問1

$y=x^2+ax+b$ を x 軸方向に -3，y 軸方向に 8 だけ平行移動させると $y=x^2+3x+7$ が得られる．a,b を決定せよ．

$y=f(x)=x^2+ax+b$ とする．

x軸方向に -3，y軸方向に8だけ平行移動させたものは

$y=f(x+3)+8$

$=(x+3)^2+a(x+3)+b+8$

$=x^2+(a+6)x+3a+b+17$

これが $y=x^2+3x+7$ に等しいので

$a+6=3$　　$3a+b+17=7$

$a=-3$，$b=-1$

問2

$x=\sqrt{5}+2$ とするとき，

(1) $x^2+ax+b=0$ を満たす有理数 $a,b\in\mathbb{Q}$ を求めよ．

(2) $x^4-4x^3+x^2+2$ の値を求めよ．

(1)　$x-2=\sqrt{5}$

$(x-2)^2=5$　　$x^2-4x-1=0$

$a=-4$，$b=-1$

(2)　(1)より　$x^2=4x+1$

$x^4=(4x+1)^2=16x^2+8x+1$

$=64x+16+8x+1$

$=72x+17$

$x^3=x\cdot x^2=x(4x+1)$

$=4x^2+x=4(4x+1)+x$

$=17x+4$

$\therefore\ x^4-4x^3+x^2+2$

$=72x+17-68x-16+4x+1+2$

$=8x+4$

$=8\sqrt{5}+20$

問3

分数 $\dfrac{1}{13}$ を小数で表したときの，小数第 2025 位の数を答えよ．

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 …

0.076923 076923 076923

長さ6で循環してる

↓

6で2025を割った余りを調べればよい

$2025=6\times337+3$

6

No.05

問 4

a, b, c が，$a+b+c=3$，$a^2+b^2+c^2=1$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=4$ を満たすとき，以下を求めよ．

(1) $ab+bc+ca$

(2) $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$

(3) $a^3+b^3+c^3$

(4) $a^4+b^4+c^4$

(1) $(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$= a^2+b^2+c^2$

(2) $ab+bc+ca=4$

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{ab+bc+ca}{abc}=\dfrac{4}{abc}$

$abc=1$

$\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^2=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}+2\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\right)$

$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=16-2\cdot3=10$

(3) $a^3+b^3+c^3=3abc+(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=3+3\cdot(1-4)=-6$

(4) $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}=10$

$a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=-19$

問 5

k を $k>0$ を満たす定数とする．

(1) $x+k \leq 3x+2k \leq 5k+x$ の解を求めよ．

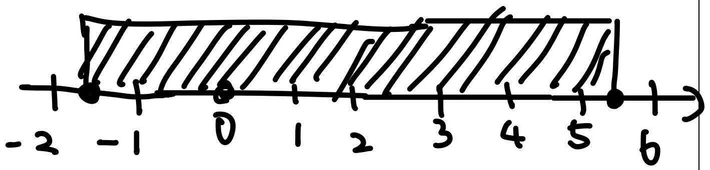
(2) $x+k \leq 3x+2k \leq 5k+x$ を満たす整数がちょうど 7 つ存在する k の範囲を求めよ．

(1) $x+k \leq 3x+2k \leq 5k+x$

$-k \leq 2x \leq 3k$

$-\dfrac{k}{2} \leq x \leq \dfrac{3}{2}k$

(2)



・$\dfrac{k}{2} \geq 2$ のとき 8個以上で×

・$\dfrac{k}{2} \leq 1$ のとき 4個以下で×

$-1, 0$ は確定

$5 \leq \dfrac{3}{2}k < 6$ でOK

$\dfrac{10}{3} \leq k < 4$ //

問 6

因数分解せよ．

(1) $2+x^2+y+x^2y+x^4y-3y^2+3x^2y^2$

(2) $x^3+x^2y+xy^2+y^3+xz+x^2z+yz+y^2z+z^2$

(3) $8x^6+84x^4y+294x^2y^2+343y^3$

(1) $(3x^2-3)y^2+(x^4+x^2+1)y+x^2+2$

$\begin{matrix} x^2-1 & \times & 1 \\ 3 & & x^2+2 \end{matrix}$

$=\{(x^2-1)y+1\}\{3y+(x^2+2)\}$

$=(x^2y-y+1)(x^2+3y+2)$

(2) $z^2+(y^2+y+x^2+x)z+(x^2+y^2)(x+y)$

$=(z+x^2+y^2)(z+x+y)$

$\begin{matrix} z & \times & x^2+y^2 \\ z & & x+y \end{matrix}$

(3) $a=2x^2$, $b=7y$ とすると

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ になっている

$\therefore (2x^2+7y)^3$