安定性条件

大阪大学大学院理学研究科数学専攻
山本　雄大

目次

1 三角圏の公理

定義 1.1. 以下の条件をみたす圏 $\mathcal{C}$ を前加法圏 (preadditive category) という．

(i) 任意の $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して，射の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ がアーベル群になる．

(ii) 任意の $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ に対して，合成写像

$$\begin{array}{cccc} \circ\colon & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (g, f) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

が双線型である．つまり，任意の $g, g' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$，$f, f' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ に対して，

$$(g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f \tag{1}$$

$$g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f' \tag{2}$$

が成り立つ．

定義 1.2. 以下の条件をみたす前加法圏 $\mathcal{C}$ を加法圏 (additive category) という．

(i) 零対象 (始対象かつ終対象) である $0 \in \mathcal{C}$ をを持つ．

(ii) 任意の対象 $X, Y \in \mathcal{C}$ に対し直和 $X \oplus Y$ が存在する．

定義 1.3. 加法圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ に対し，函手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が以下の条件を満たすとき加法函手 (additve functor) という．

(1) 任意の $X, Y \in \mathcal{C}$ に対し，

$$\begin{array}{cccc} F\colon & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & f & \longmapsto & F(f) \end{array}$$

がアーベル群の準同型写像になっている．つまり $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ に対し，

$$F(f + g) = F(f) + F(g)$$

となる．

(2) $0 \in \mathcal{C}$ に対し，$F(0) = 0$

(3) 直和を保つ．

$$F(A \oplus B) \simeq F(A) \oplus F(B)$$

定義 1.4. $\mathcal{C}$ を加法圏とする．このとき，$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ の核 (kernel) とは $\mathrm{Ker}\, f \in \mathcal{C}$ と $\ker f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Ker}\, f, X)$ の組 $(\mathrm{Ker}\, f, \ker f)$ であって，以下の普遍性をみたすものである．

$$\begin{tikzcd} K \arrow[d, dotted, "\exists! h"'] \arrow[dr, "k"] & & \\ \mathrm{Ker}\, f \arrow[r, "\ker f"'] & X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

(i) $f \circ \ker f = 0$

(ii) 任意の $K \in \mathcal{C}$ と $k \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(K,X)$ で $f \circ k = 0$ を満たすものに対して，一意に $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(K, \mathrm{Ker}\, f)$ が存在して，$\ker f \circ h = k$ となる．

$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ の $\mathcal{C}$ での反対圏での核を余核 (cokernel) とよび，$(\mathrm{Cok}\, f, \mathrm{cok}\, f)$ と記す．

定義 1.5. 加法圏 $\mathcal{A}$ がアーベル圏 (Abelian category) であるとは以下を満たす場合である．

(i) $\mathcal{A}$ の任意の射 f に対し，核 $\mathrm{Ker}\, f$ と余核 $\mathrm{Cok}\, f$ が存在する．

(ii) $\mathcal{A}$ の任意の射 f に対し，自然な同型 $\mathrm{Coim}(f) \simeq \mathrm{Im}\, f$ が存在する．

定義 1.6. [3] $\mathcal{D}$ を加法圏，[1] を自己同値函手とする．完全三角形と呼ばれる $\mathcal{D}$ における三角形の集合を備えた，以下の性質をみたす組 $(\mathcal{D}, [1])$ を三角圏と呼ぶ

(i) 任意の $X \in \mathcal{D}$ に対して，

$$X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \to 0 \to X[1]$$

は完全三角形．

(ii)

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "g"] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "h"] & X_1[1] \arrow[d, "f[1]"] \\ Y_1 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] & Y_3 \arrow[r] & Y_1[1] \end{tikzcd}$$

上の可換図式において，f, g, h が同型で $X_1 \to X_2 \to X_3 \to X_1[1]$ が完全三角形なら $Y_1 \to Y_2 \to Y_3 \to Y_1[1]$ も完全三角形

(iii) 任意の $X \xrightarrow{f} Y$ は

$$X \xrightarrow{f} Y \to Z \to X[1]$$

と完全三角形に拡張できる．

(iv)

$$X_1 \xrightarrow{u} X_2 \xrightarrow{v} X_3 \xrightarrow{w} X_1[1]$$

が完全三角形であることと

$$X_2 \xrightarrow{v} X_3 \xrightarrow{w} X_1[1] \xrightarrow{-u[1]} X_2[1]$$

が完全三角形であることが同値．

(v)

