1.常微分方程式

2021年5月17日 月曜日 12:49

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x-y+3}$

$x-y=t$ とおくと

$1-\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dt}{dx}$

したがって ~~与式~~ は

$1-\dfrac{dt}{dx} = \sqrt{t+3}$ とかける.

$\dfrac{dt}{dx} = 1-\sqrt{t+3}$

$\displaystyle\int dx = \int \frac{dt}{1-\sqrt{t+3}}$

$\displaystyle = \int \frac{2u}{1-u}\,du \quad (\because u = \sqrt{t+3})$

$\displaystyle = \int \left(-2+\frac{2}{1-u}\right) du$

$x = -2u - 2\log|1-u| + C$

$= -2\left(\sqrt{t+3} + \log|1-\sqrt{t+3}|\right) + C$

$= -2\left(\sqrt{x-y+3} + \log|1-\sqrt{x-y+3}|\right) + C$

(2) $\dfrac{y}{x^2+y^2}dx - \dfrac{x}{x^2+y^2}dy = 0$

$y\,dx - x\,dy = 0$

$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$

$\log|x| = \log|y| + C'$

$$\log\left|\frac{x}{y}\right| = c'$$

$$\frac{x}{y} = e^{c'} = C$$

$$x = Cy$$

(3) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = x^2$

$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ について

基本解は e^{3x}、e^{-x} より

一般解は $y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$

ここで特解 y_p を考える

$y_p = ax^2 + bx + c$ と表せるとすると

$y_p' = 2ax + b$

$y_p'' = 2a$

これを与式に代入して

$2a - 2(2ax + b) - 3(ax^2 + bx + c) = x^2$

$-3ax^2 + (-4a - 3b)x + (2a - 2b - 3c) = x^2$

よって $a = -\frac{1}{3}$、$b = \frac{4}{9}$、$c = -\frac{14}{27}$

ゆえに求める一般解は

$y = y_h + y_p$

$= C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{14}{27}$

2.行列

2021年5月17日 月曜日　　15:31

$$A=\begin{pmatrix}4&-3&3\\-1&3&-2\\-3&4&-3\end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}4-\lambda&-3&3\\-1&3-\lambda&-2\\-3&4&-3-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+4\lambda^2+9\lambda-36-12-18$$

$$+27-9\lambda+9+3\lambda+32-8\lambda$$

$$=-\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2$$

$$=-(\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+2)$$

$$=-(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

$$\lambda=1、2$$

$\lambda=1$ のとき

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}3&-3&3\\-1&2&-2\\-3&4&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

固有ベクトルは $t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

ここで、$(A-\lambda E)x=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ となる x をもとめる.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&-3&3&0\\-1&2&-2&1\\-3&4&-4&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\begin{cases}x_1=1\\x_2-x_3=1\end{cases}$$

固有ベクトルが x_1 しか求まらないとき

$Ax_1=\lambda x_1$ に見立てて

$Ax_2=\lambda x_2+x_1$ を考える.

すなわち

$(A-\lambda E)x_2=x_1$ である.

$$x=\begin{pmatrix}1\\s+1\\s\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

先に求めた固有ベクトルと同じ

$\lambda = 2$のとき

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

固有ベクトルは $t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

ゆえに求める変換行列Pは

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3.偏微分方程式

2021年5月21日 金曜日　　14:18

(1) $y(x,t) = f(2x+5t) + g(2x-5t)$ と仮定すると

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 25 f''(2x+5t) + 25 g''(2x-5t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 4 f''(2x+5t) + 4 g''(2x-5t)$$

これを与式に代入すると

(左辺) $= 100 f'' + 100 g''$

(右辺) $= 100 f'' + 100 g''$

より成立するから、確かに一般解である。

(2) $y(x,0) = f(2x) + g(2x) = \sin 2x$

$$\frac{\partial y(x,0)}{\partial t} = 5 f'(2x) - 5 g'(2x) = 0$$

$y(0,t) = f(5t) + g(-5t) = 0$

$y(\pi,t) = f(5t+2\pi) + g(-5t+2\pi) = 0$

ここで $f(m) = g(m) = \frac{1}{2}\sin m$ はこれを満たすから、

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\sin(2x+5t) + \frac{1}{2}\sin(2x-5t)$$

$$= \sin 2x \cos 5t$$

4.統計

2021年5月21日 金曜日　　14:19

(1) $\bar{X} = \dfrac{30+28+25+33+34}{5} = 30$

$$S^2 = \frac{0^2+(-2)^2+(-5)^2+3^2+4^2}{5} = 10.8$$

$$U^2 = \frac{0^2+(-2)^2+(-5)^2+3^2+4^2}{5-1} = 13.5$$

(2) (a) 母分散が既知 ($\sigma^2 = 3.5^2$) のとき

このとき 統計量Zの信頼区間は

$$-1.96 \leqq Z \leqq 1.96$$

したがって

$$-1.96 \leqq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leqq 1.96$$

$$-1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{X} \leqq \mu \leqq 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{X}$$

$$26.93 \leqq \mu \leqq 33.07$$

(b) 母分散が未知のとき、

このとき統計量 Z'

$$Z' = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{U^2/n}}$$

は自由度4の t分布に従う

Z'の信頼区間は

$$-2.776 \leqq Z' \leqq 2.776$$

$$-2.776 \leqq \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{U^2/n}} \leqq 2.776$$

$$-2.776 \times \sqrt{\frac{U^2}{n}} + \bar{X} \leqq \mu \leqq 2.776 \times \sqrt{\frac{U^2}{n}} + \bar{X}$$

$$25.44 \leqq \mu \leqq 34.56$$