院試

理学部数学科 04A21051 山本 雄大

距離空間で考える.

Thm 0.1.

コンパクト集合上の連続関数は最大値, 最小値を持つ.

K コンパクト,f 連続とする.

$$R \coloneqq f(K)$$

$b \coloneqq \sup R$ として,R の点列コンパクト性を示せばよい.

点列 $\{y_n\}_n$ を任意にとる.$f(x_n) = y_n$ となる $\{x_n\}_n$ が存在して,K 点列コンパクトより $x_{n(k)} \to a (a \in K)$ となる収束部分列が存在する. このとき,$y_{n(k)} \to f(a) \in R$ したがって, 点列コンパクトである.

Thm 0.2.

コンパクト集合上の連続関数は一様連続

コンパクト集合 K と連続関数 f を考え,$\varepsilon > 0$ を任意に固定する.

f 連続より, 各点 $x \in K$ においてある δ_x が存在して,$d(x, y) < \delta_x \implies |f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}\varepsilon$

$$U_x = \{y \in K \mid d(x, y) < \frac{1}{2}\delta_x\}$$

(ここの $1/2\delta_x$ のとり方がｶｼｺｲ)

と定めれば U_x は K の開被覆であり, コンパクトであることから有限個におとせる.

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \supseteq K$$

$\delta \coloneqq \frac{1}{2}\min(\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n})$ とさだめると

$d(x, y) < \delta$ をみたす任意の $x, y \in K$ に対して, ある i が存在して,$x \in U_{x_i}$. したがって,$d(x, x_i) < \frac{1}{2}\delta_{x_i}$

連続性より

$$|f(x_i) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

また,

$$d(y, x_i) \leq d(y, x) + d(x, x_i) < \delta + \frac{1}{2}\delta_{x_i} < \delta_{x_i}$$

$$|f(x_i) - f(y)| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

したがって

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Thm 0.3.

コンパクト $\iff$ 点列コンパクト

Thm 0.4.

$|H| = |xHx^{-1}|$

$h \mapsto xhx^{-1}$ は全単射

全射は定義より, 単射は $xhx^{-1} = xh'x^{-1}$ なら $h = h'$

Def 0.5.

$\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1} \quad (\exists \tau \in G)$ のとき σ' と σ は共役.

Def 0.6.

対称群のサイクルタイプとは

$$\sigma = (i_1 \cdots i_s)(j_1 \cdots j_t)(k_1 \cdots k_u)$$

の $(s, t, \dots, u)$

Thm 0.7.

S_n で共役 $\Longleftrightarrow$ サイクルタイプが一致

Thm 0.8.

S_n の共役類数は分割数 $p(n)$

Thm 0.9.

x の共役類を $C(x)$，G の中心を Z と記すと $|C(x)|, |Z|$ は $|G|$ を割り切る．

$$g \circ x \coloneqq gxg^{-1}$$

と作用を定義すると，作用による軌道の要素の数と固定する部分群の位数の積が G の位数になる．
x の G における固定部分群を $\mathrm{Stab_G}(x)$ としるすと，全射 $f\colon G \to \mathrm{Orb_G}(x)$ の核は $\mathrm{Stab_G}(x)$ なので順同型定理っぽくやればわかる．

Thm 0.10.

p 群の中心は非自明

$|Z| = 1$ とすると類等式から矛盾が生じる．

Thm 0.11.

p 群の位数 p の部分群 H が正規部分群 $\Longleftrightarrow H \subseteq Z$

$\{1\}$ が一つの軌道になっていることと，軌道が $|G| = p^n$ を割り切ること $|H| = p$ であることから各点が一つの軌道をなしていることからしたがう．

Thm 0.12.

p が $|G|$ の最小の素因数で $H < G, [G : H] = p$ なら H は正規部分群である．

$$\phi\colon G \to S(G/H) \simeq \mathfrak{S}_p$$

の作用を考えると $\mathrm{Ker}\phi \subseteq H$

$$[G : \mathrm{Ker}\phi] = [G : H][H : \mathrm{Ker}\phi] = p[H : \mathrm{Ker}\phi]$$

ここで,$[G : \mathrm{Ker}\phi] = |G/\mathrm{Ker}\phi| = |\operatorname{Im}\phi|$ であり,$\operatorname{Im}\phi$ は $\mathfrak{S}_n$ の部分群なので $|\operatorname{Im}\phi|$ は $|\mathfrak{S}_n| = p!$ を割り切る．
$[G : \operatorname{Ker}\phi] = p$ でなければ,$[G : \mathrm{Ker}\phi]$ が $p-1$ 以下の約数を持つことになり仮定に矛盾．したがって,$[H : \mathrm{Ker}\phi] = 1$, 核は正規部分群なので ok.

Thm 0.13.

G が H, K の直積になる．

(1) H, K は G の正規部分群

(2) $H \cap K = 1$

(3) $G = HK$

Thm 0.14.

$\{a_n\}_n$ は $a_n \leq 0$ かつ広義単調減少,$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

は収束．

二項ずつ考えればできる．

Thm 0.15.

d'Alembert の収束判定法
$\sum a_n$ について

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

なら収束

$$\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$$

なら発散

収束する方は, ある N より大きいとその絶対値の級数は $(1-\varepsilon)$ の等比数列で抑えられる. 発散する方は $\lim_{n\to\infty} a_n$ が 0 に収束しない

Thm 0.16.

Cauchy の収束判定法
$\sum a_n$ について

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r$$

$0 \leq r < 1$ なら絶対収束 $r > 1$ なら発散

ダランベールと同じ感じ