

1.常微分方程式

2021年5月17日 月曜日 12:49

$$(1) \frac{dy}{dx} = \sqrt{x-y+3}$$

$$x-y=t \text{ とおく}$$

$$1 - \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

したがって与式は

$$1 - \frac{dt}{dx} = \sqrt{t+3} \quad \text{とかける。}$$

$$\frac{dt}{dx} = 1 - \sqrt{t+3}$$

$$\int dx = \int \frac{dt}{1 - \sqrt{t+3}}$$

$$= \int \frac{2u}{1-u} du \quad (\because u = \sqrt{t+3})$$

$$= \int \left(-2 + \frac{2}{1-u} \right) du$$

$$x = -2u - 2 \log |1-u| + C$$

$$= -2(\sqrt{t+3} + \log |1-\sqrt{t+3}|) + C$$

$$= -2(\sqrt{x-y+3} + \log |1-\sqrt{x-y+3}|) + C$$

$$(2) \frac{y}{x^2+y^2} dx - \frac{x}{x^2+y^2} dy = 0$$

$$y dx - x dy = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\log |x| = \log |y| + C'$$

$$\log \left| \frac{x}{y} \right| = c'$$

$$\frac{x}{y} = e^{c'} = C$$

$$x = Cy$$

$$(3) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} - 3y = x^2$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} - 3y = 0 \text{ について}$$

基本解は e^{3x} , e^{-x} より

一般解は $y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$

そこで特解 y_p を考える

$y_p = ax^2 + bx + c$ と表せると思う

$$y_p' = 2ax + b$$

$$y_p'' = 2a$$

これを与式に代入して

$$2a - 2(2ax + b) - 3(ax^2 + bx + c) = x^2$$

$$-3ax^2 + (-4a - 3b)x + (2a - 2b - 3c) = x^2$$

$$\text{よって } a = -\frac{1}{3}, b = \frac{4}{9}, c = -\frac{14}{27}$$

ゆえに求める一般解は

$$y = y_h + y_p$$

$$= C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{14}{27}$$

2.行列

2021年5月17日 月曜日 15:31

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 & 3 \\ -1 & 3-\lambda & -2 \\ -3 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 9\lambda - 36 - 12 - 18 \\ &\quad + 27 - 9\lambda + 9 + 3\lambda + 32 - 8\lambda \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) \\ &= -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2) \\ \lambda &= 1, 2 \end{aligned}$$

$\lambda = 1$ のとき

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{固有ベクトルは } s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 2$ のとき

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{固有ベクトルは } t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ゆえに求める変換行列 P は

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. 偏微分方程式

2021年5月21日 金曜日 14:18

(1) $y(x, t) = f(2x + 5t) + g(2x - 5t)$ と仮定すると

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 25 f''(2x + 5t) + 25 g''(2x - 5t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 4 f''(2x + 5t) + 4 g''(2x - 5t)$$

これを与式に代入すると

$$(\text{左辺}) = 100 f'' + 100 g''$$

$$(\text{右辺}) = 100 f'' + 100 g''$$

よ) 成立するから、確かに一般解である。

(2) $y(x, 0) = f(2x) + g(2x) = \sin 2x$

$$\frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = 5 f'(2x) - 5 g'(2x) = 0$$

$$y(0, t) = f(5t) + g(-5t) = 0$$

$$y(\pi, t) = f(5t + 2\pi) + g(-5t + 2\pi) = 0$$

よって $f(m) = g(m) = \frac{1}{2} \sin m$ はこれらを満たすから、

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \frac{1}{2} \sin(2x + 5t) + \frac{1}{2} \sin(2x - 5t) \\ &= \sin 2x \cos 5t \end{aligned}$$

4.統計

2021年5月21日 金曜日 14:19

$$(1) \bar{x} = \frac{30+28+25+33+34}{5} = 30$$

$$s^2 = \frac{0^2 + (-2)^2 + (-5)^2 + 3^2 + 4^2}{5} = 10.8$$

$$U^2 = \frac{0^2 + (-2)^2 + (-5)^2 + 3^2 + 4^2}{5-1} = 13.5$$

(2) (a) 母分散が既知 ($\sigma^2 = 3.5^2$) のとき
このとき統計量 Z の信頼区間は

$$-1.96 \leq Z \leq 1.96$$

したがって

$$-1.96 \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq 1.96$$

$$-1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{x} \leq \mu \leq 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{x}$$

$$26.93 \leq \mu \leq 33.07$$

(b) 母分散が未知のとき、

このとき統計量 Z'

$$Z' = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{U^2/n}}$$

は自由度4のt分布に従う

Z' の信頼区間は

$$-2.776 \leq Z' \leq 2.776$$

$$-2.776 \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{U^2/n}} \leq 2.776$$

$$-2.776 \times \sqrt{\frac{U^2}{n}} + \bar{x} \leq \mu \leq 2.776 \times \sqrt{\frac{U^2}{n}} + \bar{x}$$

$$25.44 \leq \mu \leq 34.56$$