三角形の五心

September 22, 2025

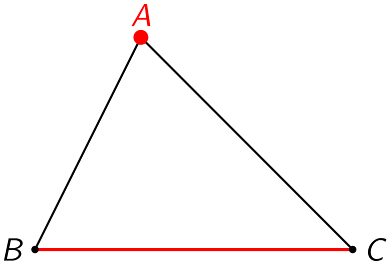
三角形の五心

1. 重心
2. 外心
3. 内心
4. 垂心
5. 傍心

対辺

対辺の定義

頂点に向かい合う辺を対辺という．

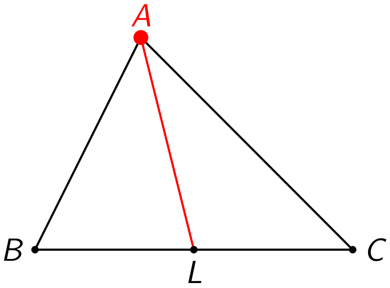


例．頂点 A の対辺は辺 BC

中線

中線の定義

頂点とその対辺の中点を結ぶ線分を中線という.

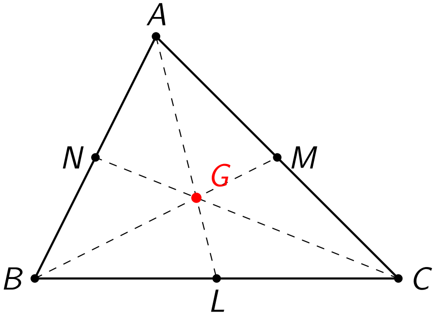


$$BL = LC$$

重心

重心の定義

三角形の 3 本の中線は 1 点で交わり，その点を重心と呼ぶ．

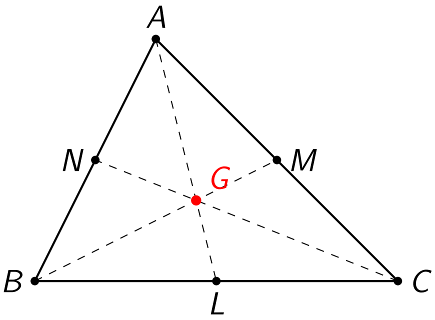


$\longrightarrow$ 3 つの中線が 1 点で交わるということは，明らかではない．

重心の存在

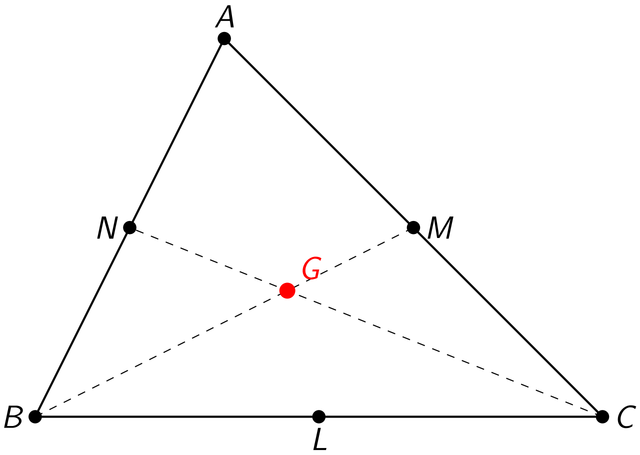
定理 3

三角形の 3 本の中線は 1 点で交わる．
さらに，その交点 (重心) は各中線を 2 : 1 に内分する．

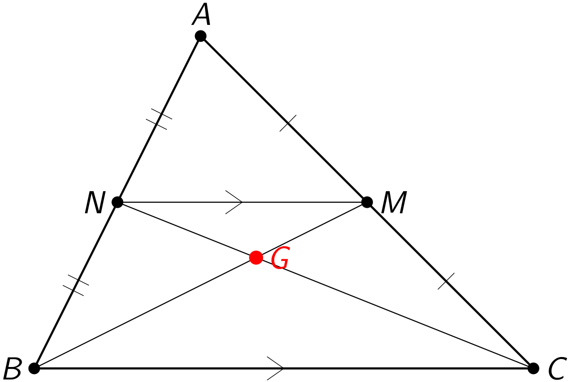


証明

NC と BM の交点を G とする．



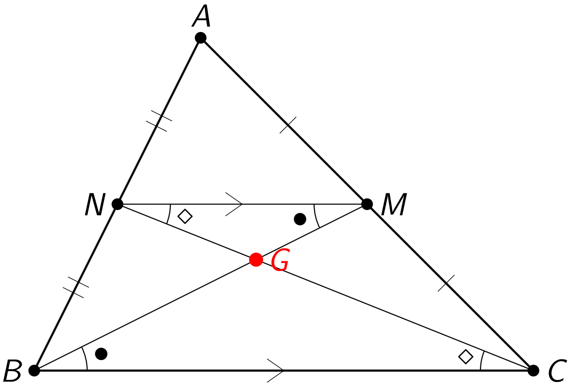
証明



平行線と線分の比の性質より，

$AB : AN = AC : AM = 2 : 1$ なので，$NM // BC$

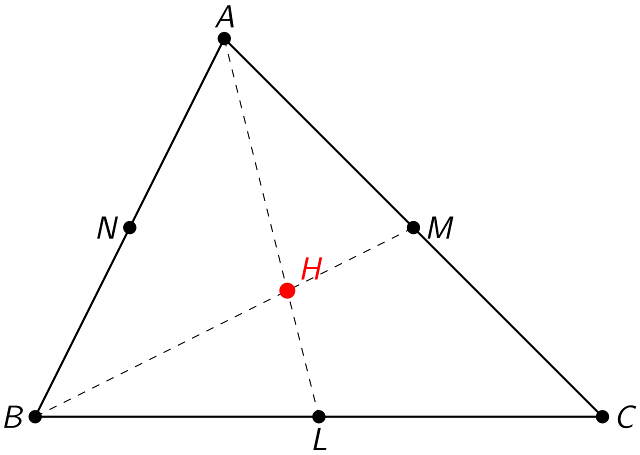
証明



平行線の錯角が等しいことから，$\triangle \mathrm{BGC} \backsim \triangle \mathrm{MGN}$
