

# 自动驾驶汽车的调头轨迹设计

## 摘要

近年来，随着人工智能这一领域的大热，自动驾驶成了多方关注的前沿技术之一。为了探究自动驾驶在实际生活中的应用，我们将以现实中的无人自动驾驶车调头为模型，研究其如何通过控制车速、方向盘转速来实现自动调头。

针对问题一，需要确定控制点位置，并计算获得无人车能够顺利调头进入对向道路所需的调头轨迹。我们将后轮连线的中点确定为控制点，因为此点的速度方向、轨迹切线方向、车轴方向一致，方便后续的计算。为确定轨迹，我们设定方向盘转速，获得方向盘转过角度与时间的关系；通过传动比，建立方向盘转角与轮胎转角的关系；利用几何关系，确定曲率半径与轮胎转角的关系；以此可以获得无人车在空间转过的角度与时间的关系；最后，利用位移的分解与微积分知识可以得到轨迹上任意点的坐标与时间关系。通过此轨迹群，我们算出无人车外沿四个角的轨迹方程，不会压线且不会超出调车范围的轨迹方程所对应的轨迹群即为最终解集，对于此解集的获得，为达到题目所给定的“快速”这一要求，我们规定无人车控制点在直行 13.5m 后便开始转动方向盘；并且此轨迹由向左匀速转动方向盘、方向盘不动、向右匀速转动方向盘三部分合成得到。

针对问题二，需要我们确定在掉头过程中无需倒车与需要倒车的临界情况，我们的模型进一步给出了需要一次倒车与多次倒车的临界情况。是否需要倒车的临界情况即存在一种轨迹，能够使得第一题中外沿四角的轨迹能够不碰到墙壁，代入第一问方程，我们算得墙壁与车轴的初始位置最小为 12.9454m。一次倒车与多次倒车的临界情况即一次倒车使车身平行于道路时，能够不被阻拦地直行通过道路，再根据曲率不能突变、静止时可以转动方向盘这两个条件，算得墙壁与车轴的初始位置最小为 10.3364m。

针对问题三，需要我们考虑道路上存在除隔离障碍物外的静止障碍物时无人车的避让方案与调头轨迹。为绕过 G 障碍物，我们设定在无人车从初始位置直行  $n$  米后开始调头。通过计算得，当  $14.27205m \leq n \leq 18.34707m$  时，存在不会触碰到 G 障碍物与调头边界的轨迹方程。为绕过 F 障碍物，我们延长第一问题模型中的第二部分，即方向盘不动不动部分，使得外沿四角的轨迹能够不触碰到障碍物。

针对问题四，需要我们考虑人行横道的存在对轨迹的影响。由于隔离障碍物与人行横道仅相隔 2m，二车宽为两米，考虑车轮转向会加大车宽，因此，只有在无人车后轮越过人行横道后才能开始转动方向盘，即无人车向前行进 18m 后再开始转动方向盘，得到此时无人车的轨迹群。同时考虑人行横道以及 F、G 障碍物，只需选取问题三与问题四轨迹群的交集即为最终满足要求的轨迹群。

针对问题五，需要我们计算 F、G 障碍物在能够移动的情况下的轨迹。我们将任意方向盘转速以及任意车速情况下的轨迹方程利用运动学与微积分知识算出无人车到达轨迹上任意一点所需的时间，将此时间与障碍物到达此处所需的时间进行比较，得出此条轨迹能否安全通行这一条件，我们选取能够安全通过的道路作为我们通行的轨迹群。

针对问题六，我们需要在保证无人驾驶的安全性的前提下，优化求解成功率和求解耗时。通过观察问题五的轨迹群，我们发现，当 F、G 障碍物向 y 轴正方向运动时，无人车想要比障碍物先到达轨迹线的前提是 G 障碍物运动速度不大于 0.8m/s，F 障碍物运动速度不大于 0.4m/s，此情况不符合马路上现实情况，因此，无人车需要先等待 F、G 障碍物通行后再开始调头。若 F、G 障碍物向 y 轴负方向行进，由于 F、G 障碍物间隔较小，且此间隔在马路中间线上，不符合交通规则，因此我们设定无人车跟在障碍物后前行。

**关键词：**调头轨迹计算模型 轨迹筛选模型 动态路线规划

## 一、问题重述

### 1.1 问题背景

近年来，人工智能已经成为现代最热门的话题，而自动驾驶则是人工智能领域中受到广泛关注的前沿技术之一。为了探究自动驾驶在实际生活中的应用，我们以现实中的无人车调头为例。假设四轮乘用车是后轮驱动，车长、车宽和车的轴距为 5 米、2 米和 2.8 米，方向盘的最大转角为 470 度，转速为 400 度每秒，另外方向盘与前轮转角的传动比为 16: 1。

无人车在行进路程中的轨迹是一条包含时间和空间位置坐标信息的曲线，其由一系列轨迹点构成，各个轨迹点中包含了位置坐标、方向角、曲率、速度等信息。而表征无人车轨迹需要一个特定点，这个特定点也就是控制点，通常对于无人车左右对称，在行驶过程中，会与轨迹点重合。另外在无人车行驶过程中，其应满足动力学性质和安全性的要求，曲率变化应该是连续的，其存在一个最大值，方向盘转角等参数不能发生突变，在调头过程中，车辆应该和障碍物之间有一个最小的安全距离。同时无人车在保证动力学的基础上，应该尽可能地具备舒适的驾驶体感、遵守交通法规，以具备高的通行效率。

题目要求我们简化无人车调头场景，利用附件中的数据，建立无人车安全快速调头的数学模型，设计无人车调头轨迹的计算方式。让无人车可以实时根据已有的外部道路和障碍物数据，计算合理的无人车轨迹。

### 1.2 问题提出

**问题一：**根据问题一的要求，我们需要通过题目附件所给的无人车初始位置，障碍物及三个对向车道的具体信息，建立无人车调头的数学模型，并阐述控制点，给出合理的算法设计，计算问题一应用场景中的无人车调头轨迹。

**问题二：**问题二给出了第二种情况的现实场景应用，建立数学模型，计算当调头区域比较狭窄时，无人车需要在什么参数的具体数据下，才能不倒车完成调头；在什么情况下，无人车必须进行至少一次倒车才能实现调头。

**问题三：**在问题三中，考虑了多种障碍物对于无人车调头轨迹的影响。在足够宽敞的调头区域中，存在了两个障碍物及它们位置的具体数据。需要我们给出合理的模型和算法，计算无人车的实际调头轨迹。

**问题四：**本问中，增加了人行道对于无人车调头的影响。人行道的具体信息已经给出，要求我们建立模型和算法，先单独计算无人车在不压人行道或后轮开过人行道后开始调头的情况下的调头轨迹。然后结合问题三多障碍物情形，计算在人行道和障碍物同时存在情况下的无人车调头轨迹。

**问题五：**问题五考虑了实际生活中的应用问题，提出道路障碍物的移动情况。针对两种场景，问题四中的多障碍物和人行道场景与问题三的多障碍物场景，要求我们建立具有普适性的无人车调头轨迹规划模型以及算法策略，使得障碍物以一定速度沿道路平行方向移动时，可以给出无人车调头方式与仿真结果。

**问题六：**为了提高无人驾驶的安全性能，要求我们改进算法，加快无人车对于路况的反应速度，降低计算的复杂度和求解路径耗时，提高无人车轨迹规划算法的求解成功率。

## 二、模型假设

1. 假设无人车的轮胎不会打滑、设备较为先进，即能够精准地按照给定的方案行进而不产生误差；
2. 假设无人车有完备的传感器系统，即无人车在发现障碍物时能够立即获取障碍物的位置、大小及运动状态的信息；
3. 假设无人车车身为严格的矩形，即不考虑反光镜等因素的影响。

