Zusammenfassung für EAA

Wintersemester 2013/2014

von Dagmar Sorg

Divide and Conquer

1 MergeSort

1.1 Laufzeit

1. Aufteilung der n Elemente in zwei Instanzen mit $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ und $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ Elementen
2. rekursive Lösung des Problems
3. Laufzeit von Merge ist **linear**
4. es gibt Konstanten c_1, c_2, sodass die Laufzeit der folgenden entspricht:
   $T(n) \leq T(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil) + T(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) + c_2 \cdot n(\text{falls } n > 1), T(1) = c_1$

2 Substitutions-Methode

Raten einer Laufzeit mit Beweis durch Induktion

2.1 Raten durch Ähnlichkeit

sehen, dass eine Rekursionsformel asymptotisch ähnlich ist wie eine andere

2.2 Raten durch Verändern der Variablen

Beispiel $(T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log n)$**:** $n = 2^m, S(m) = T(2^m) = 2 \cdot T(2^{\frac{m}{2}}) + m = 2 \cdot S(\frac{m}{2}) + m$
$\Rightarrow S(\frac{m}{2}) \in O(m \log m)$
$\Rightarrow$ Rücksubstitution: $T(n) \in O(\log n \log \log n)$

2.3 Induktionsbehauptung stärker machen

wenn die Annahme richtig ist, aber die Induktionsvorraussetzung zu schwach ist

Beispiel $\left(T(n) = T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1\right)$**:** Annahme: $T(n) \in \mathcal{O}(n)$
$\Rightarrow T(n) = c \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + c \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = cn + 1,$
aber das heißt noch nicht, dass $T(n) \leq cn$.
Wir nehmen das folgende an:
$T(n) \leq c \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - b + c \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - b + 1 = cn - 2b + 1 \leq cn - b$, falls $b \geq 1$.

3 Iterative Methode

Iteratives Lösen von Rekursionsgleichungen, sodass die Rahmenbedingungen stimmen

Beispiel $\left(T(n) = \begin{cases} c_1 & \textbf{falls } n \leq 3 \\ 3 \cdot T(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor) + c_2 \cdot n & \textbf{sonst} \end{cases}\right)$**:**

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3 \cdot T(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor) + c_2 \cdot n \\
&= 3 \cdot \left(3 \cdot T(\left\lfloor \frac{n}{16} \right\rfloor) + c_2 \cdot n \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + c_2 \cdot n \\
&= 3 \cdot \left(3\left(3 \cdot T(\left\lfloor \frac{n}{64} \right\rfloor) + c_2 \cdot n \left\lfloor \frac{n}{16} \right\rfloor\right) + c_2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + c_2 \cdot n \\
&= c_2 \cdot \sum_{i=0}^{k-1} 3^i \left\lfloor \frac{n}{4^i} \right\rfloor + 3^k T\left(\left\lfloor \frac{n}{4^k} \right\rfloor\right)
\end{aligned}$$

Die Randbedingungen gelten, falls $\frac{n}{4^k} < 4$, bzw. falls $k > \log_4 n - 1$ für das kleinste k. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} T(n) &\leq c_2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i + c_1 \cdot 3^{\log_4 n} \\ &\leq 4c_2 \cdot n + c_1 \cdot n^{\log_4 3} \\ &\leq (4c_2 + c_1) \cdot n \end{aligned}$$

$\Rightarrow T(n) \in \mathcal{O}(n)$

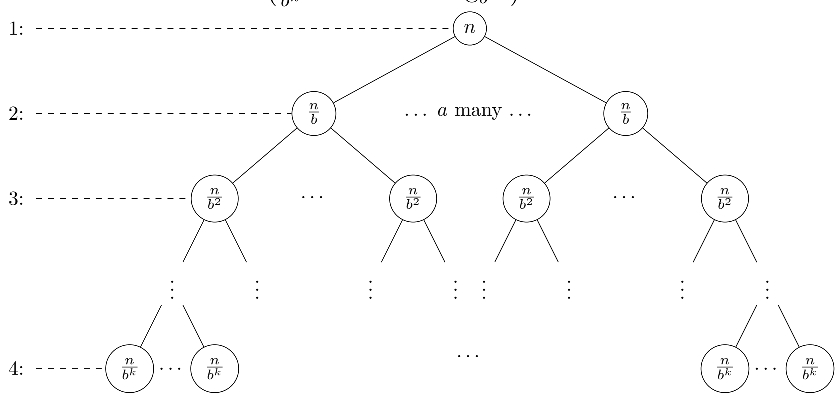
4 Master Methode (Master Theorem)

a) generelle Lösung für Rekursionsformeln der Form
$T(n) = a \cdot T(\frac{n}{b}) + f(n)$

b) $a, b \geq 1$ sind Konstanten

c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

d) erste Annahme: $n = b^k$ $\left(\frac{n}{b^k} = 1 \Leftrightarrow k = \log_b n\right)$:



1. $f(n)$

2. $f(n) + a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right)$

3. $f(n) + a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) + a^2 \cdot f\left(\frac{n}{b^2}\right)$

4. $f(n) + a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) + a^2 \cdot f\left(\frac{n}{b^2}\right) + c_0 \cdot a^k$ (wobei $k \approx \log_b n$)

Endsumme: $c_0 \cdot \underbrace{a^{\log_b n}}_{n^{\log_b a}} + \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \cdot f\left(\frac{n}{b^i}\right)$

e) somit gilt in Rekursionsschritt i: zusätzlicher Aufwand von $a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right)$

f) falls in Rekursionstiefe k der Wert $\frac{n}{b^k}$ klein genug ist, kann er durch die Konstante c_0 ersetzt werden

4.1 Laufzeit

$$T(n) = c_0 \cdot \underbrace{a^{\log_b n}}_{n^{\log_b a}} + \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \cdot f\left(\frac{n}{b^i}\right)$$

4.2 Laufzeitbestimmung mit dem Master Theorem

$a \geq 1, b > 1, \epsilon > 0, f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, sowie $T(n) = a \cdot T(\frac{n}{b}) + f(n)$ ($\frac{n}{b}$ ist entweder $\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor$ oder $\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil$)

Fall 1: Voraussetzung: $f(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$ für beliebiges $\epsilon > 0$

Folgerung: $T(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_b a})$

Beispiel: $T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + 1000n^2$

$\Rightarrow a = 8, b = 2, f(n) = 1000n^2, \log_b a = \log_2 8 = 3$
$\Rightarrow 1000n^2 \in \mathcal{O}\left(n^{3-\epsilon}\right)$

Fall 2: Voraussetzung: $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$

Folgerung: $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a} \log n\right)$

Beispiel: $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 10n$

$\Rightarrow a = 2, b = 2, f(n) = 10n, \log_b a = \log_2 2 = 1$
$\Rightarrow 10n \in \Theta\left(n^1\right)$

Fall 3: Voraussetzung: $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b a + \epsilon}\right)$ für ein $\epsilon > 0$ und falls die Regularitätsbedingung gilt (ein c mit $0 < c < 1$: $a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c \cdot f(n)$)

Folgerung: $T(n) \in \Theta(f(n))$

Beispiel: $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$

$\Rightarrow a = 2, b = 2, f(n) = n^2, \log_b a = \log_2 2 = 1$
$\Rightarrow n^2 \in \Omega\left(n^{1+\varepsilon}\right)$
Regularitätsbedingung: $2\left(\frac{n}{2}\right)^2 \leq c \cdot n^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}n^2 \leq cn^2$
$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^2)$

5 Anwendung

5.1 Matrix Multiplikation

Problem: Multiplikation zweier $n \times n$ Matrizen

Eingabe: Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}^{A} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}}^{B} = \overbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}}^{C}$$

Ausgabe: Matrix C

Laufzeit: $n^3 + n^2(n-1) \in \Theta(n^3)$

Idee zur Verbesserung der Laufzeit 1 (Divide and Conquer):

