} = -\frac{3}{2} \frac{P}{A}.$$

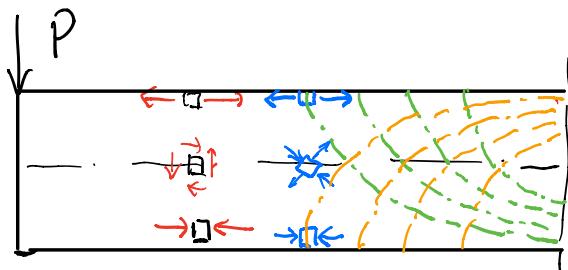
$z=\pm c$  (上下端)において、

$$\sigma_{xx} = \mp 3 \frac{P}{A} \frac{x}{c}, \sigma_{zz} = \sigma_{xz} = 0$$

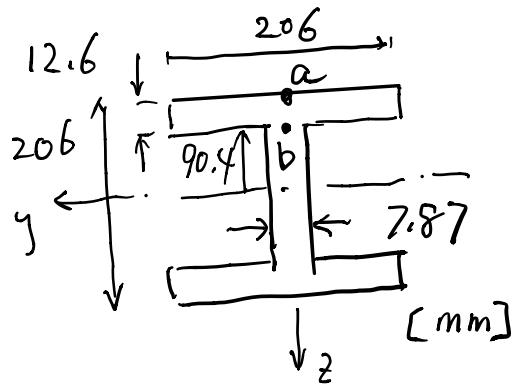
$$(z=\pm c) \rightarrow \sigma_{xx} = \sigma_{min}$$



## 主応力線図



# I型断面(2号)の主応力



$$I_y = 52.9 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$M_y = -60 \text{ kNm}$$

$$Q = -160 \text{ kN}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{M_y}{I_y} z$$

$$\tau_{xz} = \frac{Q S}{I_y t}$$

$$(\sigma_{xx})_a = \frac{(-60 \times 10^3)}{52.9 \times 10^{-6}} \times (-103 \times 10^{-3}) = 117.4 \text{ MPa} = \sigma_{max}$$

$$(\tau_{xz})_a = 0, \quad (\sigma_{zz})_a = 0$$

$$(\sigma_{xx})_b = \frac{(-60 \times 10^3)}{52.9 \times 10^{-6}} \times (-90.4 \times 10^{-3}) = 103.0 \text{ MPa}$$

$$(\sigma_{zz})_b = 0$$

$$(\tau_{xz})_b = \frac{(-160 \times 10^3)(251 \times 10^{-6})}{(52.9 \times 10^{-6})(7.87 \times 10^{-3})} = -96.5 \text{ MPa}$$

$$S = 206 \times 12.6 \times \left(103 - \frac{103}{2}\right) \times 10^{-9}$$

$$= 251.0 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$(\sigma_{max})_b = \frac{(\sigma_{xx})_b + (\sigma_{zz})_b}{2} + \sqrt{\left(\frac{(\sigma_{xx})_b - (\sigma_{zz})_b}{2}\right)^2 + (\tau_{xz})_b^2}$$

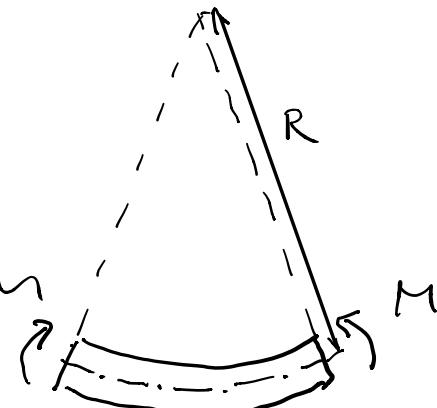
$$= \frac{103.0}{2} + \sqrt{\left(\frac{103.0}{2}\right)^2 + (-96.5)^2} = 160.9 \text{ MPa}$$

$(\sigma_{xx})_a$

## 8. 深のたわみ.

- 純曲げを受ける梁の場合

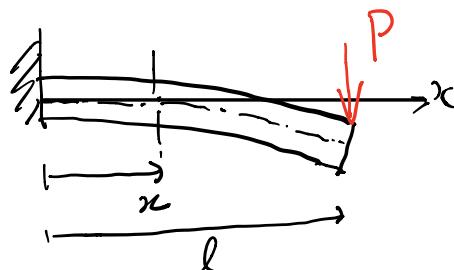
$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI} (= \text{一定})$$



- 橋荷重を受ける梁(片持梁)

$$x = l - k^2$$

$$\begin{cases} M(x) = -P(l-x) \\ Q(x) = P \end{cases}$$

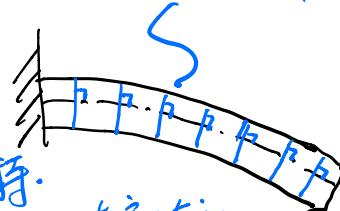


○ (曲げモーメント)  $M(x)$  による変形  
(= 純曲げと同一)

平面保持・中立軸に直交

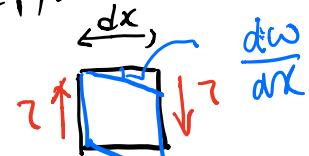
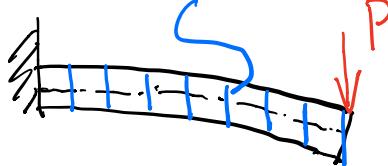
$$\frac{1}{R} \left( = -\frac{d^2\omega}{dx^2} \right) = \frac{M(x)}{EI} = \frac{-P(l-x)}{EI}$$

後で説明.



平面保持・  
中立軸に直交しない

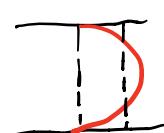
○せん断力  $Q(x)$  による変形



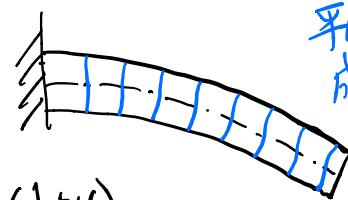
$$G \frac{dw}{dx} = \tau = \frac{Q}{kA} = \frac{P}{kA}$$

せん断補正係数

実際には  
平面保持も  
成立しない



せん断ひかの分布は  
断面内一様ではない。



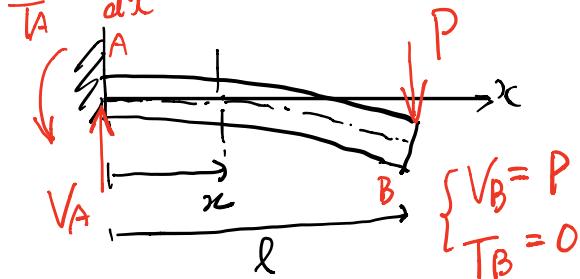
$$b = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu} \quad (\nu: ポアソン比)$$

- 橋荷重と支点の関係(片持構造)

$$x = l \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2$$

$$\begin{cases} M(x) = -P(l-x) \\ Q(x) = P \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_b(0) = 0 \\ \frac{dw_b(0)}{dx} = 0 \end{cases}$$



○ (左端 - x)・M(x) は 0 でなければならぬ  
(= 縦曲げと平行)

$$\frac{1}{R} \left( = -\frac{d^2 w_b}{dx^2} \right) = \frac{M(x)}{EI} = \frac{-P(l-x)}{EI}$$

$$\text{2回積分して, } w_b(x) = \frac{P}{EI} \left( \frac{l}{2} x^2 - \frac{x^3}{8} \right) + C_1 x + C_2$$

$$\begin{aligned} \frac{d w_b(0)}{dx} &= 0 \text{ すなはち } C_1 = 0 \\ w_b(l) &= \frac{Pl^3}{3EI} \end{aligned}$$

○ せん断力 Q(x) は 0 でなければならぬ

$$G \frac{d w_s}{dx} = \tau = \frac{Q}{kA} = \frac{P}{kA}$$

$$\text{1回積分して, } w_s = \frac{P}{kGA} x + C_3$$

$$w_s = 0 \text{ すなはち } C_3 = 0$$

$$w_s(l) = \frac{P}{kGA} l$$

○  $w_b(l)$  と  $w_s(l)$  の比較.

$$E = 200 \text{ GPa}, G = 80 \text{ GPa}, \nu = 0.25,$$

$$h = 0.2 \text{ m}, l = 2 \text{ m} \text{ のとき, } I = \frac{bh^3}{12}, A = bh, k = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu} = \frac{50}{59} = 0.8475$$



$$\frac{w_s(l)}{w_b(l)} = \frac{P l}{k G A} \cdot \frac{3EI}{P l^3} = \frac{3E b h^3 / 12}{k G b h l^2} = \frac{E h^2}{4 k G l^2}$$

$$= \frac{(200 \times 10^9)(0.2)^2}{4(0.8475)(80 \times 10^9)(2)^2} = 0.00737. \quad w_s \ll w_b$$

$h/l \ll 1$  のとき、せん断力は 0  
変形は無視できる。

## 8.1 構のたわみ曲線 - 曲げ変形の定義.

$$K = \frac{1}{R} = \frac{M(x)}{EI}$$

曲率 半径.

$M(x)$  と  $K$  の関係

$M(x) > 0$  のとき.

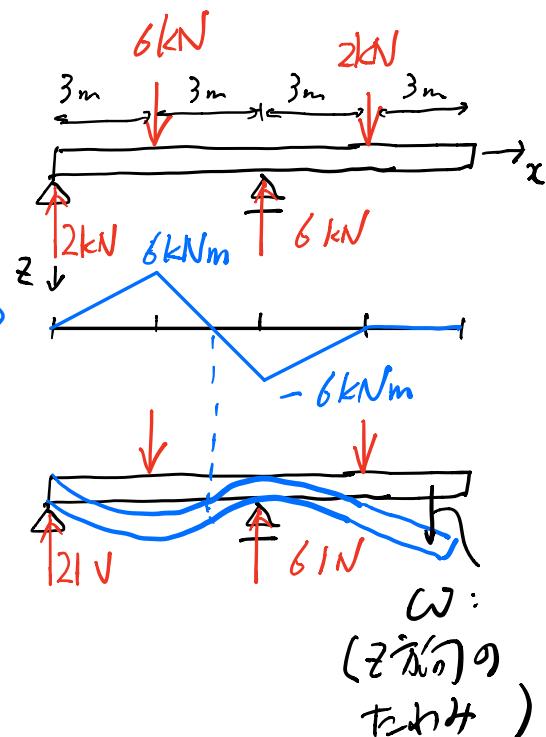
$K$  は正  $\rightarrow$  たわみ曲線は  
下に凸

$M(x) < 0$  のとき.

$K$  は負  $\rightarrow$  たわみ曲線は  
上に凸

$M(x) = 0$  のとき.