## 三、符号说明

符号	符号意义
$\alpha$	表示方向盘转角
$t$	表示方向盘转动时间
$\omega$	表示方向盘转速
$\theta$	表示方向盘的转角
$L$	表示无人车轴距
$\rho$	表示无人车行驶过程中的曲率半径
$v$	表示无人车的行进速度
$\gamma$	曲率半径与 $x$ 轴的夹角
$(x_1, y_1)$	表示曲线轨迹中第一部分结束时的无人车控制点坐标
$t_A$	表示无人车以行驶速度 $v$ 行驶到 A 点的时间
$t_A'$	表示障碍物 $G$ 以速度 $v_G$ 到达 A 的时间
$\tau$	表示方向盘固定时间转过的圆心角角度
$y_G$	表示表示障碍物到 A 点的距离
$v_G$	表示障碍物 $G$ 的移动速度
$v_F$	表示障碍物 $F$ 的移动速度
$t_B'$	表示障碍物 $F$ 以速度 $v_F$ 到达 B 的时间
$t_B$	表示无人车以行驶速度 $v$ 行驶到 B 点的时间
$k$	表示对应点的斜率

注：未列出符号及重复的符号以出现处为准

## 四、模型的建立与求解

### 4.1 问题一

#### 4.1.1 问题一的分析

问题一要求我们根据附件中的无人车、障碍物、车道的数据信息，确定控制点位置，建立无人车调头的模型和算法，使无人车能够顺利调头，并绘制调头轨迹。我们首先明确模型中的变量为方向盘转速和无人车行驶速度。运用运动学和微积分的知识，通过计算车轮转角、无人车曲率半径等参数，求解无人车运行轨迹和方向盘转速、无人车行驶速度的函数关系，并求解无人车上所有点会扫过的整个区域。

我们量化处理题目中所给的舒适度和安全性限制要求，利用算法和模型，计算行驶进入三个车道对应的两个变量的取值范围。运用量化的限制条件，求解三个车道上对应无人车最快速度行驶入该车道的两个变量的取值，并绘制出每个车道最佳行驶方案的调头轨迹。

#### 4.1.2 问题一的解答

对于问题一的解答，我们首先要清楚方向盘转速、车轮转角、无人车行驶过程中的曲率半径等基本概念，列出公式对这些变量进行分析求解，得到最终的车辆行驶轨迹与这些变量之间的关系，建立模型，结合题目中所给出的已知数据，进行编程，求解并绘制无人车的调头轨迹。我们建立坐标系，以无人车出发行进 $13.5m$ 后的控制点为坐标原点，向左为 $x$ 轴正方向，向上为 $y$ 轴正方向。

##### 4.1.2.1 理论准备

下面对建模中所需要用到的专有名词进行解释和分析：

##### 1) 方向盘转速

方向盘转速指的是，车辆在行驶过程中，为使车辆向左或向右行进，方向盘转动到相应角度情况下的转动线速度。在保证安全驾驶的前提下，方向盘转速与车辆转弯的角度、车辆行进的速度、车辆的轴距之间存在数学关系。

##### 2) 车轮转角

车轮转角表示的是方向盘在规定转速下转动到相应的角度后，车轮所对应转动的角度。根据车辆本身的固有属性，车轮转角与方向盘转角存在相应的传动比。因此，可以根据方向盘转角，求与之相对应车轮转角

##### 3) 无人车行驶过程中的曲率半径

曲率半径指的是平面曲线中对于曲线上某个点对应的某段曲线小圆弧的圆弧半径。曲率半径表示这段小圆弧的半径。在无人车行驶过程中，曲率半径是会发生变化的，车轮转角的变化是导致曲率半径变化的原因。因此，我们需要通过车轮转角来表示无人车行驶过程中的曲率半径。

##### 4.1.2.2 模型的建立

我们根据题目要求和分析，需要先计算出车轮的转速和无人车行驶过程中的曲率半径，随后利用运动学中的相关公式计算出无人车运动轨迹曲线和时间的函数关系，并绘制出无人车的调头轨迹。为模型的解答奠定理论基础。

##### 1) 控制点的确定与说明

我们将无人车后轮的中心对称点作为该问题的控制点。根据控制点的要求，其应该具备以下作用：行驶过程中，控制点处的速度方向与轨迹点方向角一致；控制点可以简便地表征车上其他点的坐标位置。

当以无人车后轮的中心对称点作为控制点时，能够满足以上条件。并且对于任意时刻，该点车轴方向与轨迹速度方向保持一致，在计算无人车轨迹时，可以作为质点简化

模型。另外该控制点速度方向与车轴一致，当确定车轴，轨迹点位置信息时，可以确定出四轮和车的具体位置。

## 2)模型的分步建立过程

在整个无人车调头的过程中，我们在模型里面将其转化为三个步骤。第一步，方向盘从开始转动至达到最大角度，这一步无人车速率的变化对行车轨迹有影响；第二步，方向盘在最大角度下行驶，此时，无人车速率对行车轨迹无影响，车轮转角不变；第三步，在方向盘转动回到直行角度情况下，无人车进行转弯，当方向盘停止转动，无人车调头过程结束。

