数学科教育法 III 2023

数学科教育法 III 第 1 日 13.September 2023

1 分数と整数

分数は算数の主題である。卑近な定番の教材ながら数学として顧みれば見かけ以上に奥が深い。大小の順に並べる作業には整数の性質が反映される。算数以後も様々な段階で既得の知識に応じた収穫が期待できる素材である。分数計算に現れる現象の解明を通して整数の基本性質に踏み込む。様々な題材により数学は学ぶに足り,教えるに値するのかどうかを問い直す。

1.1 となりの分数

$\frac{1}{2}$ は $\frac{1}{3}$ より大きい。$\frac{2}{3}$ は $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$ である。$\frac{2}{4}$ は $\frac{1}{2}$ で代表させ $\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5}\cdots$ を並べる

$$\frac{1}{6}\quad\frac{1}{5}\quad\frac{1}{4}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{2}{5}\quad\frac{1}{2}\quad\frac{3}{5}\quad\frac{2}{3}\quad\frac{3}{4}\quad\frac{4}{5}\quad\frac{5}{6} \tag{1}$$

$\frac{1}{7}$ の次の $\frac{2}{7},\frac{3}{7}$ はやや難しい。0.2857… 数は $\frac{1}{2}$ を中心に対称に並び $\frac{2}{7}$ がわかれば $\frac{5}{7}$ もわかる。次の事実に気が付けば分数の位置は自ずと定まる。気が付かなければ小数か通分か?

性質 **A** 正の数 a,b,c,d について $\frac{b}{a}<\frac{d}{c}$ ならば $\frac{b}{a}<\frac{b+d}{a+c}<\frac{d}{c}$ である。

分母が n 以下の既約分数を大小の順にすべて並べたものを Farey 数列といい記号 $\mathcal{F}_n$ で表す。

$$\mathcal{F}_7\ \cdots\frac{1}{7}\quad\frac{1}{6}\quad\frac{1}{5}\quad\frac{1}{4}\quad\frac{2}{7}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{2}{5}\quad\frac{3}{7}\quad\frac{1}{2}\quad\frac{4}{7}\quad\frac{3}{5}\quad\frac{2}{3}\quad\frac{5}{7}\quad\frac{3}{4}\quad\frac{4}{5}\quad\frac{5}{6}\quad\frac{6}{7}\quad\frac{1}{1}\ \cdots \tag{2}$$

(2) は $n=7$ の場合である。分数の位置は性質 **A** を使えば順次定まる。前後に $0,-\frac{1}{7},-\frac{1}{6},\cdots$ $\frac{8}{7},\frac{7}{6},\cdots$ を加え $\mathcal{F}_n$ を両側に拡張する。すべての有理数はある $\mathcal{F}_n$ に属する。$-\frac{b}{a}=\frac{b}{-a}=\frac{-b}{a}$ のように既約分数に限っても様々な表記がある。記述を一意的にするため $x\in\mathbb{Q}$ を $\mathcal{F}_n$ の分数として $\frac{b}{a}$ と表記するときは $a,b\in\mathbb{Z}$, $a>0$, $(a,b)=1$ とする。拡張された $\mathcal{F}_n$ は実質的には $0<x\leqq 1$ の部分の繰り返しに過ぎない。記述の簡素化のために対象を有理数全体としておく。

分数ゲームは算数であり,性質 **A** のやってはイケナイ分数計算が必勝法となる。性質 **A** の確認は中学・高校の数学である。他にも隠し絵が潜んでいるかも知れない。

1.2 エジプトの分数

分数 $\frac{5}{6}$ は 5 を 6 で割った数である。6 分の 5 と読んで $\frac{1}{6}$ が 5 個集まった数であることを表す。5 個のパンを 6 人で分けるとき, 6 分割されたパンが 5 個よりも $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ として半分と 3 分割のパンが 2 個の方が嬉しい。配る人も 3 個のパンを半分に, 2 個のパンを 3 つに切るだけで済む。

$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ など分子が 1 の和が古代のパピルス残り，エジプト式の分数 (Egyptian fraction) と呼ばれる。分子が 2 なら $\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$ であるが $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ や $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$ のように異なる和で表すのがエジプト流である。パンの分割に実用的とは限らない。バビロニアの粘土板や漢代の竹簡に残る記述は古くから実用を超える数の理論があったことを暗示する。

自分が持っている道具を頼りに彼是と工夫を重ね，何かの構築を目指す活動が算数・数学である。$\frac{1}{6} + \frac{1}{14}$ は計算の練習，$\frac{5}{21} = \frac{1}{*} + \frac{1}{\circ}$ はこの意味の算数，$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{21}$ となる x, y の決定は数学である。$\frac{1}{10} + \frac{1}{30} = \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{2}{15}$ のように和は一通りとは限らない。$\frac{4}{5}$ や $\frac{3}{7}$ は 2 個では表せず $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ や $\frac{3}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28} = \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21}$ のように 3 個以上の分数の和になる。

例題 1 $\frac{4}{5} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ となる $x, y \in \mathbb{N}$ は存在しないことを示せ。$\frac{4}{7}$, $\frac{4}{9}$ ならどうか？

例題 2 $1 < x < y$ で $\frac{b}{a} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ となる必要条件あるいは十分条件を求よ。

$b = 2$ の $\frac{1}{a} + \frac{1}{a}$ を避けて $1 < x < y$ としている。このとき $a > b$ である。分子が 4 なら 3 個で $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ となる気がする。(Erdös-Straus 予想) 算数の隣には高名な数学者の名を冠する未解決問題が潜んでいる。分数は侮れない。例題 2 は何らかの理論を掘り出せと読み替えられる。

1.3 Farey 数列の特徴

(1,),(2) の数値は性質 A の逆を示唆する。瞠目すべきは (1),(2) に見られる次の特徴である。

性質 B $\mathcal{F}_n$ で隣接する $\frac{b}{a}, \frac{y}{x}, \frac{d}{c}$ について $\frac{y}{x} = \frac{b+d}{a+c}$ である。

隣り合う 3 数は約分を許せば $\frac{1+2}{5+7} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ のように性質 A の分母分子の和の法則に従う。分母が n 以下の分数がすべて並ぶことが本質的である。一般的な大小関係 $\frac{1}{5} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ との違いはこの点にある。性質 B は $\mathcal{F}_n$ の分数に関する整数の性質である。

これに対し性質 A は数の大小に関する性質である。$a > 0, b > 0$ ならば $\frac{b}{a} < \frac{d}{c} \Longleftrightarrow ad - bc > 0$ であり $\frac{b}{a} - \frac{b+d}{a+c} = -\frac{ad-bc}{a(a+c)} < 0$, $\frac{b+d}{a+c} - \frac{d}{c} = -\frac{ad-bc}{c(a+c)} < 0$ となり $\frac{b+d}{a+c}$ は中間に入る。

正の整数なら $\frac{b}{a} < \frac{d}{c} \Longleftrightarrow ad - bc > 0 \Longleftrightarrow ad - bc \geqq 1$ である。不等号は数の大小に過ぎない。ところが (1),(2) を見る限りすべて $ad - bc = 1$ である。分子の 1 は 2 数が僅差であることを表す。

性質 C となりの分数 $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$ について $ad - bc = 1$ である。

この等号が隣の分数の要諦であり $\mathcal{F}_n$ の特徴である。$\frac{q}{p} < \frac{b}{a} < \frac{s}{r}$ の $-qa + pb = sa - rb = 1$ は a, b に対する $ax + by = 1$ となる $x, y \in \mathbb{Z}$ の存在を意味する。分数に関する性質 C は初等整数論の根幹に位置する基本定理と同格である。分数は侮れない。

$$\frac{1}{bc-ad}\begin{pmatrix} -c & -a \\ -d & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

2

分数ゲームの性質 **A** の逆で人目を引く性質 **B** はやや控えめに見える性質 **C** から導かれる。

性質 C$\Longrightarrow$ 性質 B の証明

$\mathcal{F}_n$ で隣接する 3 項 $\dfrac{b}{a}$, $\dfrac{y}{x}$, $\dfrac{d}{c}$ に性質 **C** 適用すると $ay-bx=1, dx-cy=1$ である。

$\begin{pmatrix} -b & a \\ d & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ により $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ となる。

$x=\dfrac{a+c}{ad-bc}$, $y=\dfrac{b+d}{ad-bc}$ であり分数として $\dfrac{y}{x}=\dfrac{b+d}{a+c}$ である。 □

もし $m<n$ となる $\mathcal{F}_m$ で $\dfrac{b}{a}, \dfrac{d}{c}$ が隣接していれば $ad-bc=1$ であり，約分を伴わずに $x=a+c$, $y=b+d$ となる。特に $\mathcal{F}_n$ に初めて入る分母 n の分数は約分なしにイコールである。$\mathcal{F}_n$ で隣り合う $\dfrac{b}{a}, \dfrac{d}{c}$ の中間に $\dfrac{b+d}{a+c}$ を作る場合も約分は起こらない。

使うのは x, y の連立方程式であり高校の範囲内である。行列による記述の簡素化は証明の本質ではない。因みに 2 次元の線型代数は以前は高校数学の主流で 2×2 行列は入試の定番であった。あらためて性質 **C** の形を整え定理 **1** とする。数論の根幹をなす定理 **2** が直ちに導かれる。

定理 1 $\mathcal{F}_n$ で隣り合う $\dfrac{b}{a}<\dfrac{d}{c}$ に対し次の i), ii), iii) がなりたつ。

i) $ad-bc=1$

ii) $n>1$ のとき $a\neq c$（隣接する分母は異なる。）

iii) $a+c>n$（隣接する分母の和は n より大きい。）

定理 2 $a, b\in\mathbb{Z}$ について, a と b が互いに素 $\Longleftrightarrow ax+by=1$ となる $x, y\in\mathbb{Z}$ が存在する。

定理 **1** の主張は定理 **2** の $\Longrightarrow$ である。$ax+by=1$ なら a, b の公約数は 1 の約数であり $\Longleftarrow$ がなりたつ。眼目は x, y の存在にある。具体的な数値ではなく x, y の存在が重要な意味をもつ。

$ad-bc=1$ と定理 **2** によって $\mathcal{F}_n$ で隣り合う $\dfrac{b}{a}, \dfrac{d}{c}$ の分母 a, c と分子 b, d は互いに素である。これも Farey 数列の特徴である。こうなると定理 **1** はなんとか自力で証明したくなる。

1.4 倍数の集合

集合が初等教育に取り入れられて半世紀が経過する。教科書には用語や記号が羅列されるが使う場面がなく, 個数を求める計算だけで内容に乏しい。手段としての集合の有効性を再確認する目的を兼ね, 倍数の集合によって定理 **2** の x, y の存在を示す。

1.4.1 整数の記号

a が b の約数であることを記号 $a|b$ で表す。b は a の倍数，b は a で割り切れる等の表現に比べ主語を選ぶ煩わしさがなく $a\equiv b \pmod{m} \Longleftrightarrow m|a-b$ のような簡潔な記述に寄与する。合同は「m で割った余りが等しい」でも悪くはないが $0\leqq r<m$ の制約は余りに窮屈である。

a と b の最大公約数を (a, b) と表す。座標と間違える心配は多分ない。$(a, b)=1$ は互いに素を意味する。最初の命題は割り算の原理である。定理 **2** は命題 **1** に始まる。

1.4.2　余りのある割り算

命題 1 $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$ に対し $a = bq + r$, $0 \leqq r < b$ となる $q, r \in \mathbb{Z}$ が定まる。

A. Weil の「初学者のための整数論」(ちくま学芸文庫 2010 年) は，自然数の空でない部分集合に最小数が存在することから説き起こされる。実質的には数学的帰納法の原理である。淵源となる命題を集合 $\{a - bx \mid x \in \mathbb{Z}\}$ に適用すれば正の最小数が命題 1 の r である。

a の倍数の集合を $a\mathbb{Z} = \{ax \mid x \in \mathbb{Z}\}$，倍数の和を $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ と表す。

命題 2 $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ の正の最小数を m とすると $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$ であり m は a, b の最小公倍数である

