安定性条件

大阪大学大学院理学研究科数学専攻
山本　雄大

目次

1 三角圏の公理

定義 1.1. 圏 $\mathcal{C}$ が前加法圏 (preadditive category) とは，以下を満たす場合である．

(i) 任意の $E, F \in \mathcal{C}$ に対して，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, F)$ が Abel 群になる．

(ii) 任意の $E, F, G \in \mathcal{C}$ に対して，

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F,G) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E,F) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E,G) \\ \cup & & \cup \\ (g,f) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

が双線型である．つまり，任意の $g, g' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F,G)$，$f, f' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E,F)$ に対して，

$$(g+g') \circ f = g \circ f + g' \circ f \tag{1}$$

$$g \circ (f+f') = g \circ f + g \circ f' \tag{2}$$

が成り立つ．

定義 1.2. 前加法圏 $\mathcal{C}$ が加法圏 (additive category) であるとは，

(i) 零対象 (始対象かつ終対象) である $0 \in \mathcal{C}$ をを持つ．

(ii) 任意の対象 $E, F \in \mathcal{C}$ に対し直和 $E \oplus F$ が存在する．

定義 1.3. 加法圏 $\mathcal{D}$ がアーベル圏であるとは

定義 1.4. $\mathcal{D}$ を加法圏，[1] を自己同値函手とする．完全三角形と呼ばれる $\mathcal{D}$ における三角形の集合を備えた，以下の性質をみたす組 $(\mathcal{D}, [1])$ を三角圏と呼ぶ

(i) 任意の $E \in \mathcal{D}$ に対して，

$$E \xrightarrow{\mathrm{id}_E} E \to 0 \to E[1]$$

は完全三角形．

(ii)

$$
\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & E_2 \arrow[r] \arrow[d, "g"] & E_3 \arrow[r] \arrow[d, "h"] & E_1[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
F_1 \arrow[r] & F_2 \arrow[r] & F_3 \arrow[r] & F_1[1]
\end{tikzcd}
$$

上の可換図式において，f, g, h が同型で $E_1 \to E_2 \to E_3 \to E_1[1]$ が完全三角形なら $F_1 \to F_2 \to F_3 \to F_1[1]$ も完全三角形

(iii) 任意の $E \xrightarrow{f} F$ は

$$E \xrightarrow{f} F \to G \to E[1]$$

と完全三角形に拡張できる．

(iv)

$$E_1 \xrightarrow{u} E_2 \xrightarrow{v} E_3 \xrightarrow{w} E_1[1]$$

が完全三角形であることと

$$E_2 \xrightarrow{v} E_3 \xrightarrow{w} E_1 \xrightarrow{-u[1]} E_2[1]$$

が完全三角形であることが同値.

(v)

$$
\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & E_2 \arrow[r] \arrow[d, "g"] & E_3 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "h"] & E_1[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
F_1 \arrow[r] & F_2 \arrow[r] & F_3 \arrow[r] & F_1[1]
\end{tikzcd}
$$

2 つの完全三角形と図式を可換にする f, g が存在したとき，すべての四角形を可換にする h が存在する．

(vi) 八面体公理

$$
\begin{array}{l}
E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{h} X \longrightarrow E[1] \\
E \xrightarrow{g \circ f} G \xrightarrow{l} Y \longrightarrow E[1] \\
F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{k} Z \longrightarrow F[1]
\end{array}
$$

上記の 3 つの完全三角形に対して，以下の図式のすべての四角形を可換にし，4 行目を完全三角形にするような $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y), v \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Z), w \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Z, X[1])$ が存在する．

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & F \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[r] \arrow[d, dotted, "u"] & E[1] \arrow[d, equal] \\
E \arrow[r, "g \circ f"] \arrow[d, "f"'] & G \arrow[r, "l"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d, dotted, "v"] & E[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
F \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & G \arrow[r, "k"] \arrow[d, "l"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & F[1] \arrow[d, "h[1]"] \\
X \arrow[r, dotted, "u"] & Y \arrow[r, dotted, "v"] & Z \arrow[r, dotted, "w"] & X[1]
\end{tikzcd}
$$

2 t-structure

定義 2.1. $\mathcal{D}$ を三角圏．充満部分三角圏 $\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0} \subset \mathcal{D}$ が次の条件を満たすとき，$(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ を $\mathcal{D}$ の t-構造と呼ぶ．$\mathcal{D}^{\leq n} \coloneqq \mathcal{D}^{\leq 0}[-n]$, $\quad \mathcal{D}^{\geq n} \coloneqq \mathcal{D}^{\geq 0}[-n]$