1. Aufteilung der Matrizen in 4 $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ Matrizen $\Rightarrow C_{ij} = A_{i1} \cdot B_{1j} + A_{i2} \cdot B_{2j}, 1 \leq i, j \leq 2$
2. Laufzeit:
   $T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + 4 \cdot n^2$
   $\overset{\text{Master Theorem (1)}}{\Rightarrow} \Theta(n^3)$

Idee zur Verbesserung der Laufzeit 2 (Strassen):

1. Multiplikation von nur sieben Matrizenpaaren, sowie nur 18 Additionen von Matrizen (Idee: Merken von berechneten Werten)
2. Laufzeit:
$$T(n) = \begin{cases} n^3 + n^2(n-1) & \text{falls } n \leq 2^{k_0} \text{ für eine Konstante } k_0 \geq 0 \\ 7T\left(\frac{n}{2}\right) + 18 \cdot \left(\frac{n}{2}\right) & \text{sonst} \end{cases}$$
$\overset{\text{Master Theorem (1)}}{\Rightarrow} \Theta(n^{\log_2 7}) \subset \mathcal{O}(n^{2.91})$ (wobei n eine Zweierpotenz ist)

Beste asymptotische Laufzeit: Bei einem Algorithmus von Coppersmith und Winograd (1990): $\mathcal{O}(n^{2.37\cdots})$. Es gibt auch Algorithmen mit einer geringeren asymptotischen Laufzeit, aber mit riesigen Konstanten.

5.2 Selection

- in einer Menge A mit n Elementen mit einer totalen Ordnung $\leq$ wird das k-kleinste Element gesucht
- einfacher Algorithmus: sortieren der Elemente und herausnehmen des k-ten (Laufzeit: $\mathcal{O}(n \log n)$)
- rekursiver Ansatz in $\mathcal{O}(n)$:
  1. die Menge A wird in zwei Teile A_1, A_2 geteilt, sodass $x < y$ für jedes $x \in A_1, y \in A_2$
  2. je nachdem ob $|A_1| \geq k$ arbeitet der Algorithmus auf A_1 oder A_2 weiter
  3. zuerst wird A in Gruppen der Größße 5 aufgeteilt, dann kann der Median m der Mediane der $\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil$ Gruppen durch den rekursiven Aufruf von SELECT berechnet werden
- Vergleich Algorithmen 1 , 2

Amortisierte Analyse

Ein Algorithmus kann aus mehreren Operationsabfolgen bestehen. Hier kann man eine obere Grenze der Worst-Case-Laufzeit bestimmen, indem man die Worst-Case-Laufzeit einer Operation nimmt und sie mit der Anzahl an Operationen multipliziert. Die wirkliche Worst-Case-Laufzeit kann jedoch besser sein.

Beispiel ($MultiPop$)**:**

Push($element$**):** $element$ wird dem Stack hinzugefügt

MultiPop(k**):** k Elemente werden vom Stack geholt (wenn weniger als k Elemente auf dem Stack sind, werden alle geholt)

1 Accounting Methode (Abrechnungsverfahren)

1. Idee: Bezahlen für mögliche kommende Operationen mithilfe von amortisierten Kosten $\hat{c}$
2. $c - \hat{c}$ (c sind die wirklichen Kosten) sind die reservierten Kosten für spätere Operationen, dessen $\hat{c}$ nicht für die wirklichen Kosten ausreichen
3. für $\hat{c}$ gilt: $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i \leq \sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i$ und ist somit eine obere Grenze der Gesamtkosten

Beispiel ($MultiPop\ (Fortsetzung)$)**:**

1. aktuelle Kosten für Push: 1 Einheit
2. aktuelle Kosten für MultiPop: $\min(k, |S| + 1)$
3. amortisierte Kosten für Push: 2 Einheit (1 für Push, die andere für MultiPop)
4. amortisierte Kosten für MultiPop: 1 Einheit (benötigt, falls $k > |S|$)

Alle Kosten sind konstant $\Rightarrow$ Laufzeit ist linear (in $\mathcal{O}(n)$)

2 Potentialfunktionsverfahren

1. definieren einer Potentialfunktion Φ, die jedem möglichen Zustand einer Datenstruktur einen Wert zuweist
2. bei einer Abfolge von n Operationen erhalten wir: $\hat{c}_i = c_i + \underbrace{\Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})}_{\text{Potentialdifferenz}}$

   mit D_i ist Zustand der Datenstruktur nach der i-ten Operation und D_0 Startzustand vor der ersten Operation
   $\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} c_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \hat{c}_i + \Phi(D_0) - \Phi(D_n)$
3. wenn Φ so gewählt ist, dass $\Phi(D_n) \geq \Phi(D_0)$, dann ist $\sum\limits_{i=1}^{n} \hat{c}_i$ eine Obergrenze der Gesamtkosten des Algorithmus.

Beispiel ($MultiPop\ (Fortseztzung)$)**:**

1. Φ ist die Anzahl $|S|$ der Elemente auf dem Stack S
2. amortisierte Kosten von Push: $\hat{c} = 1 + \Phi(D_1) = 1 + 1 = 2$
3. amortisierte Kosten von MultiPop(k): $\hat{c} = \min(k, |S| + 1) - \min(k, |S|) \in \{0, 1\}$

Somit ist die Laufzeit linear ($\in \mathcal{O}(n)$).

Union-Find-Datenstruktur

1. es wird eine endliche Menge X verwendet
2. Ziel: dynamische Menge $\mathcal{S}$ von disjunkten Teilmengen von X
3. vorhandene Methoden:

   MakeSet(item x): erstellt eine neue Menge nur mit dem Item x ($\{x\}$)

   Find(item x): gibt die Menge mit dem Item x zurück

   Union(set i, set j): erstellt eine neue Menge mit den Mengen i, j und löscht die beiden Mengen i, j
4. an kann annehmen dass $X = \{1, \ldots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist, da man für andere Mengen jedem Item eine einzigartige Zahl zuordnen kann
5. jede Menge hat einen **Repräsentanten**, Findgibt diesen zurück, Unionbekommt diese als Argumente

Im Folgenden betrachten wir eine Sequenz mit m Operationen MakeSet, Find und Union, wobei n die Anzahl an MakeSet-Operationen ist.

1 Array Darstellung

Beispiel ($\mathcal{S} = \{\{1,3,5,7\},\{2,4,8\}\}, X = \{1,\ldots,9\}$):

Item x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Menge $A[x]$	1	2	1	2	1	0	1	2	0

Laufzeiten:

MakeSet: $\Theta(1)$

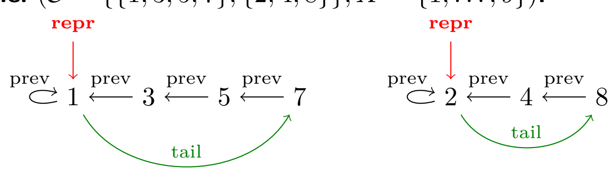
Find: $\Theta(1)$

Union: $\Theta(n)$

2 LinkedList Darstellung

Zur Reduzierung der Laufzeit von Union

Beispiel ($\mathcal{S} = \{\{1,3,5,7\},\{2,4,8\}\}, X = \{1,\ldots,9\}$):



Laufzeiten:

MakeSet: $\Theta(1)$

Find: $\Theta(n)$

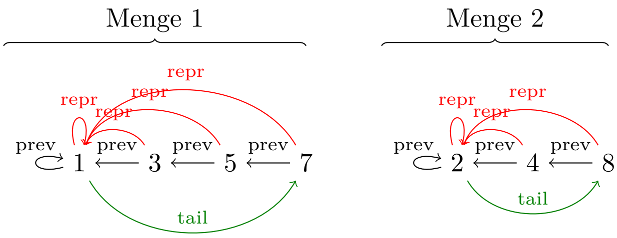
Union: $\Theta(1)$

Gesamtlaufzeit für $n-1$ Union und m Find: $\Theta(m \cdot n)$

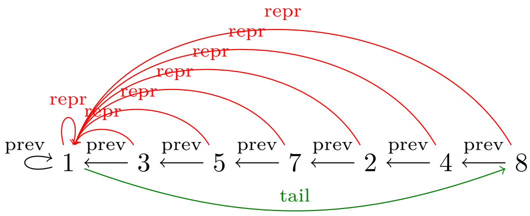
$\Rightarrow$ keine Verbesserung der Laufzeit

2.1 Erweiterte LinkedList Darstellung

Beispiel ($\mathcal{S} = \{\{1,3,5,7\},\{2,4,8\}\}, X = \{1,\dots,9\}$)**:**



UNION$(1,2)$ =



Wenn man die Länge jeder Liste speichert und immer die kürzere Liste an die Längere hängt, wird jeder Repräsentanten-Zeiger höchstens $\lfloor \log n \rfloor$-mal verändert werden.
Laufzeit von einer Sequenz mit m Operationen (MAKESET, UNION, FIND) liegt in $\mathcal{O}(m + n \log n)$

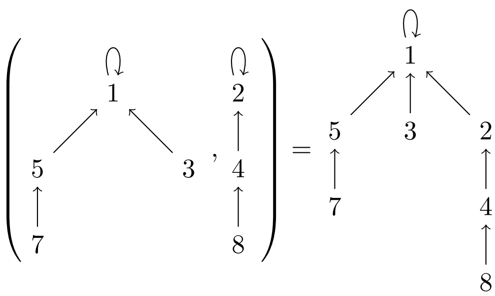
3 Rooted Tree Darstellung

Repräsentant: Wurzel des zugehörigen Baumes

Union(a, b)**:** Anhängen der Wurzel von a an Wurzel von b

Find(a)**:** Aufsteigen im Baum bis zur Wurzel von a

Beispiel (**Union**$(1,2)$)**:**



Laufzeiten:

MakeSet: $\Theta(1)$

Union: $\Theta(1)$

Find: Die Laufzeit von FIND ist anhängig von der Höhe des Baumes. Wenn UNION einfach ohne Überprüfung der Höhe der Bäume durchgeführt wird, liegt FIND in $\Theta(n)$.

3.1 gewichtete Vereinigung (weighted Union)

Es wird der kleinere Baum an den größeren angehängt. Damit das möglich ist, wird die Größe jedes Baumes folgendermaßen gespeichert: $parent[root] = -size$.
Wenn ein Baum aus mehreren *weighted* UNION Operationen entstanden ist, so gilt: $h(T) \leq \log |T|$, wobei $h(T)$ die Höhe des Baumes und $|T|$ die Anzahl der Elemente in T ist.

Baum T_j wurde an Baum T_i angehängt. Dann gilt: $h(T) = \max(h(T_j) + 1, h(T_i))$. Somit entstehen zwei Fälle:

1. $h(T_i) > h(T_j) + 1 \Rightarrow h(T) = h(T_i) \leq \log |T_i| < T$ ✔
2. $h(T_i) \leq h(T_j) + 1$
   $\Rightarrow h(T) = h(T_j) + 1 \leq \log |T_j| + 1 = \log(2 \cdot |T_j|) \leq \log(|T_j| + |T_i|) = \log |T|$ ✔

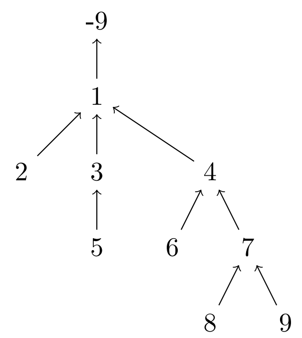
$\Rightarrow$ Eine Sequenz von n MakeSet-Operationen und m *weighted* Union- und Find-Operationen, kann in $\mathcal{O}(m \log n)$ ausgeführt werden.

3.2 Find mit "Path Compression"

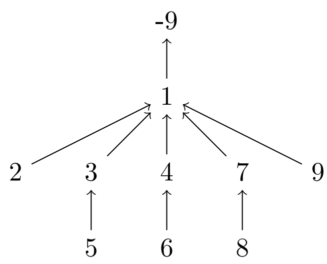
Bei der Suche nach dem Schlüssel k ändern wir für alle Knoten auf dem Pfad von *root* zu a den Zeiger zum Vorgänger ($parent[x] \leftarrow root$, x liegt auf dem Pfad von *root* zu a).

Beispiel (Find(9)):

Vor der Suche nach 9:



Nach der Suche nach 9:



Laufzeiten:

Find: $\Theta(\log n)$

Union: $\Theta(1)$

MakeSet: $\Theta(1)$

Mit der Anwendung der amortisierten Kosten erhält man jedoch folgendes:

Find: $\Theta(\log^* n)$

Wobei folgendes gilt (**iterativer Logarithmus**):

$$\log^* n = \min\{j \geq 0; \log^{(j)} n \leq 1\}$$

sowie

$$\log^{(i)} n = \begin{cases} n & \text{falls } i = 0 \\ \log(\log^{(i-1)} n) & \text{falls } i > 0 \text{ und } \log^{(i-1)} > 0 \text{ definiert} \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

Der **rank** $r(v)$ eines Knotes v entspricht der Höhe seines Teilbaumes, gewurzelt bei v. Somit gilt

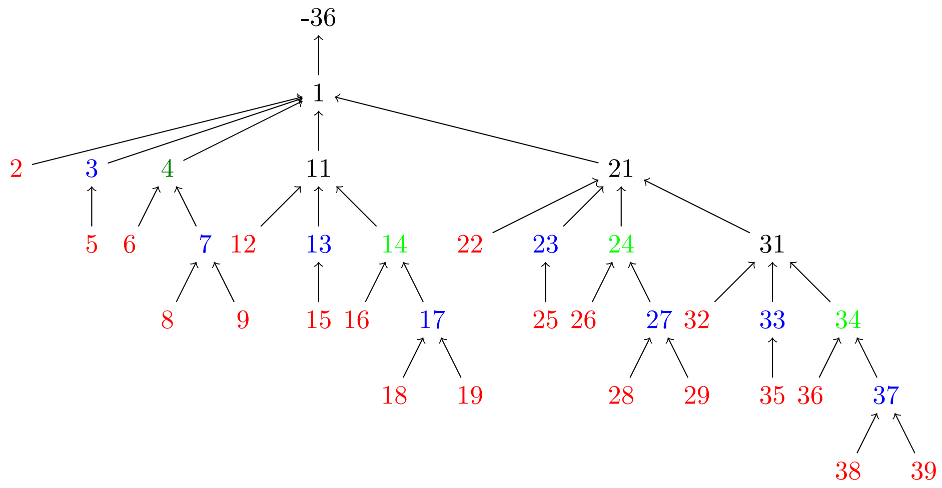
$$r(v) \leq \log n, \ \forall v \in V$$

Eine **Rank**-Gruppe R_j ist eine Menge von Knoten für die gilt:

$$R_j = \begin{cases} \{v | \log^{(j+1)} n > r(v) \leq \log^{(j)} n\} & \text{falls } \log^{(j+1)} n \text{ definiert ist} \\ \{v | r(v) = 0\} & \text{falls } \log^{(j)} n < 1 \text{ definiert ist} \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel ($r(1) = 5, r(21) = 4, r(11) = r(31) = 3$, **grüne:** $r() = 2$, **blaue:** $r() = 1$, **rote:** $r() = 0$)**:**

Sowie R_1 sind die schwarzen Knoten,
R_2 sind die grünen Knoten,
R_3 sind die blauen Knoten,
R_4 sind die roten Knoten.



