

最小二乘法和迭代法圆曲线拟合

陈明晶, 方源敏, 陈 杰

(昆明理工大学 国土资源工程学院, 昆明 650093)

摘 要: 为了提高形变监测中圆曲线拟合的精度, 该文在总结已有的圆曲线拟合方法的基础上, 推导了一种基于最小二乘法的圆曲线拟合方法: 以原半径与拟合半径的几何距离差值平方和最小为准则, 在计算过程中再结合迭代法, 在离散点非均匀采集的情况下有效地提高拟合精度。最后运用程序对模拟数据及实例数据进行了处理分析, 结果证明该拟合方法是可行的。

关键词: 圆曲线; 拟合; 最小二乘法; 迭代法; 圆心坐标

【中图分类号】P207

【文献标识码】A

【文章编号】1009-2307(2016)01-0194-05

DOI: 10.16251/j.cnki.1009-2307.2016.01.038

Fitting of circular curve based on least square method and iterative method

Abstract: In order to improve the accuracy of circular curve fitting in deformation monitoring, the paper proposed a fitting method of circular curve based on least square method: under the criterion that the sum of the squares of the geometric distance difference between the original radius and the fitting radius is minimum, combined with iterative method in the calculation process, the fitting precision could be improve effectively in the case of non-uniform collecting for discrete points. Finally the result of processing test data proved the feasibility of the fitting method.

Key words: circular curve; fitting; least square method; iterative method; the coordinate of the circle center

CHEN Mingjing, FANG Yuanmin, CHEN Jie (Faculty of Land Resource Engineering, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

0 引言

在实际测量工作中, 经常会遇到对平面上的圆形物体进行数据采集, 以用于绘图或者形变监测。但由于有时无法准确地获得圆心坐标以及半径, 或者有时为了监测其是否发生变形, 这时就只能通过测量设备在圆周上采集若干个离散点的坐标, 再通过不同的拟合方法求出圆的圆心坐标和半径。拟合的方法在数据处理过程中发挥了极大的作用, 可以用它来模拟出最符合物体实际情

况的模型, 在此基础上再进行分析计算, 例如直线拟合^[1-2]、平面拟合^[3]、曲面拟合^[4-5]以及球状物体拟合^[6-7]等, 本文所研究的是二维圆曲线的拟合方法。

1 圆曲线拟合方法

圆曲线的拟合方法有平均值法、加权平均法、最小二乘法等^[8]。平均值法与加权平均法虽然过程简单, 但是只能作到在一定程度上的近似, 在精度要求不高的情况下可以使用; 而最小二乘法过程较为复杂, 一般需借助计算机才能完成相应计算过程, 但其理论严密, 精度最高, 拟合效果最佳, 是目前圆曲线拟合的主要方法。目前最小二乘法大部分以圆曲线的参数方程为基础^[9], 本文受间接平差中测边网函数模型^[10]的启发, 提出了以原半径与拟合半径的几何距离差值平方和最小为准则的圆曲线拟合方法, 再结合迭代法的思想^[11], 经过多次迭代求得圆心坐标和半径, 达到最佳拟



作者简介: 陈明晶(1990—), 男, 福建三明人, 在读研究生, 主要研究方向为现代测量数据处理的理论与方法。
E-mail: chen_mj11@163.com

收稿日期: 2015-04-21

合效果, 它可以有效地解决在圆曲线拟合过程中, 在离散点非均匀采集的情况下只运用最小二乘法出现的拟合精度不高的状况。

2 圆曲线拟合模型推导

设平面圆的标准方程式为 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, 式子中参数 a 、 b 分别为圆心的 x 、 y 坐标, 参数 r 为圆的半径。依据间接平差中测边网函数模型, 我们设圆心的坐标平差值 \hat{a}, \hat{b} 以及半径的平差值 \hat{r} 为参数, 令

$$\hat{a} = a^0 + \delta a, \hat{b} = b^0 + \delta b, \hat{r} = r^0 + \delta r$$

假设所采集的离散点与圆心之间的几何距离 (或将其称为拟合前的原半径, 采集了 n 个离散点就有 n 个拟合前的半径) 与拟合后的半径 (总是只有 1 个, 简称拟合半径) 之差为 d_i , 则有

$$d_i^2 = (\sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2} - r)^2 \quad (1)$$