$(\because)$ $x \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ と m に対し $x = mq + r$, $0 \leqq r < m$ となる q, r が定まる。$r = x - mq \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ であり m の最小性から $r = 0$ となり $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$ である。$m \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ なら $m\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ であり $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$ である。どんな公倍数も m の倍数であるから m は最小の公倍数である。 $\square$

命題 3 $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ の正の最小数を d とすると $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$ であり d は a, b の最大公約数である

$(\because)$ $d \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ から $d\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ である。d と $t \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ に対し $t = qd + r, 0 \leqq r < d$ となる q, r が定まる。$r = t - dq \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ と d の最小性から $r = 0$ であり $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$ となる。

$c \mid a$, $c \mid b$ なら $c \mid ax + by$ であり，$d = ax + by$ に対し $c \mid d$ である。どんな公約数 c も d の約数であるから d は最大の公約数である。 $\square$

系 1 a, b の最大公約数 $d = (a, b)$ に対し $ax + by = d$ となる $x, y \in \mathbb{Z}$ が存在する。
系 2 $(a, b) = d$ のとき不定方程式 $ax + by = c$ が解をもつ条件は $d \mid c$ である。

系 1 で $d = 1$ の場合が定理 2 の $\Longrightarrow$ である。本質は $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ と $d\mathbb{Z}$ の一致にある。逆に $d = 1$ ならば a, b の公約数は $ax + by = 1$ の約数であるから $(a, b) = 1$ であり $\Longleftarrow$ がなりたつ。

命題 2,3 は最小公倍数, 最大公約数を特徴付ける。最大, 最小の大小は $a < b$ でなく $a \mid b$ と解釈すれば有理整数に限らず，大小の定まらない多項式や Gaußの整数にも適用する。

命題 1 からユークリッドの互除法が導かれるが x, y の存在に互徐法を持ち出す必要はない。x, y の具体的数値を求める場合に使われる。ここでも Farey 数が威力を発揮する。定理 1 は左右から 2 通りの数値を提供する。$a > b$ なら $\dfrac{b}{a}$ の逆数を $\dfrac{a}{b} = q + \dfrac{r}{b}$ として具体的な $\mathcal{F}_n$ で $\dfrac{s}{t} < \dfrac{b'}{a'} < \dfrac{u}{v}$ となるまで繰り返す。両側に q を加えて $\dfrac{b}{a}$ まで遡れば $\mathcal{F}_n$ で隣り合う 2 数を得る。

1.5　互いに素

定理 2 は x, y の存在が意味を持つ典型的な存在定理である。一度 $(a, b) = 1 \Longleftrightarrow ax + by = 1$ を得れば一連の基本的命題は指呼の間にある。すべての命題に公理にまで遡る証明を求める必要はない。より基本的な命題に帰着させる工夫を重ねると自ずから配列の順序が定まる。初等整数論は $ax + by = 1$ を中心に据えると一筋に連なる。

命題 4 $(a,b)=1$ のとき $a\,|\,bc \Longrightarrow a\,|\,c$ である。
$(\because)$ $ax+by=1$ となる x,y により $c=c(ax+by)=acx+bcy$ となる。$bc\equiv 0 \pmod a$ ならば $c\equiv 0 \pmod a$ であり，$a\,|\,bc$ ならば $a\,|\,c$ である。 □

命題 5 a と b が互いに素ならば $a, 2a, \cdots (b-1)a$ を b で割った余りはすべて異なる。
$(\because)$ $la\equiv ka \pmod b$ なら $(k-l)a\equiv 0 \pmod b$ と $(a,b)=1$ から $k\equiv l \pmod b$ となる。 □

命題 4,5 を根拠が曖昧なまま引用する解説が多い。自分が納得できる論理の構築は矜持である。

命題 6 $(a,b)=1$ ならば $ax\equiv c \pmod b$ となる x が b を法としてただひとつ存在する。
特に p が素数のとき $a\not\equiv 0 \pmod p$ ならば $ax\equiv b \pmod p$ はただひとつの解をもつ
$(\because)$ $as+bt=1$ となる s,t に対し $x=cs$ とすると $c\equiv c(as+bt)\equiv ax \pmod b$ である。
$ax\equiv ax'\equiv c$ なら $a(x-x')\equiv 0 \pmod b$ であり $(a,b)=1$ から $x\equiv x' \pmod b$ となる。 □

$\mathbb{Z}$ の方程式 $ax=b$ が解を持つのは $a|b$ のときに限る。法が素数なら $ax\equiv b \pmod p$ は $\mathbb{Q}$ や $\mathbb{R}$ で考える場合と全く同様で $a\equiv 0 \pmod p$ でない限り普通に解ける。
(1) $2x\equiv 5 \pmod 7 \to x\equiv -1, 6 \pmod 7$ など $x\in\mathbb{Z}$ は無数にある。集合 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を設定する。
(2) $2x\equiv 5 \pmod 6 \to$ 解はない。空集合を示すことが
(3) $2x\equiv 6 \pmod{10} \to x\equiv 3, 8 \pmod{10}$ 解は 2 個ある。
無頓着に $2x\equiv 6 \pmod{10}$ を 2 で割って $x\equiv 3 \pmod{10}$ とすると危ない。

♪ 合同式 法が素数でないならば 零でなしとて 互いに素な忘れそ♪ （素数法師）

1.5.1 素元と既約元

素数とは 1 とそれ自身以外に正の約数を持たない自然数である。ただし 1 は素数とは考えない。

A) p が素数である。$\Longleftrightarrow$ $p=ab$ ならば $a=\pm 1$ または $b=\pm 1$ である。
B) p が素数である。$\Longleftrightarrow$ $p|ab$ ならば $p|a$ または $p|b$ である。
$\Longleftrightarrow$ $ab\equiv 0 \pmod p$ ならば $a\equiv 0$ または $b\equiv 0 \pmod p$ である。

A) は直接的内的性質であり B) は他者を介する間接的性質である。本来 A) は既約元,B) は素元の定義として峻別される。一般には素元 $\Longrightarrow$ 既約元である。$\Longleftarrow$ の十分条件は代数學に委ねる。
普通の整数環では素元 $\Longleftrightarrow$ 既約元なので心配はない。用語としては既約饂飩とよく似ている。山菜饂飩, きつね, カレーなど饂飩と他の具材に分解できる場合はかやく饂飩，それ以外が既約饂飩で巷の食堂では素饂飩と呼ばれることもある。世間では素饂飩 $\Longleftrightarrow$ 既約饂飩なので心配はない。
葱抜きは値引きを伴わないのが普通である。天かすや七味唐辛子も同様であり，このような具材をかけても既約性には影響しない。有理整数の $\xi=\pm 1$ や Gauß整数の $\xi=\pm 1, \pm i$ に相当する。とろろ昆布は単数の場合と可約として扱われ別料金になる場合があり所によって定義が異なる。
算数・数学で有理整数における素因数分解の一意性を既知とするのは暗黙の了解事項としても，本質が素数の素元としての性質にあるという認識は重要である。

1.6 数の問題

1.6.1 Bachet の錘

天秤の問題 天秤を使って 1g 単位で 40g までの重さを量るには何個の分銅 (錘) が必要か？

分銅を片方だけに乗せる設定ならば 1g, 2g, 4g,$\cdots 2^{n-1}$g,$\cdots$ ですべての自然数が実現される。両側に乗せて差を使うことを許すなら 1g と 3g の 2 個の分銅で 2g を表すことができ，2 個で 1,2,3,4g が量られる。錘を指定して十分性を検証するなら算数の問題になる。1g から 100g,1000g まで量るには何個必要か，n 個の錘で何 g まで量れるか等様々な variation が考えられる。1000 通りを個々に記述するのは現実的ではない。n 個でも通用する一般的な言い回しが求められる。

C.G.Bachet(1581-1638) は P. Fermat が欄外に書込みを残した Diophantus の羅語訳の出版で知られる。数学愛好家向けの問題集が長らく版を重ね，この問題はその中にあるらしい。

1.6.2 水を量る

問題 1 7ℓ と 3ℓ のバケツで 5ℓ を量るにはどうすればよいか？

容器は 2 個で目盛りはない。水は豊富にあるとする。渓流とテントの絵で夏休みの宿題になる。700ml と 300ml のデキャンタ，7 合 3 合の枡など二十歳を超えると単位が変る。

任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対し $7x + 3y = m$ には解がある。容器 2 個で $m = 1$ から 10 まで実現できる。別に十分大きな容器（風呂とか貯水タンク）があるなら水は何 ℓ でも可能である。負の数の許容は汲んだ水を川に流すことに相当する。貴重な液体を樽に戻すのは現実的ではない。x, y を自然数に限ると不定方程式に別の趣が生まれる。対象学齢にあわせ設定は工夫次第である。

問題 2 $9x + 13y = 20238$ となる整数 x, y をすべて求めよ。

自然数 x, y の組は $\boxed{}$ 個である，の形式にすると解答の手間は同じで採点は著しく簡単になる。(1) ひとつ求めよ ,(2) すべて求めよ，の出題形式をよく見かけるが先に (1) を求めても (2) へ進むには余計な手間がかかる。合同式なら一挙に片付く。

1.6.3 平方数の和

あるとき授業中に唐突に年齢を聞かれ咄嗟に「二通りの平方数の和」と応えた。3 乗の和なら Ramanujan のエピソードの $1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3 = 1729$ がよく知られている。0 を許すならば $3^2 + 4^2 = 5^2 + 0^2$ の例がある。この際 0 を使う 25 は除くとして何歳だったでしょう。

再びこの型の年齢になった時，さらに次回まで元気でいたいと答えた。さて何歳でしょう。——

問題 A 2 個の平方数の和として $n = x^2 + y^2$ と表される n はどのような数か。

問題 B 3 個の平方数の和として $n = x^2 + y^2 + z^2$ の形に表されない n はどのような数か。

$A = \{n = x^2 + y^2 \,|\, x, y \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{n = x^2 + y^2 + z^2 \,|\, x, y, z \in \mathbb{Z}\}$ とする。$A \subset B$ としたいので 0^2 も許容する。$13 = 3^2 + 2^2 \in A$, $14 = 3^2 + 2^2 + 1^2 \in B$ でなる。7 は 3 個では表せない。

昨日の「年齢」は多くの人が言い当てた通り，授業中に聞かれたのは 50 歳，誕生日のコメントは 65 歳，次は 85 歳である。($1^2+7^2 = 5^2+5^2$, $1^2+8^2 = 4^2+7^2$, $2^2+9^2 = 6^2+7^2$) $2^2+11^2=5^2+10^2$ や $1^2+12^2=8^2+9^2$ は願うのは許されても世間に公表できる数値ではない。

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2 \tag{3}$$

により平方の和の積は再び平方の和になる。前半は内積 ^{2}+ 面積 ^{2} で，後半は $\alpha=a+bi, \beta=c+di$ に対する $|\alpha\beta|=|\alpha|\,|\beta|$ と解釈される。絶対値の等式は目立たないが極めて重要である。とにかく $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=p^2+q^2=r^2+s^2$ と二通りあることが年齢クイズの背景である。

$50=2\cdot5^2$, $65=5\cdot13$, $85=5\cdot17$, $125=5^3$, $145=5\cdot29$ と現れる数はすべて集合 A に属する素数の積である。A に属する自然数の特徴付けが問題 **A** である。さらに表し方の個数を考えると (3) が意味をもつ。

ある年に新入生の宿泊行事に使った全学年が入る大広間の照明は，下段に 12 個上段に 6 個の電球が付いた合計 $6\times3=18$ 球のシャンデリアであった。電球は $18^2=324$ 個である。この学年は第 65 期生であったので 65 に因む $18^2+1=17^2+6^2=15^2+10^2$ を思いついて挨拶に使った。

1.6.4 四平方数の和

B が決定されて $7\notin B$ のような数が例外的であるとすると，n が問題 B の数なら $n-1$ は x,y,z で表される。$n=x^2+y^2+z^2+1^2$ となり 4 個の平方数の和で表されることになる。

定理 すべての自然数は 4 個の平方数の和で表される。(Lagrange)

