

不等式 $(\log_3 x)^2 < \log_3(27x^2)$ を解け。 (金沢工業 2020)

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) - (\text{左辺}) &= \log_3(27x^2) - (\log_3 x)^2 \\&= \log_3 27 + \log_3 x^2 - (\log_3 x)^2 \\&= 3 + 2\log_3 x - (\log_3 x)^2 > 0\end{aligned}$$

ここで、 $\log_3 x = X$ とおくと

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) - (\text{左辺}) &= -X^2 + 2X + 3 \\&= -(X - 3)(X + 1) > 0\end{aligned}$$

これを解くと

$$-1 < X < 3$$

すなわち

$$-1 < \log_3 x < 3$$

ゆえに

$$\frac{1}{3} < x < 27$$