

三角形の五心

September 22, 2025

三角形の五心

① 重心

② 外心

③ 内心

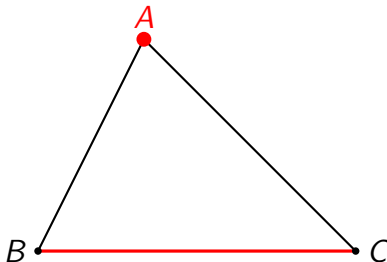
④ 垂心

⑤ 傍心

対辺

対辺の定義

頂点に向かい合う辺を対辺という．

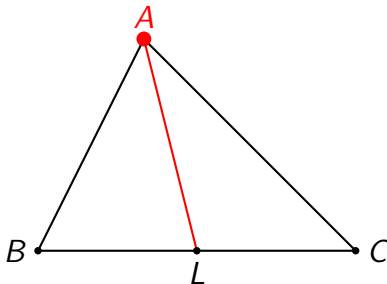


例．頂点 A の対辺は辺 BC

中線

中線の定義

頂点とその対辺の中点を結ぶ線分を中線という.

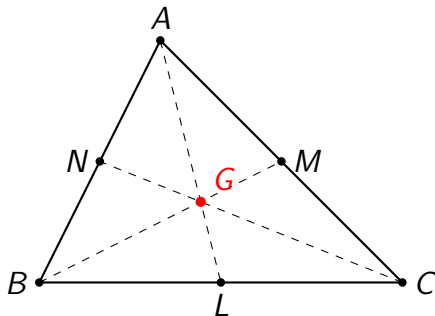


$$BL = LC$$

重心

重心の定義

三角形の3本の中線は1点で交わり、その点を重心と呼ぶ。



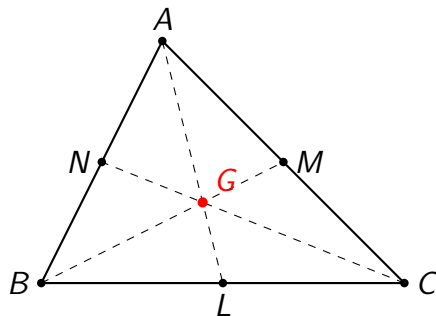
→ 3つの中線が1点で交わるということは、明らかではない。

重心の存在

定理 3

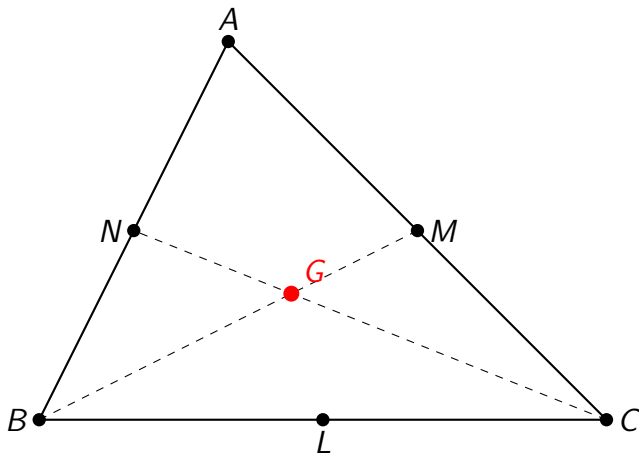
三角形の 3 本の中線は 1 点で交わる。

さらに、その交点 (重心) は各中線を $2:1$ に内分する。

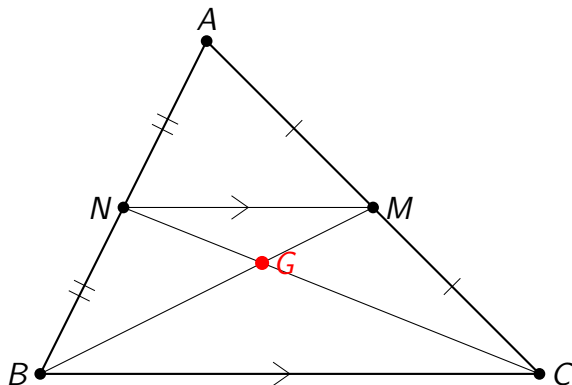


証明

NC と BM の交点を G とする.