$K = 0 \rightarrow$  たわみ曲線は直線



$\omega$ :  
(支点の)  
たわみ

○ 曲線  $K$  と たわみ  $\omega$  の関係式.

$$K = \frac{1}{R} = -\frac{\frac{d^2\omega}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

微小変形

$$\approx -\frac{d^2\omega}{dx^2} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d\omega}{dx} \ll 1$$

○ たわみ  $\omega$  の微分方程式.

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

2回積分して  $\omega$  を求め.

積分定数は境界条件で定める.

## ◦ 片持梁

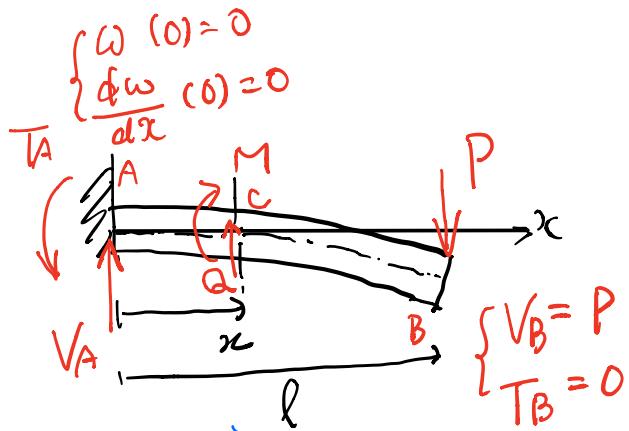
部材CBの力のつり合ひ式

$$\begin{cases} M(x) = -P(l-x) \\ Q(x) = P \end{cases}$$

( $\therefore M(x), Q(x)$  は  $x=l$

で0、点Bの境界条件

$(V_B=P, T_B=0)$  を満足する。)



$$\frac{d^2\omega}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = \frac{P(l-x)}{EI}$$

積分すると、

$$\frac{d\omega}{dx}(x) = \frac{P}{EI} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1$$

2) 一度積分すると

$$\omega(x) = \frac{P}{EI} \left( \frac{l}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} \right) + C_1 x + C_2$$

$x=0$  の点Aで境界条件  $\omega(0)=0, \frac{d\omega}{dx}(0)=0$  す。

$$C_1 = C_2 = 0$$

$$\therefore \omega(x) = \frac{P}{EI} \left( \frac{l}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} \right)$$

$$x=l \text{ で } \omega(l) = \frac{Pl^3}{3EI}$$

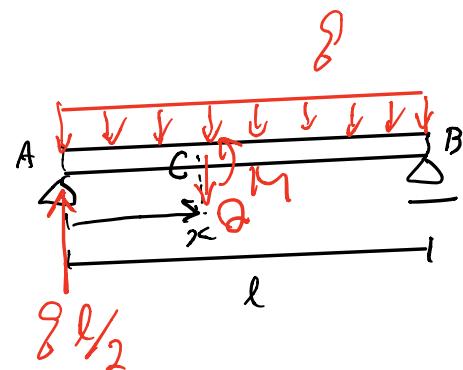
$$\theta(l) = \frac{d\omega}{dx}(l) = \frac{Pl^2}{2EI}$$

• 分布荷重と支点の单纯梁

AC 間の力  $\gamma \gamma / \Delta \sim \delta$

$$\Sigma V = \gamma x + Q - \gamma l/2 = 0$$

$$\Sigma M_A = Qx + \gamma x \cdot \frac{x}{2} - M = 0$$



$$Q = \gamma (l/2 - x)$$

$$M = Qx + \frac{\gamma}{2} x^2 = \gamma \left( \frac{l}{2} - x \right) x + \frac{\gamma}{2} x^2 \\ = \frac{\gamma}{2} (l - x)x$$

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} = - \frac{M}{EI} = - \frac{\gamma}{2EI} (l - x)x$$

$$\frac{d\omega}{dx}(x) = - \frac{\gamma}{2EI} \left( \frac{l}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} \right) + C_1$$

$$\omega(x) = - \frac{\gamma}{2EI} \left( \frac{l}{6}x^3 - \frac{x^4}{12} \right) + C_1x + C_2$$

境界条件  $\omega(0) = 0, \omega(l) = 0$

$$C_1 = \boxed{\quad}, \quad C_2 = \boxed{\quad}$$

$$\omega(x) = \boxed{\quad}$$

$$\omega\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5\gamma l^4}{384EI}, \quad \frac{d\omega}{dx}\left(\frac{l}{2}\right) = 0$$

・集中荷重を受ける単純梁

支点反力は図示の通り

$AC$ と $CB$ に $\frac{1}{2}P$ ずつ分ける。

$0 < x < a$  のとき、

$$M(x) = \boxed{\text{ }} \quad \text{[Diagram: Uniform rectangular beam segment from A to C]}$$

$$\frac{d^2\omega_a}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = \boxed{\text{ }}$$

$$\theta_a = \frac{d\omega_a}{dx} = \boxed{\text{ }} + C_1$$

$$\omega_a = \boxed{\text{ }} + C_1x + C_2$$

$a < x < a+b$

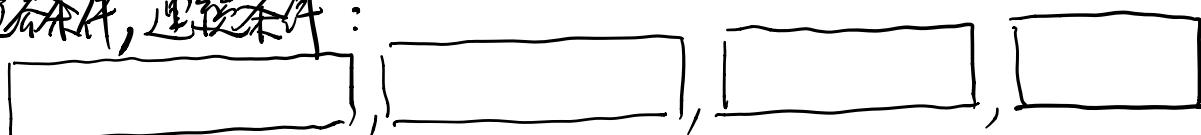
$$M(x) = \boxed{\text{ }}$$

$$\frac{d^2\omega_b}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = \boxed{\text{ }}$$

$$\theta_b = \frac{d\omega_b}{dx} = \boxed{\text{ }} + C_3$$

$$\omega_b = \boxed{\text{ }} + C_3x + C_4$$

境界条件、連続条件：



$$\therefore C_1 = \frac{ab(a+2b)}{6(a+b)EI} P, C_2 = 0, C_3 = \frac{a(3a^2+4ab+2b^2)}{6(a+b)EI} P, -\frac{a^3}{6EI} P$$

$$\omega_a(x) = \frac{P}{6EI(a+b)} \{ ab(a+2b)x - bx^3 \}$$

$$\omega_b(x) = \frac{P}{6EI(a+b)} \{ ax^3 - 3a(a+b)x^2 + a(3a^2+4ab+2b^2)x - a^3(a+b) \}$$

## 8.2 梁のEuler-Bernoulli曲線の方程.

$$\bullet \frac{d^2\omega}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

$$\bullet \frac{dM}{dx} = Q$$

$$\bullet \frac{dQ}{dx} = -P$$

より

$$\frac{d^4\omega}{dx^4} = \frac{P}{EI} \perp$$

$$\omega(x) = \int \int \int \int \frac{P}{EI} dx + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

$C_1 \sim C_4$  は境界条件で定められる。

・下部荷重を受ける片持ち梁.

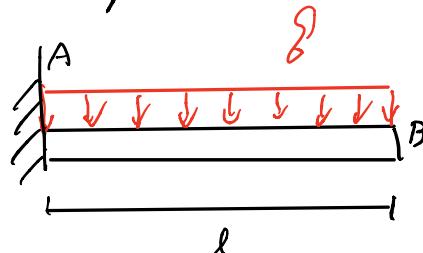
$$\omega(x) = \frac{8x^4}{24EI} + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$$

境界条件.

$$x=0 \text{ に } \omega'''' = 0.$$

$$\omega(0) = 0 \quad C_4 = 0$$

$$\theta(l) = \frac{d\omega}{dx}(l) = 0 \quad C_3 = 0$$



$$x=l \text{ に } \omega''' = 0,$$

$$Q(l) = -EI \frac{d^3\omega}{dx^3}(l) = 0,$$

$$6C_1 + \frac{8l}{EI} = 0$$

$$M(l) = -EI \frac{d^2\omega}{dx^2}(l) = 0.$$

$$2C_2 + C_1l + \frac{8l^2}{2EI} = 0$$

$$C_1 = -\frac{8l}{6EI}, \quad C_2 = \frac{8l^2}{4EI}, \quad C_3 = C_4 = 0$$

$$\omega(x) = \frac{8x^4}{24EI} - \frac{8l}{6EI}x^3 + \frac{8l^2}{4EI}x^2$$

$$\omega(l) = \frac{8l^4}{8EI}$$

$$\theta(l) = \frac{d\omega}{dx}(l) = \frac{8l^3}{6EI}$$

。下部荷重を受ける一端支持一端固定梁。

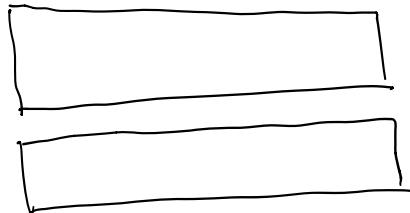
$$w(x) = \frac{8x^4}{24EI} + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$$

境界条件。

$$x=0 \text{ において } z.$$



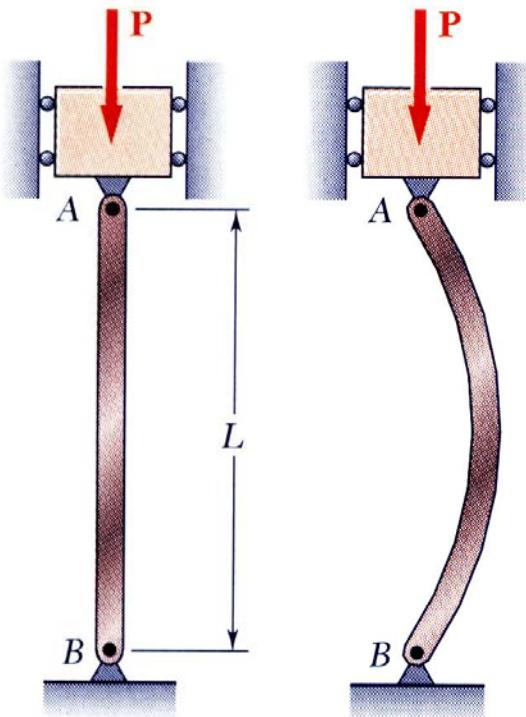
$$x=l \text{ において } z,$$



$$C_1 = \boxed{\phantom{000}}, \quad C_2 = \boxed{\phantom{000}}, \quad C_3 = \boxed{\phantom{000}}, \quad C_4 = \boxed{\phantom{000}}$$

$$w(x) = \boxed{\phantom{0000000000000000}}$$

## 構造物の安定性

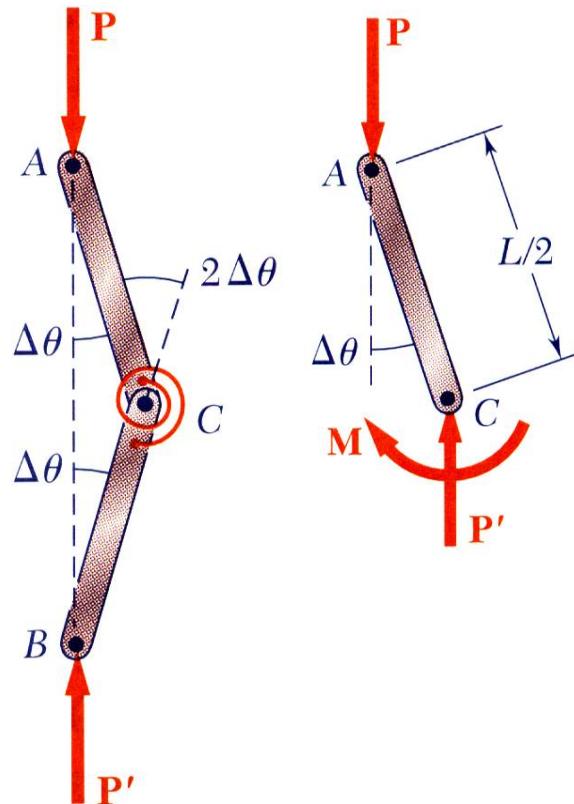


- 柱の設計において、断面積は以下の条件が満足されるように選定される。
  - 応力が許容応力を超えないように
$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \sigma_{all}$$
  - 変位が基準値内に収まるように
$$\delta = \frac{PL}{AE} \leq \delta_{spec}$$
- しかし、このような計算で設計された柱でも荷重下で不安定になったり、突然大きく変位を示すことがある。



