1　三角圏の公理

加法圏 $\mathcal{D}$ と自己同値 $[1]$ に対して以下を満たすとき三角圏と呼ぶ.

(i)
$$E \xrightarrow{\mathrm{id}} E \to 0 \to E[1]$$
は完全三角形.

(ii)
$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & E_2 \arrow[r] \arrow[d, "g"] & E_3 \arrow[r] \arrow[d, "h"] & E_1[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
F_1 \arrow[r] & F_2 \arrow[r] & F_3 \arrow[r] & F_1[1]
\end{tikzcd}$$

上の可換図式において，f, g, h が同型で $F_1 \to F_2 \to F_3 \to F_1[1]$ が完全三角形なら $F_1 \to F_2 \to F_3 \to F_1[1]$ も完全三角形

(iii) 任意の $E \xrightarrow{f} F$ は
$$E \xrightarrow{f} F \to G \to E[1]$$
と完全三角形に拡張できる.

(iv)
$$E_1 \xrightarrow{u} E_2 \xrightarrow{v} E_3 \xrightarrow{w} E_1[1]$$
が完全三角形であることと
$$E_2 \xrightarrow{v} E_3 \xrightarrow{w} E_1 \xrightarrow{-u[1]} E_2[1]$$
が完全三角形であることが同値.

(v)
$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & E_2 \arrow[r] \arrow[d, "g"] & E_3 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "h"] & E_1[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
F_1 \arrow[r] & F_2 \arrow[r] & F_3 \arrow[r] & F_1[1]
\end{tikzcd}$$

2 つの完全三角形と図式を可換にする f, g が存在したとき，すべての四角形を可換にする h が存在する.

(vi) 八面体公理

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{h} Z \longrightarrow E[1]$$
$$E \xrightarrow{g\circ f} G \xrightarrow{l} Y \longrightarrow E[1]$$
$$F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{k} X \longrightarrow F[1]$$

上記の 3 つの完全三角形に対して，以下の図式のすべての四角形を可換にし，4 行目を完全三角形にするような u, v, w が存在する.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & F \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r] \arrow[d, dotted, "u"] & E[1] \arrow[d, equal] \\
E \arrow[r, "g\circ f"] \arrow[d, "f"] & G \arrow[r, "l"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d, dotted, "v"] & E[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
F \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & G \arrow[r, "k"] \arrow[d, "l"] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & F[1] \arrow[d, "h[1]"] \\
Z \arrow[r, dotted, "u"] & Y \arrow[r, dotted, "v"] & X \arrow[r, dotted, "w"] & Z[1]
\end{tikzcd}$$

2 t-structure

Def 2.1.

$\mathcal{D}$ を三角圏．充満部分三角圏 $\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0} \subset \mathcal{D}$ が次の条件を満たすとき，$(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ を $\mathcal{D}$ の t-構造と呼ぶ．
$\mathcal{D}^{\leq n} := \mathcal{D}^{\leq 0}[n], \quad \mathcal{D}^{\geq n} := \mathcal{D}^{\geq 0}[n]$

(i) $\mathcal{D}^{\leq 0} \subset \mathcal{D}^{\leq 1} \quad \mathcal{D}^{\geq 1} \subset \mathcal{D}^{\geq 0}$
(ii) $\mathcal{D}^{\geq 1} \subset (\mathcal{D}^{\leq 0})^{\perp}$
つまり，$\forall E \in \mathcal{D}^{\leq 0}$, $\forall F \in \mathcal{D}^{\geq 1}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F) = 0$
(iii) 任意の $E \in \mathcal{D}$ に対して

$$\tau_{\leq 0}E \to E \to \tau_{\geq 1}E \to \tau_{\leq 0}E[1]$$

となるような $\tau_{\leq 0}E \in \mathcal{D}$, $\tau_{\geq 1}E \in \mathcal{D}^{\geq 1}$ が存在する．

Prop 2.2.