依据最小二乘准则, 应使得 $\sum (d_i - r)^2$ 取最小, 即

$$\min(\sum (d_i - r)^2) \quad (2)$$

设采集的离散点个数为 n , 并将 d_i 作为观测值, 则 \hat{d}_i 的平差值方程为:

$$\hat{d}_i = d_i + v_i = \sqrt{(x_i - \hat{a})^2 + (y_i - \hat{b})^2} - \hat{r} \quad (3)$$

将上式按台劳公式展开, 得

$$v_i = -\frac{\Delta x_i^0}{s_i^0} \delta a - \frac{\Delta y_i^0}{s_i^0} \delta b - \delta r - l_i \quad (4)$$

若将式(4)用矩阵的形式表达, 则可表达为:

$$\mathbf{V} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l} \quad (5)$$

其中

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta x_1^0}{s_1^0} & -\frac{\Delta y_1^0}{s_1^0} & -1 \\ -\frac{\Delta x_2^0}{s_2^0} & -\frac{\Delta y_2^0}{s_2^0} & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{\Delta x_n^0}{s_n^0} & -\frac{\Delta y_n^0}{s_n^0} & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l} = \begin{bmatrix} r^0 - s_1^0 \\ r^0 - s_2^0 \\ \vdots \\ r^0 - s_n^0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \delta a \\ \delta b \\ \delta r \end{bmatrix}$$

式中

$$\Delta x_i^0 = x_i - a^0, \Delta y_i^0 = y_i - b^0 \\ s_i^0 = \sqrt{(x_i - a^0)^2 + (y_i - b^0)^2} \\ l_i = r^0 - s_i^0$$

根据间接平差原理可知:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \quad (6)$$

式中 \mathbf{P} 为权阵, 由于本文中所采用的数据均为同精度采集, 故 \mathbf{P} 为单位阵, 即 $\mathbf{P} = \mathbf{I}$, 所以可将式(6)简化为:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{l} \quad (7)$$

又因为误差方程中的待求量为 n 个 (即离散点的个数 n), 未知参数为 3 个 (即圆心坐标 a 、 b 及半径 r), 故自由度为 $n-3$ 。

单位权中误差的估值为

$$\hat{m}_0 = \sqrt{\mathbf{V}^T \mathbf{V} / (n-3)} \quad (8)$$

针对在圆曲线拟合过程中, 特别是在离散点非均匀采集的情况下, 经常会出现只运用最小二乘法时拟合精度不高的状况, 为此本文在计算过程中引入了迭代法。迭代时, 为了提高收敛速度, 减少迭代次数, 圆心坐标 a 、 b 采用前文介绍的平均值法求得值作为初始值, 即

$$a^0 = \sum x_i / n, b^0 = \sum y_i / n$$

半径 r 取各离散点到上述初始圆心的几何距离之和的平均值 r^0 。迭代的终止条件为

$$\delta = \left| \frac{X^{(n)} - X^{(n-1)}}{X^{(n)}} \right| < 1 \times 10^{-10}$$

其中 X 代表 a 、 b 、 r 。

3 数据处理分析

3.1 模拟数据

为验证该方法的可行性, 首先对模拟数据进行处理分析。利用 AutoCAD 绘制一个圆心坐标为 (2548.3750, 1074.9130), 半径为 2.5m 的圆, 并借助“定数等分”工具在该圆的圆周上生成若干个节点, 再输入命令“LIST”将这些节点的坐标输出, 并修改为约定的格式, 作为基础数据; 最后利用 Matlab 中的 random 函数生成服从正态分布的随机数, 将其视为观测的偶然误差添加到基础数据中来模拟实测数据。

现针对采集离散点过程中, 观测精度的不同、采集区域的不同、离散点数量的不同等情况, 分别进行了模拟分析。在上述圆的圆周上根据不同的要求采集离散点坐标, 并通过编制相应的 Matlab 程序分别进行计算处理, 试验内容如下:

1) 在圆周上均匀的采集 25 个离散点的坐标, 并分别附加 $\pm 5\text{mm}$ 、 $\pm 10\text{mm}$ 、 $\pm 15\text{mm}$ 、 $\pm 20\text{mm}$ 、 $\pm 25\text{mm}$ 的误差, 通过对比拟合后的圆心坐标及半径与其设计值的差值、单位权中误差、

圆心点位误差、迭代次数等指标, 来分析不同采集精度情况下的拟合效果, 结果如表 1、表 2 及图 1 所示。

表 1 离散点不同采集精度情况下的圆心坐标及半径的对比
Tab. 1 Comparison of the Coordinates of the Circle Center and Radius between Different Collection Accuracy for Discrete Points

观测精度	迭代前			迭代后		
	a/m	b/m	r/m	a/m	b/m	r/m
±5mm	2548.3748	1074.9123	2.4987	2548.3748	1074.9123	2.4987
±10mm	2548.3750	1074.9120	2.5011	2548.3750	1074.9120	2.5011
±15mm	2548.3769	1074.9091	2.5062	2548.3769	1074.9091	2.5062
±20mm	2548.3650	1074.9080	2.5051	2548.3650	1074.9080	2.5051
±25mm	2548.3746	1074.9095	2.4935	2548.3746	1074.9095	2.4935

表 2 不同采集精度情况下的各项中误差的对比

Tab. 2 Comparison of Various Mean Square Errors between Different Collection Accuracy

观测精度	迭代前			迭代后			迭代次数
	M_0/mm	M_r/mm	M/mm	M_0/mm	M_r/mm	M/mm	
±5mm	4.648	0.930	1.859	4.648	0.930	1.859	3
±10mm	9.723	1.945	3.889	9.723	1.945	3.889	3
±15mm	15.372	3.074	6.149	15.372	3.074	6.149	3
±20mm	20.035	4.007	8.014	20.035	4.007	8.014	3
±25mm	26.515	5.303	10.606	26.515	5.303	10.606	3

注: a, b, r 分别为拟合后的圆心坐标值及半径, M_0 为单位权中误差, M_r 为半径的中误差, M 为点位中误差, 其值为 $M = \sqrt{M_0^2 + M_r^2}$ 。

2) 在实际测量工作中, 有时因为障碍物的遮挡无法观测到圆的整个圆周, 此时只能采集到圆上一段圆弧内的离散点。现在分别在 1/4 圆、2/4 圆、3/4 圆、4/4 圆内采集 15 个点, 并随机附加 ±10mm 的误差, 以此来分析离散点的分布情况对计算结果及拟合情况的影响, 结果分别如表 3、表 4 和图 2 所示。

3) 为了分析在满足均匀采集的前提下, 所采集离散点的数量对拟合结果的影响, 现在圆周上分别均匀地采集 5、10、15、20、25 个点, 并随机附加 ±10mm 的误差, 计算结果如表 5、表 6 和图 3 所示。

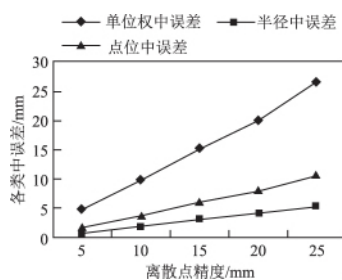


图 1 离散点精度对各类误差的影响

Fig. 1 Precision Effect of Discrete Points on the Various Errors

表 3 离散点不同分布情况下的圆心坐标及半径的对比
Tab. 3 Comparison of the Coordinates of the Circle Center and Radius between Different Distribution for Discrete Points

不同分布	迭代前			迭代后		
	a/m	b/m	r/m	a/m	b/m	r/m
1/4 圆	2547.6356	1074.2495	1.1826	2548.3801	1074.9188	2.5074
2/4 圆	2548.3473	1074.6370	2.0431	2548.3765	1074.9144	2.5063
3/4 圆	2548.3935	1074.8884	2.4215	2548.3775	1074.9103	2.4960
4/4 圆	2548.3713	1074.9196	2.4987	2548.3713	1074.9196	2.4987

表 4 离散点不同分布情况下的各项中误差的对比

Tab. 4 Comparison of Various Mean Square Errors between Different Distribution for Discrete Points