座屈現象

## 構造物の安定性



- 卷きバネで連結された2本の剛棒を考える。微小な摂動  $\Delta\theta$  が与えられたとすると、

$$K(2\Delta\theta) = \text{復元モーメント}$$

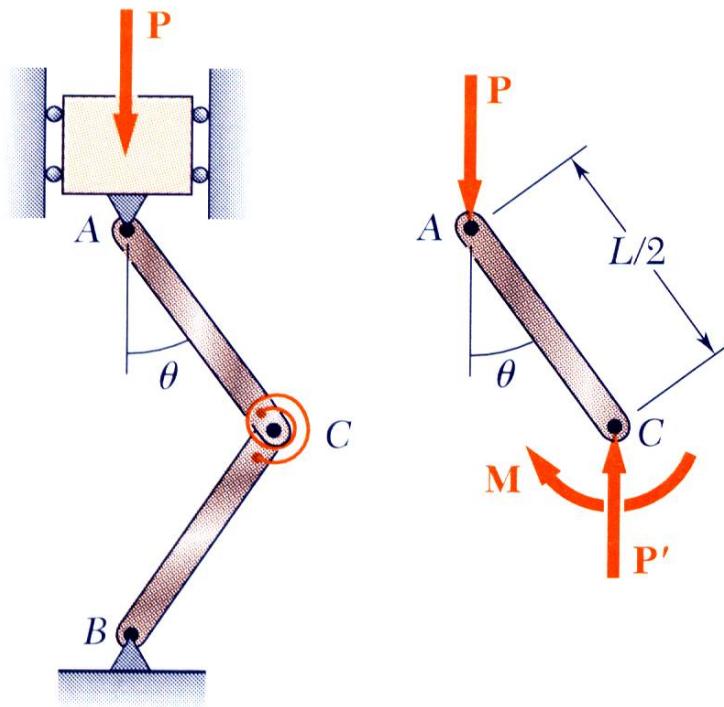
$$P \frac{L}{2} \sin \Delta\theta = P \frac{L}{2} \Delta\theta = \text{擾乱モーメント}$$

- もし以下の条件が満足されれば、柱は安定（元の状態に戻る）。

$$P \frac{L}{2} \Delta\theta < K(2\Delta\theta)$$

$$P < P_{cr} = \frac{4K}{L}$$

## 構造物の安定性



- 荷重  $P (>P_{cr})$  が作用したと仮定する。擾動を与えた後、有限変形角を保ってつり合ったとする。

$$P \frac{L}{2} \sin \theta = K(2\theta)$$

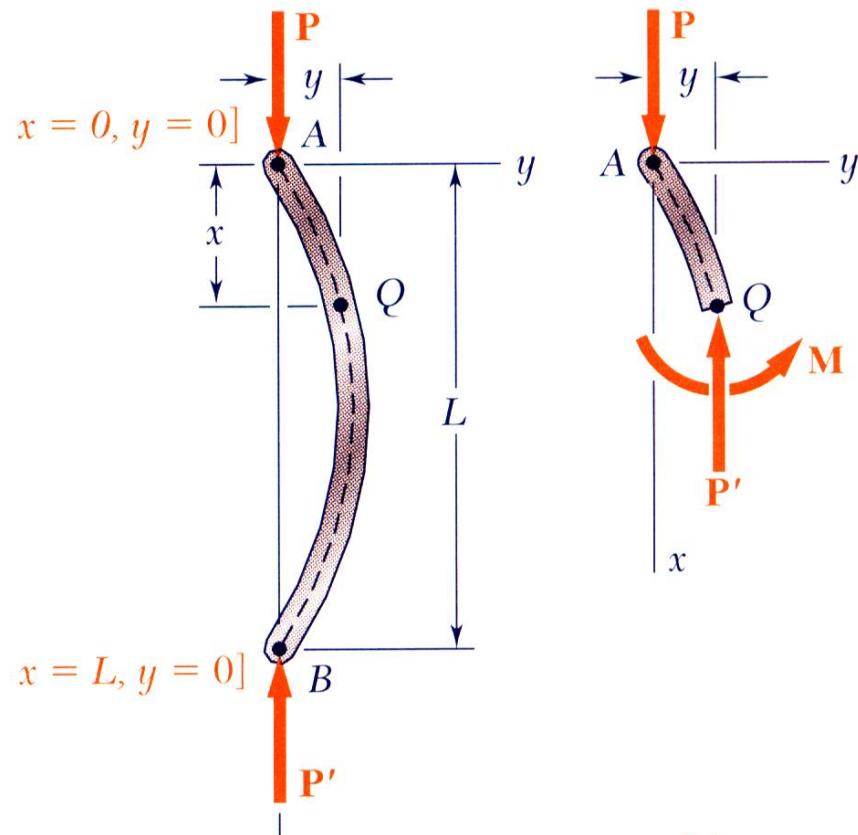
$$\frac{PL}{4K} = \frac{P}{P_{cr}} = \frac{\theta}{\sin \theta}$$

- $\sin \theta < \theta$  であるので、有限変形角を保ったつり合い状態は  $P > P_{cr}$  の場合のみ可能であることがわかる。



- $P < P_{cr}$  の場合、安定な状態は  $\theta=0$  のとき。

# オイラーの公式(両端ピンの梁)



- 軸方向に荷重を受ける梁を考える。左図のような微小な摂動状態を考えると、以下のつり合い式を得る。

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI} y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI} y = 0$$

- $P < P_{cr}$  のとき、安定で真直ぐな梁に戻る。  
 $P = P_{cr}$  になると、梁は不安定となり、突然大きな変位が生じる。

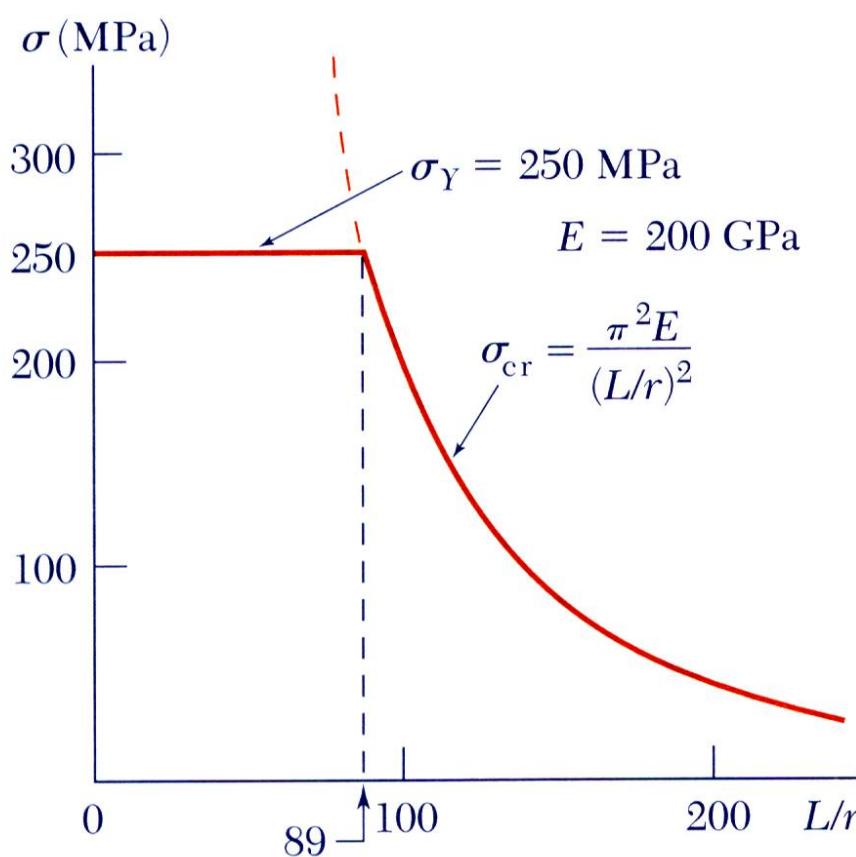
- 上式より以下の解を得る。

$$P > P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad \text{オイラーの座屈荷重}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} > \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E (Ar^2)}{L^2 A} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$

$$I = Ar^2 \text{とする, } r: \text{断面2次半径}$$

## オイラーの公式(両端ピンの梁)



- 極限荷重に対応する応力

$$P > P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} > \sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E (Ar^2)}{L^2 A}$$