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "g"] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "h"] & X_1[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
Y_1 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] & Y_3 \arrow[r] & Y_1[1]
\end{tikzcd}$$

2 つの完全三角形と図式を可換にする f, g が存在したとき，すべての四角形を可換にする h が存在する．

(vi) 八面体公理

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{h} X \longrightarrow E[1]$$
$$E \xrightarrow{g\circ f} G \xrightarrow{l} Y \longrightarrow E[1]$$
$$F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{k} Z \longrightarrow F[1]$$

上記の 3 つの完全三角形に対して，以下の図式のすべての四角形を可換にし，4 行目を完全三角形にするような $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y), v \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Z), w \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Z, X[1])$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & F \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[r] \arrow[d, dotted, "u"] & E[1] \arrow[d, equal] \\
E \arrow[r, "g\circ f"] \arrow[d, "f"'] & G \arrow[r, "l"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d, dotted, "v"] & E[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
F \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & G \arrow[r, "k"] \arrow[d, "l"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & F[1] \arrow[d, "h[1]"] \\
X \arrow[r, dotted, "u"] & Y \arrow[r, dotted, "v"] & Z \arrow[r, dotted, "w"] & X[1]
\end{tikzcd}$$

例 1.7. アーベル圏 $\mathcal{A}$ に対して，その導来圏 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ は自然な三角圏の構造をもつ．また，有界導来圏 $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ も三角圏の構造をもつ．

命題 1.8. [3] $\mathcal{A}$ をアーベル圏とする．
$\mathcal{A}$ はその導来圏 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ および有界導来圏 $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ の部分圏として自然に埋め込まれる．

定義 1.9. アーベル圏 $\mathcal{A}$ と三角圏 $\mathcal{D}$ に対して，Grothendieck 群 $K(\mathcal{A})$ と $K(\mathcal{D})$ をそれぞれ対象たちで自由生成された群を以下の群で割ったものであると定める．

$$\langle [Y] - [X] - [Z] \mid \text{短完全列 } 0 \to X \to Y \to Z \to 0 \text{ が}\mathcal{A}\text{で存在する．} \rangle$$
$$\langle [Y] - [X] - [Z] \mid \text{完全三角形 } X \to Y \to Z \to X[1] \text{ が}\mathcal{D}\text{で存在する．} \rangle$$

補題 1.10. 三角圏 $\mathcal{D}$ において，任意の射 $f\colon E \to F$

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \to E[1]$$

定義 1.11. 三角圏 $\mathcal{D}$ からアーベル圏 $\mathcal{A}$ への加法函手 $\mathcal{H}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ がコホモロジー的であるとは以下の条件を満たすときである．
$\mathcal{D}$ における任意の完全三角形

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

に対して，$\mathcal{A}$ において以下の列が完全列になる

$$\mathcal{H}(X) \xrightarrow{\mathcal{H}(f)} \mathcal{H}(Y) \xrightarrow{\mathcal{H}(g)} \mathcal{H}(Z)$$

定義 1.12. $\mathcal{D}$ を三角圏，$\mathcal{C}$ をその充満部分加法圏としたとき以下の用語を定義する．

(i) $\mathcal{C}$ の $\mathcal{D}$ における右（左）直交部分圏 (right (left) orthogonal subcategory) $\mathcal{C}^{\perp}, {}^{\perp}\mathcal{C}$ を $\mathcal{D}$ の充満部分圏として

$$\mathcal{C}^{\perp} := \{Y \in \mathcal{D} \mid \forall X \in \mathcal{C},\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y) = 0\}$$

$${}^{\perp}\mathcal{C} := \{X \in \mathcal{D} \mid \forall Y \in \mathcal{C},\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y) = 0\}$$

(ii) $\mathcal{C}$ が $\mathcal{D}$ の狭義充満部分圏 (strictly full subcategory) であるとは以下を満たすときである．
$X \in \mathcal{C}$ かつ $Y \in \mathcal{D}$ に対して $X \simeq Y$ ならば $Y \in \mathcal{C}$

(iii) $\mathcal{C}$ の $\mathcal{D}$ における thick 閉包とは直和因子を取る操作で閉じている最小の狭義充満部分三角圏のことである．それを thick$\mathcal{C}$ と記す．