无人车运动轨迹求解过程中的步骤如下：

### a)车轮转角的计算步骤

在车轮转角的计算步骤中，我们以方向盘转速 $\omega$ 为变量进行求解。

Step1.根据物理模型中的运动学公式：

$$\alpha = \omega t \quad (1)$$

其中 $\alpha$ 表示方向盘转角，方向盘转角我们取它能达到的极限为它的极值， $t$ 表示方向盘转动时间。

我们通过公式求解方向盘的转动角度：

Step2.根据题目中的已给条件，即方向盘转角与车轮转角的传动比 16: 1 计算车轮的转角，得到：

$$\theta = \frac{\alpha}{16} \quad (2)$$

其中 $\theta$ 表示方向盘的转角。

### b)无人车行驶过程中的曲率半径计算步骤

通过物理学中的公式：

$$\frac{L}{\rho} = \tan\theta \quad (3)$$

其中 $L$ 表示无人车轴距， $\rho$ 表示无人车行驶过程中的曲率半径。

可以将曲率半径和车轮转角联系起来，最后化简成一个以方向盘转速 $\omega$ 为变量的数学关系式。

### c)无人车运动轨迹曲线和时间的函数关系计算步骤

Step1.如图所示，我们先求解出任意时刻的点与曲率中心连线构成的曲率半径与 $x$ 轴的夹角 $\gamma$ ；

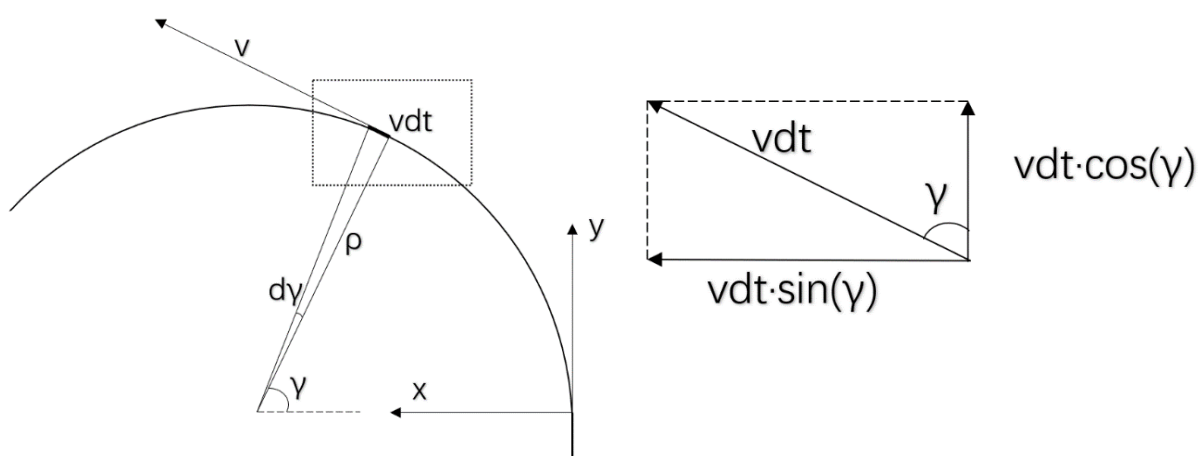


图 1 计算示意图

Step2.利用物理中微分思想，运用公式：

$$d\gamma = \frac{vdt}{\rho} \quad (4)$$

其中 $v$ 表示无人车在弯道的行进速度，该参数也是一个变量， $dt$ 表示行进那一小段距离的时间。

我们可以通过该公式得到曲率半径与 $x$ 轴的夹角 $\gamma$ 和方向盘转速 $\omega$ 、无人车弯道的行进速度 $v$ ，这两个变量之间的关系：

Step3.运用几何学和数学的知识，我们可以得到两个积分公式：

$$\begin{cases} dx = v \cdot \sin\gamma \cdot dt \\ dy = v \cdot \cos\gamma \cdot dt \end{cases} \quad (5)$$

可以通过对这两个公式进行积分，得到无人车坐标与时间的关系，进而可以求解出无人车运动轨迹曲线和时间的函数关系。

Step4.基于无人车运动轨迹曲线和时间的函数关系，可以绘制出无人车最终的调头轨迹。

在模型中我们分为三部分求解，但第一步和第三步原理相同。因此只需要讨论第一步和第二步两种情形。这两步的唯一不同之处就体现在方向盘转速 $\omega$ ，第一步和第三步存在该变量，而第二步方向盘角度不变，因此不存在该变量。所以只需要改变其中的一个参数值即可。

在第一步中， $\alpha = \omega t$ ；而在第二步中 $\alpha = C$ ，其中 $C$ 为一个常量，由方向盘转动最大角度决定。其余部分三步均相同。

#### 4.1.2.3 模型的求解

根据题目给出的数据和我们建立的数学模型，可以分析得到一个以方向盘转速 $\omega$ 和无人车弯道的行进速度 $v$ 为变量的无人车运动轨迹曲线。并结合题目的条件，设计一种合理可行的方案。

##### 1)限制条件量化

题目中对无人车行驶过程中具有限制性条件，我们对于这些限制条件进行量化的处理。

安全性：根据交通法规文献资料，我们定义无人车弯道的行驶速度应该满足 $v \leq 30\text{km/h}$ ，且无人车在行驶过程中不能压线；

舒适度：查阅文献资料，我们量化的用向心加速度表示舒适度，其应满足

$$\frac{10m}{s^2} \leq \frac{v^2}{\rho} = a \leq \frac{20m}{s^2} \quad (6)$$

##### 2)求解流程

我们求解出关于两个变量的所有可能路径，并根据量化的限制性约束条件，对变量和结果进行约束限制，可以得到无人车在满足条件且遵守交规的情况下，行驶进入三个车道各自对应的两个变量的取值范围。

为满足题目所要求的无人车转弯最快速度。我们对行驶到三个车道进行分类讨论，寻找行驶到这三个车道上的无人车的最快速度所对应的两个变量方向盘转速 $\omega$ 和无人车弯道的行进速度 $v$ 的具体数值。

以此数据为基础，绘制出无人车的调头轨迹。

#### 4.1.2.4 模型的结果分析

我们通过模型和对应的量化处理后的限制条件，计算得到最终的无人车调头轨迹坐标与方向盘转速 $\omega$ 和无人车弯道的行进速度 $v$ 两个变量的关系：

$$\begin{cases} dx = v \cdot \sin \left[ -\frac{v}{L} \cdot \frac{16}{\omega} \cdot \ln \left( \cos \frac{\omega t}{16} \right) \right] dt \\ dy = v \cdot \cos \left[ -\frac{v}{L} \cdot \frac{16}{\omega} \cdot \ln \left( \cos \frac{\omega t}{16} \right) \right] dt \end{cases} \quad (7)$$

我们通过这个函数的积分式，绘制出一个以无人车控制点为原点，左方向为 $x$ 轴正方向，纵向为 $y$ 轴正方向的坐标系。描绘了以 $x$ 轴正方向距离为因变量， $v$ 和 $\omega$ 为自变量的三维二元变量图。

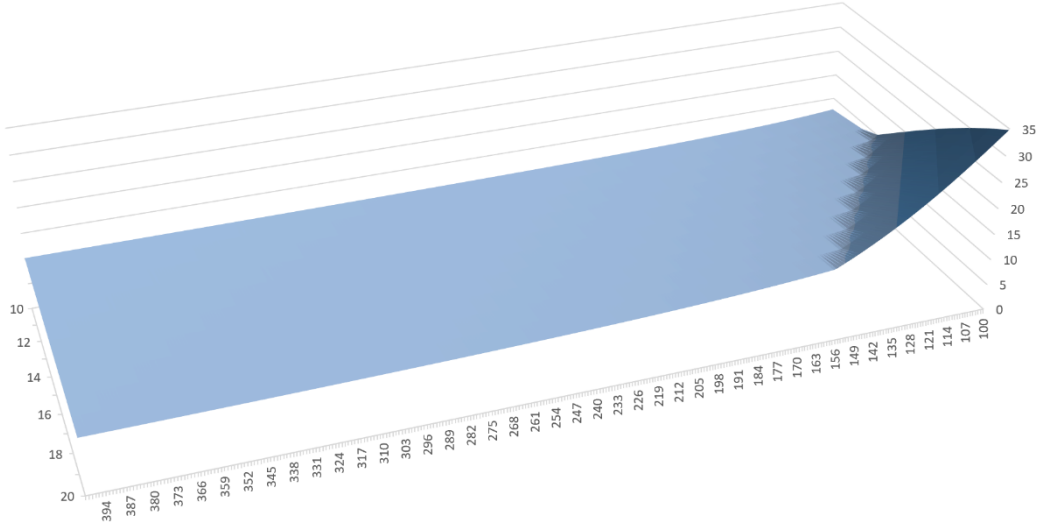


图 2 三维结果示意图

通过轨迹方程我们计算出无人车四个角实际扫过的区域后，结合附件中的信息，可以计算出无人车能够驶入第一车道的 $x$ 轴取值范围在 $[4.5, 5]$ ，第二车道的 $x$ 轴取值范围在 $[7.5, 9]$ ，第三车道的 $x$ 轴取值范围在 $[11, 12.5]$ ， $y$ 轴的取值应满足 $y \leq 13.1828$ 。经过求解验证，我们知道第一车道和第二车道在限制因素条件范围内，无人车是无法通过一次调头直接进入的。