Diophantus の頃から知られ Fermat や Euler も取り組んだが最初の証明は Lagrange とされる。三人寄ればモンジュの智慧，四人寄ったりラグランジュと謳われる Gaspard Monge(1746-1818) と Joseph Luis Lagrange(1736-1813) は激動の仏蘭西をそれぞれに生き抜いた。三人四人は語呂合わせであり格付の意図はない。後に A.Hurwitz は四元数の整数によって証明している。

年齢クイズの背景は $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac\pm bd)^2+(ad\mp bc)^2$ である。$a,b\in A$ なら積公式により $ab\in A$ である。Euler は積公式の 4 変数版を見付け，問題を素数の場合に帰着させている。

$$\begin{aligned}(x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_0^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2) &= (x_0y_0-x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3)^2\\ &+(x_0y_1-x_1y_0+x_2y_3-x_3y_2)^2\\ &+(x_0y_2-x_2y_0+x_3y_1-x_1y_3)^2\\ &+(x_0y_3-x_3y_0+x_1y_2-x_2y_1)^2\end{aligned} \tag{4}$$

(3) は四元数の等式 $|xy|^2=|x|^2|y|^2$ で Goldbach 宛の書簡は Hamilton の四元数より百年早い。

問題 C 積公式 (3) と 2 変数の積公式に類する集合 B 上の 3 変数版が書かれていないのは何故か。

2 複素数と方程式

2次方程式は高校数学の入り口に位置する基本的な題材である。中学校でも学ぶが，高等学校においても主要なテーマである。公式の導入など丁寧な扱いが求められる。

2.1 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$

高等学校の数学Iを想定し $a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0$ とする。$ax^2+bx+c=0$ を次のように変形する。
$a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=0 \to a\{(x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}\}=0 \to a(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2}{4a}-c$

先に a で割って $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \to (x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}=0$ としても行き先は同じである。

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \ \to\ x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \ \to\ x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{1}$$

2.1.1 平方根

殊更に $a\neq 0$ は強調せず暗黙の大前提とする。それでも (1) にはいくつか問題点がある。$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ を経由すると $\sqrt{4a^2}=|2a|$ や $\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}$ 等の扱いに余計な気遣いが必要になる。前の時間には次のような遣り取りがあったと想定される。

◎ $\sqrt{2}$ とは如何なる数か？ → 1.414 です。 2乗すると2になる数です。　なんであかんのですか
◎ $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ を簡単にせよ。→ $2-\sqrt{5}$ です。(∵)2乗すると $(2-\sqrt{5})^2=9-4\sqrt{5}$ になります。
◎正の数 a について $\sqrt{a}$ は2乗して a になる正の数である。$x^2=a$ となるのは $x=\pm\sqrt{a}$ である。
◎ $\sqrt{a^2}=a$ は迷信である。　ぢゃあ $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ はいいんですか？

本来 $\sqrt{4a^2}=2a$ は誤りである。前に ± があるので間違えても許される。これでは意欲的な生徒の数学離れを促進しかねない。数学は論理の構築であって言い逃れの訓練ではない。

2.2 判別式の意味

まず $4a$ をかけて $4a^2x^2+4abx+4ac=0$ とする。$(2ax+b)^2=4a^2x^2+4abx+b^2$ を意識した変形である。$ax^2+bx+c=0$ は $X^2=A$ 型の基本形 $(2ax+b)^2=b^2-4ac$ に標準化される。

実数の平方は正か0である。$b^2-4ac<0$ ならば解はない。$b^2-4ac>0$ ならば平方根が2個存在する。$b^2-4ac=0$ の場合とあわせ $2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$ と表される。

$$b^2-4ac\geqq 0 \text{ のとき } x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{2}$$

方程式を $X^2=A$ に帰着させ，平方根の存在を公式の根拠とした。$(2ax+b)^2=b^2-4ac$ から解の存在条件として判別式が自然に浮び上がる。範囲を複素数に拡げることも考慮し，実数係数の

$\sqrt{-1}\sqrt{-1}=$

2 次方程式に関する解の有無と判別式はこの場面で触れるべきである。多くの解説は先に取敢えず公式 (2) を掲げる。その後で $\sqrt{\ }$ の中の $D = b^2 - 4ac$ を判別式と定義する。それは内容には触れずに「公式は覚えて使え」と表面的な「やり方」を教え込む流儀である。

「$\sqrt{\ }$ の中が負なら i で書き直せ！」と教え込まれ $x^2 - 2x + 2 < 0$ に対し $1 - i < x < 1 + i$ と忠実に実行する生徒は被害者である。悪しき数学教育は虐待に近い。

虚数を含めると負の分数に関する $\sqrt{\ }$ の扱いは微妙である。$\sqrt{4a^2} = |2a|$ よりも深刻と言える。$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$ ならこの点も同時に回避できる。

何れにしても $D = b^2 - 4ac < 0$ なら解はない。これを実数の解はないと言い直し虚数解を想定する理由は 2 次方程式の周辺には見当たらない。複素数の生まれ故郷は別の所にある。

2.2.1 教室における 2 次方程式

例題 (1) $x^2 - 6x + 5 = 0$　(2) $(x-3)^2 = 2$　(3) $x^2 - 3x + 1 = 0$　(3') $x^3 - 3x + 1 = 0$

公式の前に因数分解できる例を扱うのは復習以上の意味がある。$(ax + b)(cx + d) = 0$ の形から「かけて 0 $\Longleftrightarrow$ どちらか 0」に遡り解が 2 個であることが確認される。因数定理の予備練習であり n 次方程式の根が高々 n 個であることの納得につながる。(1) の解は係数の加減乗除で表されるのに対し (2) には $\sqrt{\ }$ が現われる。(3) で $(2x - 3)^2 = 5$ を経由すれば (2) の $x - 3 = \pm\sqrt{2}$ の模倣として自然に $\sqrt{5}$ が現れる。2 次関数の変形が刷り込まれていると先に $4a$ を掛ける唐突感は否めず，変形を技巧的と感じるかも知れない。

実際の授業でどのような方法を選ぶかは双方を知った上で比較すべき事柄である。2 次関数が先か 2 次方程式が先かの順序を含め慎重な検討が必要である。

2 次関数を意識して $a(x + \dfrac{b}{2a})^2 - \dfrac{b^2}{4a} + c$ から出発すると $y = ax^2 + bx + c$ との無用な混乱を招く恐れがある。似たような式変形の効率的な訓練を優先させるか，2 次方程式として独立に扱うかは時と場合による。三角関数の定義は単位円か半径 r かなど随所に類似の例がある。

論理的整合性を犠牲にし，わかりやすさを優先させることも時には必要である。検定教科書は様々な制約の下での妥協の産物である。三角関数には π，ベクトルのなす角は $180°$ など分冊による記述の不整合まで恰も最高法規のように教科書に従うのは滑稽である。教科書の内容を知るのは如何に使うかを考えるためである。判断の拠り所を何処に求めるかが問われる。

2.2.2 因数分解の判定条件

定理 整数を係数とする 2 次式 $ax^2 + bx + c$ が整数を係数とする 1 次式の積に分解される。

$\Longleftrightarrow$ 判別式 $D = b^2 - 4ac$ が平方数である。($D = d^2$ となる d が存在する。)

～ 知れば便利でお得な事実ここは何とか証明し 定理の看板掲げたい 有理数なら話は簡単 ～

($\because$) 整数係数の 2 次式 $ax^2 + bx + c$ が整数 p, q, r, s により $(px + q)(rx + s)$ と分解されるとする。$a = pr, b = ps + qr, c = qs$ であるから $D = b^2 - 4ac = (ps + qr)^2 - 4psqr = (ps - qr)^2$ となり $b^2 - 4ac$ はある整数の平方である。

逆に $b^2 - 4ac = d^2$ となる d が存在すれば方程式の根 $\dfrac{-b \pm d}{2a}$ により次の形に因数分解される。

$$ax^2+bx+c=a(x-\frac{-b+d}{2a})(x-\frac{-b-d}{2a})=\frac{1}{a}(ax+\frac{b+d}{2})(ax+\frac{b-d}{2}) \quad \square \qquad (3)$$

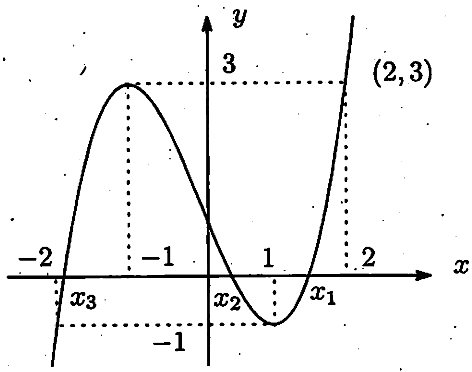
これで b^2-4ac が平方数なら ax^2+bx+c が有理数の範囲で因数分解されることがわかった。整数係数に取り直すにはさらに一手間掛るが有理数での因数分解判定でも実用上は十分である。
例 $4x^2+5x-6 \to D=25+96=11^2$ (分解可能) $4x^2+6x-5 \to D=36+80=116$(不可能)

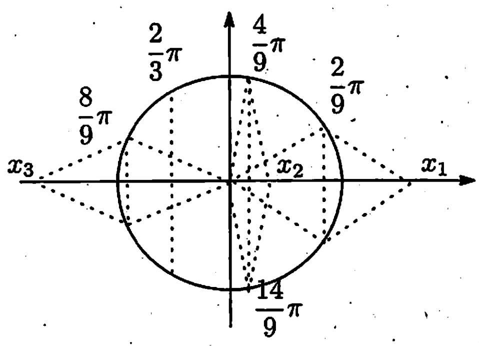
2.3 Cardano の解法

2.3.1 前回の 3 次方程式 $x^3-3x+1=0$

解は $|x|<2$ の範囲に 3 個ある。$x=2\cos\theta$ とすると $8\cos^3\theta-6\cos\theta+1=0$ である。3 倍角公式 $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ により方程式 $x^3-3x+1=0$ は $2\cos 3\theta+1=0$ に変換される。3 個の θ に対応する $x_1=2\cos\frac{2}{9}\pi$, $x_2=2\cos\frac{4}{9}\pi$, $x_1=2\cos\frac{8}{9}\pi$ を得る。

曲線 $y=x^3-3x+1$ の姿から解の存在と範囲が読み取れる。具体的な数値は三角関数の宣伝材料に相応しい。3 乗 $\longleftrightarrow$3 倍角は常套で，数 II の 3 倍角は数 III で使うというのは迷信である。$x^3-3x+2=0$ のような例題を挿入すれば方程式は解けないのが普通という教訓になる。





2.3.2 3 次方程式 $x^3+ax+b=0$

3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ は x を $x-\frac{b}{3a}$ で置き換えて x^2 の項を消し，a で割れば $x^3+ax+b=0$ の形に標準化される。

$x=u+v$ とすると $x^3+ax+b=(u+v)^3+a(u+v)+b=u^3+v^3+b+(3uv+a)(u+v)$ となる。$u^3+v^3+b=0$, $3uv+a=0$ をみたす u,v が見付かれば解は $x=u+v$ と表される。$u^3+v^3=-b$, $u^3v^3=\left(-\frac{a}{3}\right)^3$ であり，u^3,v^3 は次の 2 次方程式によって求められる。

$$t^2+bt-\frac{a^3}{27}=0 \qquad (4)$$

実際には $t=-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}=-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$ である。これを α,β とすると 3 乗根 $\sqrt[3]{\alpha}, \sqrt[3]{\beta}$ が求める u,v であり，3 次方程式 $x^3+ax+b=0$ の解は次の形に表される。

$$x = u + v = \sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta} = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}} \tag{5}$$

α, β に対し $\sqrt[3]{\ }$ の取り方はそれぞれ 3 通りある。条件 $3uv = -a$ によって u から v が定まるので $u = \sqrt[3]{\alpha}$ により $x^3 + ax + b = 0$ の 3 個の解が確定する。これが所謂 Cardano の解法である。