观测精度	迭代前			迭代后			迭代次数
	M_0/mm	M_r/mm	M/mm	M_0/mm	M_r/mm	M/mm	
1/4 圆	193.316	55.149	148.496	6.606	17.807	20.066	7
2/4 圆	124.785	34.160	76.299	5.794	3.472	5.347	6
3/4 圆	31.407	8.246	16.962	7.477	2.198	4.295	5
4/4 圆	8.262	2.133	4.266	8.262	2.133	4.266	3

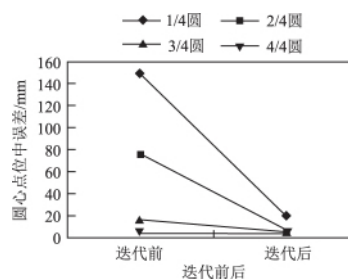


图 2 迭代对拟合精度的影响

Fig. 2 Effect of Iteration on the Fitting Accuracy

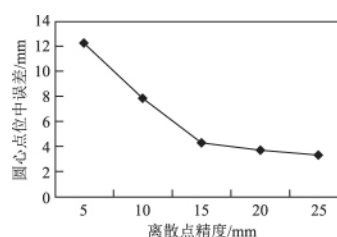


图 3 离散点个数对拟合精度的影响

Fig. 3 Number Effect of the Discrete Points on the Fitting Accuracy

表 5 离散点不同数量情况下的圆心坐标及半径的对比
Tab. 5 Comparison of the Coordinates of the Circle Center and Radius between Different Number for Discrete Points

点数	迭代前			迭代后		
	a/m	b/m	r/m	a/m	b/m	r/m
5	2548.3799	1074.9194	2.4998	2548.3799	1074.9194	2.4998
10	2548.3743	1074.9145	2.4960	2548.3743	1074.9145	2.4960
15	2548.3728	1074.9135	2.4977	2548.3728	1074.9135	2.4977
20	2548.3727	1074.9096	2.5008	2548.3728	1074.9096	2.5008
25	2548.3749	1074.9116	2.5003	2548.3749	1074.9116	2.5003

表 6 离散点不同数量情况下的各项中误差的对比

Tab. 6 Comparison of Various Mean Square Errors
between Different Number for Discrete Points

点数	迭代前			迭代后			迭代次数
	M_0/mm	M_r/mm	M/mm	M_0/mm	M_r/mm	M/mm	
5	13.698	6.126	12.252	13.696	6.125	12.250	3
10	12.422	3.928	7.857	12.423	3.928	7.857	3
15	8.209	2.119	4.239	8.209	2.119	4.239	3
20	8.135	1.819	3.638	8.135	1.819	3.638	3
25	8.166	1.633	3.266	8.166	1.633	3.266	3

3.2 实例数据

为了进一步验证该方法的可行性，又对实例数据进行了处理分析。其中实例数据来源于文献 [12]。文献 [12] 给出的是在实际工作中用全站仪观测得到的某大桥的两根圆形立柱顶部圆周上 16 个点的坐标，每根立柱各 8 个点，观测数据如表 7 所示，又用全站仪测得两立柱中心在桩基上的放样点的坐标分别为(373.206, 753.897)、(368.482, 748.579)，各点的分布情况如图 4、图 5 所示。本文采用前文介绍的方法对其相同的数据进行处理分析，并将结果与立柱中心的坐标进行比较，如表 8、表 9 所示。

表 7 文献 [12] 数据

Tab. 7 The Data of the Literature [12] m

观测点号	立柱 2#-1		立柱 2#-2	
	X	Y	X	Y
1	373.285	754.686	368.697	749.358
2	373.595	754.589	369.236	748.803
3	373.986	754.028	369.198	748.264
4	373.830	753.414	368.830	747.884
5	373.256	753.096	368.343	747.801
6	372.803	753.206	367.674	748.515
7	372.481	753.551	367.741	748.925
8	372.440	754.122	368.021	749.251

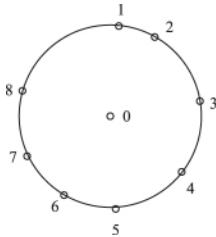


图 4 立柱 2#-1 点位分布
Fig. 4 The Point Distribution
of Column 2#-1

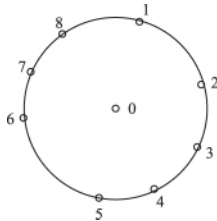


图 5 立柱 2#-2 点位分布
Fig. 5 The Point Distribution
of Column 2#-2

表 8 计算结果(2#-1)