我们以无人车行驶速度 $v = 20\text{km/h}$ 为例，绘制出一个 $x$ 轴和方向盘转速 $\omega$ 的函数关系图：

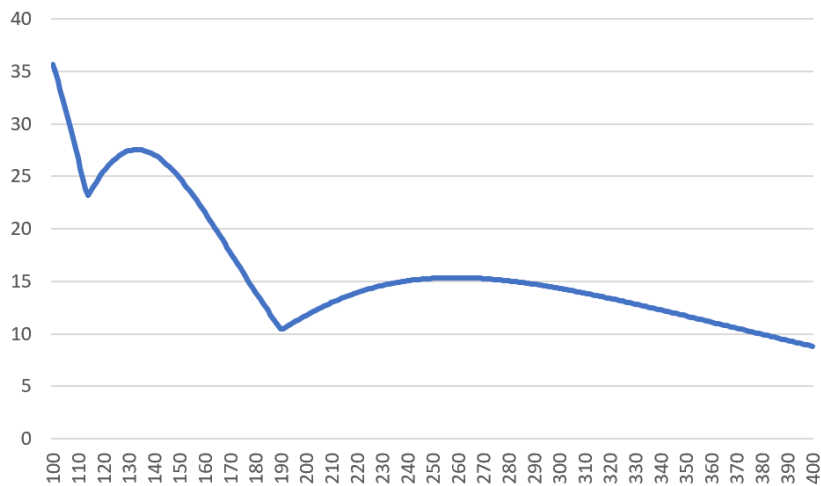


图 3 二维结果示意图

最终我们取方向盘转速 $\omega = 400^\circ/\text{s}$ ，无人车行驶速度 $v = 20\text{km/h}$ ，绘制出一个无人

车调头轨迹图像。

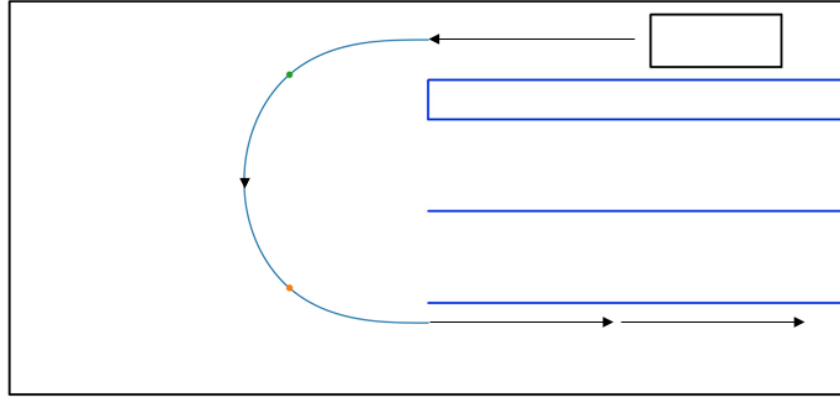


图4 无人车调头轨迹示意图

图中表示了在该方向盘转速 $\omega$ 和无人车行驶速度 $v$ 的情况下，无人车控制点行驶进入第三车道的控制点调头轨迹路线。根据验证可知，可以求出在曲线轨迹的第二部分，圆心点位为：

$$\left( x_1 + \rho \cdot \sqrt{\frac{1}{k^2 + 1}}, y_1 - \rho \cdot \sqrt{\frac{k^2}{k^2 + 1}} \right) \quad (8)$$

其中 $k = \cot \left[ -\frac{v}{L} \cdot \frac{16}{\omega} \cdot \ln \left( \cos \left( \frac{\omega t}{16} \right) \right) \right]$ ， $(x_1, y_1)$ 为曲线轨迹中第一部分结束时的无人车控制点坐标。

该调头轨迹符合安全性规范，车轮不会压线，能够顺利完成调头。

## 4.2 问题二

### 4.2.1 问题二的分析

问题二提出调头区域过窄时的实际应用。需要我们建立模型判断在什么场景下，无人车可以不用倒车实现调头，什么情况下无人车至少需要一次倒车才能实现调头。因此我们基于问题一模型进行改进。根据问题一的结果，得到不倒车情况下的场景临界值数据。

对于在需要倒车的情形下，我们进一步提出一次倒车模型，旨在解决倒车时方向盘的转动角度，使得无人车一次倒车，便能顺利调头。结合实际生活和题目中的极限刹车加速度，我们首先可以确定曲线的行驶轨迹以及停止点的坐标。之后通过无人车能顺利通过车道的坐标取值范围，求解出满足条件的曲率半径范围，并借此曲率半径，利用问题一模型中的车轮转角公式，求解出方向盘的转角，实现一次倒车模型的功能。

### 4.2.2 问题二的解答

#### 4.2.2.1 模型的补充与改进

我们对于问题一的模型进行临界倒车模型改进和一次倒车模型补充，得到问题二的模型，其余部分不变，关于坐标轴的选取，仍与问题一一样，以无人车出发行进13.5m后的控制点为坐标原点，向左为 $x$ 轴正方向，向上为 $y$ 轴正方向。

##### 1) 临界模型的改进

无人车在行驶过程中存在三种情况，第一种是调头区域足够，直接完成调头；第二种是，区域不够宽敞，需要进行一次倒车才能实现调头的作用；第三种是调头区域过窄，至少需要两次倒车的情况。第一种临界情况，我们可以通过问题一模型结果中的三维二元变量图像直接观测到临界值。在这里我们统一用坐标进行表示。第二种与第三种情



况的临界值，我们需要通过补充的一次倒车模型进行计算。

#### 2)一次倒车模型的补充

一次倒车模型其目的是计算需要一次倒车实现调头的坐标轴 $x$ 区域范围。在无人车行驶过程中，为了尽可能地减小倒车次数实现调头，我们应该减慢无人车的行进速度，加快方向盘的转速，但是，题目也给了快速通过路口这一优化方向。因此，我们定义它的方向盘转速取最大值 $\omega = 400^\circ/s$ 。无人车行进速度为 $v = 10km/h$ 。基于此模型我们进行一次倒车调头的坐标轴 $x$ 区域范围，坐标轴 $x$ 为变量。

#### 4.2.2.2 倒车模型的计算

*Step1.*我们通过问题一的结果，计算出不倒车实现调头和一次倒车实现调头的临界坐标轴 $x$ 的取值；

*Step2.*运用模型中的先决条件，即 $\omega = 400^\circ/s$ 和 $v = 10km/h$ 确定该情况下，无人车在调头过程中的曲线轨迹；

*Step3.*在已知无人车曲线轨迹的情况下，可以求出无人车四个角中距离障碍物最近的一个角，当其距离障碍物仅剩余 $1.5m$ 时，无人车在曲线轨迹上开始以 $2m/s^2$ 的加速度刹车。它的停止点是能够最大限度实现倒车的临界点，该点的坐标位置可以通过曲线的已知信息和变量 $x$ 进行表示；

*Step4.*无人车是可以在原地停止时转动方向盘。考虑实际模型，在一次倒车过程中，当无人车的方向与车道平行时，调头完成。因此我们需要确定调头时的曲率半径，并结合该停止点的坐标，计算出最终完成调头时的无人车横坐标变量 $x$ ，来判断是否能够正常进入车道；

*Step5.*根据问题一模型可以知道无人车的曲率半径与方向盘转动角度之间存在关联，因此我们可以反向推导，利用无人车能够实现一次倒车情况下的横坐标 $x$ 的取值范围，反向求解曲率半径，利用问题一数学公式，推出方向盘转动角度。结合方向盘转动角度 $\alpha$ 自身的取值范围，求解出一个关于一次倒车实现调头的停止点坐标的取值；

*Step6.*由于该模型中，变量有且仅有一个 $x$ ，因此，可以运用停止点的坐标取值范围和实现一次调头的限制条件，求解出一个一次倒车实现调头的取值范围。横坐标小于该取值范围的部分，则至少需要两次倒车才能驶入车道；大于该取值范围的部分，则不用进行倒车就可以直接驶入车道。