例題 1 $x^3 - 3x + 1 = 0$

前回の例では $a = -3, b = 1$ から $\alpha + \beta = u^3 + v^3 = -1$, $\alpha\beta = u^3v^3 = 1$ であり $t^2 + t + 1 = 0$ の解は $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ である。$\alpha = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$ は都合のよい数値であり，3 乗根として $\theta = \frac{2}{9}\pi + \frac{2k}{3}\pi$ に対応する $u = \cos\theta + i\sin\theta$ をとることができる。u を決めれば $uv = 1$ から $v = \bar{u}$ であり，解として図に示す $x_1 = 2\cos\frac{2}{9}\pi$, $x_2 = 2\cos\frac{4}{9}\pi$, $x_3 = 2\cos\frac{8}{9}\pi$ が確定する。

Cardano の解法で 2 次方程式 (4) の α, β は出るが $\sqrt[3]{\alpha}, \sqrt[3]{\beta}$ の具体的記述は例題 1 のように簡単とは限らない。次の数値は Cardano 自身の例題であり教訓的でよく使われる。

例題 2 $x^3 + 6x = 20$

この表記は虚数どころか負の数も覚束ない時代を彷彿とさせる。$a = 6, b = -20$ により (4) は $t^2 - 20t - 8 = 0$ である。$t = 10 \pm \sqrt{108}$ から $x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$ となる。

$x^3 + 6x - 20 = (x-2)(x^2 + 2x + 10)$ を解けば $x = 2, -1 \pm 3i$ となる。実数は 1 個だけなので $\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}} = 2$ で数は見かけに依らぬとは誠に詐欺師的な例題である。

3 次方程式の解法に名を留める Gerolamo Cardano(1501-1576) は謎の多い人物である。本業は医者らしいが他のルネサンス期の著名人と同様に活動は多方面にわたり数多くの著作が知られる。通俗的な数学史では他人の業績を勝手に出版した悪役とされる。稀代のギャンブラーであり確率や期待値の確立について Ferma と Pascal の先駆けとの評価もある。

2.4 判別式

3 次方程式の解を α, β, γ とするとき判別式を $D_3 = (\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2$ によって定める。2 次方程式 $ax^2 + bx + c$ はこの流儀なら $D_2 = (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ であり $a^2D_2 = b^2 - 4ac$ となる。係数による判別式 D_3 の具体的な表示の前に定義から導かれる次の性質に着目する。

補題 1 判別式 $D = D_3$ によって実数係数の 3 次方程式の解は次のように分類される。

$D > 0 \iff$ 異なる 3 個の実数
$D = 0 \iff$ 重根
$D < 0 \iff$ 実数と互いに共軛な 2 個の虚数

結果は実数係数の 2 次方程式の判別とよく似ている。第 3 の場合は 1 個は実数，他は互いに共軛な虚数である。$\bar{\alpha} = \beta, \bar{\gamma} = \gamma$ とすると $D = (\alpha - \bar{\alpha})^2|\alpha - \gamma|^4 < 0$ となる。

補題 2 3 次方程式 $x^3 + ax + b = 0$ の判別式は $D = -4a^3 - 27b^2$ である。

判別式 D は α, β, γ の対称式である。$\alpha+\beta+\gamma=0$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=a$，$\alpha\beta\gamma=-b$ から $(\alpha-\beta)^2=\gamma^2-4\alpha\beta$ などにより a, b の多項式で表される。

判別式 $D_3=4a^3-27b^2$ は Cardano の解法の要となる 2 次方程式 $t^2+bt-\dfrac{a^3}{27}=0$ の判別式 D_2 と実質的には同じ式である。瞠目すべきは D_3 と D_2 の符号の逆転である。

3 次方程式の解がすべて実数なら (4) の解は必ず虚数となる。すべてを実数で収めようとしても解の記述に虚数を避けては通れない。これが虚数を認知せざるを得なかった理由と考えられる。

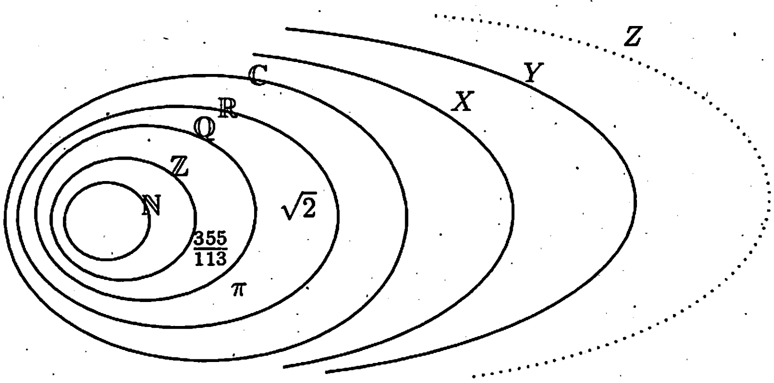
3 次方程式の解法をめぐる priority の真実は歴史の闇の中である。業績は他人のものでも，虚数の認知と出版による公表は数学史の画期をなす。函数論の興隆など数の拡大が後世に及ぼす影響は Copernicus に匹敵する。地動説の公表は最晩年の 1543 年であり Cardano が Ars magna を書いたのは 1545 年である。約 100 年前の Gutenberg と並べるとルネサンスの三題噺が出来上がる。何やら物騒な所謂三大発明より気が利いている。

2 次方程式に関り虚数認知の契機となった 3 次方程式の解法を通し複素数誕生の経緯を考えた。

2.5 数の世界

自然数はものの個数として自然に現れ人類の歴史と共にある。0 と負の数の認識より分数の方が早く $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ は年代の順ではない。虚数の認知と負の数の導入はほとんど同時期と想われる。虚数を imaginary な数と言うが数とは元来 imaginary なものである。

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk. (L. Kronecker)



数の世界地図は惑星の図に似ている。発見の経緯と年代も不思議と重なる。肉眼で見える 5 個は天動説時代から知られ，他は近代天文学の計算で存在を予測して，望遠鏡で探して見つけられた。冥王星は 1930 年で意外と新しい。因みにミッキーのプルートと同い年である。

平面幾何を巧妙に記述する複素数の 3 次元版が探求され 1843 年 10 月 16 日にダブリンの運河に掛かる橋で W.R.Hamilton が四元数 $\mathbb{H}$ の関係式 $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$ を見つけた。$\mathbb{C}$ の外の $X=\mathbb{H}$ は非可換であるが通常の計算規則に従う。発見の経緯は Newton の林檎と王冠の謎を解いてアルキメデスなのに走った話と並んで人口に膾炙する。

すぐに友人の J.Graves が 0 以外は逆元をもつが結合律をもたない八元数 Y を見つけた。発見者ではなく Cayley 数の名が普及し $\mathfrak{C}$ と書かれる。八元数の $\mathbb{O}$ では愛想がない，今更 Graves の $\mathfrak{G}$

では芸がない。さらに外側の数 Z の存在は 20 世紀の代数的位相幾何学形成期の懸案であった。

「Hirzebruch 氏から $\cdots$ の Pontrjagin 数が $(2k-1)!$ で割り切れることが証明された伺いました。その結果は数の存在に関する古典的な問題に $\cdots$」とその瞬間を伝える J. Milnor から R. Bott 宛の手紙の日付は December 23,1957 である。Bulletin of A.M.S. が同時に掲載する January 6,1958 の返信で Bott は自分の得た証明と Kervaire の研究について述べている。

Y の外に冥王星のような数 Z がないとわかり $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ と拡大する数の地図が完成したのは悠久の歴史の中で僅かに 66 年前である。

2.5.1 対称式の計算

補題 2 $x^3+ax+b=0$ の判別式は $D=-4a^3-27b^2$ である。

(1) 3 次方程式の判別式 $D=(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$ は α,β,γ の対称式である。$x^3+ax+b=0$ のとき $\alpha+\beta+\gamma=0$ であり $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\gamma^2-4\alpha\beta$ 等により D は次の形になる。

$$\begin{aligned} D &= \{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}\{(\beta+\gamma)^2-4\beta\gamma\}\{(\gamma+\alpha)^2-4\gamma\alpha\} \\ &= (\alpha^2-4\beta\gamma)(\beta^2-4\gamma\alpha)(\gamma^2-4\alpha\beta) \\ &= \alpha^2\beta^2\gamma^2-4(\alpha^3\beta^3+\beta^3\gamma^3+\gamma^3\alpha^3)+16\alpha\beta\gamma(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)-64(\alpha\beta\gamma)^2 \end{aligned} \tag{6}$$

(2) $\sigma_1=\alpha+\beta+\gamma$, $\sigma_2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\sigma_3=\alpha\beta\gamma$ とする。D は $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ の多項式であり α,β,γ の 6 次式である。$\sigma_1=0$ であるから次数を鑑みれば $D=A\sigma_2^3+B\sigma_3^2$ の形しかない。$(\alpha,\beta,\gamma)=(1,-1,0),(1,1,-2)$ などにより $A=-4$, $B=-27$ を得る。ただし次の事実を使う。

定理 対称多項式 (有理式) は基本対称式の多項式 (有理式) で表される。

証明は色々考えられるが代数が好きな人には n 変数の有理式と対称式の体の拡大次数を比べる方法がお勧めである。拡大体を調べる証明なので多項式版より有理式版の方が簡単である。p.3 の有理数と整数の対比と似ている。この途は好み違うと敬遠せず Galois 理論の成書を繙いてほしい。

代数学を知らないと 2 次 3 次の方程式が理解出来ないと思う必要はない。補題 **2** は正直に計算するのが一番である。代数の枠組みが背景にあれば上記のような「ずるい方法」が正当化される。

主題は虚数の認知で補題 **1,2** はストォリイの転回点である。一方で Cardano の解法とは独立に対称式が基本対称式の式であることは一度は証明すべき基本定理である。対象を x^3+ax+b 型に限定する補題 **2** では不満な人は 3 次式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の判別式を a,b,c,d の式で書いてみるとよい。さらに一般的な枠組みで考えて行くと普通の代数学の教科書を再構築することになる。

対称式 書いては消して考えて 賢くなった自分が残る

虚数認知のストォリィの立役者は判別式 $D_3=(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$ である。補題 **1** には解が虚数なら共軛も解であることが使われる。因みに共役は共軛であり関数は函数である。略字の函より凾の方が function の機能に相応しい。楕円の楕の字も一時期は教科書から外されていた。だ円 (長円) など妙な書き方をしなくても今は復活している。軛はこのままでは役不足である。

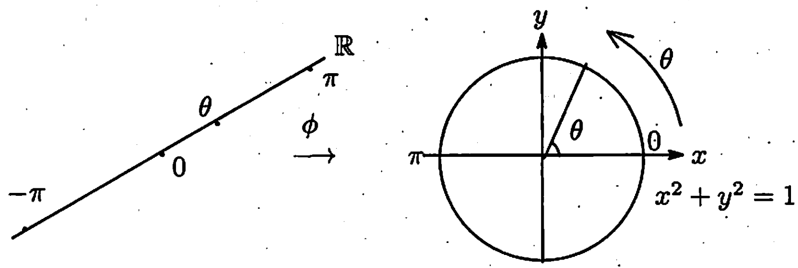
2.5.2 共軛と絶対値

$x, y \in \mathbb{R}$ のとき $z = x + yi \in \mathbb{C}$ の共軛を $x - yi$ と定め記号 $\bar{z}$ で表す。$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$, $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ である。積について $\overline{zw} = \bar{w}\bar{z}$ であり $|zw|^2 = zw\overline{zw} = z|w|^2\bar{z} = |z|^2|w|^2$ となる。$\mathbb{C}$ は書かんでよかった。$\overline{zw} = \bar{w}\bar{z}$ は非可換な四元数, 八元数で意味をもつ。特に八元数では結合律の欠落を補う性質として重宝される。§1.5 の数の拡張 $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset X \subset Y$ で大小関係は $\mathbb{C}$ で失われ X では交換法則 $ab = ba$ が失われ，最後の Y では結合律 $a(bc) = (ab)c$ が失われる。

数の拡張のストォリィは $ab = 0 \iff a = 0$ または $b = 0$（零因子の非存在）が大前提である。零因子を許すなら 3 次元のベクトル積 (外積) などいくらでも例はある。