$\mathrm{BC} : \mathrm{NM} = 2 : 1$だから，$\mathrm{BG} : \mathrm{GM} = 2 : 1$.

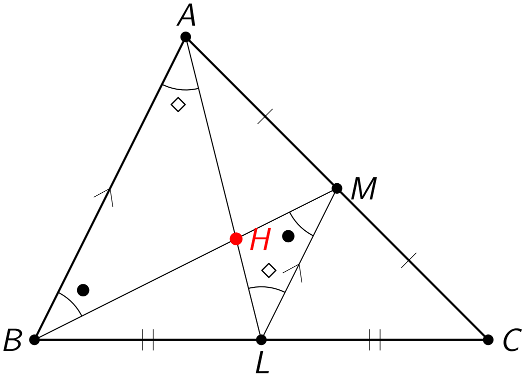
証明

AL と BM の交点を H とする．



証明

G の場合と同様にして，

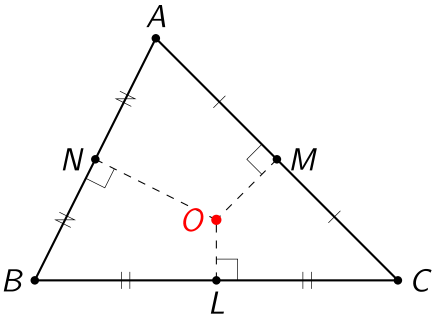


AB : ML ＝ 2 : 1 だから，BH : HM ＝ 2 : 1. がわかる．
G も H も BM を 2 : 1 に内分する点なので G ＝ H． ■
(あとで証明するチェバの定理の逆を使えば明らか．)

外心の定義

外心の定義

三角形の垂直二等分線は 1 点で交わり，外心と呼ぶ．



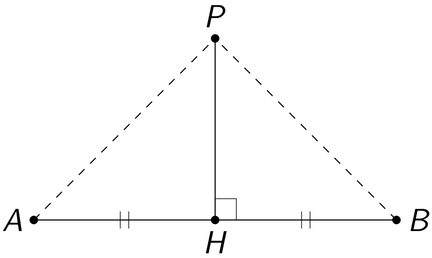
証明

定理 4

三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる．

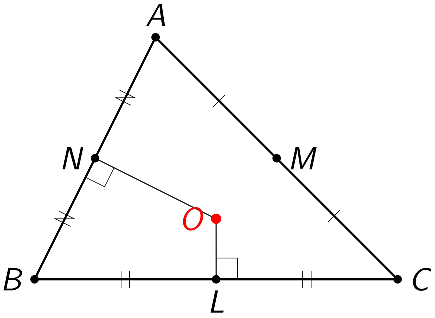
準備

P が線分 AB の垂直二等分線上にある $\iff PA = PB$



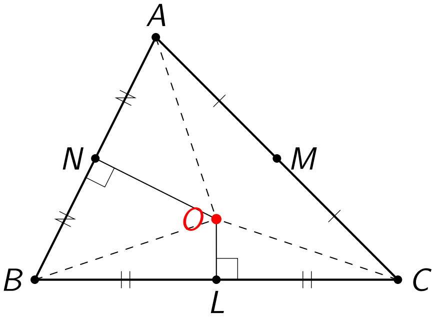
証明

AB, BC の垂直二等分線の交点を O とする．



証明

AO, BO, CO を引くと



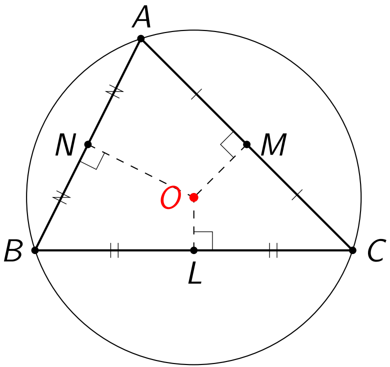
準備より，O は垂直二等分線上にあるので $AO = BO = CO$
$AO = CO$ から O が AC の垂直二等分線上にあることがわかる． ■