#### 4.2.3 模型的结果与分析

根据题目要求，通过附件中的给出的障碍物数据信息和模型中假设的数据量及公式，计算出此结果条件下的不需要倒车实现调头，一次倒车实现调头，多次倒车实现调头的 $x$ 坐标取值范围，以验证模型的正确性。

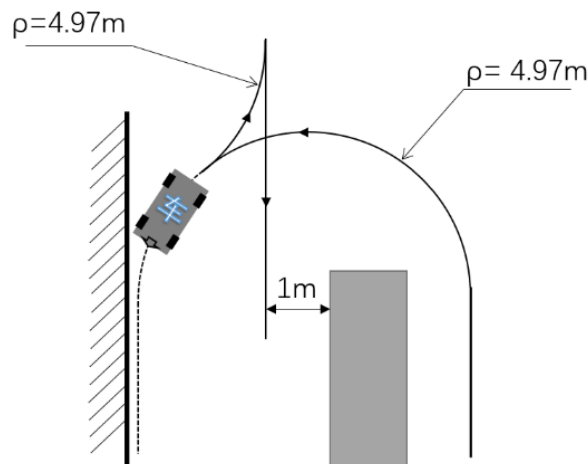


图5 无人车调头轨迹示意图

经过求解计算可以知道：不需要倒车进行调头的取值范围为 $[12.9454, +\infty]$ ，一次倒车实现调头的取值范围为 $[10.3364, 12.9454]$ 。

我们以一次倒车和多次倒车的临界取值 $x = 12.9454\text{m}$  为例，绘制出的仿真倒车调头图，如上图所示，以验证模型的合理与准确性。

### 4.3 问题三

#### 4.3.1 问题三的分析

根据问题三要求，我们需要考虑道路上存在其它静止障碍物的情形，题目给出了三种情况下的障碍物，我们要建立合适的无人车调头模型，给出算法设计计算调头轨迹。我们将基于问题一模型进行改进，将模型分为曲线行驶和切线行驶两方面。

针对曲线行驶，我们要考虑影响曲线调头和切线行驶的障碍物位置信息，利用问题一模型求解无人车在曲线行驶过程中所扫过的区域，以此确定无人车曲线行驶的方向盘转速和无人车行驶速度。不同于问题一模型的是，在本题中，无人车曲线行驶的第三步会根据是否存在障碍物而改变，若存在障碍物，则曲线行驶中第三步的时间会根据切线行驶模型来确定，防止出现曲率突变及防止与障碍物相撞。否则将与第一题相同，直至完成调头，进入直道行驶。

针对切线行驶，无人车在启动之前，已经根据障碍物位置信息筛选了合适的行进速度和方向盘转速，因此在曲线行驶的末尾阶段，无人车会实时计算其在曲线上某点沿切线方向开出，无人车是否能够完成调头。当可以实现无人车调头后，无人车会沿着切线离开曲线轨迹，进入直道行驶，并绘制出其调头轨迹。

#### 4.3.2 问题三的解答

##### 4.3.2.1 模型的改进与转化

问题三提出了三种障碍物存在情况，因此我们通过对它给出的这三种情况进行分析。当仅存在 $G$ 障碍物时，只需要改变曲线行驶的模型；当仅存在 $F$ 障碍物时，只需要添加切线行驶的模型；当同时存在障碍物 $G$ 和 $F$ 时，需要同时运用曲线行驶模型和切线行驶模型。

##### 1) 曲线行驶模型

对于曲线行驶模型而言，我们是基于问题一的模型进行改进的。在问题一模型中，无人车是在原点处直接进行调头，而在本题中，需要考虑是否存在影响曲线行驶的障碍物 $G$ 。若存在障碍物 $G$ ，则曲线行驶模型需要进行判断，是否需要在原点处先向前行驶部分距离后，再开始调头，并且受到障碍物 $G$ 的限制，无人车曲线调头过程中存在对方向盘转速和行驶速度的限制，因此在约束条件的限制下，选用合适的速度进行曲线行驶；若障碍物 $G$ 不存在，则可以根据其它约束条件选用合适的速度调头。另外障碍物 $F$ 的存在也会影响曲线行驶，因为在曲线行驶过程中，会存在部分速度使得无人车无法直接驶入直道，需要通过倒车来解决问题。因此考虑到无人车调头模型的快速性要求，我们根据障碍物信息，提前对方向盘转速和无人车曲线行驶的车速做好规划，以实现一次性完成调头的工作要求。

##### 2) 切线行驶模型

对于切线行驶模型而言，我们是基于障碍物 $F$ 存在情况下进行补充的。为保证无人车调头的快速性条件，我们提出该模型，即在不停车、不倒车情况下，无人车实现越过障碍物完成一次性调头。切线行驶模型对曲线行驶模型具有一定的要求，当存在障碍物 $F$ 时，即有切线行驶模型。曲线行驶模型过程中的第三步，会根据切线行驶模型中的切点来确定曲线行驶中第三步的开始时间。开始时间由无人车两个边框与障碍物之间的视线重叠距离确定，当它们之间的距离在满足小于等于无人车行驶速度与方向盘转动回正

的时间的比值后，则曲线行驶中的第三步开始，直至无人车方向回正后，无人车会沿着该点位切线行驶后，无人车整车所扫过的区域不会与障碍物发生碰撞。若不存在障碍物 $F$ ，则不会切线行驶模型，无人车会按照在问题一改进基础上的曲线行驶模型行驶，最终沿直道完成调头。

无人车在行驶过程中，对于任意存在障碍物的情况存在多种能够实现调头的轨迹路线，模型是根据障碍物信息和当前无人车位置来进行避障规划以实现调头的作用，并绘制出调头轨迹。

#### 4.3.2.2 算法求解过程

##### 1)明确障碍物信息

确定障碍物的分布情况，以判断模型的选用。若仅存在障碍物 $G$ ，则选用改进的曲线行驶模型即可；若仅存在障碍物 $F$ ，则需要加入切线行驶模型；若两者同时存在，则应该同时改进两种模型。

##### 2)计算方向盘转速 $\omega$ 和无人车曲线行驶速度 $v$

*Step1.*根据障碍物的信息和相应的数据，制定约束条件。若存在障碍物 $G$ ，则应当先判断无人车应该先直行路程 $n$ 米后进行调头，对所有情况进行讨论；

*Step2.*之后再判断所有直行距离 $n$ 情况下的调头过程中的两个速度变量，可以通过障碍物的位置信息来确定。问题一模型中的曲线轨迹是控制点的曲线轨迹，但本题考虑的是整个无人车的通过情况，因此需要根据控制点求出无人车两个边框所经过的轨迹，通过这两个无人车扫过区域的临界范围和障碍物的信息，确定两个速度变量的取值范围；

*Step3.*根据障碍物 $F$ 的信息，判断是否需要进一步约束方向盘转速 $\omega$ 和无人车曲线行驶速度 $v$ 的取值范围。寻找每一种直行路线情况下的每一种速度可能，若以此速度，不能够切线行驶入直道，则排除该答案可能性，最终求解出所有可能解。

##### 3)实际行驶过程中的判断

*Step1.*无人车按照可能解中的方向盘转速 $\omega$ 和无人车曲线行驶速度 $v$ 以及直行距离 $n$ ，通过道路上是否存在静止障碍物 $F$ 来判断是否需要加入切线行驶模型；