(iv) $\mathcal{C}$ が thick 部分圏 (thick subcategory) であるとは，$\mathcal{C} = \mathrm{thick}\mathcal{C}$ が成り立つときをいう．

$X^{\bullet} \in \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ に対して，$\tau_{\leq i}$，$\tau_{>i}, \sigma_{\leq i}, \sigma_{>i}$ を

$$\tau_{\leq i}X^{\bullet} := (\cdots \to X^{i-2} \to X^{i-1} \to \mathrm{Ker}\, d_X^i \to 0 \to \cdots)$$
$$\tau_{>i}X^{\bullet} := (\cdots \to 0 \to \mathrm{Im}\, d_X^i \to X^{i+1} \to X^{i+2} \to \cdots)$$
$$\sigma_{\leq i}X^{\bullet} := (\cdots \to X^{i-2} \to X^{i-1} \to X^i \to 0 \to \cdots)$$
$$\sigma_{>i}X^{\bullet} := (\cdots \to 0 \to X^{i+1} \to X^{i+2} \to X^{i+3} \to \cdots)$$

と定めると

$$\tau_{\leq i}X^{\bullet} \to X^{\bullet} \to \tau_{>i}X^{\bullet} \to \tau_{\leq i}X^{\bullet}[1] \tag{3}$$
$$\sigma_{>i}X^{\bullet} \to X^{\bullet} \to \sigma_{\leq i}X^{\bullet} \to \sigma_{>i}X^{\bullet}[1] \tag{4}$$

が完全三角形となる．

補題 1.13. $X^{\bullet} \in D^b(\mathcal{A})$ に対し，*Zrothendieck* 群 $K(D^b(\mathcal{A}))$ の中で

$$[X^{\bullet}] = \sum_i (-1)^i[\mathcal{H}^i(X^{\bullet})] = \sum_i (-1)^i[X^i]$$

証明. 完全三角形 (4) により，

$$[X^{\bullet}] = [\sigma_{>i}X^{\bullet}] + [\sigma_{\leq i}X^{\bullet}]$$

が成り立つ．$X^{\bullet}$ は有界複体なので，繰り返し適用すれば

$$[X^{\bullet}] = \sum_{i\in\mathbb{Z}}[X^i[-i]]$$

完全三角形 $X \to 0 \to X[1] \to X[1]$ を考えれば，$[X] = -X[1]$ より $[X^{\bullet}] = \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i[X^i]$
同様に完全三角形 (3) により，

$$[X^{\bullet}] = [\tau_{\leq i}X^{\bullet}] + [\tau_{>i}X^{\bullet}]$$

繰り返し用いて，

$$[X^{\bullet}] = \sum_{i\in\mathbb{Z}}([\mathrm{Im}\, d_X^i[-i]] + [\mathrm{Ker}\, d_X^i[-i]])$$
$$= \sum_{i\in\mathbb{Z}}((-1)^i(-[\mathrm{Im}\, d_X^{i-1}] + [\mathrm{Ker}\, d_X^i])$$

$0 \to \mathrm{Im}_X^{i-1} \to \mathrm{Ker}\, d_X^i \to \mathcal{H}^i(X) \to 0$ の短完全列より

$$= \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i[\mathcal{H}^i(X^{\bullet})]$$

□

補題 1.14. $\mathcal{A}$ から $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ への自然な埋め込みによって，

$$K(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{D}^b(\mathcal{A}))$$

で群の同型が与えられる．

証明. $\mathcal{A}$ での短完全列は $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ での完全三角形を対応させるので well-defined である．

$$\phi([X]) \coloneqq [(\cdots \to 0 \to X \to 0 \to \cdots)]$$
$$\psi([X^\bullet]) \coloneqq \sum_i (-1)^i [\mathcal{H}^i(X^\bullet)]$$

と定めると互いに逆を与えている． □

2 t-structure

定義 2.1. [2] $\mathcal{D}$ を三角圏．直和因子と同型を取る操作で閉じている加法部分圏 $\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0} \subset \mathcal{D}$ が次の条件を満たすとき，$(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ を $\mathcal{D}$ の t-構造と呼ぶ．$\mathcal{D}^{\leq n} \coloneqq \mathcal{D}^{\leq 0}[-n], \quad \mathcal{D}^{\geq n} \coloneqq \mathcal{D}^{\geq 0}[-n]$

