補習　知りたいものを文字でおく!　　　　　(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

問1

次の条件をみたす2次関数を求めよ.

(1) グラフが $(1, -3)$, $(2, -5)$, $(-1, -11)$ を通る.

(2) グラフが $y = 3x^2 + 5000x + 9947$ を平行移動したもので, 点 $(-1, 14)$ を通り, その頂点が $y = x^2 + 1$ 上にある.

(1)

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ とおく

$(1, -3), (2, 5), (-1, -11)$ を通るので

$$\begin{cases} f(1) = a + b + c = -3 & \cdots ① \\ f(2) = 4a + 2b + c = -5 & \cdots ② \\ f(-1) = a - b + c = -11 & \cdots ③ \end{cases}$$

1つの文字をけす. 今回はc

② − ①　$3a + b = -2$

② − ③　$3a + 3b = 6$

$2b = 8$

$b = 4$,　$a = -2$　$c = -5$

頭の中で元の連立方程式に代入して等号が成立しているか確認せよ.

(2)　→ 頂点 (p, q)

$y = a(x - p)^2 + q$ とおく

$y = 3x^2 + 5000x + 9947$ を平行移動したもの

→ $a = 3$ の情報しかない

$a = 3$.

$y = 3(x - p)^2 + q$

頂点 (p, q) が $y = x^2 + 1$ 上にあるので　$q = p^2 + 1$

$y = 3(x - p)^2 + p^2 + 1$　$\cdots$ (☆)

このグラフが $(-1, 14)$ を通るので

$14 = 3(-1 - p)^2 + p^2 + 1$

→ 2次方程式をとく

$4p^2 + 6p - 10 = 0$

$2(2p + 5)(p - 1) = 0$

$p = -\frac{5}{2}, 1$　☆に代入

$y = 3(x - 1)^2 + 2$, $y = 3\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{29}{4}$

問2

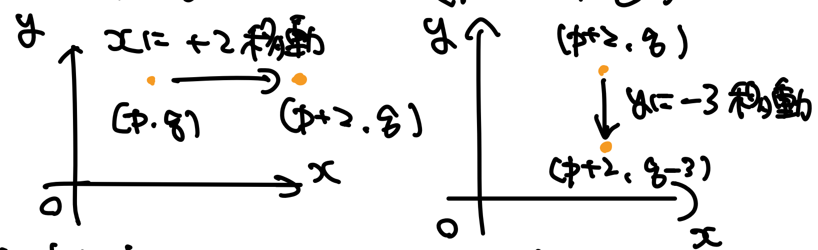
ある放物線を x 軸方向に $+2$, y 軸方向に -3, 原点に関して対称移動すると, 放物線 $y = -x^2 + 2x + 3$ になった.

元の方程式を $y = a(x - p)^2 + q$ とおくと, 1回原点に関して対称移動しているので $a = 1$ がわかる

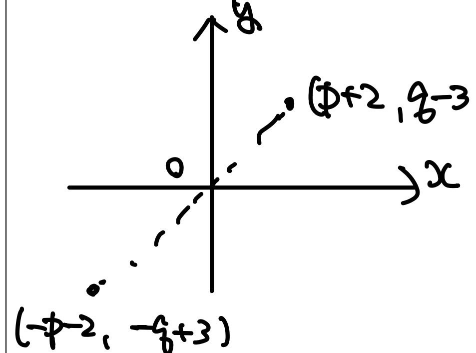
$y = (x - p)^2 + q$　頂点 (p, q)

頂点 (p, q) を x 軸方向に2移動すると

$(p, q) \longrightarrow (p + 2, q)$



y 軸方向に -3 移動すると $(p + 2, q - 3)$



原点に関して対称移動

$(-p - 2, -q + 3)$

これが $y = -x^2 + 2x + 3$ の頂点 $(1, 4)$ に一致.

$\therefore\ p = -3$, $q = -1$

$y = (x + 3)^2 - 1$

補習

問 3

不等式：

$$|x| - 4|3-x| < 3$$

を解け.

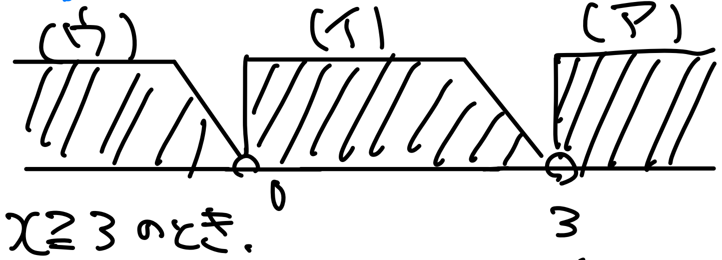
$|3-x| = |-(x-3)| = |x-3|$

$(\because \forall a \in \mathbb{R},\ |a| = |-a|)$

なので $|x| - 4|x-3| < 3$

を解くことと同じ.

線を書いて絶対値の中身が0になる点（今回は0, 3を打つ）



(ア) $x \geqq 3$ のとき,

$x,\ x-3>0$ なので

$x - 4(x-3) < 3$. i.e. $x>3$

$x\geqq 3$ とあわせて $x>3$

(イ) $0 \leqq x < 3$ のとき

$x>0,\ x-3<0$

$x - 4(3-x) < 3$, i.e. $x<5$

$0\leqq x<3$ とあわせて $0\leqq x<3$

(ウ) $x<0$ のとき, $x,\ x-3<0$

$-x-4(3-x)<3$, i.e. $x<5$

$x<0$ とあわせて $x<0$. (ア),(イ),(ウ)より $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ (3以外の実数)

問 4

a を定数とする.

$$2ax + a^2 < (a+1)x + a^3 + a^2 - 1$$

を解け.

x についてとく.

$(a-1)x < a^3 - 1$

$(a-1)x < (a-1)(a^2+a+1)$

$a-1$ でわりたいが, 割れない場合 $<$ の向きが変わる場合がある.

$a>1$ のとき

$x < a^2+a+1$

$a=1$ のとき

$0\cdot x < 0$ 解なし.

$a<1$ のとき

$x > a^2+a+1$

問 5

(1) $\dfrac{1}{2-\sqrt{10}-\sqrt{6}}$

(2) $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ の整数部分, 小数部分を求めよ.

(1) $2^2 + \sqrt{6}^2 = \sqrt{10}^2$ より消えるやつを考える.

$= \dfrac{1}{(2-\sqrt6)-\sqrt{10}} \quad \dfrac{(2-\sqrt6)+\sqrt{10}}{(2-\sqrt6)+\sqrt{10}}$

$(a-b)(a+b)$ が見える.

$= \dfrac{(2-\sqrt6)+\sqrt{10}}{4+6-10-4\sqrt6} = -\dfrac{2\sqrt{15}+2\sqrt6-6}{24}$

$= -\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt6-3}{12}$

(2) 考え方 $a>b>0 \Leftrightarrow a^2>b^2>0$ かつ $a,b>0$

4と比較

$4 \lessgtr \sqrt5+\sqrt7$

$4^2 \lessgtr (\sqrt5+\sqrt7)^2 = 12+2\sqrt{35}$

$4 \lessgtr 2\sqrt{35}$

$16 \lessgtr 140$

明らかに $<$

5と比較 $\sqrt5+\sqrt7<5$ がわかる.

整数部分 4, 小数部分 $\sqrt5+\sqrt7-4$