Tab. 8 The Calculation Results(2#-1)

立柱	点组合	迭代前	迭代前	迭代后	迭代后	迭代	设计坐标
		$\frac{x}{y}/\text{m}$	r/m	$\frac{x}{y}/\text{m}$	r/m	次数	值 $\frac{x}{y}/\text{m}$
2#-1	4 5 6 7	373.198	Q.700	373.198	Q.796	6	
	6 7 8 1 2	753.783		753.887			
		373.170	Q.746	373.203	Q.797	5	
	6 7 8 1 2 3	753.913		753.894			373.206
		373.201	Q.783	373.202	Q.796	4	753.897
	6 7 8 1 2 3 4	753.895		753.895			
		373.200	Q.795	373.200	Q.796	3	
	6 7 8 1 2 3 4 5	753.896		753.896			
		373.201	Q.795	373.201	Q.796	3	
		753.895		753.895			

注：x、y 分别表示的是立柱中心的坐标，r 表示半径。

表 9 计算结果(2#-2)

Tab. 9 The Calculation Results(2#-2)

立柱	点组合	迭代前	迭代前	迭代后	迭代后	迭代	设计坐标
		$\frac{x}{y}/\text{m}$	r/m	$\frac{x}{y}/\text{m}$	r/m	次数	值 $\frac{x}{y}/\text{m}$
2#-2	6 7 8 1	368.400	Q.570	368.470	Q.800	6	
	6 7 8 1 2	748.697		748.590			
		368.456	Q.707	368.467	Q.797	5	
	6 7 8 1 2 3	748.640		748.593			368.482
		368.472	Q.767	368.468	Q.799	4	748.597
	6 7 8 1 2 3 4	748.604		748.591			
		368.469	Q.792	368.468	Q.797	3	
	6 7 8 1 2 3 4 5	748.594		748.593			
		368.468	Q.798	368.468	Q.798	2	
		748.592		748.592			

注：x、y 分别表示的是立柱中心的坐标，r 表示半径。

4 结束语

- 1)分析表 1、表 2 和图 1 可得，在离散点个数及分布位置相同的情况下，圆心坐标及半径的拟合精度与观测值的精度大致呈正相关的线性关系。
- 2)分析表 3、表 4、表 8、表 9 和图 2 可得，离散点的分布情况对拟合精度影响较大，在条件允许的情况下，应尽量在整个圆周上均匀采集离散点，才能得到最佳的拟合效果。
- 3)此外，若只在局部区域内采集离散点，如 1/4 圆、2/4 圆，此时只利用最小二乘法求得的圆心坐标及半径与设计值相差较大，即拟合效果不佳；这时候应用迭代法，经多次迭代可以使圆心坐标及半径最大程度上接近设计值，大幅度降低单位权中误差、半径中误差和点位中误差，这也是本文引入迭代法的最大作用；同时由表 4、表 8、表 9 可以得知迭代次数与离散点的分布情况有很大的关系，在圆上离散点采集的越均匀迭代次数越少。

(下转第 202 页)