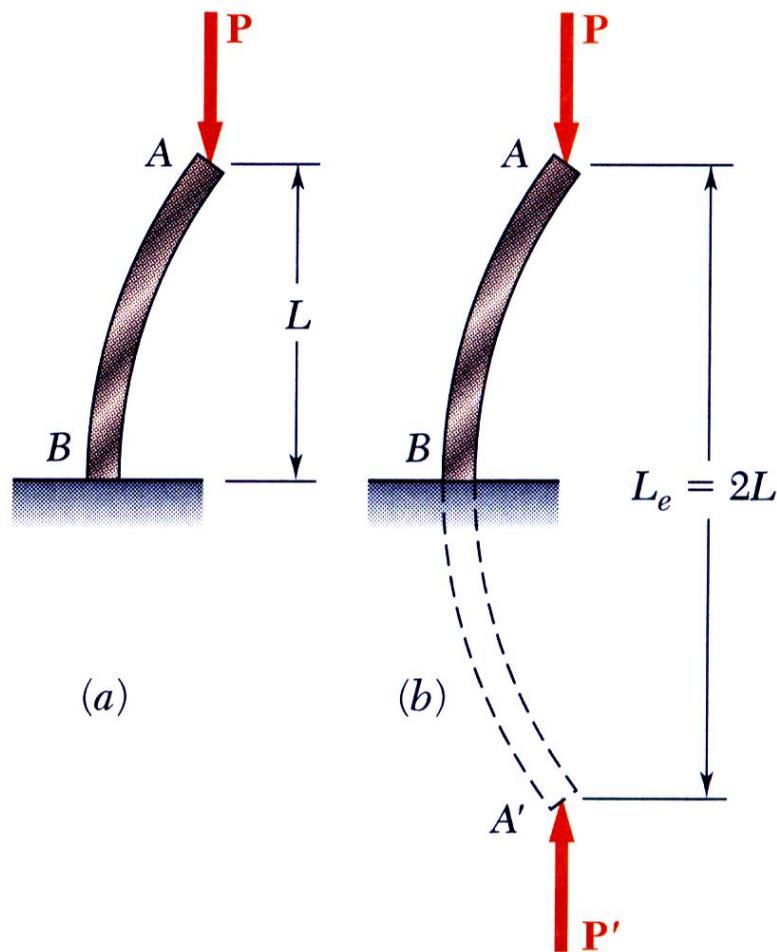
$$= \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} = \text{critical stress}$$

$$\frac{L}{r} = \text{slenderness ratio} \quad \text{細長比}$$

- 上記の解析は中心荷重に限定されることに注意！



## オイラーの公式の拡張



- 一端固定-他端自由の柱は、両端ピン支持の上半部のように挙動する。
- その極限荷重はオイラーの公式より得られる。

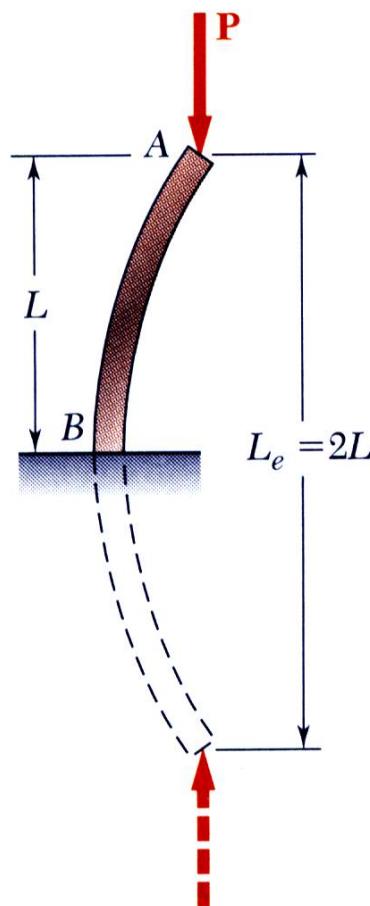
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2}$$

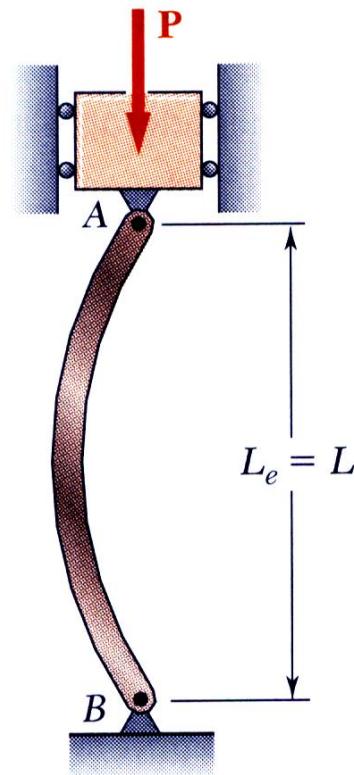
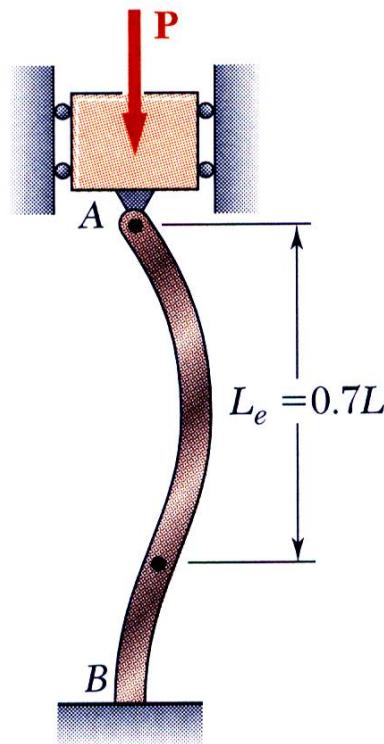
$L_e = 2L$  = equivalent length 有効座屈長



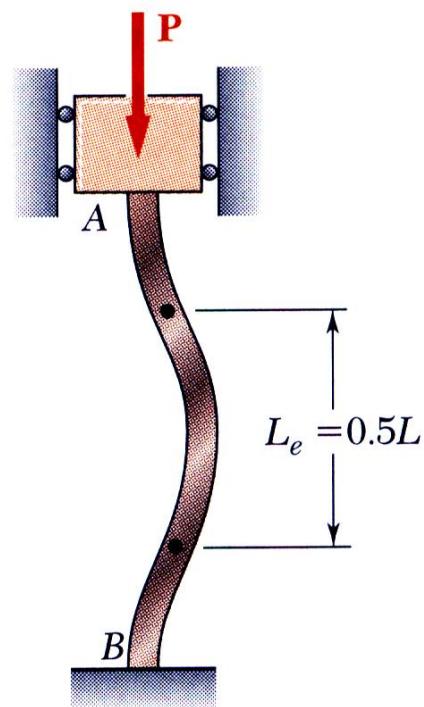
## オイラーの公式の拡張

(a) One fixed end,  
one free end

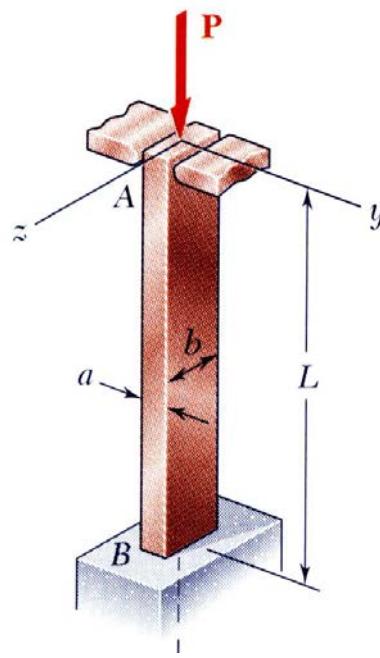
(b) Both ends pinned

(c) One fixed end,  
one pinned end

(d) Both ends fixed



## 例題10.1



An aluminum column of length  $L$  and rectangular cross-section has a fixed end at  $B$  and supports a centric load at  $A$ . Two smooth and rounded fixed plates restrain end  $A$  from moving in one of the vertical planes of symmetry but allow it to move in the other plane.

$$L = 0.5 \text{ m}$$

$$E = 70 \text{ GPa}$$

$$P = 20 \text{ kN}$$

$$FS = 2.5$$

- Determine the ratio  $a/b$  of the two sides of the cross-section corresponding to the most efficient design against buckling.
- Design the most efficient cross-section for the column.

## 例題 10.1

### SOLUTION:

The most efficient design occurs when the resistance to buckling is equal in both planes of symmetry. This occurs when the slenderness ratios are equal.

- Buckling in xy Plane:

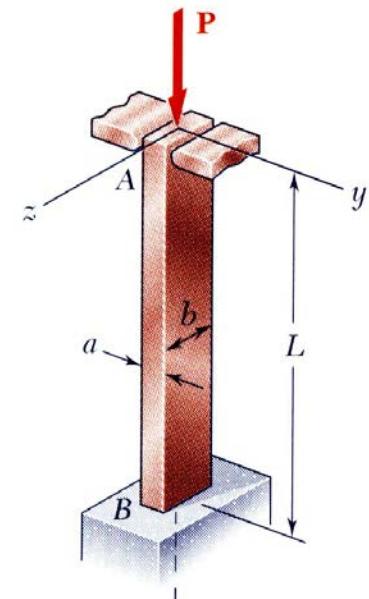
$$r_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\frac{1}{12}ba^3}{ab} = \frac{a^2}{12} \quad r_z = \frac{a}{\sqrt{12}}$$

$$\frac{L_{e,z}}{r_z} = \frac{0.7L}{a/\sqrt{12}}$$

- Buckling in xz Plane:

$$r_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{1}{12}ab^3}{ab} = \frac{b^2}{12} \quad r_y = \frac{b}{\sqrt{12}}$$

$$\frac{L_{e,y}}{r_y} = \frac{2L}{b/\sqrt{12}}$$



- Most efficient design:

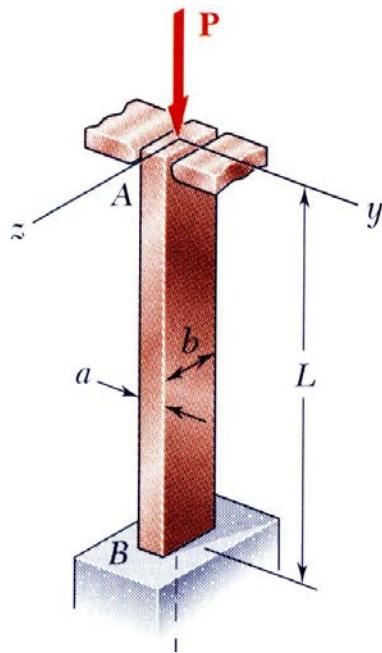
$$\frac{L_{e,z}}{r_z} = \frac{L_{e,y}}{r_y}$$

$$\frac{0.7L}{a/\sqrt{12}} = \frac{2L}{b/\sqrt{12}}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{0.7}{2}$$

$$\boxed{\frac{a}{b} = 0.35}$$

## 例題10.1



$$L = 0.5 \text{ m}$$

$$E = 70 \text{ GPa}$$

$$P = 20 \text{ kN}$$

$$FS = 2.5$$

$$a/b = 0.35$$

- Design:

$$\frac{L_e}{r_y} = \frac{2L}{b/\sqrt{12}} = \frac{2(0.5 \text{ m})}{b/\sqrt{12}} = \frac{3.464}{b}$$

$$P_{cr} = (FS)P = (2.5)(20 \text{ kN}) = 50 \text{ kN}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{50000 \text{ N}}{(0.35b)b}$$

