院試

理学部数学科 04A21051 山本 雄大

距離空間で考える.

> Thm.
>
> コンパクト集合上の連続関数は最大値, 最小値を持つ.

K コンパクト,f 連続とする.

$$R \coloneqq f(K)$$

$b \coloneqq \sup R$ として,R の点列コンパクト性を示せばよい.

点列 $\{y_n\}_n$ を任意にとる.$f(x_n) = y_n$ となる $\{x_n\}_n$ が存在して,K 点列コンパクトより $x_{n(k)} \to a (a \in K)$ となる収束部分列が存在する. このとき,$y_{n(k)} \to f(a) \in R$ したがって, 点列コンパクトである.

> Thm.
>
> コンパクト集合上の連続関数は一様連続

コンパクト集合 K と連続関数 f を考え,$\varepsilon > 0$ を任意に固定する.

f 連続より, 各点 $x \in K$ においてある δ_x が存在して,$d(x,y) < \delta_x \implies |f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}\varepsilon$

$$U_x = \{y \in K \mid d(x,y) < \frac{1}{2}\delta_x\}$$

(ここの $1/2\delta_x$ のとり方がｶｼｺｲ)

と定めれば U_x は K の開被覆であり, コンパクトであることから有限個におとせる.

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \supseteq K$$

$\delta \coloneqq \frac{1}{2}\min(\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_n})$ とさだめると

$d(x,y) < \delta$ をみたす任意の $x, y \in K$ に対して, ある i が存在して,$x \in U_{x_i}$. したがって,$d(x, x_i) < \frac{1}{2}\delta_{x_i}$

連続性より

$$|f(x_i) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

また,

$$d(y, x_i) \leq d(y,x) + d(x, x_i) < \delta + \frac{1}{2}\delta_{x_i} < \delta_{x_i}$$

$$|f(x_i) - f(y)| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

したがって

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$