组合数学部分习题选解

鸽巢原理应用举例

- 教材P118 T6: 设(x_i,y_i,z_i) $(i=1,2,3,\ldots9)$共9个具有整数坐标值的点，那么这9个点中至少有两个点的连线中点坐标为整数。
- 解答：一个整数坐标有奇数和偶数两种可能，两个坐标就有4种可能的奇偶搭配组合，3个坐标有8种奇偶搭配组合。9个点里面，至少有2个点的奇偶搭配组合结构是相同的。这样的两个点连线中点一定是整数坐标。

鸽巢原理应用举例

- 教材P118 T7：
- a. 从前8个整数中选5个整数一定存在一对整数之和等于9
- B. 如果不是选5个，而是选4个，结论如何？

- 解a. 将前8个数分成两组1,2,3,4 和8,7,6,5。 当选5个数时，必然不可能来自于同一组。要么是1-4组合，要么是2-3组合。无论是那种组合，都一定会有一对和为9=1+8=2+7=3+6=4+5.
- B. 但如果只选4个数的话，就有可能来自于同一组，这样就可能没有任何一对之和为9.

- 教材P118 T8：从{1,2,3,4,5,6}中至少要选出几个数才能保证有一对之和为7？
- 类似于T7的思维方法。答案：至少选4个数。

鸽巢原理应用举例

- 教材P118 T10: 25个人的课堂里，有1年级的也有2年级的，还有3年级的学生。证明：
- a. 至少有9个人是同年级的。
- b. 至少有3个一年级的，或至少19个2年级的，或者至少5个三年级的。
- 证明：a. 显然如果每个年级最多8个人的话，顶多是24个人。B.

- 教材P118 T10：一个摔跤手是75小时内的冠军，该选手1小时至少比赛一场；但总共不超过125场；那么存在着连续的若干小时，使得该选手恰好进行了24场比赛；

- 解答：类似于教材中的例题。用a_i表示到第i小时及以前内参加的比赛数。由于每个小时都必须比赛，所以序列$a_1,a_2,\ldots a_{75}$是严格递增序列。再考察序列$a_1+24,a_2+24,\ldots a_{75}+24$， 也是严格递增的。
- 两个序列一起一个150项。但序列每个值都在1到149之间，所以必然有两个相同。那么只能是某个a_i与某个a_j+24相同。于是$a_i-a_j=24$

第3章 组合计数基础

- 教材P142t16 （鸽巢原理应用）任何n+1个不超过2n的正整数，至少有两个互素的。
- 解：Partition the set of numbers from 1 to 2n into the n pigeonholes {1, 2}, {3, 4}, . . . , {2n – 1, 2n}.

  If we have n+1 numbers from this set (the pigeons), then two of them must be in the same hole.

  - This means that among our collection are two consecutive numbers. Clearly consecutive numbers are relatively prime
  - (since every common divisor must divide their difference, 1).

- 解：如果两个数互素，那么他们的最大公因子就是1.
- 将1到2n之间的2n个数分成n组数，每组为相邻的两个正整数，如下：{1, 2}, {3, 4}, . . . , {2n − 1, 2n}.
- 从其中取n+1个数，由鸽巢原理，那么比然有两个在同一组中。
- 由于同一组的两个数是连续的相邻的两个数。
- 两个相邻的正整数的最大公因子一定是1. 所以它们一定是互素的。

第3章 组合计数基础

- 排列组合应用
- 教材P142T25：S是n个元素的集合。存在多少个有序对(A,B)使得A和B是S的子集，且$A \subseteq B$？
- 解：任取一个S的子集A，$|A|=k$, 那么如果$A \subseteq B$， 那么就有$B-A \subseteq S-A$。 $|S-A|=n-k$. 于是在A一定的情况下就有2^{n-k}个不同的B与A形成有序对，使得B是S的子集，且$A \subseteq B$.
- 而基数为k的S的子集个数为C(n,k). 所以一个有$C(n,k)\ 2^{n-k}$个不同的序对(A,B)使得A和B是S的子集，且$A \subseteq B$， 且$|A|=k$。

A作为S的子集，基数可以是0,1,2,…n中任何一个。于是总的可能满足条件的序对总数为：$\sum_{k=0}^{n} C(n,k)\ 2^{n-k}$. 由二项式展开定理可知答案为$3^n$.