*Step2.*若不存在障碍物 $F$ ，则无人车按照 *Step1* 中确定的三个可能解的变量，以问题一改进的曲线行驶模型，遵循模型中的三个步骤，最终以直行的方式进入直道，完成调头；

*Step3.*若存在障碍物 $F$ ，则曲线行驶模型的第二步，方向盘转动角度固定的行驶时间应该适当增加，按照无人车与障碍物视线之间的重叠距离来判断第三步的开始时间；当它们之间的重叠距离满足小于等于无人车曲线行驶速度和方向盘转动回原角度的时间的比值，则无人车开始曲线行驶模型中的第三步，方向盘开始匀速转动，当方向盘转动回正后，无人车沿切线行驶，驶入直道，实现调头。

##### 4)回正方向并绘制调头轨迹图

在无人车进入切线行驶入直道后，其需要根据自身所处位置进行判断。当无人车车身距离障碍物 $F$ 的最近距离大于2米后，无人车可以根据车道的信息自动回正方向，从斜线转入直线，在车道内行驶。

我们可以根据实际的无人车曲线行驶与切线行驶或直线行驶的轨迹，绘制出无人车调头的实际轨迹图。

#### 4.3.2.3 模型的结果与分析

根据题目要求，我们通过算法求解出了所有可能的方向盘转速 $\omega$ 和无人车曲线行驶速度 $v$ ，在附件中呈现所有可能的数据。

但在结果中，无人车需要从原点出发，相对于坐标原点直行 $[0.77205m, 4.84707m]$ 的区间范围后，再取用问题一的模型进行计算。我们一种特例解， $\omega = 400^\circ/s$ 和 $v =$

20km/h为例，呈现出我们绘制的无人车调头轨迹，如下所示。

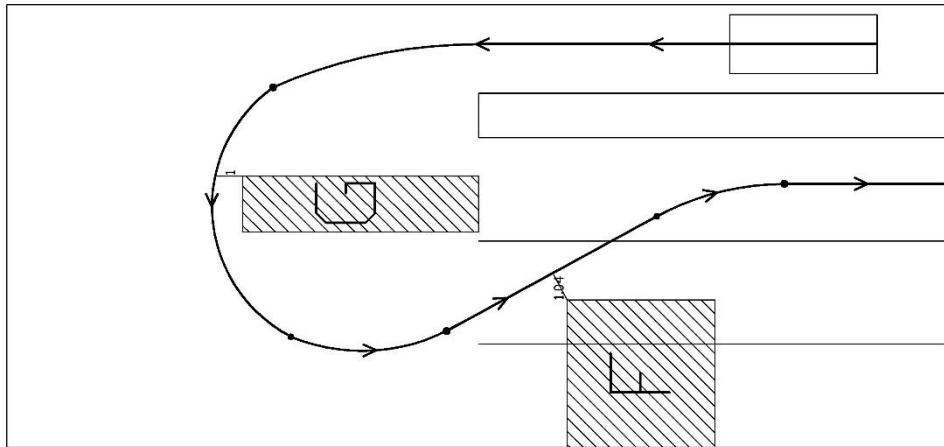


图 6 无人车调头轨迹示意图

#### 4.4 问题四

##### 4.4.1 问题四的分析

问题四考虑了现实场景中的应用，引入了道路人行横道模型，并在附件中给出了人行横道的数据信息。题目要求我们建立相关的无人车调头模型，且无人车在调头过程中需要尽可能不压人行横道，若无法做到，则要求无人车直行，在后轮越过人行横道后，再开始调头。问题最后还提出了如何通过算法和模型进一步处理当斑马线和问题三中障碍物同时存在的情况，如何做到既满足交规，又能避障通行，并绘制出无人车的调头轨迹。

我们对于仅存在人行横道的情况，基于问题一的模型进行分析。首先判断其能否不越过斑马线进行调头，如若不能则在问题一中的模型基础上，加入直行模型，即无人车向前行驶相应的距离，直到其后轮越过人行横道以后，再进行调头。其余部分的求解与问题一一致。

当问题中同时引入人行横道和障碍物后，我们可以在仅存人行横道的模型基础上进行求解，通过求解出人行横道模型的所有可能解，与问题三的多种障碍物的可能解，求交集。所有的交集即为同时满足交规并进行避障绕行的两个变量，方向盘转速和无人车曲线行驶速度。其内在的模型和算法与问题三一致。最终可以通过具体的解绘制出无人车调头轨迹。

##### 4.4.2 问题四的解答

###### 4.4.2.1 模型的改进与转化

在问题四中存在两种情况，因此我们需要引入两个改进模型，一个是人行横道模型，另一个是人行横道和障碍物模型，对问题进行分析和求解计算，绘制出无人车最终的调头轨迹。

###### 1) 人行横道模型

人行横道模型的作用是求解仅存在人行横道情况下，无人车实现调头的方向盘转速和曲线行驶速度两个变量。此模型是基于问题一模型进行改进的，它在问题一模型的基础上加入了直线行驶模型部分。问题一模型中，无人车是从起步开始，直接进入曲线行驶部分。因此我们需要通过人行横道的已知数据，结合问题一模型中的结果进行分析，判断无人车是否可以在满足不压人行横道的情况下，直接实现调头。如果无法实现，则需要通过人行横道的数据引入无人车直线行驶的距离。在这之后，依旧利用问题一模型

的算法，实现曲线轨迹的计算，求出所有能够实现无人车调头情况下的方向盘转速 $\omega$ 和无人车曲线行驶速度 $v$ 两个变量解值。

#### 2)人行横道和多障碍物模型

人行横道和多障碍物模型的作用是求解出在同时存在两种限制因素条件下，无人车实现调头的方向盘转速和曲线行驶速度。通过对题目给出障碍物位置和人行横道数据进行分析，我们知道这两种限制因素在本题中是直接进行物理叠加的。即在问题四中人行横道的基础上，直接添加多种障碍物，且这些障碍物的位置、尺寸数据信息与问题三中的信息是一致的。因此，我们考虑通过寻找问题三的结果数据和问题四中人行横道模型求解出的结果数据的交集，来得到该情况下，实现无人车调头的所有方向盘转速 $\omega$ 和无人车曲线行驶速度 $v$ 解值。

无人车在行驶过程中，对于障碍物分布的情况存在多种能够实现调头的具体轨迹路线以及路线所对应的无人车方向盘转速和曲线行驶速度。在实际过程中，无人车会根据其现处于的阶段进行实时判断，来决定是否进入任意模型的任意阶段以实现成功调头的目标。最终根据无人车所走的路线绘制出无人车的调头轨迹。

#### 4.4.2.2 算法求解过程

##### 1)人行横道模型的计算

*Step1.*判断无人车从起步开始，能否直接进入曲线行驶。选用合适的无人车方向盘转速和曲线行驶速度，计算出控制点的最小圆弧曲线轨迹。通过车身计算出无人车在该轨迹下所扫过的区域面积；

*Step2.*利用题目附件给出的人行横道已知数据，和无人车扫过的区域面积进行对比。如果存在交集，则无人车无法在不压人行横道的情况下实现调头，需要让无人车在后轮越过人行横道的后开始调头；

*Step3.*运用人行横道的已知数据，计算无人车在后轮越过人行横道的情形下，需要先直行多少距离；

*Step4.*求解出直行距离后，利用问题一的模型直接求解人行横道模型中的曲线轨迹，结合题目中的人行横道和车道信息的约束范围，得到所有可能轨迹下对应的无人车方向盘转速和曲线行驶速度。无人车会在再次压到人行横道之前进入直线行驶，随后越过人行横道，进入车道直行。最终可以绘制出无人车在人行横道模型中的调头轨迹。