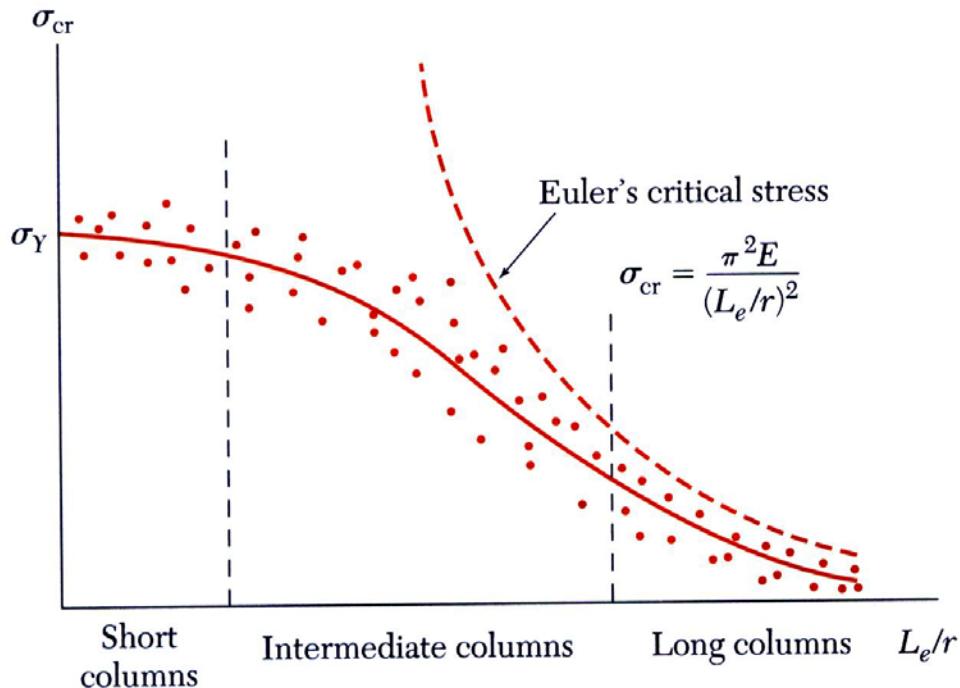
$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2} = \frac{\pi^2 (70 \times 10^9 \text{ Pa})}{(3.464/b)^2}$$

$$\frac{50000 \text{ N}}{(0.35b)b} = \frac{\pi^2 (70 \times 10^9 \text{ Pa})}{(3.464/b)^2}$$

$$b = 39.7 \text{ mm}$$

$$a = 0.35b = 13.89 \text{ mm}$$

## 中心圧縮柱の設計



- オイラー座屈は、応力が比例限界以下、柱は初期不正なし(真直ぐ)、均質と仮定。
- しかし、実験データは
  - $L_e/r$  大の場合、 $\sigma_{cr}$  はオイラーの公式に近づき、ヤング率  $E$  に依存し、 $\sigma_Y$  には依らない。
  - $L_e/r$  小の場合、 $\sigma_{cr}$  は降伏応力  $\sigma_Y$  によって決まり、 $E$  には依らない。
  - $L_e/r$  が中間値の場合、 $\sigma_{cr}$  は  $\sigma_Y$  と  $E$  の両方に依存する。



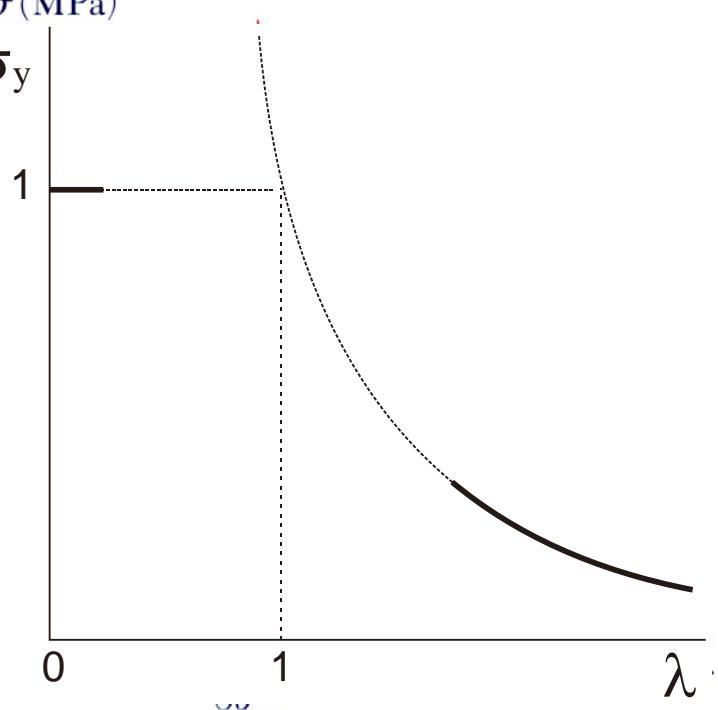
## 中心圧縮柱の設計

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2} \quad \sigma_y = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)_y^2}$$

$\sigma_{cr} = \sigma_y$  のときの細長比  $(L_e/r)_y = \pi\sqrt{E/\sigma_y}$  を基準として  
細長比パラメータ  $\lambda$  を定義する

$$\lambda = \frac{L_e/r}{(L_e/r)_y} = \frac{L_e/r}{\pi\sqrt{E/\sigma_y}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}} \frac{L_e}{\sigma_{cr}/\sigma_y}$$

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y} = \frac{(L_e/r)_y^2}{(L_e/r)^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$



## 中心圧縮柱の設計

基準強度式

(中間領域を含めた経験式)

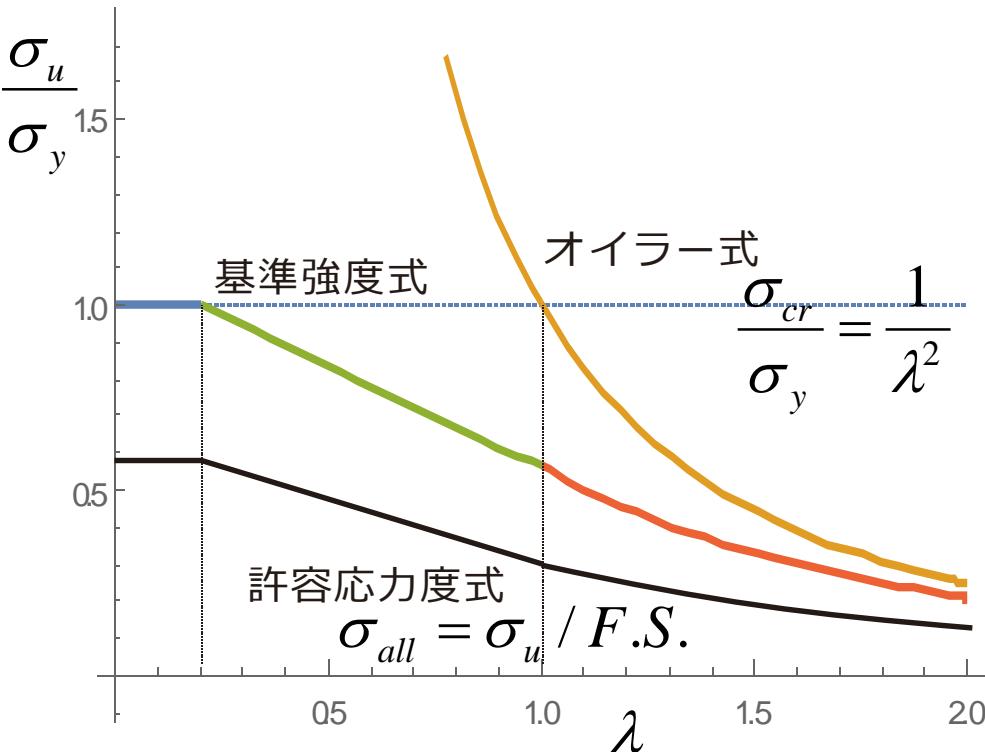
$$\frac{\sigma_u}{\sigma_y} = 1 \quad (\lambda \leq 0.2)$$

$$\frac{\sigma_u}{\sigma_y} = 1.109 - 0.545\lambda \quad (0.2 < \lambda \leq 1.0)$$

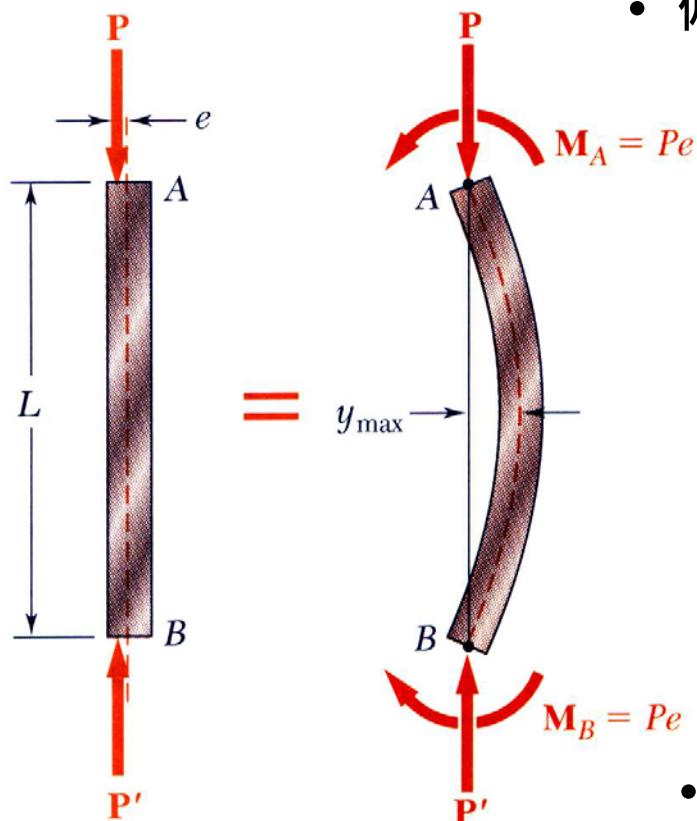
$$\frac{\sigma_u}{\sigma_y} = \frac{1.0}{0.773 + \lambda^2} \quad (1.0 < \lambda)$$

許容応力度 ( $\sigma_u$  を安全率で除す)

$$\sigma_{all} = \sigma_u / F.S.$$



## 偏心荷重; セカント公式



- 偏心荷重は、中心荷重( $P$ )+モーメント( $Pe$ )と等価。
- 中心荷重の場合は荷重が座屈荷重以下の場合は安定で梁は真直ぐであったが、偏心荷重の場合、小さい荷重でも梁は曲がり、変位が発生する。
- $P = P_{cr}$ のとき、変位は無限大となる。