(i) $\mathcal{D}^{\leq 0} \subset \mathcal{D}^{\leq 1} \quad \mathcal{D}^{\geq 1} \subset \mathcal{D}^{\geq 0}$

(ii) $\mathcal{D}^{\geq 1} \subset (\mathcal{D}^{\leq 0})^\perp$
つまり，$\forall E \in \mathcal{D}^{\leq 0}$, $\forall F \in \mathcal{D}^{\geq 1}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F) = 0$

(iii) 任意の $E \in \mathcal{D}$ に対して

$$\tau_{\leq 0}E \to E \to \tau_{\geq 1}E \to \tau_{\leq 0}E[1]$$

となるような $\tau_{\leq 0}E \in \mathcal{D}^{\leq 0}$, $\tau_{\geq 1}E \in \mathcal{D}^{\geq 1}$ が存在する．

補題 2.2. *(i)* $\mathcal{D}^{\geq 1} = (\mathcal{D}^{\leq 0})^\perp$
(ii) $E \in \mathcal{D}$ に対して，$\tau_{\leq 0}E \in \mathcal{D}^{\leq 0}, \tau_{\geq 1}E \in \mathcal{D}^{\geq 1}$ は同型を除いて一意に定まる．

証明. $E \in (\mathcal{D}^{\leq 0})^\perp$ を任意にとる．定義より以下の完全三角形がとれる．

$$\tau_{\leq 0}E \to E \to \tau_{\geq 1}E \to \tau_{\leq 0}E[1]$$

定義より，$\tau_{\leq 0}E \to E$ は 0 射であるので，$\tau_{\geq 1}E \simeq E \oplus \tau_{\leq 0}E[1] \in \mathcal{D}^{\geq 1}$．直和因子と同型を取る操作で閉じているので $E \in \mathcal{D}^{\geq 1}$．
一意性については，別の $F \in \mathcal{D}^{\leq 0}$, $G \in \mathcal{D}^{\geq 1}$ と完全三角形

$$F \to E \to G \to F[1]$$

があったとすると，$G[-1] \in \mathcal{D}^{\geq 2}$ なので $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F, G[-1]) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F, G) = 0$ なので， □

定義 2.3. [2] $(D^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ が t-構造を与えるとき，$\mathcal{D}$ の部分圏 $\mathcal{H} \coloneqq \mathcal{D}^{\leq 0} \cap \mathcal{D}^{\geq 0}$ は t-構造の核 (the heart of t-structure) と呼ばれる．

補題 2.4. *[2]* $\mathcal{H}$ は核，余核をもつ．

証明. $E, F \in \mathcal{H}$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(E, F)$ を任意にとる．このとき，三角圏の公理より以下の完全三角形

$$C \xrightarrow{e} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C[1]$$

が存在する．t-構造の定義より

$$X \xrightarrow{x} C[1] \xrightarrow{y} Y \to X[1]$$

が完全三角形となるような $X \in \mathcal{D}^{\leq -1}, Y \in \mathcal{D}^{\geq 0}$ が存在する．このとき，

$$y \circ g \colon B \to Y$$

が f の余核を与えることを示す．定義より，$A \in \mathcal{H} \subset \mathcal{D}^{\leq 0}$，$X \in \mathcal{D}^{\leq -1} \subset \mathcal{D}^{\leq 0}$ であり，八面体公理より存在する以下の完全三角形から

$$A \to M \to X \to A[1]$$

$M \in \mathcal{D}^{\leq 0}$ がわかる. $B \in \mathcal{H} \subset \mathcal{D}^{\leq 0}$, $A[1] \in \mathcal{D}^{\leq -1} \subset \mathcal{D}^{\leq 0}$ より $C[1] \in \mathcal{D}^{\leq 0}$ がしたがう. $X[1] \in \mathcal{D}^{\leq -2} \subset \mathcal{D}^{\leq 0}$ と合わせて，$Y \in \mathcal{D}^{\leq 0}$ がしたがう．取り方により $Y \in \mathcal{D}^{\geq 0}$ だったので $Y \in \mathcal{H}$ がわかる.
$Q \in \mathcal{H}$ と $q \circ f$ を満たす $q \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(B, Q)$ を任意にとると，$q = q' \circ g$ を満たす $q' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(C[1], Q)$ が存在する．また，$X \in \mathcal{D}^{\leq -1}$，$Q \in \mathcal{D}^{\geq 0}$ なので $g \circ q' = 0$．したがって，$q' = y \circ q''$ を満たす $q'' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Q)$ が存在する．完全系列

$$A \to B \xrightarrow{g} C[1] \to A[1]$$

に対して，コホモロジー的函手 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, Q)$ を作用させると $A[1] \in \mathcal{D}^{\leq -1}$ なので $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A[1], Q) = 0$ から完全列