(i) $\mathcal{D}^{\leq 0} \subset \mathcal{D}^{\leq 1} \quad \mathcal{D}^{\geq 1} \subset \mathcal{D}^{\geq 0}$

(ii) $\mathcal{D}^{\geq 1} \subset (\mathcal{D}^{\leq 0})^{\perp}$
つまり，$\forall E \in \mathcal{D}^{\leq 0}$, $\forall F \in \mathcal{D}^{\geq 1}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F) = 0$

(iii) 任意の $E \in \mathcal{D}$ に対して

$$\tau_{\leq 0}E \to E \to \tau_{\geq 1}E \to \tau_{\leq 0}E[1]$$

となるような $\tau_{\leq 0}E \in \mathcal{D}$, $\tau_{\geq 1}E \in \mathcal{D}^{\geq 1}$ が存在する．

補題 2.2. *(i)* $\mathcal{D}^{\geq 1} = (\mathcal{D}^{\leq 0})^{\perp}$
(ii) E に対して，$\tau_{\leq 0}E, \tau_{\geq 1}E$ は同型を除いて一意に定まる．

証明．$E \in (\mathcal{D}^{\leq 0})^{\perp}$ を任意にとる．定義より以下の完全三角形がとれる．

$$\tau_{\leq 0}E \to E \to \tau_{\geq 1}E \to \tau_{\leq 0}E[1]$$

定義より，$\tau_{\leq 0}E \to E$ は 0 射であるので，$\tau_{\geq 1}E \simeq E \oplus \tau_{\leq 0}E[1] \in \mathcal{D}^{\geq 1}$ →直和因子を取る操作で閉じている？
一意性は半直交分解と同じ．

補題 2.3. $\mathcal{D}$ を三角圏，$\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ を充満部分加法圏としたとき，$\mathcal{A}$ 有界な t-構造 $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ の核であることと以下の条件が同値.

i. 任意の $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ $(k_1 > k_2)$ と $A, B \in \mathcal{A}$ に対して，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A[k_1], B[k_2]) = 0$

ii. 任意の対象 $E \in \mathcal{D}$ に対して，有限の整数の列

$$k_1 > k_2 \cdots > k_n$$

が存在して $A_j \in \mathcal{A}[k_j]$ となるような分解が存在する．

証明.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, equal] & E_0 \arrow[rr] & & E_1 \arrow[dl] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_{n-2} \arrow[rr] & & E_{n-1} \arrow[dl] \arrow[rr] & & E_n \arrow[dl] \arrow[r, equal] & E \\
& & A_1 \arrow[ul, dotted, "{[1]}"] & & & & A_{n-1} \arrow[ul, dotted, "{[1]}"] & & A_n \arrow[ul, dotted, "{[1]}"] & &
\end{tikzcd}$$

3 安定性条件

定義 3.1. [B1] Abel 圏 $\mathcal{A}$ 上の安定性条件とは群準同型

$$Z \colon K(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$$

で以下を満たすもの

(i) $\forall E(\neq 0) \in \mathcal{A}, Z(E) \in \mathbb{H} \coloneqq \{re^{i\pi\phi} \mid r > 0, 0 < \phi \leq 1\}$

(ii) 任意の $E \in \mathcal{A}$ に対して HN フィルトレーションが存在する．

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_k = E$$

で各 $F_i = E_i/E_{i-1}$ が Z について Z-半安定.

$E(\neq 0)$ が Z-半安定とは任意の部分対象 $0 \neq F \subsetneq E$ に対して，$\arg Z(F) \leq \arg Z(E)$ ここで，

$$\phi(E) \coloneqq \frac{1}{\pi} \arg Z(E) \in (0,1]$$

と定める．

補題 3.2. $E, F \in \mathcal{D}$ が半安定で $\phi(E) > \phi(F)$ とき，

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E,F) = 0$$

証明．$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E,F)$ が 0 でないと仮定する．

$$0 \to \mathrm{Ker}\, f \to E \to \mathrm{Im}\, f \to 0$$

の完全列が存在して E が半安定対象であることから $\phi(\mathrm{Im}\, f) \geq \phi(E)$．$\mathrm{Im}\, f \neq 0$ が F の部分対象で F も半安定であることから $\phi(F) \geq \phi(\mathrm{Im}\, f)$．これらを合わせると $\phi(F) \geq \phi(E)$．仮定に矛盾．