##### 2)人行横道和多障碍物模型的计算

*Step1.*分别求解出人行横道模型和问题三多障碍物模型情况下的两种变量无人车方向盘转速和曲线行驶速度的取值范围；

*Step2.*该题中单一的多障碍物模型的原理、计算过程与分析和问题三中的模型一模一样，因此在这里不做过多表述；

*Step3.*计算两个模型单一情况下的解的交集，所有交集情况下的解，即为满足该模型无人车实现调头功能的两个变量，无人车方向盘转速和曲线行驶速度的解。

#### 4.4.2.3 模型的结果与分析

根据题目要求，我们通过算法求解出了所有可能的方向盘转速 $\omega$ 和无人车曲线行驶速度 $v$ ，在附件中呈现所有可能的数据。

但在结果中，无人车需要从原点出发，相对于坐标原点直行 $[4.5m, 4.84707m]$ 的区间范围后，再结合问题一的模型计算。我们以一种特例解， $\omega = 400^\circ/s$ 和 $v = 20km/h$ 为例，呈现我们绘制出无人车的调头轨迹，如下所示。

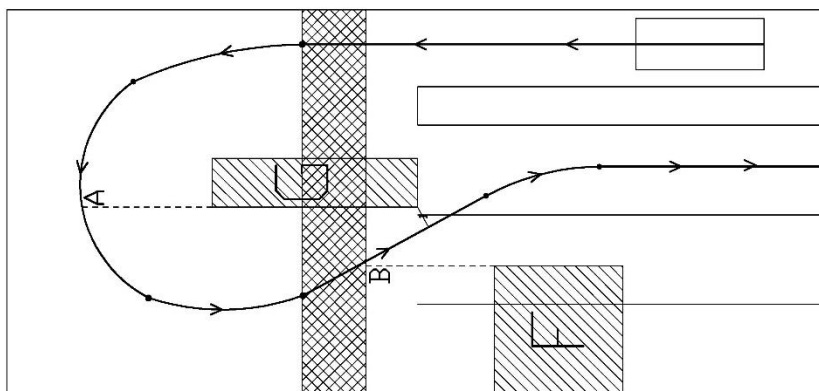


图 7 无人车调头轨迹示意图

## 4.5 问题五

### 4.5.1 问题五的分析

问题五是在问题四的基础上提出了更高的现实应用要求，原本问题四中的障碍物是静止的，但问题五中的障碍物是移动的，且它们以一定的速度沿道路平行方向移动。题目要求我们建立一个具有普适性、一般化的无人车调头轨迹规划模型，给出相应的算法设计和策略，并给出部分仿真结果验证结果的正确性。

我们考虑通过问题四模型的基础上引入时间模型，对无人车的轨迹规划进行计算，如图 所示，无人车在应该在障碍物 $G$ 之前抵达  $A$  点，应该在障碍物 $F$ 之前抵达  $B$  点。因此我们可以通过这两个约束条件，量化地表示障碍物移动速度与无人车方向盘转速和行驶速度这两个变量之间的关系。通过这两个约束条件，结合问题四中的人行横道和多障碍物模型，我们可以在无人车调头有解的情况下，求解出任意障碍物移动速度对应能够实现无人车调头功能的无人车方向盘转速和行驶速度，并绘制出调头轨迹。

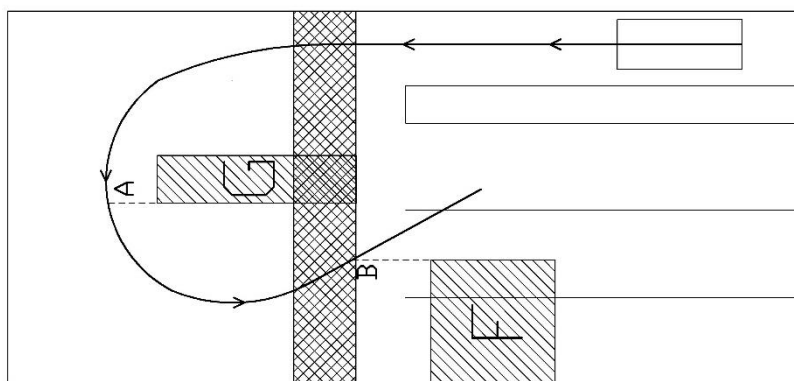


图 8 无人车调头关键判断点示意图

### 4.5.2 问题五的解答

#### 4.5.2.1 模型的改进与转化

问题五模型是在问题四的人行横道和多障碍物模型基础上引入时间模型，定量化地约束了障碍物移动速度与无人车方向盘转速和无人车行驶速度之间的关系，在存在无人车调头解的情况下，求解出无人车的调头轨迹和轨迹所对应的方向盘转速与无人车行驶速度。

##### 1)时间模型

我们通过时间模型来约束障碍物速度与模型两个变量之间的关系。我们分四种类型讨论障碍物 $G$ 和障碍物 $F$ 的移动方向。

如图 8 所示，当两个障碍物同时向右运动，则我们的方案将进入障碍物 F 与 G 间空间前行，它们之间的距离足以满足无人车通行，不会对无人车造成影响；当两个障碍物一个向右，一个向左运动时刻，它们对于无人车到达 A、B 点的时间具有约束作用；当两个障碍物同时向左移动时，两者同时对无人车抵达关键节点的时间具有约束作用。

我们以两者同时向左移动为例，讨论时间节点约束条件下障碍物移动速度与模型的两个变量之间的关系。单一障碍物的向左运动情况，只需要求解单一的约束条件即可。

无人车应该在障碍物G到达 A 之前抵达，我们假设无人车以方向盘转速 $\omega$ 和无人车行驶速度 $v$ 行驶到 A 点的时间为 $t_A$ ，障碍物G以速度 $v_G$ 到达 A 的时间 $t_A'$ 。

无人车抵达时间 $t_A$ 分为三部分组成，即人行横道直线行驶时间，方向盘匀速转动时间和方向盘固定到达 A 点的时间，我们代入部分附件给出的已知数据，可以得到数学关系式：

$$t_A = \frac{20}{v} + \frac{470^\circ}{\omega} + \frac{\rho\tau}{v} \quad (9)$$

其中 $\tau$ 表示方向盘固定时间转过的圆心角角度， $\tau$ 满足数学关系：

$$\tan\tau = \cot\left(-\frac{v}{L} \cdot \frac{16}{\omega} \cdot C\right) \quad (10)$$

其中 $C = -0.137622$ ，为一个常量。

障碍物G以速度 $v_G$ 到达 A 的时间 $t_A'$ 可以表示为数学关系：

$$t_A' = \frac{y_G}{v_G} \quad (11)$$

其中 $y_G$ 表示障碍物到 A 点的距离，由于障碍物G自身存在高度，因此我们可以带入附件数据，利用几何关系建立数学方程：

$$\left[6.2 - \left(x_1 + \rho \cdot \sqrt{\frac{k^2}{k^2 + 1}}\right)\right]^2 + \left[(y_G + 8) - \left(y_1 + \rho \cdot \sqrt{\frac{1}{k^2 + 1}}\right)\right]^2 = \rho^2 \quad (12)$$

其中 $(x_1, y_1)$ 为曲线行驶模型中第一步结束时的坐标。

当无人车需要实现调头功能时，应该满足：

$$t_A \leq t_A' \quad (13)$$

我们可以通过这两者之间的时间约束条件，得到两者的关系，同理可以得到无人车抵达 B 点的时间 $t_B$ 和障碍物F以速度 $v_F$ 到达 B 的时间 $t_B'$ 之间的关系。