Alle ranks steigen zur jeder Zeit der Sequenz auf dem Weg eines Knotens zur Wurzel strikt monoton an (auf einem Pfad vom Knoten zur Wurzel).

Beweis:

Zu einem bestimmten Punkt setzen wir für einen Knoten v: $parent[v] \leftarrow w$ durch die Pfadkompression (davor war v in einem Teilbaum von w). Somit war vorher schon $r(v) < r(w)$.

Es gibt höchstens $\frac{n}{2^r}$ Knoten vom rank r.

Beweis:

T_v ist Teilbaum gewurzelt bei v vom rank r im Wald T'. Dann gilt

$$r = h(T_v) \leq \log |T_v| \quad \Rightarrow |T_v| \geq 2^r$$

Da zwei Teilbäume mit der selben rank disjunkt sind und es insgesamt n Knoten gibt folgt daraus, dass es höchstens $\frac{n}{2^r}$ Knoten pro rank gibt.

Beginn der amortisierten Analyse:

1. Originalsequenz (σ)
2. Hinzurechnen der Kosten einer Operation $\textsc{Find}(x)$ zu der Operation für das Bewegen der Knoten (eine Einheit für das Durchlaufen der Knoten auf einem Pfad x zur Wurzel (inklusive x, ohne Wurzel und Vorgänger der Wurzel) und eine Einheit für das Bewegen der Knoten)
3. zwei Arten von Bewegungen:

   Typ A: Vor der Bewegung gilt $R_i(v), R_j(parent[v]), i \neq j$

   Typ B: Vor der Bewegung gilt $R_i(v), R_j(parent[v]), i = j$
4. es gibt höchstens $\log^* n + 1$ nicht-leere Rank-Gruppen
5. weil der rank eines Knotens auf dem Weg zur Wurzel ansteigt folgt, dass es höchstens $\log^* n$ Bewegungen vom *Typ A* gibt
6. es gibt weniger als $\log^j n$ Bewegungen in der Rank-Gruppe R_j
7. es gibt höchstens $\frac{n}{2^r}$ Knoten pro rank

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}
|R_j| &< \sum_{i=\lceil \log^{(j+1)} n \rceil}^{\infty} \frac{n}{2^i} \\
&= \frac{n}{2^{\lceil \log^{(j+1)} n \rceil}} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \\
&\leq \frac{2n}{2^{\log^{(j+1)} n}} \\
&= \frac{2n}{2^{\log(\log^{(j)} n)}} \\
&= \frac{2n}{\log^{(j)} n}
\end{aligned}$$

Somit gibt es $|R_j| \cdot \log^{(j)} = 2n$ Bewegungen vom Typ B pro Rank-Gruppe.
$\Rightarrow 2n \cdot \log^* n + 1$ Bewegungen vom Typ B.
Zusammenfassend:
Eine Sequenz von m Operationen MakeSet, gewichtete Union und Find mit Pfadkompression (n sind MakeSet-Operationen) kann in $\mathcal{O}(m \log^* n)$ ausgeführt werden.

3.3 inverse Ackermannfunktion

Wächst langsamer als der iterative Logarithmus, die m Operationen können in $\mathcal{O}(m\alpha(m,n))$ ausgeführt werden, wobei α eine Variante der inversen Ackermannfunktion ist.

4 Anwendung: Gleichheit von endlichen Automaten

- **witness** ist ein Beispiel, das zeigt, dass zwei Automaten nicht gleich sind.
- zwei Automaten können nur dann gleich sein, wenn ihre Startzustände gleich sind
- zwei Automaten sind gleich, wenn sie die gleiche Menge an Wörtern akzeptieren
- Algorithmus zum Testen der Gleichheit von endlichen Automaten kann dann eine **kürzeste** *witness* ausgeben, wenn die Datenstruktur zum Speichern der Zustände als Queue und nicht als Stack realisiert wird (ansonsten kann auch eine längere *witness* ausgegeben werden)
- der Algorithmus ist korrekt, weil alle möglichen Wege gespeichert und somit überprüft werden
- Laufzeit: es kann in $\mathcal{O}(|\Sigma| \cdot (|Q_1| + |Q_2|) \cdot \log^*(|Q_1| + |Q_2|)$ entschieden werden, ob zwei Automaten gleich sind oder nicht
- Vergleich Algorithmus 3.

Minimaler Spannbaum

inzident:

- ein Knoten v und eine Kante e sind inzident, falls $v \in e$
- zwei Kanten e_1, e_2 sind inzident, falls $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$

adjazent: zwei Knoten v, w sind adjazent, falls $\{v, w\} \in E$

Grad: $deg(v) = \#$ inzidenter Kanten

Pfad der Länge l: ist ein Teilgraph mit allen Kanten des Pfades mit $l+1$ Knoten

verbundener Teilgraph: ist ein maximal verbundener Teilgraph (alle Kanten zwischen den Knoten $v \in V_{Teilgraph}$ sind in $E_{Teilgraph}$)

Baum: $m = n - 1$ und ist verbunden

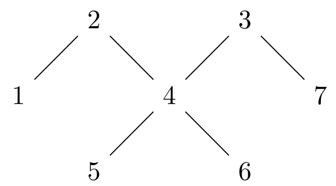
gespannter Teilgraph: ist ein verbundener Teilgraph mit $V_{Teilgraph} = V$

gespannter Teilbaum: ist ein gespannter Teilgraph, der ein Baum ist

1 Prüfer-Sequenz

Es gibt n^{n-2} beschriftete Bäume auf der Knotenmenge $\{1, \ldots, n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.
Ein Baum T kann definiert werden durch $T = \text{Prüfer2Tree}(\text{Tree2Prüfer}(T))$
Beispiel (Prüfer-Sequenz: $(2, 4, 4, 4, 3)$**):**

Baum:



Zurück zum Baum:

j	1	2	5	6	4	7
$parent[j]$	2	4	4	4	3	3

Vergleich Algorithmen 4 und 5 ..

2 Tarjan's Kantenfärbungs-Methode

- **Farbeninvariante:** Es gibt einen MST, der alle blauen und keine rote Kante enthält.
- eine Kante $e = \{v, w\} \in E$ **kreuzt** einen *Schnitt*, falls $v \in S \subsetneq V$ und $w \in V \setminus S$
- ein **einfacher Kreis** ist ein verbundener (Teil-)Graph mit $\forall v \in V : deg(v) = 2$
- wenn T ein Spannbaum ist, so gibt es für jeden Schnitt in G eine Kante, die diesen Schnitt kreuzt, sowie es in jedem Kreis eine Kante gibt, die nicht in T ist

Blaue Regel: Auswählen eines Schnittes, den keine blaue Kante kreuzt $\rightarrow$ färbe Kante mit dem kleinsten Gewicht blau

Rote Regel: Auswählen eines einfachen Kreises, der keine rote Kante enthält $\rightarrow$ färbe die Kante mit dem größten Gewicht rot

Dieser Algorithmus wird solange angewendet, bis keine Regel mehr angewendet werden kann.

Tarjan's Kantenfärbungsalgorithmus färbt alle Kanten richtig.
Beweis:

Am Anfang ist keine Kante gefärbt. Da der Graph verbunden ist, gibt es auch einen MST. Nach dem k-ten Schritt gibt es einen MST T mit allen blauen und keinen roten Kanten. Jetzt gibt es zwei Fälle:

Anwendung der blauen Regel: Falls der Algorithmus eine Kante $e \in T$ färbt, ist alles ok. Sonst gibt es eine Kante e' auf dem Schnitt $C = (S, V \setminus S)$ die nicht blau gefärbt ist und zu T gehört (sie kann nicht rot sein, sonst wäre sie nicht im Baum T). Dann färben wir die Kante e blau. Da immer die Kante mit dem kleinsten Gewicht genommen wird, gilt $w(T') \leq w(T)$.