外接円

外接円

頂点 A, B, C を通る円を外接円という．

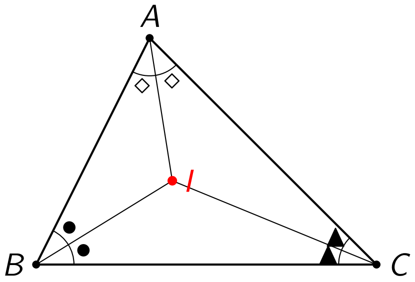
証明から $AO = BO = CO$ がわかったので，O を中心として A, B, C を通る円が存在する．



内心の定義

内心

三角形の 3 つの内角の二等分線が交わる点．



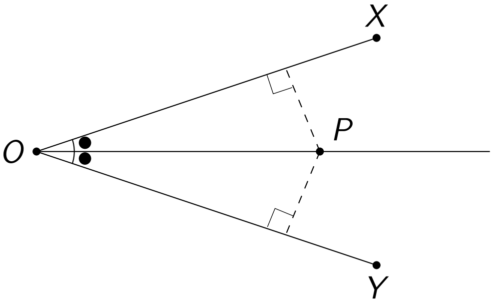
内心

定理 4

三角形の３つの内角の二等分線は１点で交わる．

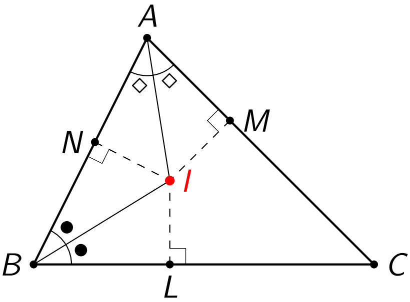
準備

P が $\angle XOY$ の二等分線上にある．
$\Longleftrightarrow$ P と OX の距離と P と OY の距離が等しい．



証明

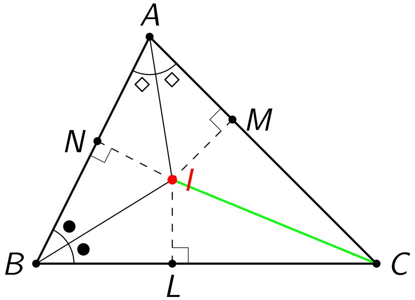
I から，各辺に垂線をおろす．



準備の ($\Longrightarrow$) より，$IN = IL = IM$.

証明

I から C に線分を引く．

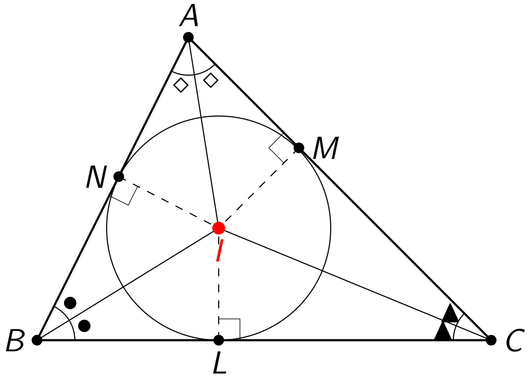


$IM = IL$ なので，準備の ($\Longleftarrow$) より，IC は $\angle MCL$ の二等分線になっている．■

内接円

内接円の定義を求めよ．

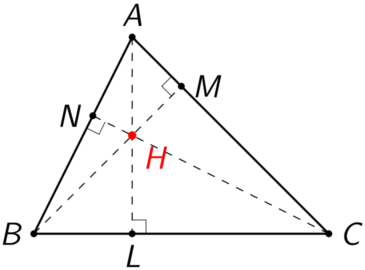
$IM = IN = IL$ で各辺と垂直に交わるので，I を中心として 3 辺に接する円が存在し，これを**内接円**と呼ぶ．



垂心

垂心の定義

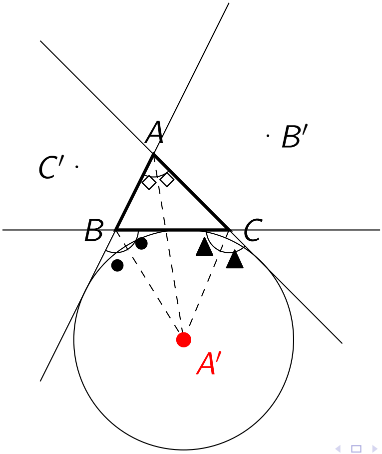
三角形の各頂点から対辺，もしくはその延長に下ろした垂線の交点 H.



傍心

傍心の定義

△ABC の 1 つの内角の二等分線と，他の 2 つの外角の二等分線の交点．



問題

問題

重心と内心が一致する三角形は，正三角形であることを証明せよ．

Example

Derived Category Example

The functor $\operatorname{Ext}^i(-,-)$ gives a cohomological δ-functor.

Summary

1. Main result
2. Key ideas
3. Future directions

Summary

1. Main result
2. Key ideas
3. Future directions

Questions

Questions?