最终我们可以通过时间模型中的约束条件与问题四模型的限制性因素，在无人车调头存在解的情况下，求解出任意障碍物移动速度下，对应能够实现无人车调头功能的无人车方向盘转速和行驶速度，并绘制出调头轨迹。

#### 4.5.2.2 算法求解过程

*Step1.*通过题目给出的障碍物初始位置信息及两个障碍物的移动速度，求解出满足时间模型情况，即能在障碍物之前抵达关键节点 A、B 位置的所有无人车方向盘转速 $\omega$ 和行驶速度 $v$ 解；

*Step2.*将所有可能解带入问题四模型中人行横道判断的情况，利用问题四的人行横道模型进一步筛选出满足交规，不压人行横道进行调头的无人车两个变量参数的所有可能解；

*Step3.*之后运用问题三的多障碍物模型，对剩余的无人车解进行分析和筛选，遍历所有解的可能，寻找能够顺利转入切线行驶模型，并在最后阶段，由切线转换到直道上进行直行的无人车方向盘转速 $\omega$ 和行驶速度 $v$ 解；

*Step3.*确定第三步中的所有无人车方向盘转速 $\omega$ 和行驶速度 $v$ 解为最终解后，遍历所

有的解，求解并绘制所有情况下的无人车调头轨迹路线。

### 4.5.2.3 模型的结果

根据题目要求，我们通过算法求解出了所有可能的方向盘转速 $\omega$ 和无人车曲线行驶速度 $v$ ，在附件中呈现所有可能的数据。

但在结果中，我们呈现一种特例解，即 $\omega = 400^\circ/s$ 和 $v = 20km/h$ ，障碍物速度在约束条件范围内，呈现出我们绘制的无人车调头轨迹，如下所示。

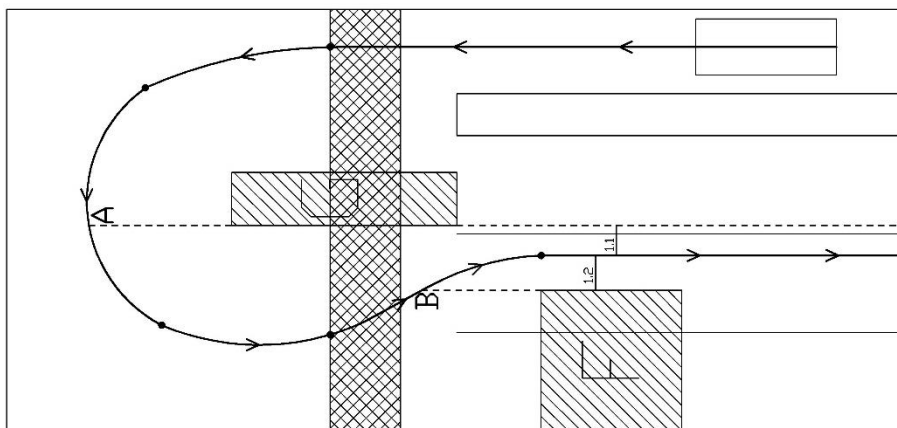


图 9 无人车调头轨迹示意图

## 4.6 问题六

### 4.6.1 问题六的分析

问题六提出了模型的优化问题，它指出无人车轨迹的规划算法应该具有较高的求解率，倾向于更收敛、稳定的方案，同时应该采用尽量高的频率根据路况进行实时计算，使其能够适应快速变化的交通环境。

我们充分考虑了无人车行驶的规范性、实际性与安全性问题。对无人车在两种障碍物移动情况下的方案提出了改进。无人车在行驶过程中会结合障碍物和道路路段的具体信息判断是否直接通行或者等待其越过无人车的轨迹后再行进。以降低算法的求解耗时，提高算法的成功率为核心目标。

### 4.6.2 方案的改进与优化

我们对于无人车算法方案在问题五的结果基础上进行改进。通过对问题五最终结果和无人车调头轨迹的分析，我们结合道路行驶的规范性与实际性，改变原本算法中两处步骤。

#### 1)障碍物行驶速度

在问题五的模型中，当障碍物 $G$ 和 $F$ 向上移动时，根据我们原来的模型，无人车必须在障碍物抵达 A 点之前先过 A 点，在其抵达 B 点之前抵达 B 点。但是通过结果分析，我们知道在满足无人车先障碍物一步抵达 A、B 点的情况下，障碍物的速度存在限制，即障碍物的最快速度为 $v_G = 0.8m/s$ ， $v_F = 0.4m/s$ 。此速度不符合现实生活中在道路路段上发生的移动速度。因此为了改进算法，使之在求解成功率上提高，我们提出另一种情形，即在障碍物速度比较快的情况下，无人车先等待障碍物经过关键节点 A、B 后，再进行调头。这样不仅能够提升算法的求解成功率，并且符合现实生活。既可以加强算法的应用能力，又可以保障实际道路的交通安全。

#### 2)无人车压线

在问题五的模型中，当障碍物 $G$ 和 $F$ 同时向下移动时，我们原本的模型算法提出，无



人车的车宽满足两障碍物 $G$ 和 $F$ 之间的距离要求，无人车可以在它们两个障碍物之间的缝隙中行驶。但是考虑到实际的应用性、道路的安全性与规范性。我们可以知道，在原本模型中，无人车行驶在两者中间这个行为，既不符合道路交通的安全性，即无人车不应该压线行驶；又不符合道理交通的安全性，即车辆驾驶在两个障碍物之间，且它们之间的间距很小，非常容易发生交通事故。因此我们对算法模型进行改进。在此情况下，无人车刚完成调头驶入直道行驶后，应选择一个车道，跟在障碍物后方行驶。若两个障碍物本身的移动速度区别较大，则无人车可以进行车道变更，对两个障碍物进行超越；若两个障碍物移动速度相差甚微，基本齐头并进，则无人车应该在调头完成后减慢行驶速度，跟着它们行驶。

通过改进这两种障碍物移动情况下的算法，我们可以使无人车以尽可能高的频率进行实时运算，对路况进行实时判断，优化算法求解成功率和求解耗时两方面之余，还应该提高其安全性，以遵守交通法规的方式，在实际道路上行驶。使之能够应用在更广泛的环境中。

## 五、模型的综合评价和推广

### 5.1 模型的优点

我们的模型符合物理规律与现实实际，与道路上的实际行车较为贴合；

我们的模型同时考虑了安全、快速以及舒适性三个方面的综合影响，考虑的角度较多、方面较广；

模型的求解与计算严格符合题给的限制条件。

### 5.2 模型的缺点分析

我们的模型没有完整地给出解析解，而是一个待积分式；

我们的模型没有给出成熟的算法，即无法提供一套能够直接运用到实际的算法。

## 六、参考文献

- [1] 林巧飞.高速环道几何线形设计与舒适度评价[J].山西交通科技,2020(02):5-8.
- [2] 刘晓涛,蔡云飞,王田橙.基于 SVM 的受约束 D\*算法在无人车寻路中的应用[J].计算机与数字工程,2017,45(09):1748-1754.
- [3] 褚昭明,刘金广.我国关于机动车“限速值”是如何规定的 如何合理设定限速[J].汽车与安全,2018(12):72-75.
- [4] 龚星衡,吴肖伶,张卫华.基于姿态传感器进行感兴趣区域压缩的园区无人车图传[J].四川大学学报(自然科学版),2021,58(02):90-96.
- [5] 杨杨,任少杰,杨正才.基于改进型人工势场的无人车局部避障[J].湖北汽车工业学院学报,2020,34(04):5-10.