第4章 高级计数技术—生成函数应用

- 例题：假设三角形ABC的边长均为正整数，且AB+BC+AC=2n+1，其中n为一个给定的正整数。问这样的三角形有多少个？
- 解：分别设三边长为a,b,c。则a+b+c = 2n+1. 由于边长不能为0，任何两边的和一定大于第3边。只要每一边小于周长一半，那么任何两边的和就一定会大于第3边。所以从已知的，任何一边都必然小于周长2n+1的一半。于是a,b,c都必然是1到n之间的正整数，同时满足a+b+c = 2n+1。
- 生成函数G(x) = $(x^1+x^2+x^3+\ldots+x^n)^3 = x^3(1-x^n)^3/(1-x)^3$
- *这个函数的项x^{2n+1}的系数就是满足条件的三角形的个数？*
- ***注意思考：这个数字里面包含有重复的吗？比如说边长3,4,5组合与5,4,3组合是全等的三角形。不应该算成2个，而应是一个。如果这里有重复的，如何消除重复，得到正确的答案？***

- P143T31： n>=4，有多少个n位的二进制串恰好01在其中出现两次？

解答方法一、这道题的答案比较简单就是C(n+1, 5). 为什么？分析如下：

在长度为n的二进制串中，要做到恰好有两个01在其中，那么这样的串有如下的几种可能，分成几段1串和0串

(1…1)(0…0)01(1…1)(0…0)01(1…1)(0…0)

01(1…1)(0…0)01(1…1)(0…0)

(1…1)(0…0)01(1…1)(0…0)01

01(1…1)(0…0)01

无论哪种情况，我们都可以在上面的1与0分界的位置虚拟地加入几条分界线，例如下所示：

(1…1) |(0…0)0|1(1…1) |(0…0)0|1(1…1) |(0…0)

在长度为n的串一共有n+1个分割位。只要从这n+1个分割位种任意选择出5条分割线，就将01串分成了几段，满足题目要求。在这些分割线之间必然全都是1或者0。 所以总共有方案数C(n+1, 5). 也就是有这么多个可能的2进制串

也可以考虑下面的另一思路：

- P143T31： n>=4, 有多少个n位的二进制串恰好01在其中出现两次？

- 满足题目要求的01串必然是型这个样子的：(1…1)(0…0)01(1…1)(0…0)01(1…1)(0…0)
- 分析这个形式的串，可以去分步完成的方法：
- 1： 确定第一个01的在串中的位置，再在其右边选择第 2 个01的位置
- 第一个01的位置的选择，在其左边可能出现0到n-4个字符(记为长度为r的10串，如1…10…0）； 对每一个确定的r, 这长度为r 的串有r+1种可能满足题目要求；在这第一个01的右边，还剩n-r – 2个字符；
- 2: 第2个01必然出现在剩下的n-r – 2个字符位置中；那么在第一个01和第2个01之间，出现的串也必然是10串，形如1…10…0， 假设长度为s, 那么s 就可能是0到n-r-4. 而这长度为s的10串有s+1 中可能的取值；
- 3： 最后一个部分是第2个01后面的部分的子串（10串）， 长度必然是n-4-r-s. 共有n-4-r-s + 1种可能的取值。
- 利用加法原理结合乘法原理可以得到总共有可能的是
- $\sum_{r=0}^{n-4}(r+1) * \{\sum_{s=0}^{n-r-4} s * (n-4-r-s+1)\}$

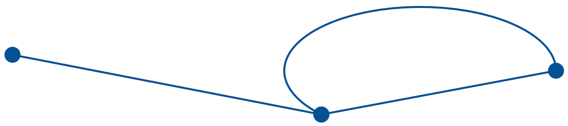
学生提供的第3种解法(待验证)

- 01串的个人解法：
- 1分类：分为0101型，01010型，10101型，101010型
- 0101型：将长为n的串分为非空的4组，分别填入0,1,0,1，有C(n-1,3)种
- 01010型：C(n-1,4)
- 10101型：C(n-1,4)
- 101010型：C(n-1,5)
- 加起来是C(n+1,5）

图论与树习题选解

图论习题选讲

- 教材P300T8 证明或反驳一个，在至少有两个顶点的简单图中，一定有两个顶点度相同。如果是多重图，结论如何？
- 解：
- 当图为简单图时：假设有n个结点。那么由于是简单图，每个结点的最大度数不会超过n-1, 最小可能为0. 如果说n个结点的度都互不相同，那么这n结点的度必然是分别为
- 0,1,2,...n-1.
- 但如果是这样的话，有孤立点的存在，那么就不可能有点的度为n-1. 所以一定有两个点的度是重复相同的。
- 对于多重图的情况：如下图所以，可以看出结论是否成立。



图论习题选讲

- **证明：**三维空间中不存在有奇数个面且每个面有奇数条棱的多面体。
- 证明：（反正法）
- 对应于多面体，构造一个图模型G=(V,E). 其中多面体的每一个面为图G的一个结点。如果两个面（两个结点）共享一条棱，则这两个面对应的结点之间有一条边。由于两个面最多共享一条棱。所以G是一个简单图。

- 于是这个图G有奇数个结点。任何一个结点关联的边数，相当于多面体的面的棱数。所以每个结点的度都是奇数。奇数个度为奇数的结点的图不存在。矛盾。

图论习题选讲

- 例题：假设G是无向连通图，若G中有割边或者割点，那么G一定不是哈密尔顿图。

- **例题**：有两个以上结点的偶图可以排序，使得邻接矩阵为分块矩阵
  - $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$