補題 3.3. *[B1]* $\mathcal{A}$: アーベル圏，群準同型 $Z\colon K(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ が次の条件を満たすとき，*HN* フィルトレーションが存在する．つまり Z が安定性条件を定める．

(i) 全射の無限列

$$E_1 \twoheadrightarrow E_2 \twoheadrightarrow E_3 \twoheadrightarrow \cdots$$

で $\phi(E_i) > \phi(E_{i+1})$ となるものは存在しない．

(ii) 無限降下列

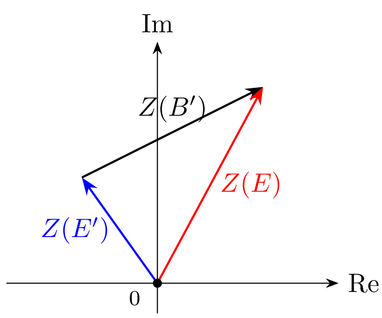
$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$$

で $\phi(E_{i+1}) > \phi(E_i)$ となるものは存在しない．

証明．

Step 1
●任意の対象 $E \in \mathcal{A}$ には $\phi(A) \geq \phi(E)$ を満たす半安定な部分対象 A が存在する．
●任意の対象 $E \in \mathcal{A}$ には $\phi(E) \geq \phi(B)$ を満たす半安定な対象 B と全射 $E \twoheadrightarrow B$ が存在する．

E が半安定なら OK. そうでないなら $\phi(E') > \phi(E)$ となる部分対象 $E'(\subsetneq E)$ がとれる．
これが無限回繰り返されると条件の (ii) に矛盾するので有限回でとまる．この極小となる A をとれば半安定である．
同様に E が半安定なら全射 $E \xrightarrow{\mathrm{id}} E$ がとれて OK. そうでないとき，$E'(\subsetneq E)$ で，$\phi(E') > \phi(E)$ が存在して，$B' \coloneqq E/E'$ と定めると $\phi(E) \geq \phi(B')$ であり，$E \twoheadrightarrow E/E'$ がとれて，有限回でこの操作はとまるのでいずれ半安定になる．



Step 2

$E \twoheadrightarrow B$ が次の条件をみたすとき mdq と呼ぶ.

•$\phi(E) \geq \phi(B)$

•任意の $E \twoheadrightarrow B'$ に対して，$\phi(B') \geq \phi(B)$ であり，$\phi(B') = \phi(B)$ なら

$$E \twoheadrightarrow B \twoheadrightarrow B'$$

と分解.

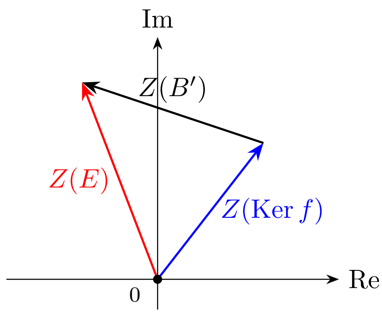
任意の対象 E は mdq を持つ.

$E \twoheadrightarrow B'$ において B' が半安定でないなら Step 1 から半安定な対象 B'' で $\phi(B') > \phi(B'')$ と $B' \twoheadrightarrow B''$ がとれるので，B' が半安定なときについて示せばよい．同様に mdq の B は半安定でなければならない.

E が半安定対象のとき，任意の全射 $E \twoheadrightarrow B'$ に対して，短完全列

$$0 \to \operatorname{Ker} f \to E \xrightarrow{f} B' \to 0$$

が存在するので $Z(B') = Z(E) - Z(\operatorname{Ker} f)$．安定対象なので，$\phi(\operatorname{Ker} f) \leq \phi(E)$



したがって，$\phi(B') \geq \phi(E)$ となり E が半安定対象のとき，$E \xrightarrow{\mathrm{id}} E$ は mdq となる.

そうでないとき，step1 より $\phi(A) > \phi(E)$ なる半安定対象 $A \subsetneq E$ と

$$0 \to A \to E \to E' \to 0$$

という完全列が存在する．$\phi(A) > \phi(E) > \phi(E')$ となっている．$E' \twoheadrightarrow B$ が E' の mdq となっているとき，合成 $E \twoheadrightarrow B$ は E の mdq であることを示す.