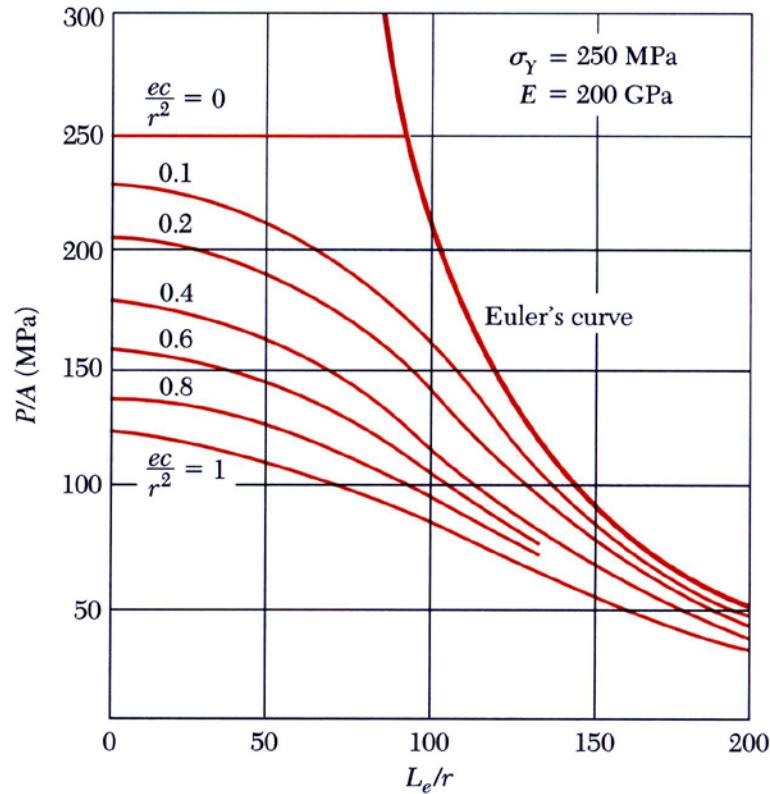
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-Py - Pe}{EI}$$

$$y_{\max} = e \left[ \sec \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) - 1 \right] \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}$$

- 最大応力

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{(y_{\max} + e)c}{r^2} \right] = \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{EA}} \frac{L_e}{r} \right) \right] \\ &= \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) \right] \end{aligned}$$

## 偏心荷重; セカント公式



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}$$

$$\downarrow$$

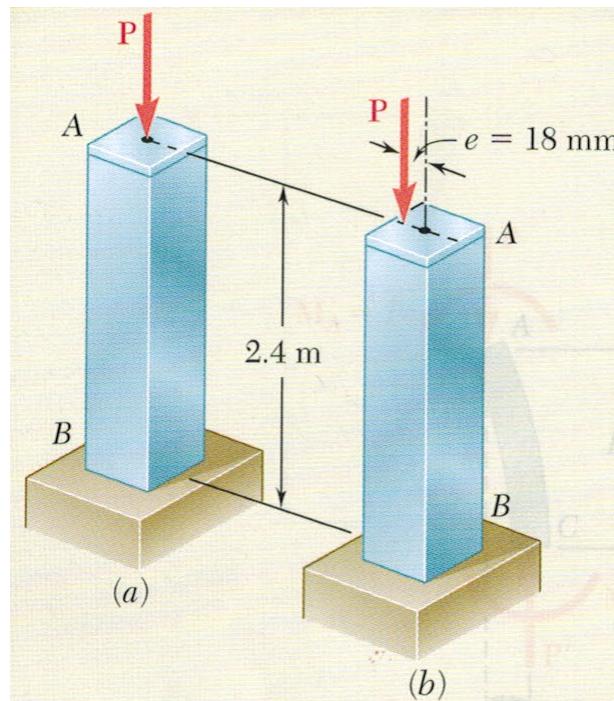
$$\frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E(Ar^2)}{AL_e^2} = \frac{\pi^2 E}{(L_e / r)^2}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_Y = \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{EA}} \frac{L_e}{r} \right) \right]$$

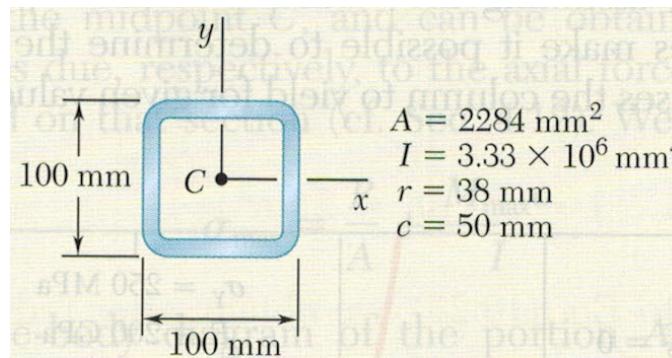
$$\downarrow$$

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{\max}}{\left[ 1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{EA}} \frac{L_e}{r} \right) \right]}$$

## 例題10.2



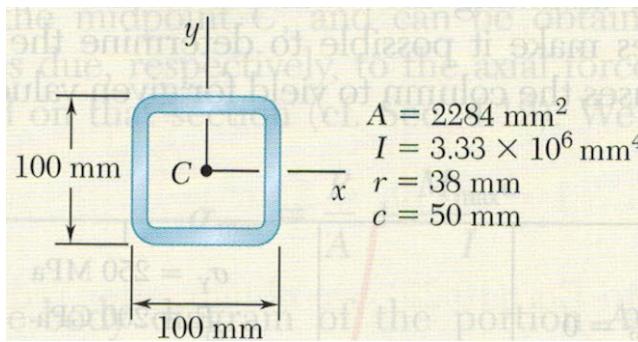
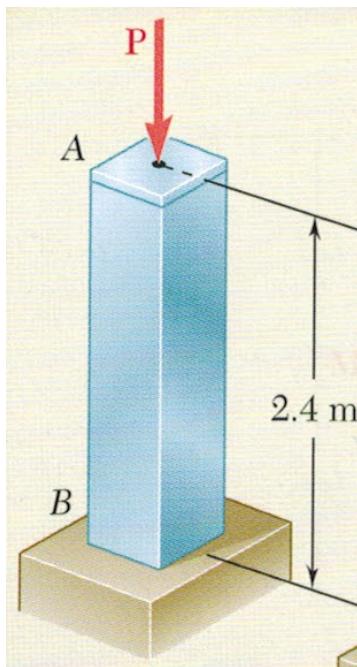
$$E = 200 \text{ GPa}$$



The uniform column consists of a 2.4m section of structural tubing having the cross-section shown.

- Using Euler's formula and a factor of safety of two, determine the allowable centric load for the column and the corresponding normal stress.
- Assuming that the allowable load, found in part a, is applied at a point 18mm from the geometric axis of the column, determine the horizontal deflection of the top of the column and the maximum normal stress in the column.

## 例題10.2



SOLUTION:

- Maximum allowable centric load:

- Effective length,

$$L_e = 2(2.4\text{m}) = 4.8 \text{ m}$$

- Critical load,

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2 (200 \times 10^6 \text{ Pa})(3.33 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{(4.8 \text{ m})^2} = 285.3 \text{ kN}$$

- Allowable load,

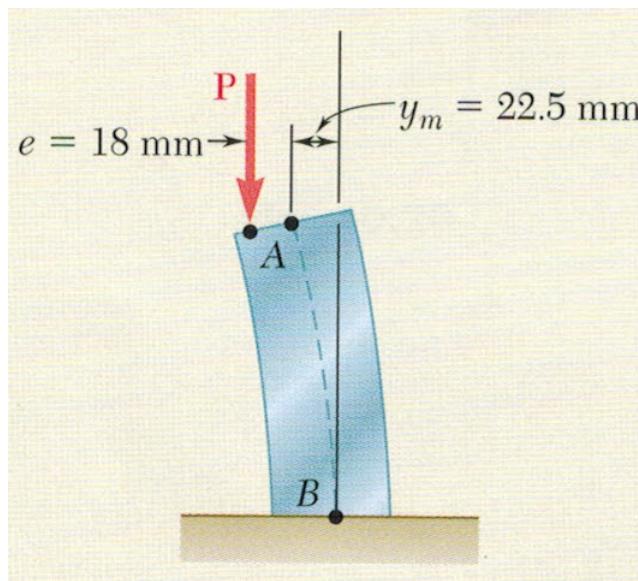
$$P_{all} = \frac{P_{cr}}{FS} = \frac{285.3 \text{ kN}}{2}$$

$$P_{all} = 142.7 \text{ kN}$$

$$\sigma = \frac{P_{all}}{A} = \frac{142.7 \text{ kN}}{2284 \times 10^{-6} \text{ m}^2}$$

$$\sigma = 62.5 \text{ MPa}$$

## 例題10.2



- Eccentric load:

- End deflection,

$$\begin{aligned}y_m &= e \left[ \sec \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) - 1 \right] \\&= (18 \text{ mm}) \left[ \sec \left( \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \right) - 1 \right]\end{aligned}$$

$$y_m = 22.5 \text{ mm}$$

- Maximum normal stress,

$$\begin{aligned}\sigma_m &= \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) \right] \\&= \frac{142.7 \text{ kN}}{2284 \times 10^{-6} \text{ m}^2} \left[ 1 + \frac{(0.018 \text{ m})(0.05 \text{ m})}{(0.038 \text{ m})^2} \sec \left( \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \right) \right]\end{aligned}$$

$$\sigma_m = 150.2 \text{ MPa}$$

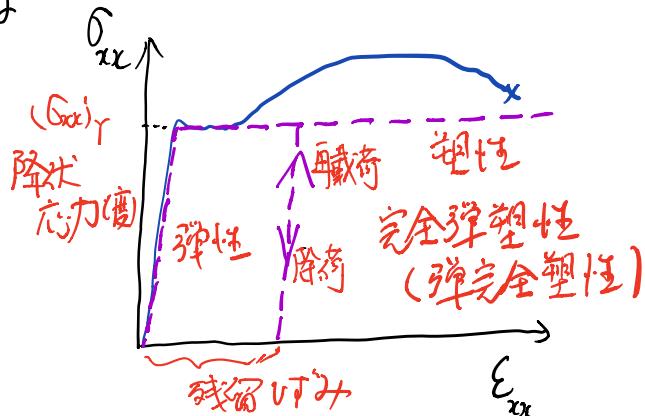


## 10. 弾塑性状態を示す。

動かし受ける棒の場合は

### 2.7 弾塑性变形

2. 破壊論



・長さ  $L = 500 \text{ mm}$ , 断面積  $A = 60 \text{ mm}^2$  の棒

弾性係数  $E = 200 \text{ GPa}$ , 隆伏応力  $\sigma_y = 300 \text{ MPa}$

$\Delta L = 7 \text{ mm}$  まで引張力を載荷し、その後除荷した。

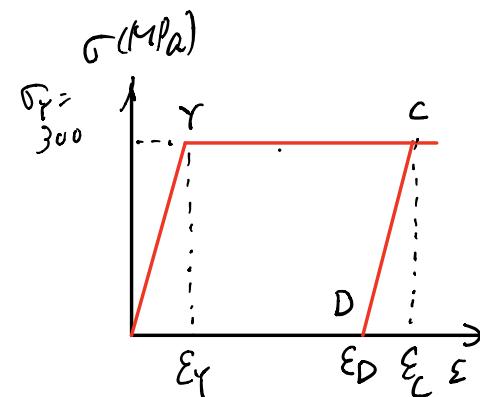
伸び変位は?

