チェバの定理
メネラウスの定理

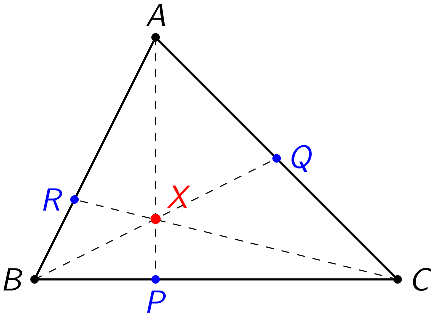
September 22, 2025

1. チェバの定理 (Ceva's theorem)
2. メネラウスの定理 (Menelaus's theorem)
3. チェバの定理の逆 (Converse Ceva's theorem)
4. メネラウスの定理の逆 (Converse Menelaus's theorem)

チェバの定理 (Ceva's theorem)

ABC の内部（または外部）にある X と 3 頂点を結んだ直線 AX, BX, CX がそれぞれの対辺と点 P, Q, R で交わるとき，

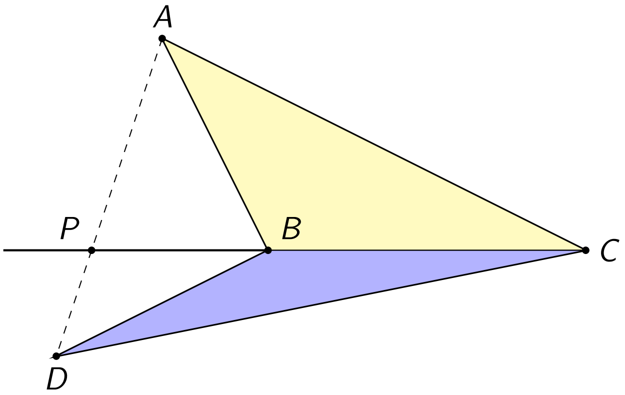
$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1.$$



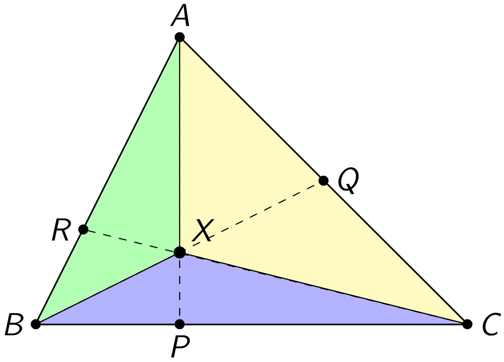
補題．

1 辺を共有する 2 つの三角形 △ABC と △DBC に対して，

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle DBC} = \frac{AP}{DP}.$$



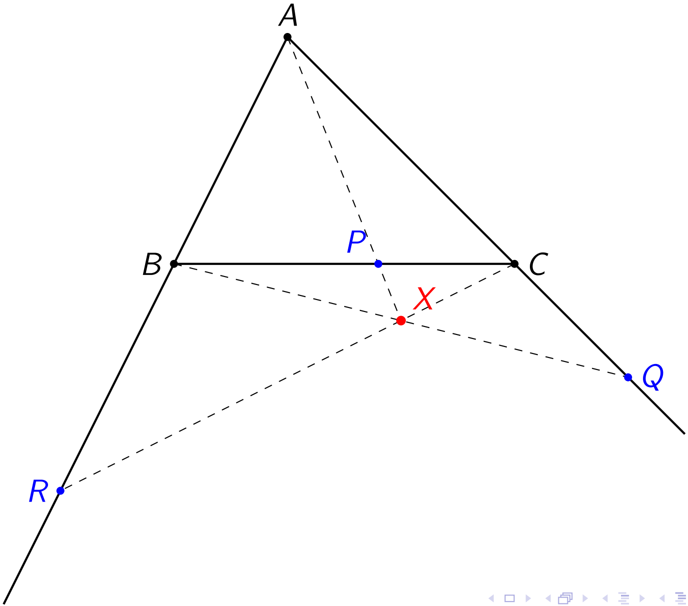
チェバの定理の証明



補題から，

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = \frac{\triangle XAC}{\triangle XBC} \cdot \frac{\triangle XAB}{\triangle XAC} \cdot \frac{\triangle XBC}{\triangle XAB} = 1.$$