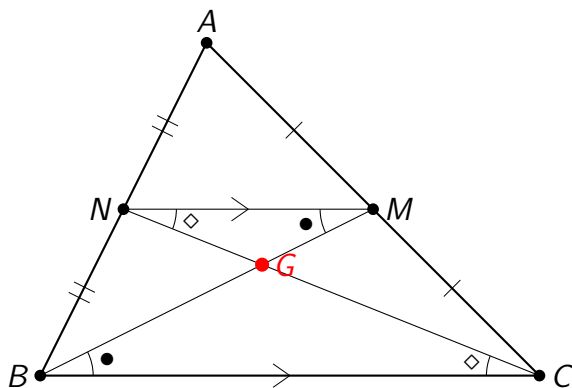


証明



平行線と線分の比の性質より，
 $AB : AN = AC : AM = 2 : 1$ なので， $NM \parallel BC$

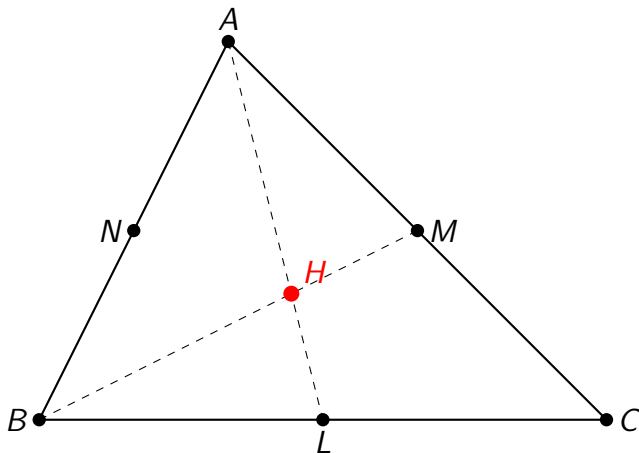
証明



平行線の錯角が等しいことから， $\triangle BGC \sim \triangle MGN$
 $BC : NM = 2 : 1$ だから， $BG : GM = 2 : 1$ 。

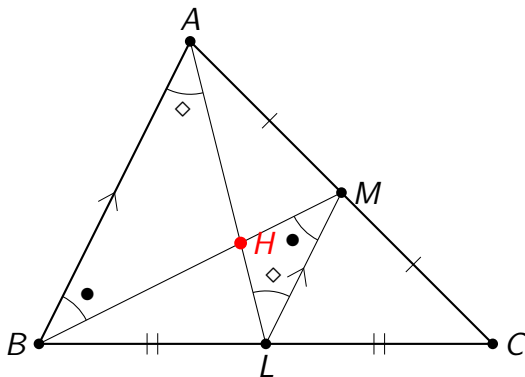
証明

AL と BM の交点を H とする.



証明

G の場合と同様にして,

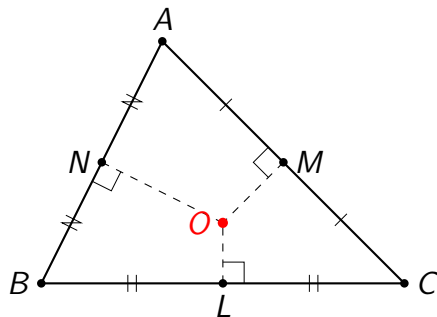


$AB : ML = 2 : 1$ だから, $BH : HM = 2 : 1$. がわかる.
G も H も BM を $2 : 1$ に内分する点なので $G = H$. ■
(あとで証明するチェバの定理の逆を使えば明らか.)

外心の定義

外心の定義

三角形の垂直二等分線は1点で交わり、外心と呼ぶ。



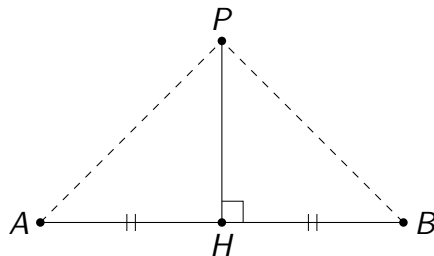
証明

定理 4

三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる.

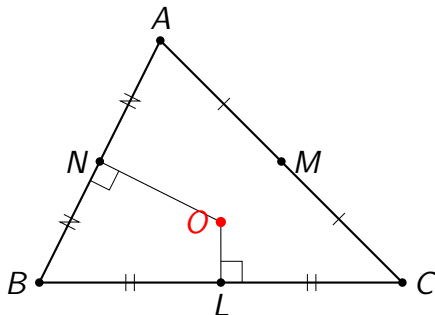
準備

P が線分 AB の垂直二等分線上にある $\iff PA = PB$



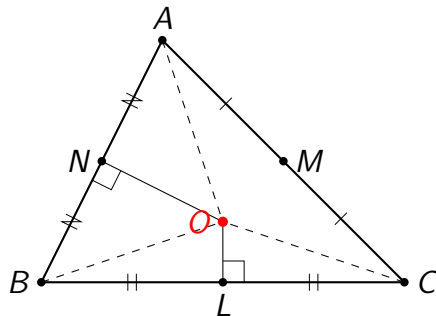
証明

AB, BC の垂直二等分線の交点を O とする.



証明

AO, BO, CO を引くと



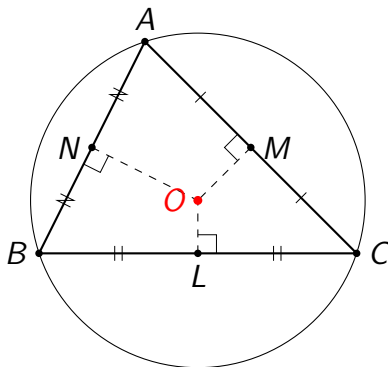
準備より， O は垂直二等分線上にあるので $AO = BO = CO$
 $AO = CO$ から O が AC の垂直二等分線上にあることがわかる． ■

外接円

外接円

頂点 A, B, C を通る円を外接円という.