(i) $\mathcal{D}^{\geq 1} = (\mathcal{D}^{\leq 0})^{\perp}$
(ii) E に対して，$\tau_{\leq 0}E, \tau_{\geq 1}E$ は同型を除いて一意に定まる．

Proof. $E \in (\mathcal{D}^{\leq 0})^{\perp}$ を任意にとる．定義より以下の完全三角形がとれる．

$$\tau_{\leq 0}E \to E \to \tau_{\geq 1}E \to \tau_{\leq 0}E[1]$$

定義より，$\tau_{\leq 0}E \to E$ は 0 射であるので，$\tau_{\geq 1}E \simeq$

■

射影的代数曲線 $\overset{\text{def}}{\iff}$ 射影空間 $\mathbb{P}^n$ 内の 1 次元部分多様体

3 安定性条件

Def 3.1.

Abel 圏 $\mathcal{A}$ 上の安定性条件とは群準同型

$$Z \colon K(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$$

で以下を満たすもの

(i) $\forall E (\neq 0) \in \mathcal{A}, Z(E) \in \mathbb{H} := \{re^{i\pi\phi} \mid r > 0, 0 < \phi \leq 1\}$
(ii) 任意の $E \in \mathcal{A}$ に対して HN フィルトレーションが存在する．

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_k = E$$

で各 $F_i = E_i/E_{i-1}$ が Z について Z-半安定.

$E(\neq 0)$ が Z-半安定とは任意の部分対象 $0 \neq F \subsetneq E$ に対して，$\arg Z(F) \leq \arg Z(E)$ ここで，

$$\phi(E) := \frac{1}{\pi} \arg Z(E)$$

と定める．

Lem 3.2.

$E, F \in \mathcal{D}$ が半安定で $\phi(E) > \phi(F)$ とき，

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F) = 0$$

Proof. $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F)$ が 0 でないと仮定する．

$$0 \to \mathrm{Ker}\, f \to E \to \mathrm{Im}\, f \to 0$$

の完全列が存在して E が半安定対象であることから $\phi(\mathrm{Im}\, f) \geq \phi(E)$．$\mathrm{Im}\, f \neq 0$ が F の部分対象で F も半安定であることから $\phi(F) \geq \phi(\mathrm{Im}\, f)$．これらを合わせると $\phi(F) \geq \phi(E)$．仮定に矛盾． ■

Lem 3.3.

$\mathcal{A}$: アーベル圏，群準同型 $Z\colon K(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ が次の条件を満たすとき，HN フィルトレーションが存在する．つまり Z が安定性条件を定める．

(i) 全射の無限列

$$E_1 \twoheadrightarrow E_2 \twoheadrightarrow E_3 \twoheadrightarrow \cdots$$

で $\phi(E_i) > \phi(E_{i+1})$ となるものは存在しない．

(ii) 無限降下列

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$$

で $\phi(E_{i+1}) > \phi(E_i)$ となるものは存在しない．

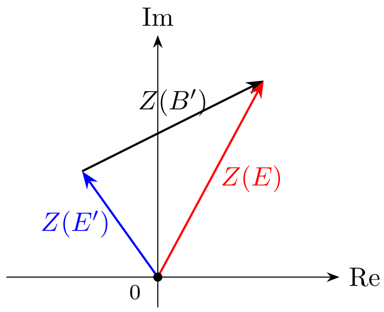
Proof.

Step 1

•任意の対象 $E \in \mathcal{A}$ には $\phi(A) \geq \phi(E)$ を満たす半安定な部分対象 A が存在する．

•任意の対象 $E \in \mathcal{A}$ には $\phi(E) \geq \phi(B)$ を満たす半安定な対象 B と全射 $E \twoheadrightarrow B$ が存在する．

E が半安定なら OK. そうでないなら $\phi(E') > \phi(E)$ となる部分対象 $E'(\subsetneq E)$ がとれる．
これが無限回繰り返されると条件の (ii) に矛盾するので有限回でとまる．この極小となる A をとれば半安定である．
同様に E が半安定なら全射 $E \xrightarrow{\mathrm{id}} E$ がとれて OK. そうでないとき，$E'(\subsetneq E)$ で，$\phi(E') > \phi(E)$ が存在して，$B' := E/E'$ と定めると $\phi(E) \geq \phi(B')$ であり，$E \twoheadrightarrow E/E'$ がとれて，有限回でこの操作はとまるのでいずれ半安定になる．



Step 2

$E \twoheadrightarrow B$ が次の条件をみたすとき mdq と呼ぶ.