Anwendung der roten Regel: Äquivalent zur blauen Regel mit einem Kreis C sowie der Folgerung, dass $w(e) \geq w(e')$ und $w(T') \leq w(T)$.

Zum zeigen, dass der Algorithmus auch alle Kanten färbt müssen wir folgende zwei Fälle zeigen:

$e \in T$: Betrachten der beiden Komponenten, die durch den Schnitt C durch e entstehen: keine blaue Kante geht über C, somit können wir e blau färben.

$e \notin T$: Betrachten den Kreis C (der einzigartige Pfad von v nach w, wobei $e = \{v, w\}$), dann gibt es keine rote Kante auf C und wir können die rote Regel anwenden.

3 Kruskal's Algorithmus

- wird mit n blauen disjunkten Bäumen gestartet
- Kanten werden in nicht-absteigender Reihenfolge (bezogen auf ihr Gewicht) abgearbeitet
- falls eine Kante e inzident zu zwei Knoten in **verschiedenen** Bäumen ist, wird die Kante **blau** gefärbt, sonst rot
- Anwendung der Färbungsregeln von Tarjan
  Beweis:
  Falls e in zwei unterschiedlichen blauen Bäumen endet, kann man S als die Menge an Knoten definieren, die v enthält. Dann kreuzt keine blaue Kante den Schnitt $C = (S, V \setminus S)$ und durch das Ordnen der Kanten ist e die Kante mit dem geringsten Gewicht.
  Falls $e = \{v, w\}$ inzident zu zwei Knoten im selben Baum ist, ist der Pfad P zwischen v und w zusammen mit e ein einfacher Kreis ohne rote Kanten. Somit wird e rot gefärbt (e ist die einzige ungefärbte Kante).
- Laufzeit:
  - Sortieren der Kanten in $\mathcal{O}(m \log n)$
  - Union-Find-Datenstruktur in $\mathcal{O}(m \log^* n)$
  - Gesamtlaufzeit somit in $\mathcal{O}(m \log n)$

Vergleich Algorithmus 6.

4 Matroide und der Greedy Algorithmus

4.1 Matroid

Unabhängigkeitssystem: endliche Menge X und eine Menge $\mathcal{I}$ von Teilmengen von X für die gilt:

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$
2. falls $I_2 \in \mathcal{I}$ und $I_1 \subseteq I_2$ dann gilt $I_1 \in \mathcal{I}$

Austauscheigenschaft: falls $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ und $|I_1| < |I_2|$ dann gibt es ein $x \in I_2 \setminus I_1$ sodass $I_1 \cup \{x\} \in \mathcal{I}$

Matroid: Unabhängigkeitssystem mit Austauscheigenschaft

Beispiel (*Matroid*)**:**

- ein endlicher Vektorraum mit der Menge an unabhängigen Teilmengen
- Kantenmenge eines Graphs zusammen mit der Menge von kreisfreien spannenden Teilgraphen

Kreis eines Unabhängigkeitssystems: kleinste Teilmenge von X, die nicht in $\mathcal{I}$ ist

Basis eines Unabhängigkeitssystems: größtes Element aus $\mathcal{I}$; alle Basen eines Matroids haben die gleiche Größe (Folgerung aus Austauscheigenschaft)

4.2 Greedy Algorithmus

Vergleich Algorithmus 7.

Voraussetzungen:

1. Unabhängigkeitssystem $(X, \mathcal{I})$ mit Gewichtsfunktion $w : X \to \mathbb{R}$
2. $w(X') = \sum_{x \in X'} w(x)$ ist das Gewicht einer Teilmenge $X' \subseteq X$

Nutzen: berechnet Basis mit kleinstem Gewicht

Wenn $M = (X, \mathcal{I})$ ein Matroid ist, so berechnet der Greedy-Algorithmus die kleinste Basis im Bezug auf die Gewichtsfunktion.
Beweis fehlt.

5 Der Algorithmus von Prim

Datenstruktur:

- *Priority Queue*
- jedes Element hat einen Schlüssel, der die Priorität des Elementes abbildet
- kleinster Schlüssel entspricht höchster Priorität
- Implementation in als Heap dargestellten Bäumen oder Wäldern
- Laufzeit verschiedener Heaps:

	Binär-Heap	d-Heap	Fibonacci-Heap
INSERT	$\mathcal{O}(\log n)$	$\mathcal{O}(\log_d n)$	$\mathcal{O}(1)$
DECREASEKEY	$\mathcal{O}(\log n)$	$\mathcal{O}(\log_d n)$	$\mathcal{O}(1)^*$
EXTRACTMIN	$\mathcal{O}(\log n)$	$\mathcal{O}(d \log_d n)$	$\mathcal{O}(\log n)^*$
MAKEHEAP	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n)$

$*$ amortisierte Kosten

Operationen:

Insert(item x, key k): Einfügen eines Elementes x mit Schlüssel k in die *Priority Queue*

DecreaseKey(item x, key k): Setzen des Schlüssels von x auf k

ExtractMin: gibt das Element mit dem kleinsten Schlüssel zurück und löscht es aus der *Priority Queue*

MakeHeap: erstellt eine *Priority Queue* mit allen Elementen

Während der Algorithmus läuft enthält die *Priority Queue* alle Kanten, die nicht im blauen Baum enthalten sind. Der Schlüssel eines Knotens ist das Gewicht der leichtesten Kante e, die inzident zu v ist und einem Knoten des blauen Baumes. Durch umhängen der Elternzeiger wird der blaue Spannbaum erzeugt.

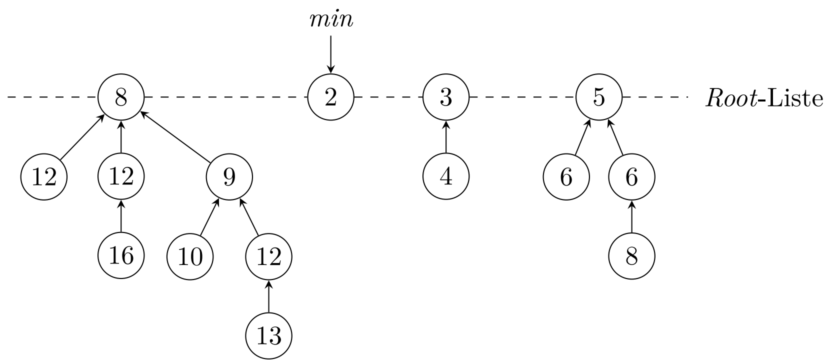
Laufzeit:

- n EXTRACTMIN-Operationen
- höchstens $m + 1$ DECREASEKEY-Operationen
- mit Fibonacci-Heaps kann der Algorithmus somit in $\mathcal{O}(m + n \log n)$ ausgeführt werden

Vergleich Algorithmus 8.