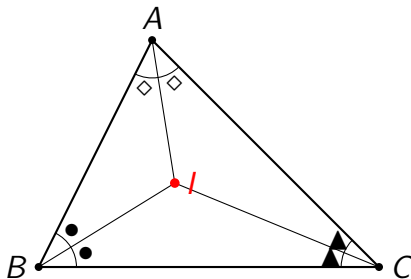
証明から $AO = BO = CO$ がわかったので, O を中心として A, B, C を通る円が存在する.



内心の定義

内心

三角形の3つの内角の二等分線が交わる点.



内心

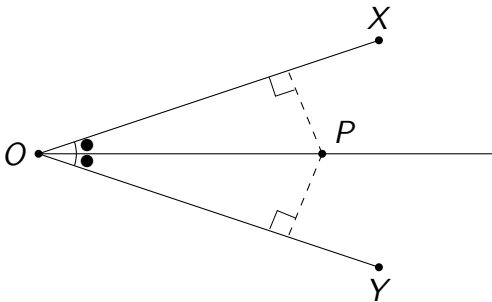
定理 4

三角形の3つの内角の二等分線は1点で交わる.

準備

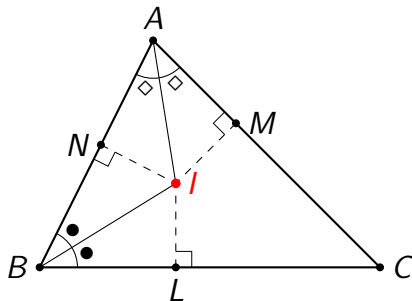
P が $\angle XOY$ の二等分線上にある.

$\iff P$ と OX の距離と P と OY の距離が等しい.



証明

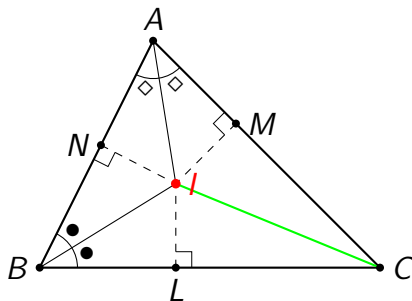
I から、各辺に垂線をおろす。



準備の (\implies) より, $IN = IL = IM$.

証明

I から C に線分を引く.

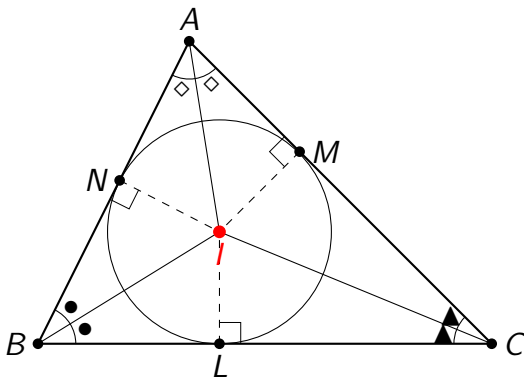


$IM = IL$ なので, 準備の (\Leftarrow) より, IC は $\angle MCL$ の二等分線になっている. ■

内接円

内接円の定義を求めよ。

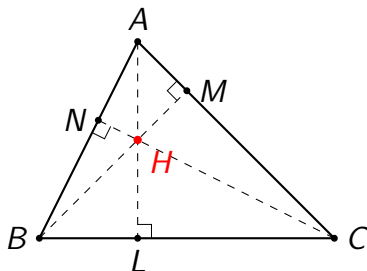
$IM = IN = IL$ で各辺と垂直に交わるので、 I を中心として 3 辺に接する円が存在し、これを**内接円**と呼ぶ。



垂心

垂心の定義

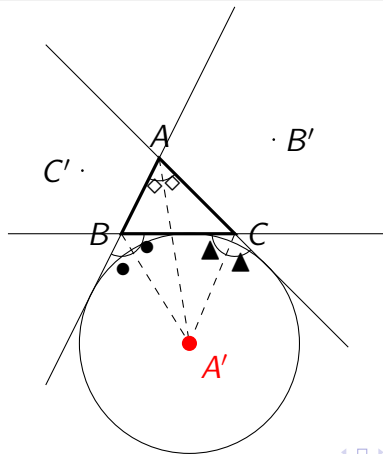
三角形の各頂点から対辺，もしくはその延長に下ろした垂線の交点 H 。



傍心

傍心の定義

$\triangle ABC$ の 1 つの内角の二等分線と、他の 2 つの外角の二等分線の交点.



問題

問題

重心と内心が一致する三角形は，正三角形であることを証明せよ．

Example

Derived Category Example

The functor $\text{Ext}^i(-, -)$ gives a cohomological δ -functor.

Summary

- ① Main result
- ② Key ideas
- ③ Future directions

Summary

- ① Main result
- ② Key ideas
- ③ Future directions

Questions?