$$\varepsilon_c = \frac{\Delta L}{L} = \frac{7}{500} = 14 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} = \frac{300 \times 10^6}{200 \times 10^9} = 1.5 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_d = \varepsilon_c - \varepsilon_y = 12.5 \times 10^{-3}$$

$$u_d = \varepsilon_d \times L \\ = 12.5 \times 10^{-3} \times 500 \text{ mm} = 6.25 \text{ mm}$$



問題 2.7.1

荷重  $P$  を増加した時の  
荷重  $P$ -変位の関係を求む。

Rod の降伏時の  $(P_R)_Y$  と  $(\delta_R)_Y$  は

$$(P_R)_Y = (\sigma_R)_Y \cdot A_R = (250 \times 10^6) \times (48 \times 10^{-6})$$

$$= 12 \text{ kN}$$

$$(\delta_R)_Y = (\epsilon_R)_Y L = \frac{(\sigma_R)_Y L}{E_R}$$

$$= \frac{(250 \times 10^6)}{210 \times 10^9} \times 0.75 = 0.893 \text{ mm}$$

Tube の降伏時の  $(P_T)_Y$  と  $(\delta_T)_Y$  は

$$(P_T)_Y = (\sigma_T)_Y A_T = (310 \times 10^6) (62 \times 10^{-6}) = 19.22 \text{ kN}$$

$$(\delta_T)_Y = (\epsilon_T)_Y L = \frac{(\sigma_T)_Y L}{E_T}$$

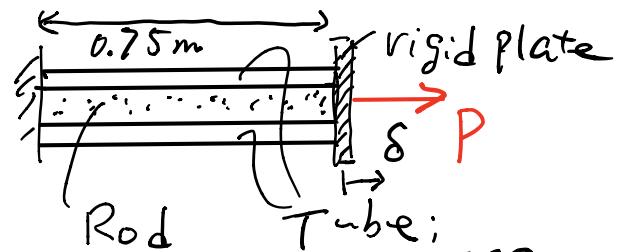
$$= \frac{310 \times 10^6}{105 \times 10^9} \cdot 0.75 = 2.21 \text{ mm}$$

$$\delta_T = 0.893 \text{ mm} \quad \text{より}, \quad P_T \text{ は},$$

$$P_T = \sigma_T A_T = E_T \frac{\delta_T}{L} A_T = 7.75 \text{ kN}$$

$$P = P_R + P_T$$

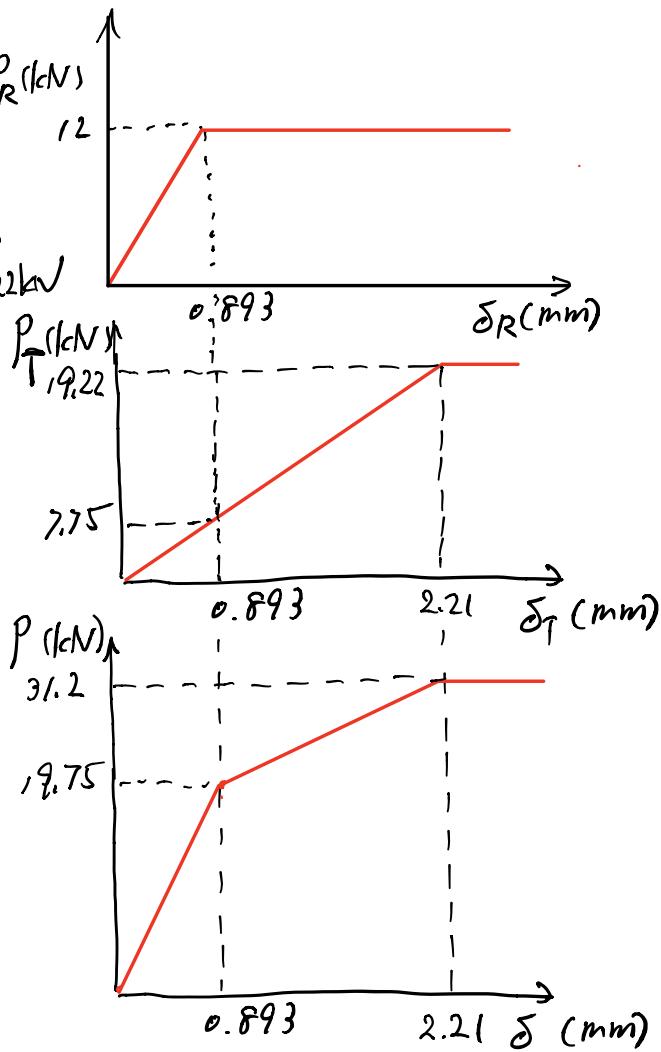
$$\delta = \delta_R + \delta_T$$



$$E_R = 210 \text{ GPa} \quad E_T = 105 \text{ GPa}$$

$$(\sigma_R)_Y = 250 \text{ MPa}, \quad (\sigma_T)_Y = 310 \text{ MPa}$$

$$A_R = 48 \text{ mm}^2 \quad A_T = 62 \text{ mm}^2$$



## 例題 2.7.1 の続き。

荷重  $P$  を  $0 \sim 25 \text{ kN}$  まで増加させ、その後  $0 \sim 12 \text{ kN}$  に変化した。

- 1) 残留変位  $\delta_p$  はいくらくらい?  $\rightarrow$  Rod & Tube は残存する残余応力  $(\sigma_R)_{res}$ ,  $(\sigma_T)_{res}$  はいくらくらい?

$P=25 \text{ kN}$  のとき、図(a)～(c) とす。

$$P_R = 12 \text{ kN}, P_T = 13 \text{ kN}$$

図(b)より、 $P_T = 13 \text{ kN}$  の時の

変位  $\delta'_T$  は、

$$\delta'_T = \varepsilon'_T L = \frac{\sigma'_T \cdot L}{E_T} = \frac{P_T L}{A_T E_T} = \frac{13 \times 10^3 \times 0.75}{62 \times 10^9 / (105 \times 10^9)} \\ = 1.5 \text{ mm.}$$

- 1) 図(c)より、荷重が  $25 \text{ kN} \sim 0$  に減少する時、Rod, Tube は引張り応力を受ける。変位を示すので、BE の位置を示す。AO の位置を同じくす。

$$\delta' = \frac{0.893}{19.75} \times 25 = 1.131$$

$$\therefore \delta_p = 1.5 - \delta' = 0.369 \text{ mm}$$

- 2) 図(a), (b)において、変位  $\delta'_T = 1.5 \text{ mm}$  から  $\delta' = 1.131 \text{ mm}$  へ引張り変化する。

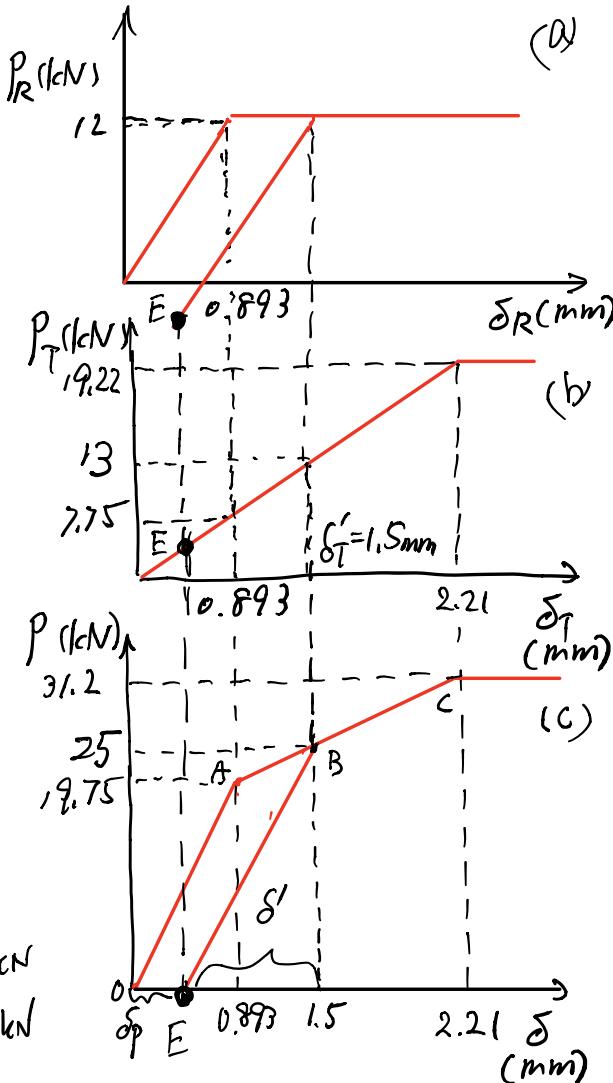
荷重は

$$P_R = 12 - \frac{12}{0.893} \times 1.131 = -3.19 \text{ kN}$$

$$P_T = 13 - \frac{7.75}{0.893} \times 1.131 = +3.19 \text{ kN}$$

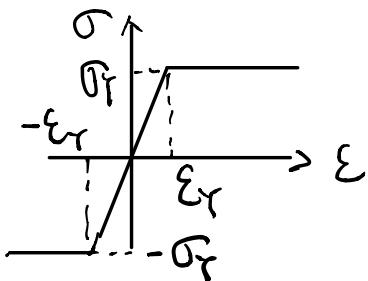
$$\sigma_R = \frac{P_R}{A_R} = -3.19 \times 10^3 / (48 \times 10^{-6}) = -66.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_T = P_T / A_T = 3.19 \times 10^3 / (62 \times 10^{-6}) = 51.5 \text{ MPa.}$$



## 10.1 曲げを受ける梁

・完全弾塑性体

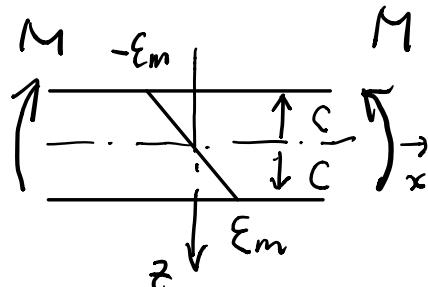


・平面ひずみの仮定

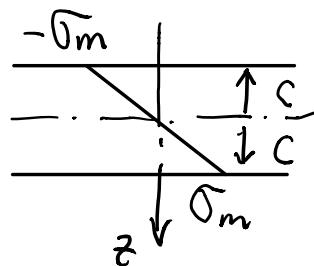
$$\epsilon_{xx} = \frac{z}{c} \epsilon_m$$

$$= k z \quad (k: \text{剛性})$$

(長方形断面  $b \times 2c$ )



a. 弾性状態 ( $\sigma_m < \sigma_y, k < k_y$ )



$$\sigma_{xlc} = E \epsilon_{xlc} = E k z, \quad M = \int_A \sigma_{xlc} z dA = E k \int_A z^2 dA = E I_y k$$