Fibonacci-Heaps

- Wald aus (Min-)Heaps
- Element mit dem kleinsten Schlüssel ist die Wurzel
- Min-Zeiger auf kleinste Wurzel
- Wurzeln sind in einer *Root*-Liste gespeichert
- Knotennamen sind die Schlüssel der Elemente



Operationen:

Insert(item x, key k): Einfügen des Elementes x mit Schlüssel k als neue Wurzel in der *Root*-Liste, eventuelles Updaten des Min-Zeigers

ExtractMin:

1. alle Kinder des Minimums werden in die *Root*-Liste eingefügt
2. das Minimum wird entfernt
3. Funktion Consolidate wird auf der *Root*Liste aufgerufen

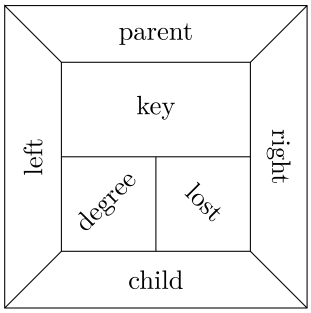
DecreaseKey(item x, key k):

1. k wird der neue Schlüssel von x
2. falls $k < key[parent]$ wird der Teilbaum T_x mit Wurzel x abgeschnitten und die x in die *Root*-Liste eingefügt
3. Update des Min-Zeigers
4. falls der Elternknoten von x schon ein Kind verloren hat, werden alle übrig gebliebenen Teilbäume (deren Elternknoten $parent[x]$ ist) in die *Root*-Liste eingefügt (**cascading cut**)

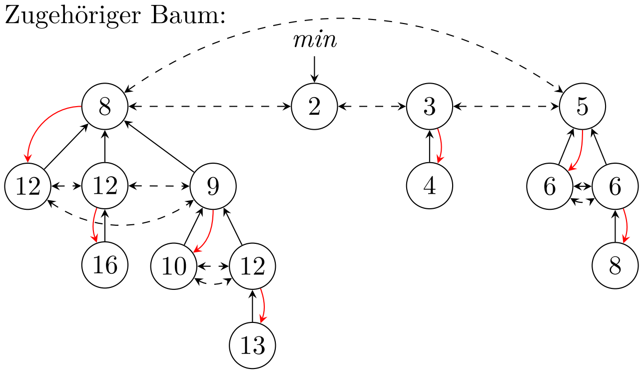
Consolidate: solange es zwei Wurzeln gibt mit der gleichen Anzahl an Kindern, wird der Baum mit dem größeren Schlüssel an den Baum mit dem kleineren Schlüssel angehängt, hiernach muss der Min-Zeiger erneuert werden
Vergleich Algorithmus 9.

1 Notwendige Datenfelder

- für DecreaseKey speichern wir für jedes Element eine Boolean-Variable *lost*, zum Speichern, ob bereits ein Kind abgeschnitten wurde
- für ExtractMin speichern wir für jeden Knoten das Kind mit dem kleinsten Schlüssel
- zu jedem Knoten wird das linke und das rechte Kind gespeichert
- für Consolidate speichern wir die Anzahl der Kinder in der Variablen *degree*



Zugehöriger Baum:



2 Laufzeit Analyse

Consolidate:

1. $r = \#$ Elemente in *Root*-Liste vor einer Consolidate-Operation
2. in jeder Iteration über die Anzahl der Knoten des aktuellen Knoten x werden zwei Bäume verschmolzen (das kann maximal r-mal passieren)
3. für jedes original Element in der *Root*-Liste gibt es höchstens **eine** Null-Anfrage für die innere Schleife (Iteration aus Punkt 2) geben
4. $\Rightarrow \mathcal{O}(r)$

Insert: Bei jeder Insert-Operation zahlen wir 2 Einheiten. Die zweite Einheit ist für eine spätere (erste) Consolidate-Operation.

DecreaseKey: Die Worst-Case Laufzeit ist proportional in der Höhe des Baumes. In amortisierter Analyse ist sie aber konstant: 4 Einheiten pro Operation.

- für das Bewegen des aktuellen Elementes
- falls das Label *lost* von (höchstens) einem Element gesetzt wird (genau das Element, des letzten bewegten Elementes): für das Bewegen in einem späteren *cascading cut*
- zwei Einheiten für eine spätere Consolidate-Operation der beiden bewegten Elemente für die die Operation bezahlt hat

ExtractMin:

- Worst-Case-Laufzeit ist in $\mathcal{O}(n)$ (präziser: proportional zu der Anzahl an Elementen in der *Root*-Liste)
- für viele Elemente in der *Root*-Liste wurde schon bezahlt
- Unterscheidung der folgenden Knoten:
  1. für Knoten, die in den Heap seit der letzten ExtractMin-Operation eingefügt wurden, wurde für die erste Consolidate-Operation bezahlt
  2. für Knoten, die während einer DecreaseKey-Operation seit der letzten ExtractMin-Operation in die *Root*-Liste eingefügt wurden, wurde schon für die Consolidate-Operation bezahlt
  3. für Knoten, die direkt nach der letzten ExtractMin-Operation eingefügt wurden, wurde noch nicht bezahlt
  4. für die Kinder der Wruzel mit kleinstem Schlüssel wurde noch nicht bezahlt

Für 3 und 4 zeigen wir, dass die maximale Anzahl der Elemente in der *Root*-Liste nach einer Consolidate-Operation, sowie die maximale Anzahl an Kindern eines Knotens in $\mathcal{O}(\log n)$ liegt.

Beweis:

Zuerst definieren wir die Zahlen S_k, welche die minimale Anzahl an Knoten in einem (Teil-)Baum eines Fibonacci-Heaps mit Wurzel k definieren:

$$\begin{aligned} S_0 &= 1 \\ S_1 &= 2 \\ S_k &= \underbrace{1}_{Wurzel} + \underbrace{1 + \sum_{i=0}^{k-2} S_i}_{\substack{\textit{Teilbbäume mit Kind-}\\ \textit{knoten als Wurzel}}} \quad , k \geq 1 \end{aligned}$$

Diese Zahl S_k entspricht genau F_{k+2} für alle $k \geq 0$. Des weiteren gilt:

$$F_{k+2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} \right) \geq \left(\underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}_{\substack{\textit{goldener}\\ \textit{Schnitt } \phi}} \right)^k , \quad \forall k \geq 0$$

Aus $n \geq S_k$ folgt, dass der Grad einer Wurzel höchstens $\frac{1}{\log \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \cdot \log n < 1.5 \log n$ ist.

Wir nehmen nun an, dass nach einer CONSOLIDATE-Operation r Wurzeln in der *Root*-Liste sind. Alle Grade der Wurzeln sind disjunkt (CONSOLIDATE-Voraussetzung). Somit haben wir

$$n \geq \sum_{i=0}^{r-1} S_i = S_r - 2 + S_{r-1} \geq S_r \geq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^r$$

Die vorletzte Ungleichung gilt, falls $r \geq 2$. Somit gibt es maximal $\max\{1, 1.5 \log n\}$ Wurzeln nach einer CONSOLIDATE-Operation.

Gesamtaufstellung:

	Worst-Case	amortisiert
INSERT	$\Theta(1)$	$\mathcal{O}(1)$
DECREASEKEY	$\Theta(n)$	$\mathcal{O}(1)$
EXTRACTMIN	$\Theta(n)$	$\mathcal{O}(\log n)$

Minimaler Schnitt in ungerichteten Graphen

- gegeben ist ein Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \to R_{\geq 0}$
- gesucht ist ein Schnitt $C = (S, V \setminus S)$ mit minimalem Gewicht $w(C) = \sum_{e \in E(C)} w(e)$ in Bezug auf alle Schnitte im gegebenen Graphen
- das Problem ist $\mathcal{NP}$-vollständig mit negativen Kantengewichten
- ein $s-t$-Schnitt trennt s und t $(s \in S, t \notin S)$
- entweder gibt es einen minimalen Schnitt oder s und t sind in der gleichen Menge
- **Definition:** Ein Graph $G/_{st} = (V/_{st}, E/_{st})$ mit $w/_{st} : E/_{st} \to R_{\geq 0}$ ist erstellt worden aus G durch vereinigen von s und t, falls
  1. $V/_{st} = V \setminus \{t\}$
  2. $E/_{st} = (E \setminus \{\{t,v\}; v \in V\}) \cup \{\{s,v\}; \{t,v\} \in E \textit{ und } v \neq s\}$
     in anderen Worten: die Kantenmenge $E/_{st}$ enthält alle Kanten von t zu allen v (die schon in E vorhanden gewesen sind) als Kanten von s zu v (ausgenommen die Kante von s zu t)
  3. eingeschränkt auf die Kantenmenge $E \cap \binom{V \setminus \{s,t\}}{2}$ setzen wir die Gewichtsfunktion $w/_{st} \equiv w$ und

$$w/_{st}(\{s,v\}) = \begin{cases} w(\{s,v\}) & \text{falls } \{s,v\} \in E \text{ und } \{t,v\} \notin E \\ w(\{t,v\}) & \text{falls } \{s,v\} \notin E \text{ und } \{t,v\} \in E \\ w(\{s,v\}) + w(\{t,v\}) & \text{falls } \{s,v\} \in E \text{ und } \{t,v\} \in E \end{cases}$$