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(C[1], Q) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(B, Q)$$

が存在して，$q = q' \circ g$ となる q' の一意性がわかる．どうように $X[1] \in \mathcal{D}^{\leq -1}$ なので,

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y[1], Q) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(C[1], Q)$$

$q' = q'' \circ y$ となる q'' の一意性がわかる．したがって，$y \circ g \colon B \to Y$ が $f \colon A \to B$ の余核を与えていることが示された．反対圏を考えることで核の存在も証明される. □

定理 2.5. *[2]* $\mathcal{H}$ はアーベル圏となる.

証明. 核，余核の存在は示されたので任意の射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(A, B)$ にたいして,

$$\mathrm{Im}(f) \simeq \mathrm{Coim}(f)$$

の存在を言えばよい. □

補題 2.6. $\mathcal{D}$ を三角圏，$\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ を充満部分加法圏としたとき，$\mathcal{A}$ 有界な t-構造 $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ の核であることと以下の条件が同値.

i. 任意の $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ $(k_1 > k_2)$ と $A, B \in \mathcal{A}$ に対して，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A[k_1], B[k_2]) = 0$

ii. 任意の対象 $E \in \mathcal{D}$ に対して，有限の整数の列

$$k_1 > k_2 \cdots > k_n$$

が存在して $A_j \in \mathcal{A}[k_j]$ となるような分解が存在する.

証明.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, equal] & E_0 \arrow[rr] & & E_1 \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \arrow[r] & E_{n-2} \arrow[rr] & & E_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dl] & & E_n \arrow[r, equal] \arrow[dl] & E \\
& & A_1 \arrow[ul, dotted, "{[1]}"] & & & & A_{n-1} \arrow[ul, dotted, "{[1]}"] & & A_n \arrow[ul, dotted, "{[1]}"] & &
\end{tikzcd}$$

□

3　安定性条件

定義 3.1. [1] アーベル圏 $\mathcal{A}$ 上の安定性条件とは群準同型

$$Z\colon K(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$$

で以下を満たすもの

(i) $\forall E(\neq 0) \in \mathcal{A}, Z(E) \in \mathbb{H} \coloneqq \{re^{i\pi\phi} \mid r > 0, 0 < \phi \leq 1\}$

(ii) 任意の $E \in \mathcal{A}$ に対して HN フィルトレーションが存在する．

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_k = E$$

で各 $F_i = E_i/E_{i-1}$ が Z について Z-半安定.

$E(\neq 0)$ が Z-半安定とは任意の部分対象 $0 \neq F \subsetneq E$ に対して，$\arg Z(F) \leq \arg Z(E)$ ここで,

$$\phi(E) \coloneqq \frac{1}{\pi} \arg Z(E) \in (0, 1]$$

と定める．

補題 3.2. $E, F \in \mathcal{D}$ が半安定で $\phi(E) > \phi(F)$ とき,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F) = 0$$

証明. $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F)$ が 0 でないと仮定する．

$$0 \to \mathrm{Ker}\, f \to E \to \mathrm{Im}\, f \to 0$$

の完全列が存在して E が半安定対象であることから $\phi(\mathrm{Im}\, f) \geq \phi(E)$．$\mathrm{Im}\, f \neq 0$ が F の部分対象で F も半安定であることから $\phi(F) \geq \phi(\mathrm{Im}\, f)$．これらを合わせると $\phi(F) \geq \phi(E)$．仮定に矛盾.