$z\bar{z} = |z|^2$ により $z \neq 0$ に対し $\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ は z の逆元である。四元数は非可換，八元数は非結合的でも逆元の存在により数体の面目を保つ。ともに独自の世界が拡がり様々に応用される。

積の絶対値は絶対値の積という性質は複素数でも重要である。$|zw| = |z||w|$ により複素数平面の単位円周は積について閉じている。$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を公式の覚え方として紹介するだけなら展開の式に形式的に $i\theta$ を代入する説明でも許されるが根底にあるのは単位円の積構造である。



実数による単位円への自然なパラメータ ϕ が存在し，三角関数は加法公式 $\phi(x + y) = \phi(x)\phi(y)$ により角の定義も含めて単位円の積から創造される。

数学科教育法 III 第 3 日 15.September 2023

3 面積と幾何学

地を測ることが幾何學の起源とされる。幾何の字義通り論証の題材となり，古典的幾何は完成度の高さから諸学の規範とされた。引用は場違いかも知れない。此れ曹孟徳の詩に非ずや。

對酒當歌 人生幾何, 譬如朝露 去日苦多

数論と幾何は学校数学の二大分野である。arithmetica, geometria, astronomia, musica で quadrivium とされた頃と大きな違いはない。これまで主に数の歴史を辿ったが，3 日目は三角形の面積を手始めに公式から見えて来る初等幾何をテーマとする。

3.1 三角形の面積公式

底辺×高さ÷2は小学校で教わる。教科書では三角形の面積を長方形の半分と捉え平行四辺形は後に出て来る。ここでは三角形の面積を $\varDelta = \triangle ABC$ と表し，記号 S は平行四辺形に使う。

$\boxed{1}$ $\varDelta = \dfrac{1}{2}ah$

中学生ならこの形である。三角比を知り，高さを $h = b\sin C$ に換えると高校生風 になる

$\boxed{2}$ $\varDelta = \dfrac{1}{2}ab\sin C$

ここから様々な公式が派生する。正弦定理により $\sin C$ を外接円の半径 R と c で表せば $\boxed{3}$ の式になる。半径 R と角の式に書き換えることもできる。

$\boxed{3}$ $\varDelta = \dfrac{abc}{4R}$　　　$\boxed{4}$ $\varDelta = 2R^2\sin A\sin B\sin C$

二辺とその間の角で面積を表す式が $\boxed{2}$ である。三角形の合同条件のうち一辺 a とその両側の角 B, C で面積を表すと次の形になる。三辺で面積を表す公式もあって然るべきである。

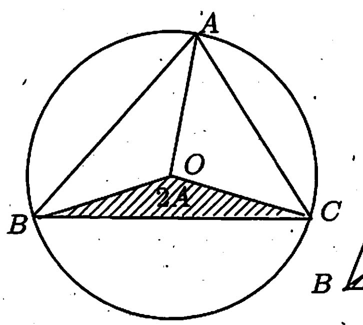
$\boxed{5}$ $\varDelta = \dfrac{1}{2}a^2\dfrac{\sin B\sin C}{\sin(B+C)}$

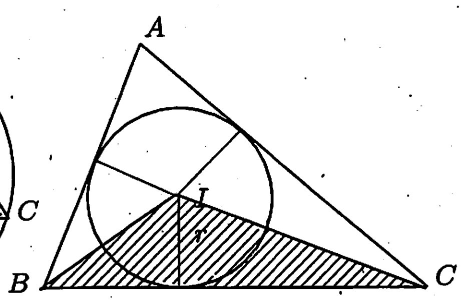
分母に正弦の加法公式を使えば tangent の式になる。変奏を続けると実用性からは遠ざかる。

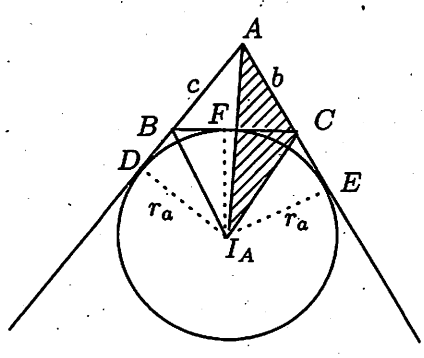
$\boxed{6}$ $\varDelta = \dfrac{1}{2}a^2\dfrac{\tan B\tan C}{\tan B+\tan C}$

基本の $\boxed{2}$ を $\sin C = \cos C\times\tan C$ と変形し余弦定理を適用するとそれなりに整った式になる。

$\boxed{7}$ $\varDelta = \dfrac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)\tan C$







左図のように外心 O で3個の三角形 $\triangle OBC, \triangle OCA, \triangle OAB$ に分割すれば次の式を得る。

$\boxed{8}$ $\varDelta = \dfrac{1}{2}R^2(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$

R^2 で表される $\boxed{4}$, $\boxed{8}$ の比較から，面積公式の副産物として関係式 (1) が現れる。$A+B+C=\pi$ から三角比の式変形を試み，面積を介する方法と比較するのも一興である。

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C \tag{1}$$

3 辺の長さ a,b,c で直接面積を表す式は古くから Heron の公式として知られている。

$\boxed{9}$ $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ただし $s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$ である。

これで合同条件に対応する面積公式が出揃う。$\boxed{5}$, $\boxed{9}$は実用性よりも理論的な意味が大きい。この s は内接円の半径 r を高さとして Δ を 3 個の三角形の和で表すと自然に現れる。

$\boxed{10}$ $\Delta=\dfrac{1}{2}(a+b+c)r=sr$

正弦定理とあわせると見かけの異なる式になる。

$\boxed{11}$ $\Delta=rR(\sin A+\sin B+\sin C)$

頂点 A,B,C に対峙する傍心を I_A,I_B,I_C，傍接円 $\gamma_A,\gamma_B,\gamma_C$ の半径を r_a,r_b,r_c とする。傍心は三角形の五心の中で他に比べ影が薄いが，傍接円は$\boxed{9}$, $\boxed{10}$に現れる s と縁が深い。

図のようにして $\Delta=\triangle ABI_A+\triangle ACI_A-\triangle BCI_A=\dfrac{1}{2}(cr_a+br_c-ar_a)=\dfrac{1}{2}(-a+b+c)r_a$ となり内接円の$\boxed{10}$, $\boxed{11}$とよく似た面積公式を得る。

$\boxed{12}$ $\Delta=\dfrac{1}{2}(-a+b+c)r_a=(s-a)r_a$

$\boxed{13}$ $\Delta=r_aR(-\sin A+\sin B+\sin C)$

傍接円 γ_B,γ_C も同様で $\boxed{10}$ と合わせ 4 通りの公式 $\Delta=sr=(s-a)r_a=(s-b)r_b=(s-c)r_c$ が得られる。$\boxed{10}$, $\boxed{12}$を半径で割った式と $(s-a)+(s-b)+(s-c)=s$ により内接円，傍接円の半径には次のような不思議な調和が現れる。

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c} \tag{2}$$

このような副産物を含め，公式は「覚えて使うもの」ではなく「集めて楽しむもの」である。

三角形の高さにも類似の関係がある。底辺と高さを取り替えて$\boxed{1}$ は $\Delta=\dfrac{1}{2}ah_a=\dfrac{1}{2}bh_b=\dfrac{1}{2}ch_c$ の 3 通りに表される。$s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)=\dfrac{\Delta}{h_a}+\dfrac{\Delta}{h_b}+\dfrac{\Delta}{h_c}$ と $s=\dfrac{\Delta}{r}$ から (2) と同様な関係を得る。

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c} \tag{3}$$

$\boxed{12}$ と $\boxed{10}$ で 4 通りに表される面積 $\Delta=sr=(s-a)r_a=(s-b)r_b=(s-c)r_c$ を掛けると $\Delta^4=sr(s-a)r_a(s-b)r_b(s-c)r_c=s(s-a)(s-a)(s-a)rr_ar_br_c$ となる。$\Delta^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$ であるから $\Delta^2=r\,r_a\,r_b\,r_c$ を得る。こうなると俄かに内接円と傍接円が脚光を浴びる。

$\boxed{14}$ $\Delta = \sqrt{r\,r_a\,r_b\,r_c}$

益々実用性からは遠ざかる。一方で実際の測量にはどんな式を利用しているのか気に掛かる。$\Delta^2 = r\,r_a\,r_b\,r_c$ の変奏で，これなら作品に昇華という二番煎や出涸らしは他にもある。

$\boxed{15}$ $\Delta = \dfrac{r_a r_b r_c}{s} = \dfrac{2 r_a r_b r_c}{a+b+c}$　　　$\boxed{16}$ $\Delta = \dfrac{(s-a)(s-a)(s-a)}{r}$

これにより $sr^2 = (s-a)(s-b)(s-c)$, $s^2 r = r_a r_b r_c$, $rR = \dfrac{abc}{2(a+b+c)}$, $4srR = abc$ となる。

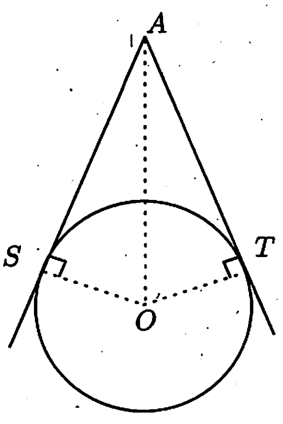
3.2　内接円と傍接円

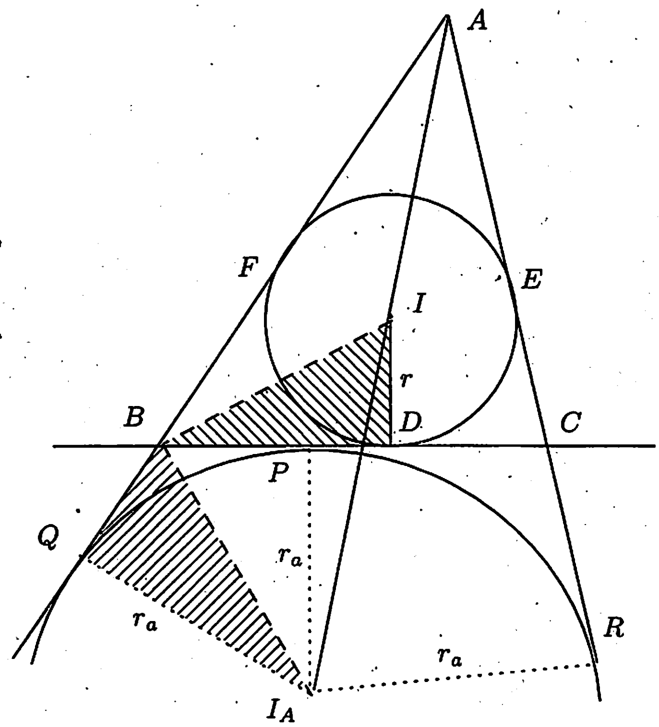
円外の点から引いた 2 本の接線の長さは等しい。図で $AQ + AR = (AB + BP) + (AC + CP) = a + b + c$ から $AQ = AR = \dfrac{1}{2}(a+b+c) = s$ となる。公式の s は頂点 A から γ_A への接線の長さである。特に各頂点から傍接円への接線はすべて等しい。高校教科書にも傍接円, 傍心の言葉だけは載っている。Heron の公式の幾何的証明により s の意味と影の薄かった傍接円が照明される。

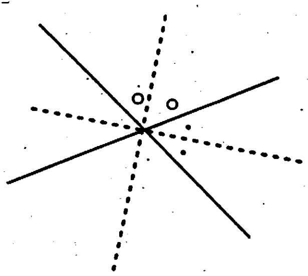
BI と BI_A は B での角の二等分線であり互いに垂直である。対応する角が等しいので $\triangle IBD$ と $\triangle BI_AQ$ は相似である。$ID : DB = BQ : QI_A$ から $r\,r_a = BD \cdot BQ$ である。

ここで $BD + CE + AF = \dfrac{1}{2}(BC + CA + AB) = s$ であるから $BD = s - (CE + AE) = s - b$ となる。$BQ = AQ - AB = s - c$ と併せると $r\,r_a = BD \cdot BQ = (s-b)(s-c)$ である。