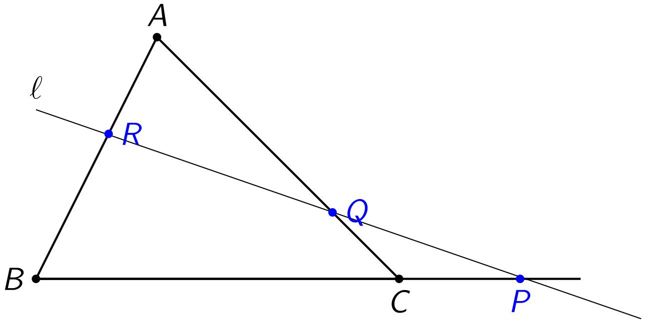
X が外部にある場合



メネラウスの定理 (Menelaus's theorem)

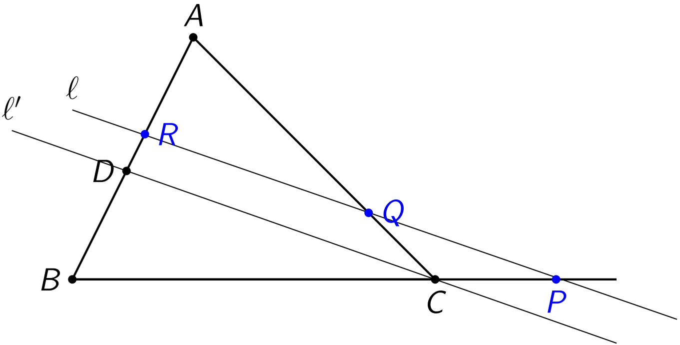
$\triangle$ABC の頂点を通らない直線 ℓ が直線 BC, CA, AB とそれぞれ P, Q, R で交わるとき，次が成り立つ．

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1.$$



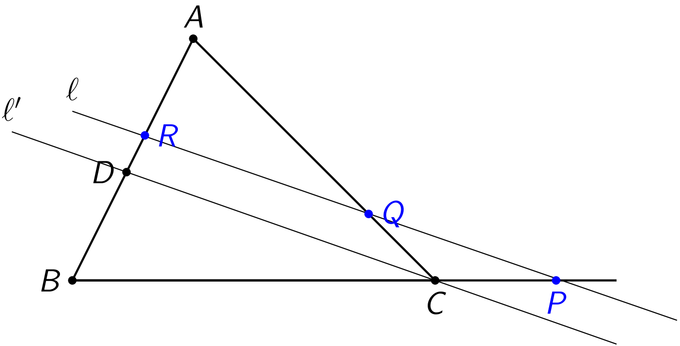
証明.

ℓ に平行で C を通る直線 ℓ' を引き，AB との交点を D とする．



証明.