•$\phi(E) \geq \phi(B)$

•任意の $E \twoheadrightarrow B'$ に対して，$\phi(B') \geq \phi(B)$ であり，$\phi(B') = \phi(B)$ なら

$$E \twoheadrightarrow B \twoheadrightarrow B'$$

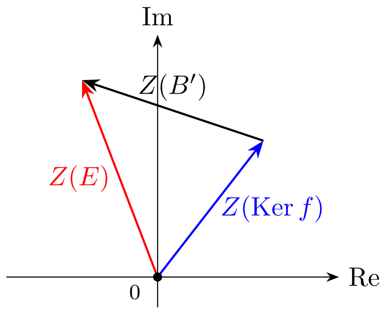
と分解.

任意の対象 E は mdq を持つ.

$E \twoheadrightarrow B'$ において B' が半安定でないなら Step 1 から半安定な対象 B'' で $\phi(B') > \phi(B'')$ と $B' \twoheadrightarrow B''$ がとれるので，B' が半安定なときについて示せばよい．同様に mdq の B は半安定でなければならない．
E が半安定対象のとき，任意の全射 $E \twoheadrightarrow B'$ に対して，短完全列

$$0 \to \mathrm{Ker}\, f \to E \xrightarrow{f} B' \to 0$$

が存在するので $Z(B') = Z(E) - Z(\mathrm{Ker}\, f)$．安定対象なので，$\phi(\mathrm{Ker}\, f) \leq \phi(E)$



したがって，$\phi(B') \geq \phi(E)$ となり E が半安定対象のとき，$E \xrightarrow{\mathrm{id}} E$ は mdq となる．
そうでないとき，step1 より $\phi(A) > \phi(E)$ なる半安定対象 $A \subsetneq E$ と

$$0 \to A \to E \to E' \to 0$$

という完全列が存在する．$\phi(A) > \phi(E) > \phi(E')$ となっている．$E' \twoheadrightarrow B$ が E' の mdq となっているとき，合成 $E \twoheadrightarrow B$ は E の mdq であることを示す．
$\because E \twoheadrightarrow B'$ を半安定で $\phi(B') \leq \phi(B)$ となっているとすると

$$\phi(A) > \phi(E) > \phi(E') \geq \phi(B) \geq \phi(B')$$

A, B' は半安定対象であり，前の補題より $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B') = 0$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook] \arrow[dr, "0"'] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & E/A = E' \arrow[dl, dotted] \\
& B' &
\end{tikzcd}$$

図式のように可換にする全射が普遍性から存在する．$E' \twoheadrightarrow B$ が mdq なので $\mu(B') = \mu(B)$ となり，mdq の条件より $E' \twoheadrightarrow B \twoheadrightarrow B'$ と経由する．したがって $E \twoheadrightarrow B \twoheadrightarrow B'$ が存在し，$E \twoheadrightarrow B$ が mdq であることがわかる．
E' が mdq でない場合は E を E' に取り替えて議論を繰り返すことと条件 (ii) から有限回でとまるので mdq の存在がわかる．

Step 3
任意の $E \in \mathcal{A}$ は HN フィルトレーションをもつ．

0 でない $E \in \mathcal{A}$ を任意にとる．E が半安定なら $0 \subset E$ が HN フィルトレーションを与えている．そうでないとき，$E \twoheadrightarrow B^1$ を mdq として