内接円と傍接円の面積公式 $\Delta = sr$ と $\Delta = (s-a)r_a$ をかけると $\Delta^2 = sr(s-a)r_a$ となる。$r\,r_a = (s-b)(s-c)$ により $\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ である。 □







A

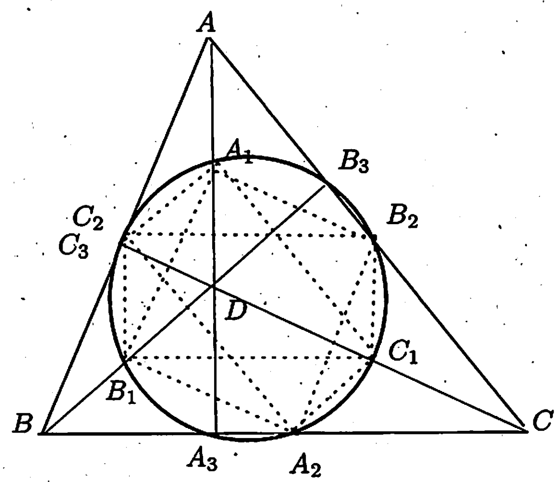
3.2.1 垂心と九点円

内心 I は 3 個の傍心 I_A, I_B, I_C の垂心であり，I_A は $\triangle II_B, I_C$ の垂心である。三角形の 3 頂点と垂心の 4 点は，互いに他の 3 点の垂心である。五心の内，垂心だけに見られる特徴である。

$\triangle ABC$ の垂心 D について AD, BD, CD の中点を A_1, B_1, C_1 とし，辺 BC, CA, AB の中点を A_2, B_12, C_2，頂点 A, B, C から対辺に引いた垂線の足を A_3, B_3, C_3 とする。

補題 $\triangle ABC$ に対し 9 点 $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$ は同一円周上にある。（九点円定理）

古来ユークリッドの言論が諸学の規範とされたが，初等幾何の多くは 19,20 世紀の作品である。それでも証明の道具は中学高校の範囲に収まり，教室での数学体験の素材として期待できる。



定理 $\triangle ABC$ の九点円は内接円に内接し，傍接円に外接する。（**Feuerbach** の定理）

$\triangle BCD$ に対する 9 点は役割が変わるが $\triangle ABC$ の 9 点に一致し，九点円は共通である。一方で A, B, C, D の 4 点で作られる 4 個の三角形の内接円, 傍接円はすべて異なるので九点円は計 16 個の円に接する。真に華々しい定理であり初等幾何の大団円の名に相応しい。

九点円 (nine-point circle) では素っ気無いが独逸語圏では Feuerbachschen Kreis と呼ばれる。Karl Wilhelm Feuerbach(1800-1834) の短い生涯は Abel(1802-1829) と重なり夭折の悲劇は Galois(1811-1832) に似る。János Bolyai(1802-1860) の顛末も同じ頃で，この時代の数学史には何故か暗雲が漂う。思想史に名を残す Ludwig Feuerbach (1804-1872) は弟である。

3.3 四角形の面積公式

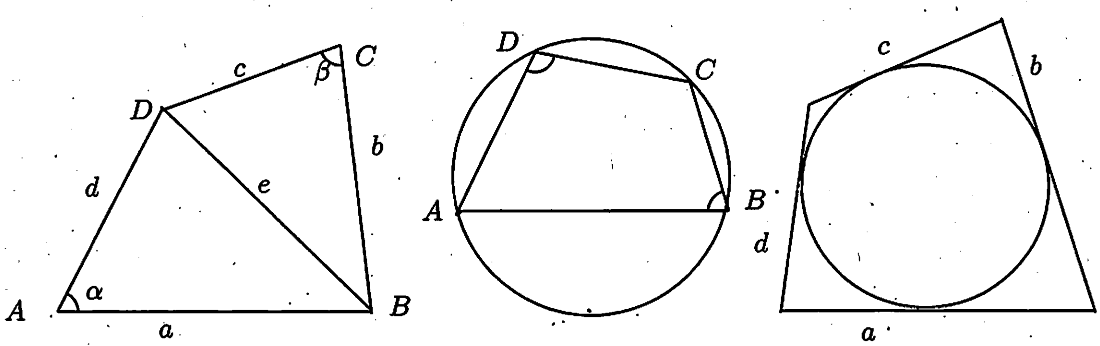
$\Delta = \dfrac{1}{2} ab \sin C$ の $\sin C$ を $\cos C$ に変え，余弦定理を適用して辺 $a.b.c$ で表せば Heron の公式が得られる。三角比を介し面積を辺と角の計算に持ち込む方法は四角形にも通用する。

四角形の辺 a, b, c, d に対し $t = \dfrac{1}{2}(a+b+c+d)$ とし，相対する角 α, β について $\theta = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ とする。面積 S は辺だけでは定まらず公式には角が絡む。他の組でも $\cos^2\theta$ の値は変わらない。

$\theta = \frac{\alpha+\beta}{2}$ $\theta' = \frac{\alpha'+\beta'}{2}$

$\rightsquigarrow \cos^2\theta = \cos^2\theta'$

$\boxed{17}$ $S^2 = (t-a)(t-b)(t-c)(t-d) - abcd\cos^2\theta$

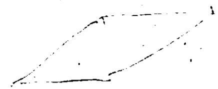


四角形が円に内接する条件は $\alpha + \beta = \pi$ である。向かい合う角の和が等しいと言い換えられる。$\cos\theta = 0$ となり第 2 項が消えて a, b, c, d に対する面積は最大となる。

$\alpha + \beta = \pi \Leftrightarrow \alpha + \beta = \alpha' + \beta'$

$\boxed{18}$ $S = \sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)}$ （円に内接）

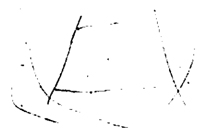
四角形が円に外接する条件は向かい合う辺の和が等しいことである。$a + c = b + d$ から $t = a + c = b + d$ であり $t-a, t-b, t-c, t-d$ はそれぞれ c, d, a, b となる。



$\boxed{19}$ $S = \sqrt{abcd}\sin\theta$ （円に外接）

外接の条件 $a + c = b + d$ で辺の長さを与え．面積が最大となるように角を調節すれば円に内接かつ外接する四角形は豊富に存在する。面積公式は著しく簡単になる。

$\boxed{20}$ $S = \sqrt{abcd}$ （円に内接・外接）



3.4 内積は面積の親戚

$\vec{a}, \vec{b}$ の内積は $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ であるのに対し $\vec{a}, \vec{b}$ で作られる平行四辺形の面積は $S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ である。$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ により $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 + S^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$ となる。$S^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$ は面積公式である。

2 次元で $\vec{a} = (a, b), \vec{b} = (c, d)$ なら $S^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2 = (ad-bc)^2$ となる。

$\boxed{21}$ $S = |ad - bc|$ （2 次元の場合）

$P(x, y, z)$ が平面 OAB 上 $\Longleftrightarrow \overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ である。x, y, z の式から s, t を消去する。

$$(a_2b_3 - a_3b_2)x + (a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_1b_2 - a_2b_1)z = 0 \tag{4}$$

3 次元の場合には $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ について似たような 2 次式になる。

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 = (a_2b_3-a_3b_2)^2 + (a_3b_1-a_1b_3)^2 + (a_1b_2-a_2b_1)^2 \tag{5}$$

(4) と (5) を睨んで $\vec{a},\vec{b}$ のベクトル積あるいは外積を次のように定義し記号 $\vec{a}\times\vec{b}$ で表す。

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2\,,\,a_3b_1-a_1b_3\,,\,a_1b_2-a_2b_1) \tag{6}$$

(5) によりベクトルの大きさ $|\vec{a}\times\vec{b}|$ は面積であり, (4) により $\vec{a}\times\vec{b}$ は $\vec{a},\vec{b}$ の両方に垂直である。実際に成分を見れば $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b}=0$ である。

$\boxed{22}$ $S=|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}$ （3 次元の場合）

ベクトル積 $\vec{a}\times\vec{b}$ は $\vec{a},\vec{b}$ について交代的で $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$, $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$ がなりたつ。$\vec{b}-\vec{a}$ と $\vec{c}-\vec{a}$ に適用すると 3 点 A,B,C で定まる平行四辺形の面積は次の形で表される。

$\boxed{23}$ $S=|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}|$

四元数は $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$ となる i,j,k により $z=x_0+x_1i+x_2j+x_3k$ と表される $\mathbb{R}$ 上 4 次元の数である。$z=x_0+x_1i+x_2j+x_3k$ の共軛を $\bar{z}=x_0-(x_1i+x_2j+x_3k)$ とする。複素数と同様 $z\bar{z}=|z|^2$, $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_2\bar{z}_1$, $|z_1z_2|^2=(z_1z_2)(\overline{z_1z_2})=z_1|z_2|^2\bar{z}_1=|z_1|^2|z_2|^2$ となる。

Hamilton は $\dfrac{1}{2}(z-\bar{z})$ のなす i,j,k の生成する 3 次元部分空間 $\mathbb{V}$ の元を vector と呼び $\mathbb{R}+\mathbb{V}=\mathbb{H}$ を四元数論の出発点とした。これが数学用語としてのベクトルの語源とされる。

$\mathbb{V}$ の元 $\alpha=a_1i+a_2j+a_3k$ と $\beta=b_1i+b_2j+b_3k$ の積は $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$ により

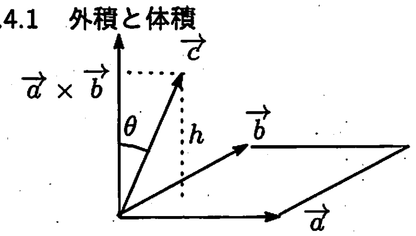
$$\begin{aligned}\alpha\beta&=-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)+(a_2b_3-a_3b_2)i+(a_3b_1-a_1b_3)j+(a_1b_2-a_2b_1)k\\&=-\alpha\cdot\beta+\alpha\times\beta\end{aligned} \tag{7}$$

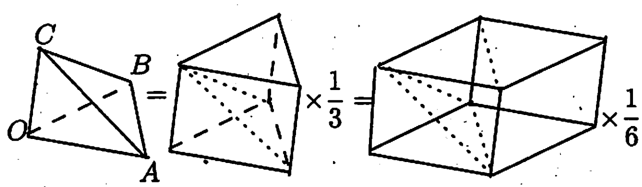
となる。実数部分の $\alpha\cdot\beta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ は内積である。四元数 α と β の積のベクトル部分がベクトル積 $\alpha\times\beta$ である。$\alpha\cdot\beta$ はベクトルではないから「ない積」で $\alpha\times\beta$ はベクトルだから「ベクトル積」とは教室で常套される rhetoric に過ぎない。

(6) の成分で $\alpha\times\beta$ を定義すれば i) α と β の両方に垂直, ii) $|\alpha\times\beta|$ は平行四辺形の面積である。性質 i),ii) を $\alpha\times\beta$ の定義とすると向きになってネジや右手の指を持出すことになる。

高校の教室では背景の四元数に触れずに 3 次元の成分で $S^2=|\alpha|^2|\beta|^2-(\alpha\cdot\beta)^2$ を実際に計算するだけでよい。それで不足なら点 $P(x,y,z)$ が O,A,B の定める平面上にある条件を 2 個の実数で表現し $ax+by+cz=0$ 型の 1 次式の係数を求めれば導入としては十分である。

3.4.1 外積と体積





$\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ とする。$\vec{a}\times\vec{b}$ は平面 OAB と垂直であるから平面から測った C の高さは $CH=|\vec{c}||\cos\theta|$ となる。θ 鈍角も想定されるので絶対値を付けた。外積との内積

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}|\cos\theta$ は面積と高さの積であり，絶対値は平行六面体の体積を表す。$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$ であり四面体 $OABC$ の体積は $V_0 = \dfrac{1}{6}|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$ となる。