補題 3.3. *[1]* $\mathcal{A}$: アーベル圏，群準同型 $Z\colon K(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ が次の条件を満たすとき，*HN* フィルトレーションが存在する．つまり Z が安定性条件を定める．

(i) 全射の無限列

$$E_1 \twoheadrightarrow E_2 \twoheadrightarrow E_3 \twoheadrightarrow \cdots$$

で $\phi(E_i) > \phi(E_{i+1})$ となるものは存在しない．

(ii) 無限降下列

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$$

で $\phi(E_{i+1}) > \phi(E_i)$ となるものは存在しない．

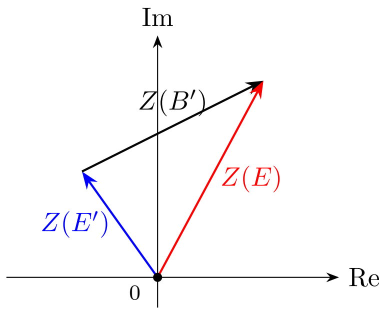
証明.

Step 1

•任意の対象 $E \in \mathcal{A}$ には $\phi(A) \geq \phi(E)$ を満たす半安定な部分対象 A が存在する．

•任意の対象 $E \in \mathcal{A}$ には $\phi(E) \geq \phi(B)$ を満たす半安定な対象 B と全射 $E \twoheadrightarrow B$ が存在する．

E が半安定なら OK. そうでないなら $\phi(E') > \phi(E)$ となる部分対象 $E'(\subsetneq E)$ がとれる．
これが無限回繰り返されると条件の (ii) に矛盾するので有限回でとまる．この極小となる A をとれば半安定である．
同様に E が半安定なら全射 $E \xrightarrow{\mathrm{id}} E$ がとれて OK. そうでないとき，$E'(\subsetneq E)$ で，$\phi(E') > \phi(E)$ が存在して，$B' \coloneqq E/E'$ と定めると $\phi(E) \geq \phi(B')$ であり，$E \twoheadrightarrow E/E'$ がとれて，有限回でこの操作はとまるのでいずれ半安定になる．



Step 2
$E \twoheadrightarrow B$ が次の条件をみたすとき mdq と呼ぶ.
•$\phi(E) \geq \phi(B)$
•任意の $E \twoheadrightarrow B'$ に対して，$\phi(B') \geq \phi(B)$ であり，$\phi(B') = \phi(B)$ なら

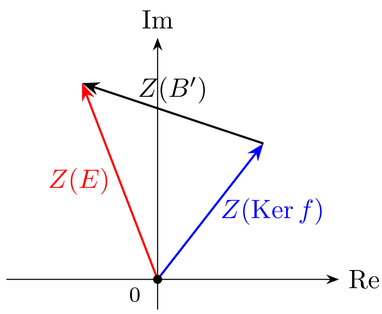
$$E \twoheadrightarrow B \twoheadrightarrow B'$$

と分解.
任意の対象 E は mdq を持つ.

$E \twoheadrightarrow B'$ において B' が半安定でないなら Step 1 から半安定な対象 B'' で $\phi(B') > \phi(B'')$ と $B' \twoheadrightarrow B''$ がとれるので，B' が半安定なときについて示せばよい．同様に mdq の B は半安定でなければならない.
E が半安定対象のとき，任意の全射 $E \twoheadrightarrow B'$ に対して，短完全列

$$0 \to \mathrm{Ker}\, f \to E \xrightarrow{f} B' \to 0$$

が存在するので $Z(B') = Z(E) - Z(\mathrm{Ker}\, f)$．安定対象なので，$\phi(\mathrm{Ker}\, f) \leq \phi(E)$



したがって，$\phi(B') \geq \phi(E)$ となり E が半安定対象のとき，$E \xrightarrow{\mathrm{id}} E$ は mdq となる.
そうでないとき，step1 より $\phi(A) > \phi(E)$ なる半安定対象 $A \subsetneq E$ と

$$0 \to A \to E \to E' \to 0$$

という完全列が存在する．$\phi(A) > \phi(E) > \phi(E')$ となっている．$E' \twoheadrightarrow B$ が E' の mdq となっているとき，合成 $E \twoheadrightarrow B$ は E の mdq であることを示す.
$\because E \twoheadrightarrow B'$ を半安定で $\phi(B') \leq \phi(B)$ となっているとすると

$$\phi(A) > \phi(E) > \phi(E') \geq \phi(B) \geq \phi(B')$$

A, B' は半安定対象であり，前の補題より $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B') = 0$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook] \arrow[dr, "0"'] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & E/A = E' \arrow[dl, dotted, two heads] \\
 & B' &
\end{tikzcd}$$