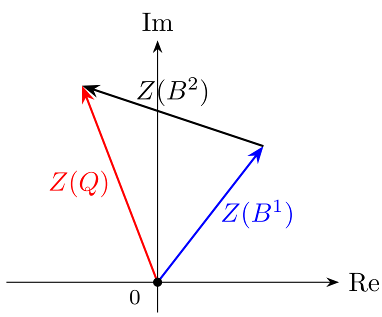
$$0 \to E^1 \to E \to B^1 \to 0$$

をとる．E^1 が半安定であるなら $0 \subsetneq E^1 \subsetneq E$ が HN フィルトレーションになっている．($E/E^1 \simeq B$ で mdq の B が半安定であるため)．E^1 が mdq でないとき，$E^1 \twoheadrightarrow B^2$ を mdq として

$$0 \to E^2 \to E^1 \to B^2 \to 0$$

$Q = E/E^2$ とすると，$E \twoheadrightarrow B^1$ が mdq であることから $\phi(Q) \geq \phi(B^1)$ であり，次の短完全列

$$0 \to B^2 \to Q \to B^1 \to 0$$



から $\phi(B^2) \geq \phi(Q)$ が得られる．$\phi(B^2) = \phi(Q) = \phi(B^1)$ と仮定すると，$E \twoheadrightarrow B^1$ が mdq であることから $E \twoheadrightarrow B^1 \twoheadrightarrow Q$ となって，B^1 と Q の双方向に全射があることから $B^1 \simeq Q$ となり，$B^2 = 0$．これは矛盾．したがって，$\phi(B^2) > \phi(B^1)$ が成り立つ．この操作は条件 (ii) より有限回でとまり，その商は半安定なので HN フィルトレーションを得る． ■

Def 3.4.

$\mathcal{D}$: 三角圏．$\mathcal{D}$ 上の安定性条件とは，$\mathcal{D}$ の有界な t-構造の Heart $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ と $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}$ 上の安定性条件

$$Z\colon K(\mathcal{D}) = K(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$$

$(Z, \mathcal{A})$ のことである．

三角圏 $\mathcal{D}$ におけるスライスとは部分圏の族 $\{\mathcal{P}(\phi)\}_{\phi\in\mathbb{R}} \subset \mathcal{D}$ で次の条件を満たすもの

•$\forall\phi \in \mathbb{R}, \mathcal{P}(\phi+1) = \mathcal{P}(\phi)[1]$

•$\phi_1 > \phi_2$ で $E_i \in \mathcal{P}(\phi_i)$ ならば $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E_1, E_2) = 0$

•任意の対象 $E \in \mathcal{D}$ に対して，

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, equal] & E_0 \arrow[rr] & & E_1 \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \arrow[r] & E_{n-2} \arrow[rr] & & E_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dl] & & E \arrow[dl] \\
& & F_1 \arrow[ul, dotted, "{[1]}"] & & & & F_{n-1} \arrow[ul, dotted, "{[1]}"] & & F_n \arrow[ul, dotted, "{[1]}"] &
\end{tikzcd}$$

$F_i \in \mathcal{P}(\phi_i)$

Lem 3.5.

$\mathcal{D}$ 上に安定性条件をあたえることと，$\mathcal{D}$ 上のスライス $\mathcal{P}$ と群準同型 $Z\colon K(\mathcal{D}) \to \mathbb{C}$ の組 $(Z, \mathcal{P})$ で，任意の $\phi \in \mathbb{R}$ と $0 \neq E \in \mathcal{P}(\phi)$ に対して $Z(E) \in \mathbb{R}_{>0}e^{i\pi\phi}$ を与えることは同値.

Proof. 安定性条件 $(Z, \mathcal{A}) \to$ スライス $\mathcal{P}$ の構成

各 $0 < \phi \leq 1$ に対して，

$$\mathcal{P}(\phi) \coloneqq \{E \in \mathcal{A} \mid E\colon Z\text{-半安定 } Z(E) \in \mathbb{R}_{>0}e^{i\pi\phi}\} \cup \{0\}$$

$\phi \in \mathbb{R}, \phi \in (k, k+1]$ となる整数 k をとって

$$\mathcal{P}(\phi) \coloneqq \mathcal{P}(\phi - k)[k]$$

こう定めたとき，スライスになっていることを確かめる．

•$\forall\phi \in \mathbb{R}, \mathcal{P}(\phi+1) = \mathcal{P}(\phi)[1]$ は定義から従い．$\phi_1 > \phi_2$ と $E_i \in \mathcal{P}(\phi_i)$ に対して，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E_1, E_2) = 0$ が補題からしたがう． ■