$\because E \twoheadrightarrow B'$ を半安定で $\phi(B') \leq \phi(B)$ となっているとすると

$$\phi(A) > \phi(E) > \phi(E') \geq \phi(B) \geq \phi(B')$$

A, B' は半安定対象であり，前の補題より $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B') = 0$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook] \arrow[dr, "0"'] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & E/A = E' \arrow[dl, dotted, two heads] \\
& B' &
\end{tikzcd}$$

図式のように可換にする全射が普遍性から存在する．$E' \twoheadrightarrow B$ が mdq なので $\mu(B') = \mu(B)$ となり，mdq の条件より $E' \twoheadrightarrow B \twoheadrightarrow B'$ と経由する．したがって $E \twoheadrightarrow B \twoheadrightarrow B'$ が存在し，$E \twoheadrightarrow B$ が mdq であることがわかる.

E' が mdq でない場合は E を E' に取り替えて議論を繰り返すことと条件 (ii) から有限回でとまるので mdq の存在がわかる.

Step 3
任意の $E \in \mathcal{A}$ は HN フィルトレーションをもつ．

0 でない $E \in \mathcal{A}$ を任意にとる．E が半安定なら $0 \subset E$ が HN フィルトレーションを与えている．そうでないとき，$E \twoheadrightarrow B^1$ を mdq として

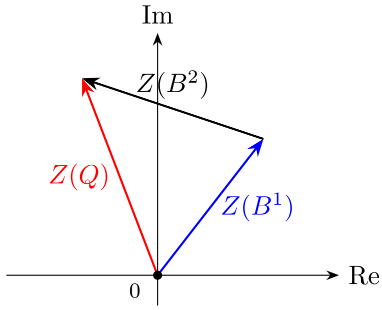
$$0 \to E^1 \to E \to B^1 \to 0$$

をとる．E^1 が半安定であるなら $0 \subsetneq E^1 \subsetneq E$ が HN フィルトレーションになっている．($E/E^1 \simeq B$ で mdq の B が半安定であるため)．E^1 が mdq でないとき，$E^1 \twoheadrightarrow B^2$ を mdq として

$$0 \to E^2 \to E^1 \to B^2 \to 0$$

$Q = E/E^2$ とすると，$E \twoheadrightarrow B^1$ が mdq であることから $\phi(Q) \geq \phi(B^1)$ であり，次の短完全列

$$0 \to B^2 \to Q \to B^1 \to 0$$



から $\phi(B^2) \geq \phi(Q)$ が得られる．$\phi(B^2) = \phi(Q) = \phi(B^1)$ と仮定すると，$E \twoheadrightarrow B^1$ が mdq であることから $E \twoheadrightarrow B^1 \twoheadrightarrow Q$ となって，B^1 と Q の双方向に全射があることから $B^1 \simeq Q$ となり，$B^2 = 0$．これは矛盾．したがって，$\phi(B^2) > \phi(B^1)$ が成り立つ．この操作は条件 (ii) より有限回でとまり，その商は半安定なので HN フィルトレーションを得る．

定義 3.4. $\mathcal{D}$: 三角圏．$\mathcal{D}$ 上の安定性条件とは，$\mathcal{D}$ の有界な t-構造の Heart $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ と $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}$ 上の安定性条件

$$Z \colon K(\mathcal{D}) = K(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$$

$(Z, \mathcal{A})$ のことである．

定義 3.5. 三角圏 $\mathcal{D}$ におけるスライスとは部分圏の族 $\{\mathcal{P}(\phi)\}_{\phi \in \mathbb{R}} \subset \mathcal{D}$ で次の条件を満たすもの
•$\forall \phi \in \mathbb{R}, \mathcal{P}(\phi + 1) = \mathcal{P}(\phi)[1]$
•$\phi_1 > \phi_2$ で $E_i \in \mathcal{P}(\phi_i)$ ならば $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E_1, E_2) = 0$
•任意の対象 $E \in \mathcal{D}$ に対して，実数列 $\phi_1 > \phi_2 > \cdots > \phi_n$ と

$$\begin{tikzcd}
0 = E_0 \arrow[rr] & & E_1 \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \arrow[r] & E_{n-2} \arrow[rr] & & E_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dl] & & E_n = E \arrow[dl] \\
& F_1 \arrow[ul, dotted, "{[1]}"] & & & & F_{n-1} \arrow[ul, dotted, "{[1]}"] & & F_n \arrow[ul, dotted, "{[1]}"] &
\end{tikzcd}$$