図式のように可換にする全射が普遍性から存在する．$E' \twoheadrightarrow B$ が mdq なので $\mu(B') = \mu(B)$ となり，mdq の条件より $E' \twoheadrightarrow B \twoheadrightarrow B'$ と経由する．したがって $E \twoheadrightarrow B \twoheadrightarrow B'$ が存在し，$E \twoheadrightarrow B$ が mdq であることがわかる．
E' が mdq でない場合は E を E' に取り替えて議論を繰り返すことと条件 (ii) から有限回でとまるので mdq の存在がわかる．

Step 3
任意の $E \in \mathcal{A}$ は HN フィルトレーションをもつ．

0 でない $E \in \mathcal{A}$ を任意にとる．E が半安定なら $0 \subset E$ が HN フィルトレーションを与えている．そうでないとき，$E \twoheadrightarrow B^1$ を mdq として

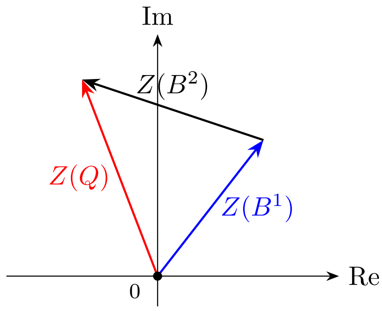
$$0 \to E^1 \to E \to B^1 \to 0$$

をとる．E^1 が半安定であるなら $0 \subsetneq E^1 \subsetneq E$ が HN フィルトレーションになっている．($E/E^1 \simeq B$ で mdq の B が半安定であるため)．E^1 が mdq でないとき，$E^1 \twoheadrightarrow B^2$ を mdq として

$$0 \to E^2 \to E^1 \to B^2 \to 0$$

$Q = E/E^2$ とすると，$E \twoheadrightarrow B^1$ が mdq であることから $\phi(Q) \geq \phi(B^1)$ であり，次の短完全列

$$0 \to B^2 \to Q \to B^1 \to 0$$



から $\phi(B^2) \geq \phi(Q)$ が得られる．$\phi(B^2) = \phi(Q) = \phi(B^1)$ と仮定すると，$E \twoheadrightarrow B^1$ が mdq であることから $E \twoheadrightarrow B^1 \twoheadrightarrow Q$ となって，B^1 と Q の双方向に全射があることから $B^1 \simeq Q$ となり，$B^2 = 0$．これは矛盾．したがって，$\phi(B^2) > \phi(B^1)$ が成り立つ．この操作は条件 (ii) より有限回でとまり，その商は半安定なので HN フィルトレーションを得る． $\square$

定義 3.4. $\mathcal{D}$: 三角圏．$\mathcal{D}$ 上の安定性条件とは，$\mathcal{D}$ の有界な t-構造の Heart $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ と $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}$ 上の安定性条件

$$Z\colon K(\mathcal{D}) = K(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$$

$(Z, \mathcal{A})$ のことである．

定義 3.5. 三角圏 $\mathcal{D}$ におけるスライスとは部分圏の族 $\{\mathcal{P}(\phi)\}_{\phi \in \mathbb{R}} \subset \mathcal{D}$ で次の条件を満たすもの
•$\forall \phi \in \mathbb{R}, \mathcal{P}(\phi + 1) = \mathcal{P}(\phi)[1]$
•$\phi_1 > \phi_2$ で $E_i \in \mathcal{P}(\phi_i)$ ならば $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E_1, E_2) = 0$
•任意の対象 $E \in \mathcal{D}$ に対して，実数列 $\phi_1 > \phi_2 > \cdots > \phi_n$ と

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, equal] & E_0 \arrow[rr] & & E_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_{n-2} \arrow[rr] & & E_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dl] & & E_n \arrow[r, equal] \arrow[dl] & E \\
& & F_1 \arrow[ul, dotted, "{[1]}"] & & & & F_{n-1} \arrow[ul, dotted, "{[1]}"] & & F_n \arrow[ul, dotted, "{[1]}"] & &
\end{tikzcd}$$

$F_i \in \mathcal{P}(\phi_i)$

補題 3.6. $\mathcal{D}$ に安定性条件 *($\mathcal{D}$ 上の有界な t-構造と stability 函数 Z)* をあたえることと，$\mathcal{D}$ 上のスライス $\mathcal{P}$ と群準同型 $Z\colon K(\mathcal{D}) \to \mathbb{C}$ の組 $(Z, \mathcal{P})$ で，任意の $\phi \in \mathbb{R}$ と $0 \neq E \in \mathcal{P}(\phi)$ に対して $Z(E) \in \mathbb{R}_{>0}e^{i\pi\phi}$ を与えることは同値.