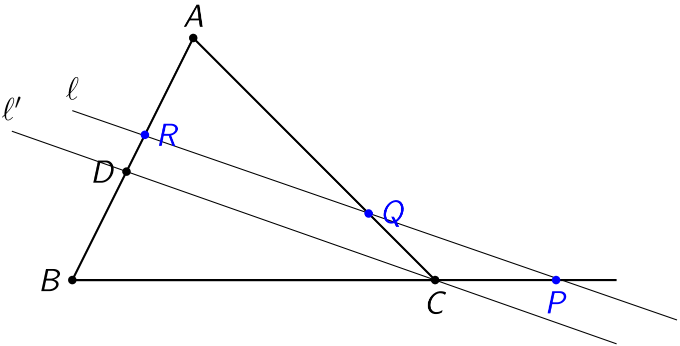
平行線と比の性質から，



$$\frac{CQ}{QA} = \frac{RD}{AR}, \quad \frac{BP}{PC} = \frac{RB}{RD}.$$

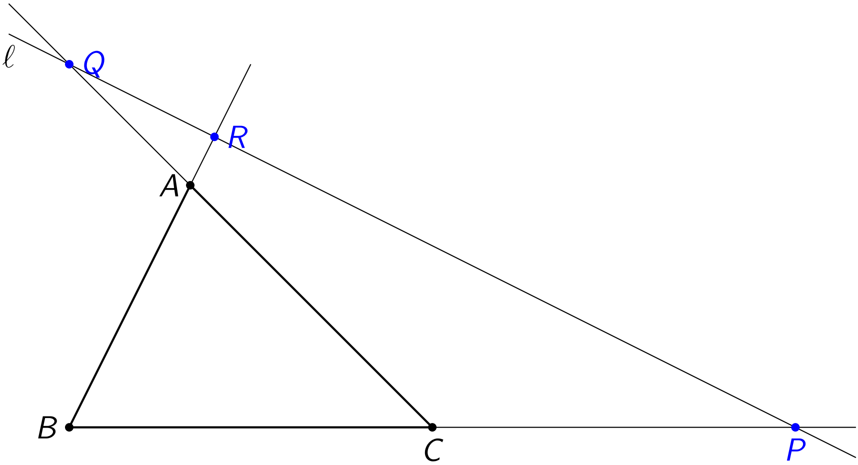
証明.

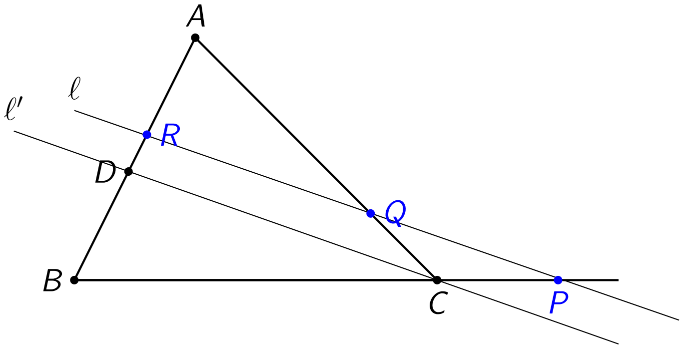
$$\frac{CQ}{QA} = \frac{RD}{AR}, \quad \frac{BP}{PC} = \frac{RB}{RD}$$ を使って，



$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = \frac{AR}{RB} \cdot \frac{RB}{RD} \cdot \frac{RD}{AR} = 1.$$

直線 ℓ が △ABC 外にある場合.



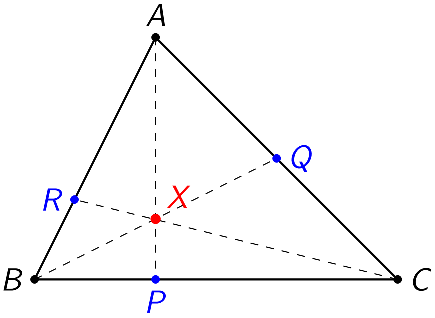

A
ℓ
ℓ'
R
D
Q
B
C
P

チェバの定理の逆．(Converse Ceva's theorem)

△ABC の各辺にある P, Q, R が，

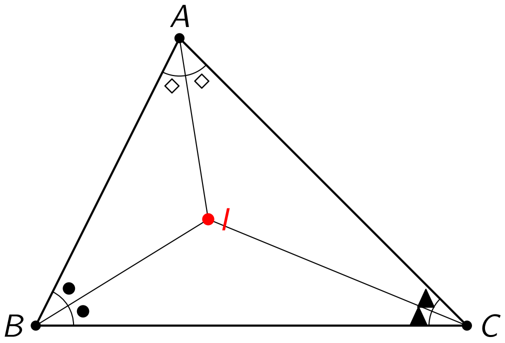
$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1.$$

を満たすとき，直線 AP, BQ, CR は 1 点で交わる．



応用例.

チェバの定理の逆を用いて，三角形の各頂点の内角の二等分線が 1 点で交わることを証明せよ.



メネラウスの定理の逆 (Converse Menelaus's theorem)

△ABC の各辺を伸ばした直線上に，それぞれ P, Q, R が，

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1.$$

を満たすとき，3 点 P, Q, R は一直線上に存在する．