- (LAI)反演研究现状[J], 测绘科学, 2010(S1): 162-164, 62.
- [2] 王希群, 马履一, 贾忠奎, 等. 叶面积指数的研究和应用进展[J], 生态学杂志, 2005, 24(5): 537-541.
- [3] 陈雪洋, 蒙继华, 朱建军, 等. 冬小麦叶面积指数的高光谱估算模型研究[J], 测绘科学, 2012, 37(5): 141-144.
- [4] 曹仕, 刘湘南, 刘美玲, 等. 融合冠层水分特征的光谱参数 NCVI 及反演玉米 LAI [J], 光谱学与光谱分析, 2011(2): 478-482.
- [5] 高峰, 车涛, 王介民, 等. 被动微波遥感指数及其应用[J], 遥感技术与应用, 2005, 20(6): 551-557.
- [6] BRUNFELDT D R, ULABY F T. Microwave emission from row crops [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 1986, 24(3): 353-359.
- [7] PALOSCIA S, PAMPALONI P. Microwave polarization index for monitoring vegetation growth [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 1988, 26(5): 617-621.
- [8] PALOSCIA S, PAMPALONI P. Microwave vegetation indexes for detecting biomass and water conditions of agricultural crops [J]. Remote Sensing of Environment, 1992, 40: 15-26.
- [9] MACELLONI G, PALOSCIA S, PAMPALONI P. Airborne multifrequency L to Ka band radiometric measurements over forests [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2001, 39(11): 300-307.
- [10] TIEN K C, JUDGE J. Passive microwave remote sensing of soil moisture, evapotranspiration, and vegetation properties during a growing season of cotton [C]// IGARSS, 2004(I): 2795-2798.
- [11] LU H, KOEKE T, TSUTSUI H, et al. Monitoring winter wheat growth with ground based microwave radiometers (GBMR)[C]// IGARSS, 2008(I): 201-204.
- [12] 余涛, 顾行发, 田国良, 等. 垄行结构玉米冠层方向亮温模型研究[J]. 遥感学报, 2006(10): 15-20.
- [13] 马红章, 刘素美, 朱晓波, 等. 基于被动微波遥感技术的玉米冠层叶面积指数反演[J]. 国土资源遥感, 2013(3): 66-71.
- [14] 刘晶, 柳钦火, 李静, 等. 联合热红外与微波的作物辐射方向性模型研究[J]. 遥感学报, 2014(1): 1-26.
- [15] ULABY F T, MOORE R K, FUNG A K. Microwave remote sensing: active and passive[M]. Dedham, MA: Artech House, 1986-03.

(责任编辑: 邓国臣)

(上接第 197 页)

4) 分析图 3、表 5 和表 6 可知, 在同精度、均匀采集的前提下, 离散点的数量与拟合精度并非呈正相关关系, 当离散点的点数达到一定数量之后, 随着离散点数量的增加, 拟合精度的增幅趋于平缓, 因此建议均匀采集 15~20 个离散点即可。

5) 综合分析上述各表、图可得, 如果离散点是在整个圆周上采集的, 此时迭代法基本失效, 直接应用最小二乘法求解即可满足要求。

参考文献

- [1] 丁克良, 沈云中, 欧吉坤. 整体最小二乘法直线拟合[J]. 辽宁工程技术大学学报: 自然科学版, 2010, 29(1): 44-47.
- [2] 王继刚, 周立, 蒋廷臣, 等. 一种简单的加权整体最小二乘直线拟合方法[J]. 测绘通报, 2014(4): 33-35.
- [3] 欧江霞, 李明峰, 王永明, 等. 基于稳健加权总体最小二乘的点云数据平面拟合[J]. 大地测量与地球动力学, 2014, 34(3): 160-163.
- [4] 李二涛, 张国焯, 曾虹. 基于最小二乘的曲面拟合算法研究[J]. 杭州电子科技大学学报, 2009, 29(2): 48-51.
- [5] 彭芳瑜, 周云, 飞周济. 基于插值与逼近的复杂曲面拟合[J]. 工程图学学报, 2002(4): 87-96.
- [6] 潘国荣, 房鹤飞, 唐杭. 基于等效全最小二乘准则的稳健球面拟合方法[J]. 测绘通报, 2013(增刊): 99-102.
- [7] 邓德标, 方源敏, 赵子龙, 等. 空间球状物体的数据采集与分析[J]. 测绘科学, 2013, 38(5): 146-148.
- [8] 徐国旺, 廖明潮. 拟合圆的几种方法[J]. 武汉工业学院学报, 2002(4): 104-106.
- [9] 潘桂新, 邓德标. 圆曲线拟合方法及数据采集分析[J]. 城市勘测, 2014(5): 143-145.
- [10] 武汉大学测绘学院测量平差学科组. 误差理论与测量平差基础(第二版)[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2009-05.
- [11] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析(第五版)[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.
- [12] 何凭宗. 圆曲线拟合及其在圆形立柱测量中的应用[J]. 测绘技术装备, 2001, 3(2): 13-15.

(责任编辑: 熊苹)