$\sigma_m = \sigma_y$  のときの  $k, M$  と  $k_y, M_y$  とすれば。

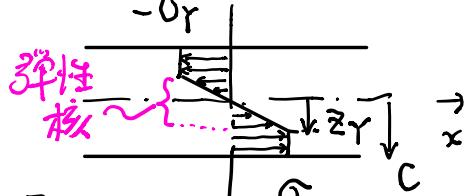
$$k_y = \frac{\sigma_y/E}{c}, \quad M_y = E I_y k_y = \frac{I_y}{c} \sigma_y \sim ②$$

$$= \frac{2}{3} b c^2 \sigma_y$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } \frac{M}{M_y} = \frac{k}{k_y}$$

b. 強塑性狀態 ( $|\sigma_{xx}| = \sigma_Y$  for  $|z| > z_Y$ )

$$\sigma_{xx} = \begin{cases} \text{sgn}(z)\sigma_Y & |z| > z_Y \\ \sigma_Y \frac{z}{z_Y} & |z| < z_Y \end{cases}$$



$$\begin{aligned} M &= \int_A \sigma_{xx} z dA = 2b \left[ \int_{-z_Y}^{z_Y} \sigma_Y \frac{z}{z_Y} \cdot z dz + \int_{z_Y}^C \sigma_Y \cdot z dz \right] \\ &= 2b \left[ \int_0^{z_Y} \sigma_Y \left( \frac{z}{z_Y} - 1 \right) z dz + \int_0^C \sigma_Y z dz \right] \\ &= b C^2 \sigma_Y \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{z_Y^2}{C^2} \right) = \frac{3}{2} M_Y \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\kappa_Y}{\kappa} \right)^2 \right\} \cdot C = \frac{\sigma_Y / E}{\kappa_Y} \end{aligned}$$

$$\kappa = \frac{\epsilon_{xy}}{z} = \frac{\sigma_Y / E}{z_Y}$$

$$z_Y = \frac{(\sigma_Y / E)}{\kappa}$$

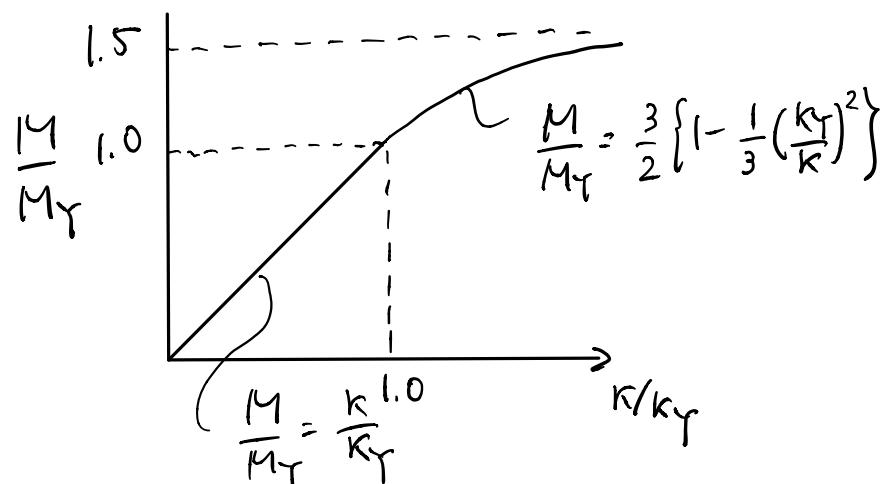
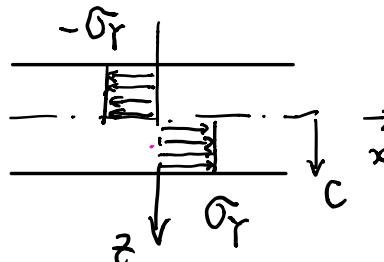
$$C = \frac{\sigma_Y / E}{\kappa_Y}$$

c. 完全塑性狀態 ( $|\sigma_{xx}| = \sigma_Y$ )

彈塑性狀態  $\Rightarrow z_Y \rightarrow 0, \kappa \rightarrow \infty$   
即  $\kappa \rightarrow \infty$ .

$$M = \frac{3}{2} M_Y = M_p$$

(全塑性荷載)

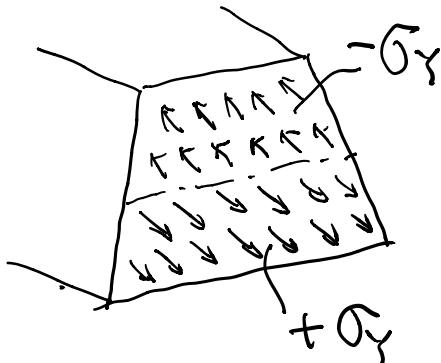


## ○ 左右引張断面の完全塑性状態

完全塑性状態における

$$\text{合力 } R_1 = \sigma_y A_1$$

$$R_2 = \sigma_y A_2$$



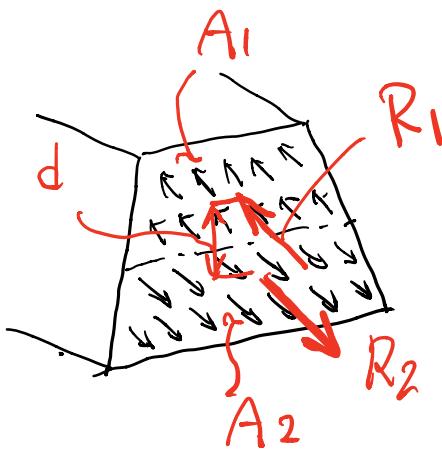
$\gamma/A_b \dots \delta\gamma$

$$R_1 - R_2 = 0$$

$$\therefore A_1 = A_2$$

中立軸(引張面)を  
2等分する

全塑性モーメント  $M_p$



$$M_p = R_1 d = \sigma_y A_1 d = \frac{1}{2} A \sigma_y d$$

$$A = A_1 + A_2$$

例題

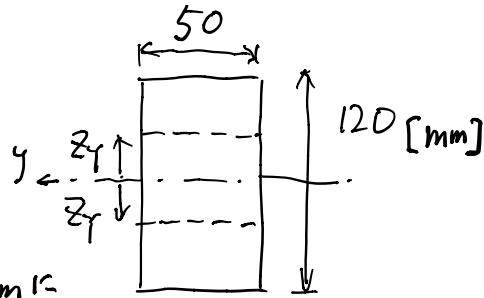
(a)  $M_y, M_p$  は?

$$\sigma = \frac{Mz}{I_y} \quad M_y \text{ は } z = C = 60 \text{ mm 时}$$

おなじく,  $\sigma = \sigma_y$  と  $t = 3$  と  $\sigma_y$  の  $M$ .

$$M_y = \frac{\sigma_y I_y}{C} = \frac{240 \times 10^6 \times \frac{50 \times 120 \times 10^{-12}}{12}}{60 \times 10^{-3}} = 28.8 \text{ kNm}$$

$$M_p = \frac{1}{2} A \sigma_y d = \frac{1}{2} \times (50 \times 120 \times 10^{-12}) (240 \times 10^6) (60 \times 10^{-3}) = 43.2 \text{ kNm}$$



$$\sigma_y = 240 \text{ MPa}$$

$$E = 200 \text{ GPa}$$

(b)  $M_y = 36.8 \text{ kNm}$  の曲げモーメントが作用したときの

弹性核の高さ  $z_y$  は? 曲率半径  $R$  は?

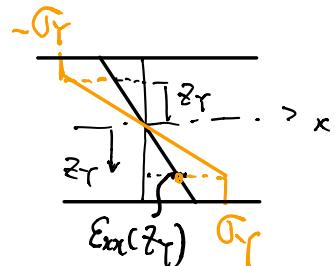
$M_p > M_y > M_y$  は 弹性域に位置する。

$$M_y = 36.8 \times 10^3 = \frac{3}{2} M_y \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{z_y}{C} \right)^2 \right\} = \frac{3}{2} (28.8) \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{z_y}{60 \times 10^{-3}} \right)^2 \right\}$$

$$\therefore z_y = 40 \text{ mm.}$$

$$\epsilon_{xx}(z) = \kappa z = \frac{1}{R} z \quad \text{よし}$$

$$\epsilon_{xx}(z_y) = \frac{\sigma_y}{E} = \frac{1}{R} z_y$$



$$R = \frac{E}{\sigma_y} z_y = \frac{200 \times 10^9}{240 \times 10^6} \times 40 \times 10^{-3} = 33.3 \text{ m}$$

(c) 曲げモーメント  $M_y = 36.8 \text{ kNm}$  の除荷時。

部材内の残留応力は?

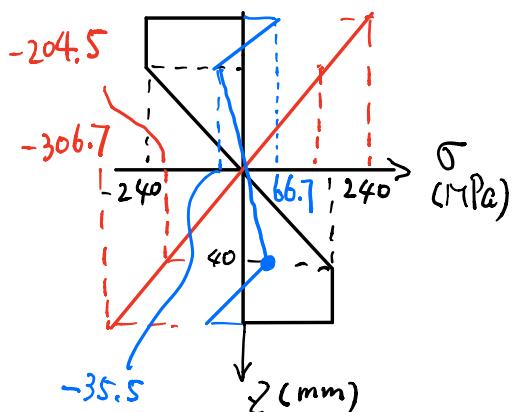
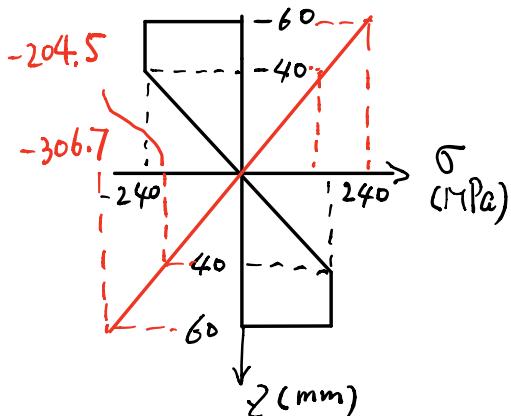
除荷過程は弾性運動をするので

弾塑性状態の応力に以下の応力を重ねなければよい。

$$\sigma'_{xx} = (-M_y) z = \frac{-36.8 \times 10^3}{7.2 \times 10^{-6}} z$$

$$z = 60 \text{ mm} のとき, \sigma'_{xx} = -306.7 \text{ MPa}$$

$$z = 40 \text{ mm} のとき, \sigma'_{xx} = -204.5 \text{ MPa}$$



除荷時の曲率半径  $R$  は?

$$R = \frac{z_y}{\epsilon_{xx}(z_y)} = \frac{z_y}{\sigma_{xx}(z_y)/E} = \frac{40 \times 10^{-3}}{35.5 \times 10^6 / (200 \times 10^9)} = 22.5 \text{ m}$$

・同様の現象は、弾塑性材料の丸棒のねじりにおいて生じる。