証明. 安定性条件 $(Z, \mathcal{A}) \to$ スライス $\mathcal{P}$ の構成
各 $0 < \phi \leq 1$ に対して，

$$\mathcal{P}(\phi) \coloneqq \{E \in \mathcal{A} \mid E\colon Z\text{-半安定 } Z(E) \in \mathbb{R}_{>0}e^{i\pi\phi}\} \cup \{0\}$$

$\phi \in \mathbb{R}, \phi \in (k, k+1]$ となる整数 k をとって

$$\mathcal{P}(\phi) \coloneqq \mathcal{P}(\phi - k)[k]$$

こう定めたとき，スライスになっていることを確かめる.
$\bullet \forall\phi \in \mathbb{R}, \mathcal{P}(\phi + 1) = \mathcal{P}(\phi)[1]$ は定義から従う.
$\bullet \phi_1 > \phi_2$ と $E_i \in \mathcal{P}(\phi_i)$ 対して，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E_1, E_2) = 0$
このとき $F_1, F_2 \in \mathcal{P}((0, 1])$ を用いて，$E_1 = F_1[m]$，$E_2 = F_2[n], (m > n$または $m = n, \phi(F_1) > \phi(F_2))$ とかける.
$m = n$ のときは補題より 0 であることがわかる．$m > n$ のとき $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F_1[m], F_2[n]) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F_1, F_2[-(m-n)])$ なので，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F_1, F_2[-k]) = 0$ $k > 0$ を示せばよいが，$F_1 \in \mathcal{D}^{\leq 0}$，$F_2[-k] \in \mathcal{D}^{\geq k}$ なので t-構造の定義より 0 となることがわかる.
分解をもつことは t-構造の性質より，整数の列

$$k_1 > k_2 \cdots > k_n$$

と分解

$$\begin{tikzcd}
0 = E_0 \arrow[rr] & & E_1 \arrow[dl] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_{n-2} \arrow[rr] & & E_{n-1} \arrow[dl] \arrow[rr] & & E_n = E \arrow[dl] \\
& A_1[k_1] \arrow[ul, dotted, "{[1]}"] & & & & A_{n-1}[k_{n-1}] \arrow[ul, dotted, "{[1]}"] & & A_n[k_n] \arrow[ul, dotted, "{[1]}"] &
\end{tikzcd}$$

$A_j \in \mathcal{A}$ が存在する．各 A_j には仮定より HN フィルトレーションが存在するので更に分解することで 3 つ目の条件が得られる.
逆に $\mathcal{P}$ が与えられたとき，$\mathcal{F}^{\perp}[1] = \mathcal{D}^{\geq 0} \coloneqq \mathcal{P}((0, \infty)), \mathcal{F} = \mathcal{D}^{\leq 0} \coloneqq \mathcal{P}((-\infty, 1])$ が t-構造を定める．スライスの条件より，

4　安定性条件の空間

定義 4.1. $\mathrm{Slice}(\mathcal{D})$ を $\mathcal{D}$ 上のスライスの集合，$\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathrm{Slice}\mathcal{D}$ に対して，

$$d(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \coloneqq \sup_{0 \neq E \in \mathcal{D}} \{|\phi^-_{\mathcal{P}}(E) - \phi^-_{\mathcal{Q}}(E)|, |\phi^+_{\mathcal{P}}(E) - \phi^+_{\mathcal{Q}}(E)|\}$$

と定義する．距離空間の公理を満たす.

補題 4.2. $\phi^+_*(E), \phi^-_*(E)\colon \mathrm{Slice}(\mathcal{D}) \to \mathbb{R}$ は連続写像である.

参考文献

[1] Bridgeland, Tom, *Stability conditions on triangulated categories*, Annals of Mathematics, Vol. 166, No. 2, 2007, pp. 317 – 345.

[2] A. A. Beilinson, J. Bernstein, and P. Deligne, *Faisceaux pervers*, Astérisque, **100**, Société Mathématique de France, 1982. Chapitre 1.

[3] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 332, Springer-Verlag, Berlin, 2006.