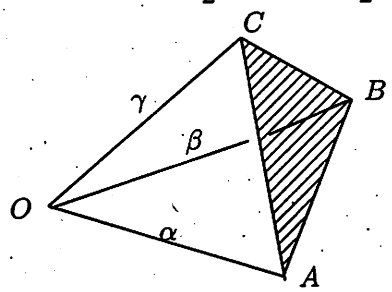
因みに $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$ は 3×3 行列の行列式である。これに対し $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ はベクトルであり三つ巴の関係 $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}$ は Lie 環の例となる。

内積は面積の親戚, 外積の大きさは面積, 外積との内積は行列式で絶対値は体積で, みんな親戚！

3.4.2 四面体の余弦定理

四面体の各面の面積をベクトル積で表すと面角と面積の自然な関係が導かれる。これは三角形の余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ の 3 次元版であり謂わば四面体の余弦定理である。

四面体 $OABC$ の面 $\triangle OBC, \triangle OCA, \triangle OAB, \triangle ABC$ の面積をそれぞれ p, q, r, s とする。面積の公式により $p = \dfrac{1}{2}|b \times c|, q = \dfrac{1}{2}|c \times a|, r = \dfrac{1}{2}|a \times b|, s = \dfrac{1}{2}|a \times b + b \times c + c \times a|$ と表される。



$$
\begin{aligned}
4(p^2 + q^2 + r^2 - s^2) &= |b \times c|^2 + |c \times a|^2 + |a \times b|^2 - |b \times c + c \times a + a \times b|^2 \\
&= -2\{(b \times c) \cdot (c \times a) + (c \times a) \cdot (a \times b) + (a \times b) \cdot (b \times c)\} \\
&= 2\{(a \times b) \cdot (a \times c) + (b \times a) \cdot (b \times c) + (c \times a) \cdot (c \times b)\} \\
&= 2(|a \times b||a \times c|\cos\alpha + |b \times a||b \times c|\cos\beta + |c \times a||c \times b|\cos\gamma)
\end{aligned}
$$

ここで α は $a \times b$ と $a \times c$ のなす角である。$\triangle OAB$ と $\triangle OCA$ は辺 OA を共有し，ベクトル積のなす角 α は交線 OA において平面 OAB と OCA のなす角に対応する。β, γ も同様である。

$$
s^2 = p^2 + q^2 + r^2 - 2(qr\cos\alpha + rp\cos\beta + pq\cos\gamma) \tag{8}
$$

(8) は三角形の余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ の 3 次元版である。3 つの面が垂直なら $s^2 = p^2 + q^2 + r^2$ となり Pythagoras の定理が自然な形で 3 次元に拡張される。

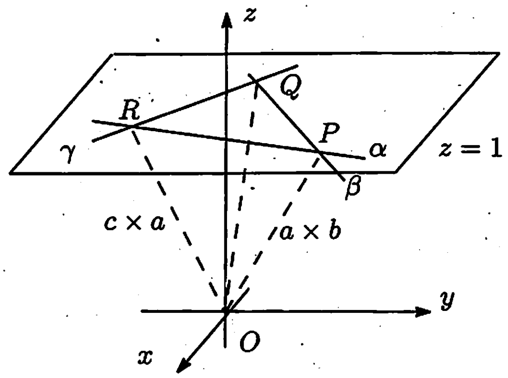
3.4.3 3 本の直線で囲まれる三角形

公式として 3 本の直線 $a_1x + a_2y + a_3 = 0, b_1x + b_2y + b_3 = 0, c_1x + c_2y + c_3 = 0$ で囲まれる三角形の面積を 9 個の数で表す究極の式があって然るべきである。それは次で与えられる。

$\boxed{24}$ $\varDelta = \dfrac{1}{2}\dfrac{|\det(a, b, c)|^2}{|(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1)(c_1b_2 - c_2b_1)|}$

$a \times b$ は交線 $\alpha \cap \beta$ の方向ベクトルである。z 成分の大きさで割れば平面 $z = 1$ 上の点を表す。

これを p,q,r とし 3 直線の交点を P,Q,R とする。四面体 $OPQR$ の体積は $V=\frac{1}{6}|(p\times q)\cdot r|$ で与えられる。一方で $V=\frac{1}{3}\times\triangle PQR$ であり $\Delta=\frac{1}{2}|(p\times q)\cdot r|$ と表される。



3.5 複素数と面積

$a,b\in\mathbb{C}$ に対し $\frac{b}{a}=c$ とする。$\frac{d}{|d|}$ は単位円上にあり $\theta\in\mathbb{R}$ により $\frac{c}{|c|}=\cos\theta+i\sin\theta$ と表される。$\frac{c}{|c|}=\frac{b|a|}{a|b|}=\frac{\bar{a}b|a|}{\bar{a}a|b|}=\frac{\bar{a}b}{|a||b|}$ であり分母を払うと $\bar{a}b$ に関する次の関係式が現れる。

$$\bar{a}b=|a||b|\cos\theta+i|a||b|\sin\theta \tag{9}$$

$\bar{a}b$ の実数部分 $|a||b|\cos\theta$ はベクトル a,b の内積である。虚数部分 $|a||b|\sin\theta$ は $0\leqq\theta\leqq\pi$ なら a,b で張られる平行四辺形の面積を表す。$|a||b|\sin\theta=S_{(a,b)}$ とすると $\bar{a}b=a\cdot b+i\,S_{(a,b)}$ となる。

$c=\frac{b}{a}$ の偏角 θ は b と a の偏角の差であり，a から見た b の角として向きを付けて測られる。$\pi<\theta<2\pi$ なら $\mathrm{Im}(\bar{a}b)=\frac{1}{2i}(\bar{a}b-a\bar{b})<0$ である。この場合も含めれば $S=\frac{1}{2}|\bar{a}b-a\bar{b}|$ となる。絶対値の扱いは煩わしいので正負の面積を考える方が実用的である。

三角形の面積は $\Delta=\frac{1}{2}S_{(a,b)}=\frac{1}{4i}(\bar{a}b-a\bar{b})$ となる。$\boxed{24}$ は 3 点による表記である。

$\boxed{26}$ $\Delta=\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\bar{\alpha}\beta)$ $\boxed{24}$ $\Delta=\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\bar{\alpha}\beta+\bar{\beta}\gamma+\bar{\gamma}\alpha)$

3.6 Pick の公式

格子点を両端とする線分による単純閉曲線で囲まれる部分を F とする。F の境界上の格子点の個数が B 個，F の内部の格子点が I 個とする。F の面積は I と B により次の形に表される。

$\boxed{27}$ $S=I+\frac{1}{2}B-1$

簡単な事実であり，様々な教育効果が期待されるので算数の素材として人気がある。statement が簡単ではなく初等的な言いは穴ができやすい。「図のような $\cdots$」の表現を使う場合も正確な内容を知る必要がある。この点でこれまでの面積公式とは趣が異なる。

3.7 となりの分数（定理 1 の証明）

Pick の公式の前に分数の話に戻り p.3 の定理 1 に趣の異なる 2 種の証明を試みる。

iii) $\mathcal{F}_n$ の 2 数 $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$ に対し $a+c \leqq n$ ならば性質 **A** の中間項 $\frac{b+d}{a+c}$ は $\mathcal{F}_n$ の数であり $\frac{b}{a}$ と $\frac{d}{c}$ は $\mathcal{F}_n$ では隣り合わない。 □

ii) $n \neq 1$ のとき $\mathcal{F}_n$ の同じ分母の 2 数 $\frac{b}{a} < \frac{c}{a}$ の中間には $\frac{b}{a-1}$ が入ることを示す。

$\frac{b}{a} < m < \frac{c}{a}$ となる m があれば 2 数は隣り合わない。ある m に対し $0 < \frac{b}{a} - m < \frac{c}{a} - m < 1$ であり $0 < \frac{b}{a} < \frac{c}{a} < 1$ として $b < b+1 \leqq c$ とする。$\frac{c}{a} - \frac{b}{a-1} \geqq \frac{b+1}{a} - \frac{b}{a-1} = \frac{a-(b+1)}{a(a-1)} > 0$ である。$\frac{b}{a} < \frac{b}{a-1} < \frac{c}{a}$ となり，同じ分母の 2 数 $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}$ は隣り合わない。 □

i) $\mathcal{F}_{n-1}$ で隣り合うすべての 2 数 $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$ に対し $ad - bc = 1$ であるとする。$\mathcal{F}_{n-1}$ にはない $\mathcal{F}_n$ の分母 n の分数を $\frac{m}{n}$ とする。両隣の $\frac{q}{p} < \frac{m}{n} < \frac{s}{r}$ について $pm - qn = x, sn - rm = y$ とする。

ii) から $p, r \neq n$ で $p, r \leqq n-1$ であり $\frac{q}{p}, \frac{s}{r}$ は $\mathcal{F}_{n-1}$ で隣り合う。仮定から $ps - qr = 1$ である。

$\begin{pmatrix} -q & p \\ s & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ から $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \frac{1}{ps-qr} \begin{pmatrix} r & p \\ s & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx+py \\ sx+qy \end{pmatrix}$ となる。

$\mathcal{F}_{n-1}$ で隣り合う $\frac{q}{p} < \frac{s}{r}$ について iii) により $n \leqq p+r$ である。$\frac{q}{p} < \frac{m}{n} < \frac{s}{r}$ から $x \geqq 1, y \geqq 1$ であり $r+p \leqq rx+py$ である。$n \leqq r+p \leqq rx+py = n$ となり，等号は $p+r=n$ かつ $x=y=1$ を意味する。両隣の分数 $\frac{q}{p} < \frac{m}{n} < \frac{s}{r}$ について $pm - qn = ns - mr = 1$ である。 □

証明の $p+r=n$ は性質 **B** の中間項が約分を伴わないことに対応する。整数論の結節点に位置する定理 **2** と同格の定理 **1** を導くには何処かで整数の深層に触れるはずである。

3.8 格子点と数の幾何

$ad - bc$ は格子点 $A(a,b), B(c,d)$ による平行四辺形の面積である。点 $A(a,b)$ は直線 OA を定め分数は直線の傾きを表す。分数の隣接は直線が隣り合うことに対応し $\frac{b}{a} < \frac{d}{c} \Longrightarrow \frac{b}{a} < \frac{b+d}{a+c} < \frac{d}{c}$ は対角線の傾きと解釈される。$\frac{b}{a}, \frac{d}{c}$ が $\mathcal{F}_n$ で隣りあう条件は半直線 OA と OB で囲まれる部分に x 座標が n 以下の格子点が存在しないことである。この観点から定理 **1** を証明する。

補題 1 $\overrightarrow{a} = (a,b), \overrightarrow{b} = (c,d)$ で作られる平行四辺形の面積は $S = |ad - bc|$ である。

平面上の格子点の全体を $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ と表す。2 点 $A(a,b), B(c,d) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ に対し，$x, y \in \mathbb{Z}$ により $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ と表される点 P の集合を Γ とする。

補題 2 平行四辺形 $OACB$ 上に頂点以外の格子点が存在しないならば $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ である。

$(\because)$ もし $(x,y) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ で $(x,y) \notin \Gamma$ となる点 $P(x,y)$ があったとすると $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の平行移動により平行四辺形 $OACB$ に頂点以外の格子点が存在することになる。 □

補題 3 平行四辺形 $OACB$ に頂点以外の格子点がない $\Longleftrightarrow$ $ad - bc = \pm 1$ である。

$(\because)$ 補題 1 により格子点を頂点とする三角形の面積は $\dfrac{1}{2}$ 以上である。平行四辺形の周または内部に頂点以外の格子点があったとすると，3 個以上の三角形に分割され $|ad - bc| > 1$ となる。

$O(0,0), A(a,b), B(c,d), C(a+c, b+d)$ による平行四辺形 $OACB$ の周上または内部に頂点以外の格子点があったとすると，3 個または 4 個の三角形に分割され，面積は $|ad - bc| > 1$ となる。

頂点以外に格子点がないなら補題 2 により $(1,0), (0,1) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ に対応する (x,y) が存在する。それぞれ $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ とすると $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と表される。行列式について $(ad - bc)(x_1 y_2 - x_2 y_1) = 1$ であり $ad - bc = \pm 1$ である。 □