$F_i \in \mathcal{P}(\phi_i)$

補題 3.6. *$\mathcal{D}$ に安定性条件 ($\mathcal{D}$ 上の有界な t-構造と stability 函数 Z) をあたえることと，$\mathcal{D}$ 上のスライス $\mathcal{P}$ と群準同型 $Z \colon K(\mathcal{D}) \to \mathbb{C}$ の組 $(Z, \mathcal{P})$ で，任意の $\phi \in \mathbb{R}$ と $0 \neq E \in \mathcal{P}(\phi)$ に対して $Z(E) \in \mathbb{R}_{>0} e^{i\pi\phi}$ を与えることは同値．*

証明. 安定性条件 $(Z, \mathcal{A}) \to$ スライス $\mathcal{P}$ の構成
各 $0 < \phi \leq 1$ に対して,

$$\mathcal{P}(\phi) \coloneqq \{E \in \mathcal{A} \mid E\colon Z\text{-半安定 } Z(E) \in \mathbb{R}_{>0} e^{i\pi\phi}\} \cup \{0\}$$

$\phi \in \mathbb{R}, \phi \in (k, k+1]$ となる整数 k をとって

$$\mathcal{P}(\phi) \coloneqq \mathcal{P}(\phi - k)[k]$$

こう定めたとき, スライスになっていることを確かめる.
●$\forall \phi \in \mathbb{R}, \mathcal{P}(\phi+1) = \mathcal{P}(\phi)[1]$ は定義から従う.
●$\phi_1 > \phi_2$ と $E_i \in \mathcal{P}(\phi_i)$ 対して, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E_1, E_2) = 0$
このとき $F_1, F_2 \in \mathcal{P}((0,1])$ を用いて, $E_1 = F_1[m]$, $E_2 = F_2[n], (m > n$または $m = n, \phi(F_1) > \phi(F_2))$ とかける.
$m = n$ のときは補題より 0 であることがわかる. $m > n$ のとき $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F_1[m], F_2[n]) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F_1, F_2[-(m-n)])$ なので, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F_1, F_2[-k]) = 0$ $k > 0$ を示せばよいが, $F_1 \in \mathcal{D}^{\leq 0}$, $F_2[-k] \in \mathcal{D}^{\geq k}$ なので t-構造の定義より 0 となることがわかる.
分解をもつことは t-構造の性質より, 整数の列

$$k_1 > k_2 \cdots > k_n$$

と分解

$$\begin{tikzcd}
0 = E_0 \arrow[rr] & & E_1 \arrow[dl] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_{n-2} \arrow[rr] & & E_{n-1} \arrow[dl] \arrow[rr] & & E_n = E \arrow[dl] \\
& A_1[k_1] \arrow[ul, dotted, "{[1]}"] & & & & A_{n-1}[k_{n-1}] \arrow[ul, dotted, "{[1]}"] & & A_n[k_n] \arrow[ul, dotted, "{[1]}"] &
\end{tikzcd}$$

$A_j \in \mathcal{A}$ が存在する. 各 A_j には仮定より HN フィルトレーションが存在するので更に分解することで 3 つ目の条件が得られる.
逆に $\mathcal{P}$ が与えられたとき, $\mathcal{F}^{\perp}[1] = \mathcal{D}^{\geq 0} \coloneqq \mathcal{P}((0, \infty)), \mathcal{F} = \mathcal{D}^{\leq 0} \coloneqq \mathcal{P}((-\infty, 1])$ が t-構造を定める. スライスの条件より,

4 安定性条件の空間

定義 4.1. $\mathrm{Slice}(\mathcal{D})$ を $\mathcal{D}$ 上のスライスの集合, $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathrm{Slice}\mathcal{D}$ に対して,

$$d(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \coloneqq \sup_{0 \neq E \in \mathcal{D}} \{|\phi^-_{\mathcal{P}}(E) - \phi^-_{\mathcal{Q}}(E)|, |\phi^+_{\mathcal{P}}(E) - \phi^+_{\mathcal{Q}}(E)|\}$$

と定義する. 距離空間の公理を満たす.

補題 4.2. $\phi^+_*(E), \phi^-_*(E)\colon \mathrm{Slice}(\mathcal{D}) \to \mathbb{R}$ は連続写像である.

参考文献

[B1] Bridgeland, Tom, *Stability conditions on triangulated categories*, Annals of Mathematics, Vol. 166, No. 2, 2007, pp. 317 – 345.