院試

理学部数学科 04A21051 山本 雄大

距離空間で考える.

Thm 0.1.

コンパクト集合上の連続関数は最大値, 最小値を持つ.

K コンパクト,f 連続とする.

$$R := f(K)$$

$b := \sup R$ として,R の点列コンパクト性を示せばよい.

点列 $\{y_n\}_n$ を任意にとる.$f(x_n) = y_n$ となる $\{x_n\}_n$ が存在して,K 点列コンパクトより $x_{n(k)} \to a (a \in K)$ となる収束部分列が存在する. このとき,$y_{n(k)} \to f(a) \in R$ したがって, 点列コンパクトである.

Thm 0.2.

コンパクト集合上の連続関数は一様連続

コンパクト集合 K と連続関数 f を考え,$\varepsilon > 0$ を任意に固定する.

f 連続より, 各点 $x \in K$ においてある δ_x が存在して,$d(x,y) < \delta_x \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}\varepsilon$

$$U_x = \{y \in K \mid d(x,y) < \frac{1}{2}\delta_x\}$$

(ここの $1/2\delta_x$ のとり方がｶｼｺｲ)

と定めれば U_x は K の開被覆であり, コンパクトであることから有限個におとせる.

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \supseteq K$$

$\delta := \frac{1}{2}\min(\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_n})$ とさだめると

$d(x,y) < \delta$ をみたす任意の $x, y \in K$ に対して, ある i が存在して,$x \in U_{x_i}$. したがって,$d(x, x_i) < \frac{1}{2}\delta_{x_i}$

連続性より

$$|f(x_i) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

また,

$$d(y, x_i) \leq d(y,x) + d(x, x_i) < \delta + \frac{1}{2}\delta_{x_i} < \delta_{x_i}$$

$$|f(x_i) - f(y)| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

したがって

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Thm 0.3.

コンパクト $\Longleftrightarrow$ 点列コンパクト

Thm 0.4.

$|H| = |x^{-1}Hx|$

$h \mapsto x^{-1}hx$ は全単射

全射は定義より，単射は $x^{-1}hx = x^{-1}h'x$ なら $h = h'$

Def 0.5.

$\sigma' = \tau^{-1}\sigma\tau \quad (\exists \tau \in G)$ のとき σ' と σ は共役.

Def 0.6.

対称群のサイクルタイプとは

$$\sigma = (i_1 \cdots i_s)(j_1 \cdots j_t)(k_1 \cdots k_u)$$

の $(s, t, \ldots, u)$

Thm 0.7.

S_n で共役 $\Longleftrightarrow$ サイクルタイプが一致

Thm 0.8.

S_n の共役類数は分割数 $p(n)$

Thm 0.9.

x の共役類を $C(x)$，G の中心を Z と記すと $|C(x)|, |Z|$ は $|G|$ を割り切る.

$$g \circ x \coloneqq g^{-1}xg$$

と作用を定義すると，作用による軌道の要素の数と固定する部分群の位数の積が G の位数になる.
x の G における固定部分群を $\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(x)$ としるすと，全射 $f\colon G \to \mathrm{Orb}_{\mathrm{G}}(x)$ の核は $\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(x)$ なので順同型定理っぽくやればわかる.

Thm 0.10.

p 郡の中心は非自明

$|Z| = 1$ とすると類等式から矛盾が生じる.

Thm 0.11.

p 群の位数 p の部分群 H が正規部分群 $\Longleftrightarrow$ $H \subseteq Z$

$\{1\}$ が一つの軌道になっていることと，軌道が $|G| = p^n$ を割り切ること $|H| = p$ であることから各点が一つの軌道をなしていることからしたがう.