(定理 1 の証明) $\dfrac{b}{a}$, $\dfrac{d}{c}$ が $\mathcal{F}_n$ で隣りあうなら半直線 OA と OB で囲まれる部分に x 座標が n 以下の格子点は存在しない。$\triangle OAB$ 上の格子点は頂点だけであり補題 3 により $|ad - bc| = 1$ である。$\dfrac{b}{a} < \dfrac{d}{c}$ の順なら $ad - bc = 1$ である。 □

3.8.1 Pick の定理

定理 平面の格子点を両端とする線分による単純閉曲線で囲まれた領域を X とする。X の内部にある格子点が I 個，X の境界上の格子点が B 個ならば X の面積は $S = I + \dfrac{1}{2}B - 1$ である。

X の内部と境界上の格子点の個数 $B = B(X)$, $I = I(X)$ に対し $f(X) = I(X) + \dfrac{1}{2}B(X) - 1$ とする。このとき面積が $S(X) = f(X)$ であることを証明する。

補題 1 X の境界上の格子点 P, Q について線分 PQ が両端を除いて X の内部にあるとする。X は PQ により 2 つの部分 Y, Z に分割され，点の個数に関し $f(X) = f(Y) + f(Z)$ である。

$(\because)$ 線分 PQ 上の P, Q 以外の格子点の個数を B_0 とする。分割後の I, B の格子点の個数について $I(X) = I(Y) + I(Z) + B_0$, $B(X) = B(Y) + B(Z) - 2(B_0 + 2) + 2$ であり次のようになる。
$f(X) = I(X) + \dfrac{1}{2}B(X) - 1 = \left(I(Y) + \dfrac{1}{2}B(Y) - 1\right) + \left(I(Z) + \dfrac{1}{2}B(Z) - 1\right) = f(Y) + f(Z)$ □

Y と Z の格子点の個数は X の格子点の個数よりも小さい。対象となる図形を構成する格子点の個数 $N = I + B$ に関する帰納法により $S(X) = I(X) + \dfrac{1}{2}B(X) - 1$ が証明される。そのためにある N に対し $S(X) = f(X)$ を示す必要がある。

補題 2 平面の格子点を頂点とする三角形の周と内部に格子点がないなら面積は $\dfrac{1}{2}$ である。

$N=3$ について $I=0$, $B=3$ で $fX)=I(X)+\frac{1}{2}B(X)-1=0+\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$ であり $fX)$ は面積 $S(X)$ に一致する。このような三角形を基本三角形と呼ぶ。補題 1 は基本三角形に行き着く。

多角形，三角形，直角三角形と進むのは Pick の定理の裾野が算数・数学に拡がっているためと思われる。数学的帰納法の論理は算数には馴染まない。特別な直角三角形に対する計算により中学生にも証明が実感できる。高校生には数学的帰納法の意味と有効な使い方を知る教材となる。

このような場面では線分 PQ の存在と X が 2 つに分かれることは遣り過ごし，深追いを避ける選択もある。真正面から数学に対峙し納得行くまで追及する姿勢が基本であるが，実数の定義を問わずに中間値の定理を使うなど「甚だしくは解するを求めず」には積極的な意味もある。

3.9 Euler の公式と Pick の定理

Pick の定理の周辺には位相幾何学的な魔物が蠢く。素朴な証明に立ち込める雲霧霞を払拭し，葛藤を断ち切るのは伝家の宝刀 $v-e+f$ である。$I+\frac{1}{2}B-1$ は Euler の公式と縁が深い。

補題 1 連結な平面グラフの頂点, 辺, 有界な面の個数を v,e,f とすると $v-e+f=1$ である。

球面の公式 $v-e+f=2$ の方が補題 1 よりに馴染みがある。外部の領域を面の個数に数えるかどうかの違いで，位相幾何学的な前提を棚上げにする素朴な証明は平面も球面も全く同様である。

3.9.1 Pick の定理の証明

X を基本三角形に分割し，三角形の個数を f，辺の個数を e とする。X の境界上には B 個の格子点があり，閉曲線をなす辺の個数は B である。X の内部の辺は $e-B$ である。f 個の三角形の辺について $3f=B+2(e-B)=2e-B$ であり $v=I+B$, $e=\dfrac{3f+B}{2}$ に補題 1 を適用する。

$$v-e+f=(I+B)-\frac{3f+B}{2}+f=I+\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}f=1 \tag{10}$$

前節の補題 2 により $S(X)=\frac{1}{2}f$ であり，(6) は $S(X)=I(X)+\frac{1}{2}B(X)-1$ を意味する。 □

関数 $f(X)=I(X)+\frac{1}{2}B(X)-1$ の加法性と定理の statement に付き纏う微妙な曖昧さが $v-e+f$ に取り込まれ難しいことは Euler に転嫁された感がある。Euler の公式は Pick の定理の空気をを引き継ぐ。単純閉曲線が平面を内部と外部の領域に分割することなど基本的事実を前提とすれば簡潔に証明される点も似ている。この部分が気に掛るなら位相幾何学の成書を繙けばよい。homology による公式の定義と証明が豊富に用意されている。

3.9.2 やわらかい証明

Euler の多面体公式 球面上の有限個の点と線によるグラフに対し $v-e+f=2$ である。

$(\because)$ 2 個の領域の境界となる辺があれば，それを除く操作を行う。v はそのままで e は $e-1$ に f は $f-1$ に変る。f が 2 以上ならばこの操作を繰り返し，領域が 1 個だけの状態に変形できる。

このとき点と線は閉路を作らず tree と呼ばれる形になる。ループがなければ端点が存在する。端点となる点と線をペアで消すと残った図形は tree である。この操作を続け，点が 1 個だけの状態に持ち込むことができる。このとき $v-e+f=1-0+1=2$ である。一連の操作で $v-e+f$ の値は変らない。任意の球面グラフに対し $v-e+f=2$ である。 □

曲面上の点と線からなる柔らかい意味の多検体 K に対し，Euler 数を $\chi(K)=v-e+f$ と定義する。球面の $\chi(K)=2$ が Euler の多面体公式であり，平面グラフなら $v-e+f=1$ となる。

証明は簡潔であるが，Jordan の曲線定理などの基本事項を前提とする。本来なら位相幾何学に立ち返る必要がある。ここではそれを認め直観的な論理展開を第一とする。目指す所は数学教育であり，趣旨は公式の威力を知ることである。ここでも「甚だしくは解するを求めず」に則る

応用例 1 正多面体は 5 種に限る。

$v-e+f=2$ の威力は絶大である。立方体なら $8-12+6=2$ で終るのは全く役不足である。

応用例 2 サッカーゴールの網目は六角形である。六角だけなら平面状に拡がり球形にはならない。五角と六角で球形の網が出来たなら五角は必ず 12 個である。地球全体を覆っても 12 個である。

($\because$) 個数を x,y とすると $v-e+f=\dfrac{5x+6y}{3}-\dfrac{5x+6y}{2}+(x+y)=2$ から $x=12$ である。 □

因みにサッカーボールは $x=12, y=20$ であり $x=12, y=0$ は正 12 面体である。他には？

数学科教育法 III 第 5 日 20.September 2023

3.10 平方数の和

となりの分数の $ad-bc=1$ は「a と b が互いに素 $\iff ax+by=1$ となる x,y が存在する。」と同等である。懸案事項なので 4 日目に定理 **1** の証明を 2 通り用意した。定理 **2** と同等の深さにあり，昨日の証明のように何処かで数論の山を越すことになる。

年齢クイズに関連し $n=x^2+y^2$ となる個数を表す式が紹介された。これは p.6 の問題 **A,B,C** に比べ格段に難しい。問題 **A** には Gaußの整数環がよく似合う。次の事実が知られている。

命題 9 奇素数 p について $p=x^2+y^2$ となる x,y が存在する条件は $p\equiv 1 \pmod 4$ である。

$p=4k+3$ 型の奇素数は Gauß整数にうおいても素数である。一方で $p=4k+1$ 型の奇素数と 2 は共軛な 2 数 $x\pm yi$ の積に分解され $p=x^2+y^2$ となる。

$p=x^2+y^2 \iff p\equiv 1 \pmod 4$ は問題 **A** の第一段階である。$45=6^2+3^2$ であり素因数すべてが $p=4k+1$ 型でなくてよい。素因数 2 の扱いなど記述には工夫が必要である。

7 は 3 個の平方数の和では表せない。$x^2\equiv 0,1,4 \pmod 8$ であるから $n\equiv 7 \pmod 8$ は 3 個の平方数の和で表せない。$3\times 5=15\notin B$ これが問題 **C** である。

ところで $7,15,23\notin B$ の次に B から外れるのは 28 である。もし $x^2+y^2+z^2=4n$ なら $x^2+y^2+z^2\equiv 0 \pmod 4$ であり，$x^2,y^2,z^2\equiv 0,1 \pmod 4$ から $x^2\equiv y^2\equiv z^2\equiv 0 \pmod 4$ で

ある。x, y, z は偶数であり $n = (\frac{x}{2})^2 + (\frac{y}{2})^2 + (\frac{z}{2})^2 \in B$ となる。

対偶により $n \notin B \Longrightarrow 4n \notin B$ である。$n = 8m + 7 \notin B$ であるから $n = 4^a(8b+7)$ 型の自然数は $n = x^2 + y^2 + z^2$ の形には表されない。

Gaußは $n \neq 4^a(8b+7)$ なら 3 個の平方数の和で表されることを示した。初等的に導かれる $n \in B$ の必要条件 $n \neq 4^a(8b+7)$ が結果として十分条件である。三平方和の例外が $n = 4^a(8b+7)$ に限るとなれば，n が不可能なら $n - 1 = x^2 + y^2 + z^2$ となる x, y, z が存在する。

これで Lagrange の四平方定理が解決するが $n \neq 4^a(8b+7)$ の十分性の証明は簡単ではない。Gaußの定理は問題 B の解決篇として Lagrange の四平方定理の別証明以上の意味がある

3.11 数学史

三人寄れば Monge の智慧, 四人寄ったり Lagrange は冗句にしても数学史を飾る歴史上の人物のエピソードは知っておいて損はない。Weil には用した本の他に from Hammurapi to Legendre の副題の数論の歴史に関する著作がある。Birkhäuser1983 年版が出たとき「老馬識途 陳省身題」の墨書に驚いた。陳省身は数学者の S.S.Chern である。陳 (Chen) は中国の一般的な姓であるが，小林昭七先生によれば Chern の綴りは大 Chern だけに許されるらしい。

かつて小林昭七先生は先生になる人は数学史を知っておくとよいと仰っていた。長らく Chern と同じ Berkeley を拠点に仕事を重ね，日本語に限っても数多くの著作を残した。最後となった「顔をなくした数学者（岩波 2013)」はリンカーンが大統領に立候補した時の話やアルキメデスの墓など何れも味わい深い。戦後フランスに留学し ICM(1954) を経てアメリカに渡る経緯は数学史そのものと読み取れる。シアトルで日本への渡航を待つ Weil に手紙を届けたと言う話も伺った。

Weil の数学史は副題の通り Fermat と Euler が中心で Gaußの手前で終っている。高木貞治が Gaußの Disquisitiones の出現で Legendre の Essai が僅か 3 年の寿命で数学史料に化したと酷評するのと対照的である。Lagrange の 4 平方和についてはむしろ Euler の業績を強調している。

Hurwitz による四元数の整数論に触れ，100 年後に Euler の証明を四元数の言葉で書き換えただけと述べ，Gauß以来の独逸整数論に独り立ち向かっているように感じられる。Königsberg の Hurwitz としては判者の辛口には独逸数学のハンザで対抗するしかない。Königsberg は Euler と Goldbach にも縁が深い。橋の描かれた街の地図はトポロジーの萌芽として夙に名高い。

D.HIlbert は Königsberg の出身で A.Hurwitz や H.Minkowski との交流が生涯に大きな影響を与えたとされる。1930 年の故郷の街での記念講演の結句を掲げる。Ignoramus et ignorabimus との対比は時代背景や基礎論の状況を考えると感慨深い。

Wir müssen wissen. Wir werden wissen は