- **Algorithmus von Stoer und Wagner:**
  - λ (das Gewicht des minimalen Schnittes) sowie der minimale Schnitt selbst kann in $|V| - 1$ Phasen berechnet werden
  - Auswählen eines Schnittes zwischen zwei Knoten u und v
  - u und v zusammenfügen zu einem Knoten
  - Gewichte der Kanten neu berechnen
  - s und t werden in jeder Iteration neu gewählt
  - **Laufzeit:** $\mathcal{O}(n^2 \log n + m \cdot n)$
- es gilt für $S \subset V, v \in V \setminus S$: $w(S,v) = \sum_{e \in E(S,\{v\})} w(e)$
- **modifizierter Algorithmus von Stoer und Wagner (Vergleich Algorithmus 10.):**
  - s und t können nicht gewählt werden, der Algorithmus berechnet sie
  - ein minimaler s-t-Schnitt für zwei geeignete Knoten s und t kann mit einer ähnlichen Methode berechnet werden, wie der MST-Algorithmus von Prim
  - Start ist ein zufällig gewählter Knoten $a \in V$ und eine Menge $A = \{a\}$
  - es wird immer der am engsten verbundene Knoten zu A zu A hinzugefügt (der Knoten $v \in V \setminus A$ mit $w(A,v)$ ist maximal), bis nur noch t übrig ist
  - angenommen s wurde zuletzt zu A hinzugefügt, dann ist $(A, \{t\})$ ein minimaler s-t-Schnitt
  - Implementation mithilfe einer *Priority Queue*
  - **Laufzeit:** mit Fibonacci-Heaps: $\mathcal{O}(m + n \log n)$

- Min-Cut-Phase-Algorithmus berechnet zwei Knoten s, t mit minimalem Schnitt $C = (V \setminus \{t\}, \{t\})$:

  Beweis:

  1. s, t ist Ausgabe des Algorithmus
  2. $C = (S, V \setminus S)$ ist beliebiger $s - t$-Schnitt mit $s \in S$
  3. Knoten aus V werden in der Reihenfolge betrachtet, in der sie aus der *Priority Queue* genommen wurden, t ist der letzte
  4. ein Knoten v ist **aktiv**, falls v und sein Vorgänger auf zwei verschiedenen Seiten von C sind
  5. t ist **aktiv**
  6. für jeden Knoten v gibt es eine Menge von Knoten A_v mit allen Knoten, die vor v aus der *Priority Queue* herausgeholt wurden, sowie die Menge $S_v = S \cap (A_v \cup \{v\})$
  7. es gilt für jeden **aktiven** Knoten v (insbesondere für t): $w(A_v, v) \leq w(S_v, (A_v \cup \{v\}) \setminus S_v)$

     (für t: $w(A_t, t) \leq w(S_t, (A_t \cup \{t\}) \setminus S_t) \Rightarrow w(V \setminus \{t\}, t) \leq w(S, V \setminus S)$)

     Beweis:

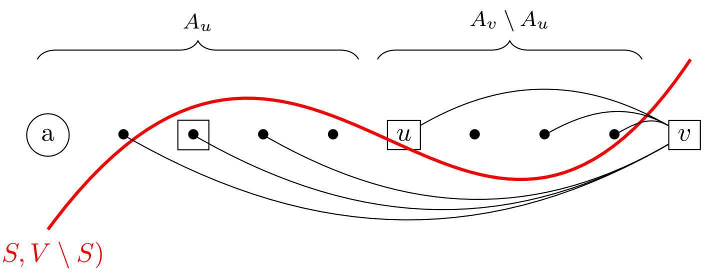
     Induktionsanfang: v ist der erste **aktive** Knoten

     a) $v \in S$: $S_v = \{v\}$

     b) $v \notin S$: $S_v = A_v$

     in beiden Fällen gilt: $w(A_v, \{v\}) = w(S_v, (A_v \cup \{v\}) \setminus S_v)$

     Induktionsschritt: u war der letzte **aktive** Knoten vor v

     – durch die Wahl des am engsten verbundenen Knoten, wissen wir: $w(A_u, v) \leq w(A_u, u)$

     – durch (IA) wissen wir, dass $w(A_u, u) \leq w(S_u, (A_u \cup \{u\}) \setminus S_u)$

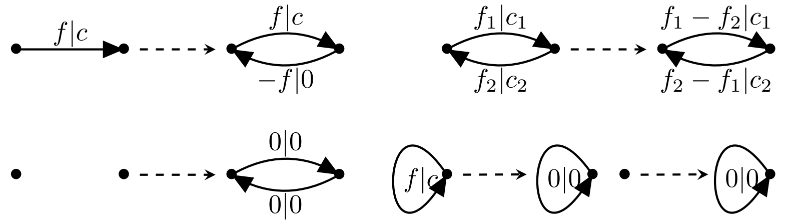
     – alle Kanten zwischen $A_v \setminus A_u$ und v gehen über den Schnitt $(S, V \setminus S)$

     – die Kantenmengen $E(S_u, (A_u \cup \{u\}) \setminus S_u)$ und $E(A_v \setminus A_u, \{v\})$ sind disjunkte Teilmengen von $E(S_v, (A_u \cup \{v\}) \setminus S_v)$

     – durch die Annahme, dass alle Kantengewichte positiv sind, erhalten wir:
     $w(A_v, v) \leq w(S_u, (A_u \cup \{u\}) \setminus S_u) + w(A_v \setminus A_u, v) \leq w(S_v, (A_v \cup \{v\}) \setminus S_v)$

Network Flows und minimale Schnitte

- Kantenmenge $E \subseteq (V \times V) \setminus \{(v,v); v \in V\}$
- für eine Kante $e = \{v, w\}$ gilt
  - v ist *tail* von e
  - w ist *head* von e
- ein gerichteter Weg $P : v_0, \ldots, v_l$ ist ein Graph $P = (\{v_0, \ldots, v_l\}, \{(v_{i-1}, v_i); i = 1, \ldots, l\})$ mit $l+1$ Knoten
- ein *Schnitt* in einem gerichteten Graphen ist ein **geordnetes** Paar $C = (S, V \setminus S)$
- ein *s-t-Schnitt* ist ein *Schnitt* wobei $s \in S, t \notin S$ gilt
- für $S, T \subseteq V$ gilt $E(S,T) = (S \times T) \cap E$ ($E(S,T)$ enthält alle Kanten mit *tail* in S und *head* in T)
- Kapazitäten $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ sind Kantengewichte mit $c(S, V \setminus S) = \sum\limits_{e \in E(S,T)} c(e)$
- der Algorithmus von Stoer und Wagner kann <u>nicht</u> auf gerichtete Graphen angewendet werden, stattdessen kann man einen minimalen Schnitt mit dem dualen *maximalen flow*-Problem lösen
- Flussnetzwerk $\mathcal{N} = (D, s, t, c)$ mit
  - gerichteter Graph D
  - eine Quelle (*source*) $s \in V$
  - ein Ziel (*sink*) $t \in V$
  - Kapazitäten $c : E \to \mathbb{R}_0^+$
- ein s-t-flow in einem Flussnetzwerk ist eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}_0^+$ mit
  1. **Kapazitätsbeschränkung:** $f(e) \leq c(e), \quad \forall e \in E$
  2. **Flusskonservierung:** $\sum\limits_{(w,v) \in E} f(w,v) - \sum\limits_{(v,w) \in E} f(v,w) = 0, \quad \forall v \in V \setminus \{s,t\}$
- der *Wert* eines Flussnetzwerkes ist die Differenz zwischen dem eingehenden und dem ausgehenden Fluss, oder $w(f) = \sum\limits_{(s,v) \in E} f(s,v) - \sum\limits_{(v,s) \in E} f(v,s)$
- ein Fluss ist maximal, wenn der *Wert* maximal ist
- ein Fluss *sättigt* eine Kante e, falls $f(e) = c(e)$
- für eine einfachere Darstellung fügen wir Kanten hinzu:



- für eine endliche Menge V mit $s, t \in V$ und $c : V \times V \to \mathbb{R}_0^+$ ist die Funktion $f : V \times V \to \mathbb{R}$ ein s-t-Fluss in (V, s, t, c), falls

  Kapazitätsbeschränkung: $f(v, w) \leq c(v, w), \quad \forall v, w \in V$

  Skew-Symmetrie: $f(v, w) = -f(w, v), \quad \forall v, w \in V$

  Flusserhaltung: $\sum\limits_{v \in V} f(v, w) = \sum\limits_{v \in V} f(w, v) = 0, \quad \forall w \in V \setminus \{s, t\}$

- der Wert eines Flusses in (V, s, t, c) ist $\sum\limits_{v \in V} f(s, v)$

- die betrachtete Kantenmenge eines Flussdiagrammes ist $E = \{(u, v) \in V \times V; c(u, v) \neq 0 \text{ oder } c(v, u) \neq 0\} \setminus \{(v, v); v \in V\}$, also alle Kanten, die einen Fluss ungleich 0 haben können

- für eine Kante $e = (v, w)$ bezeichnen wir die Rückwärtskante $(w, v) = -e$

- der Wert eines s-t-Flusses ist Summe aller Flüsse über die Kanten eines s-t-Schnittes:

  Beweis:

$$
\begin{aligned}
w(f) &= \sum_{v \in V} f(s, v) && \text{//Hinzufügen einer Doppelsumme, die sich aufhebt (Flusserhaltung)} \\
&= \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(u, v) && \text{//Aufteilen der Summe in Schnittkanten und andere} \\
& && \text{//der Wert der Kanten, die nicht zum Schnitt gehören, fällt weg (Skew-Symmetrie)} \\
&= \sum_{u \in S} \sum_{v \notin S} f(u, v) \\
&= \sum_{e \in E(S, V \setminus S)} f(e)
\end{aligned}
$$

- $w(f) = \sum\limits_{v \in V} f(v, t)$ folgt direkt aus vorherigem Beweis mit $S = V \setminus \{t\}$

- **Cut-Lemma:** der Wert eines Flusses kann nicht größer sein als die Kapazität eines minimalen Schnittes:

$$
w(f) = \sum_{e \in E(S, V \setminus S)} f(e) \leq \sum_{e \in E(S, V \setminus S)} c(e) = c(S, V \setminus S)
$$

- ein s-t-Fluss ist maximal, wenn es einen s-t-Schnitt gibt mit $w(f) = c(S, V \setminus S)$

- ein *augmenting path* ist ein Kantenzug in einem Flussnetzwerk, auf dem keine Kante gesättigt ist

- **Augmenting Path Theorem:** ein Fluss ist maximal $\Leftrightarrow \nexists$ *augmenting s-t-path* in Bezug auf f:

  Beweis:

  $\Rightarrow$ P ist ein *augmenting path* mit $\Delta = \min\limits_{e \in P}(c(e) - f(e))$

  Dann kann der Fluss f erhöht werden mit der folgenden Funktion:

$$
f'(e) = \begin{cases} f(e) + \Delta & \text{falls } e \in P \\ f(e) - \Delta & \text{falls } e \notin P \\ f(e) & \text{sonst} \end{cases}
$$

  daraus folgt $w(f') > w(f)$ $\lightning$

  $\Leftarrow$ $S = \{v \in V;$ es gibt einen augmenting s-t-path im Bezug zu $f\}$

  da $t \notin S$ folgt, dass $(S, V \setminus S)$ ein s-t-Schnitt ist und alle Kanten in $E(S, V \setminus S)$ sind gesättigt

  $\Rightarrow w(f) = \sum\limits_{e \in E(S, V \setminus S)} f(e) = \sum\limits_{e \in E(S, V \setminus S)} c(e) = c(S, V \setminus S)$

  $\Rightarrow f$ ist maximaler Fluss

- **Min-Cut Max-Flow Theorem:** der Wert eines maximales s-t-Flusses entspricht der Kapazität eines minimalen s-t-Schnittes:

$$S = \{v \in V;\ \text{es gibt einen augmenting s-t-path im Bezug zu } f\}$$

Mit einem minimalen s-t-Schnitt $(S^*, V \setminus S^*)$ und dem **Cut-Lemma** gilt:

$$w(f) = c(S, V \setminus S) \geq c(S^*, V \setminus S^*) \geq w(f)$$

- mit dem *augmenting path*-Theorem kann man direkt den Algorithmus von *Ford und Fulkerson* ableiten (Vergleich Algorithmus 11.)

Laufzeit:

  - in $\mathcal{O}(w^*)$, wobei w^* = Wert des maximalen Flusses (kann bei hohen Kapazitäten sehr hoch sein)
  - terminiert nicht bei irrationalen Kapazitäten
  - falls immer die kleinste Anzahl an Kanten für einen *augmenting path* gewählt wird, ist der Algorithmus in $\mathcal{O}(nm)$ (*Edmonds und Karp*)

- *Goldberg und Tarjan*: wenn kein Fluss über einen *augmenting path* geschickt wird, sondern nur über einzelne Kanten (mit lokalen Entscheidungen) läuft der Algorithmus z.B. in $\mathcal{O}(n^2\sqrt{m})$ bzw. in $\mathcal{O}(nm \log \frac{n^2}{m})$

- **integrality-Theorem:** wenn alle Kapazitäten Integer sind, berechnet der Algorithmus von *Ford und Fulkerson* einen ganzzahligen maximalen Fluss

Geometrische Algorithmen

1 Grundbegriffe
2 Sweep-Line-Methode
3 Konvexe Hülle

Zeichenkettensuche

1 Naiver String-Matcher

Cheat-Sheet

goldener Schnitt: $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$

Algorithmen

Algorithmus 1: Selection

Input: Menge A, Integer k
Output: k-kleinstes Element in A

begin
  if $|A| \leq 10$ **then**
    return *direkt das k-kleinste Element aus A*
  $(A_1, A_2) \leftarrow \textsc{Split}(A)$
  if $|A| \geq k$ **then**
    return $\textsc{Select}(A_1, k)$
  else
    return $\textsc{Select}(A_2, k - |A_1|)$

Algorithmus 2: Split

Input: Menge A
Output: geteilte Menge A als Mengen A_1, A_2

begin
  teile A in $\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor$ Gruppen von 5 Elementen (und einer möglichen übrigen Gruppe)
  $M \leftarrow$ Menge der $\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil$ (oberen) Mediane aller Gruppen
  $m \leftarrow \textsc{Select}\left(M, \left\lceil \frac{|M|}{2} \right\rceil\right)$
  $A_1, A_2 \leftarrow \emptyset$
  for $x \in A$ **do**
    if $x \leq m$ **then**
      $A_1 \leftarrow A_1 \cup \{x\}$
    else
      $A_2 \leftarrow A_2 \cup \{x\}$
  return (A_1, A_2)

Algorithmus 3: a

c

Algorithmus 4: a

b

Algorithmus 5: a

b

Algorithmus 6: test

testt

Algorithmus 7: arg1

arg2

Algorithmus 8: arg1

arg2

Algorithmus 9: arg1

arg2

Algorithmus 10: arg1

arg2