例题：假设v是一条割边的一个端点，证明v是割点当且仅当它不是度为1的悬挂点。

图论习题选讲

- 例题：如果n个结点的简单图有超过(n-1)(n-2)/2条边，则该图必然连通。
- 证明：反正法。如果不连通，那么至少有两个连通分支。
- 假如一个简单图有两个连通分支，结点数是t，其中一个的结点数是k, 显然1<=k<t. 在这种情况下可以证明这个简单图的边数不超过：(t-1)(t-2)/2。
- 如果是三个连通分支，利用已经有的这个结果，假设三个分支的总结点数是n，可以证明边数不超过：(n-1)(n-2)/2。
- 如此类推，得到，只要是分支数大于1，其边数不超过 (n-1)(n-2)/2。
- 这就说明n个结点的简单图，如果边数超过了(n-1)(n-2)/2，那么连通分支数就只能是1，也即连通。
- 注意：这其中的细节证明需要给出来。

图论习题选讲

- 例题：对于哪些m, n值，完全偶图$k_{m,n}$有欧拉回路？ 有欧拉开路?
- 解：(a) 因为所有结点的度都是 m 或者 n,于是这个图是欧拉图当且仅当m,n都是偶数。
- (b) K2,n 当n是奇数是，恰好有两个奇数度的结点。这是有一条欧拉开路，没有欧拉回路。
- 当然还有 K1,1 也有欧拉开路。
- 分析：欧拉开路意味着刚好只有2个奇数度的结点。 当n,m一个是奇数，一个是偶数时，这个偶数只能等于2. 如果都为奇数，则奇数度结点数为m+n, 所以只能是m=n=1.

- 例题：对于哪些m, n值，完全偶图$k_{m,n}$是哈密尔顿图?
- （答案: m=n>1). 为什么？

- 证明题：带有奇数个结点的偶图一定没有哈密尔顿回路。

图论习题选讲

- **证明：**若G是至少带11个结点的简单图。那么或者G是非平面图，或者G的补图是非平面图。
- 证明：如果G是非平面图则已。当结点数v=11时，
- 如果G是平面图，那么$e \le 3v - 6$, G最多有27条边。
- （在G不连通的情况下，边数可能更少）
- 但11个结点的完全图K11有边数有55条边。如果G的补图也是平面图，那么边数也不超过27条，这样G与其补图的边的和最多54条，矛盾。
- 对于结点数大于11的图，可以作类似处理。也可以用另一种思路，当v>11时，K11必然是k_v的子图。G也是k_v的子图，沿着这条思路就可以说明v>11时结论也成立。

树的理论习题选讲

- 例题：设G是n个结点m条边的简单无向图，而且m>=n. 那么G中必然有简单回路。

- 证明任意一个n(n>1)个结点的无向树一定不是欧拉图，也不是哈密尔顿图。

- 例题：G是一个无向连通图。e是其中的一条边。
- （1）如果e不在任何一棵生成树中，那么边e有何特征？
- （2）如果e会出现在任何一棵生成树中，那么边e有何特征？

树的理论习题选讲

- 证明：简单图是树当且仅当它不包含简单回路，并且添加连接的两个不相邻的结点的一条边，就产生恰好有一条简单回路的新图（包含相同边的回路认为是相同的）。

- 例题：有n个结点的树的所有结点的度的和是什么？

树的理论习题选讲

- 例题：假定$d_1,d_2,\ldots d_n$是和为2n-2的n个正整数，证明：存在一个带n个结点的树，使得这些结点的度为$d_1,d_2,\ldots d_n$.
- 证明：对n采用数学归纳法证明。
- 对于n≤2太简单，不重要。
- 假定n≥3.首先注意到，至少有一个$d_i=1$. 否则总和就不可能是2n-2了。不失一般性，假设$d_n = 1$.
- 那么剩下的di不可能都是度为1的结点。不是一般性，假定d1 > 1. 利用归纳假定，对应于序列d1 – 1, d2, d3, . . . , dn–1 . 有一棵树，它的所有结点度刚好就是这个序列.
- 添加一条边连接d1与一个新的结点v_n. 还是一棵树。其所有结点的度刚好是序列 d1, d2, . . . , dn .

树的理论习题选讲

- **证明**：若连通带权图里没有两条边的权相同。那么在每棵最小生成树里都包含着与结点v关联的权最小的边。

- **证明**：假定边e是与结点v关联的权最小的一条边。而且假定T是一棵不包含边e最小生成树。
- 将边e添加到T中，必然形成简单回路，并且该简单回路一定包含边e在内，也必然包含有跟v关联的其它边。在这条简单回路里，删除另外的与v关联的一条边. 那么结果仍然是一棵生成树，而且其总权必然小于T的总权。这与T是最小生成树矛盾。
- 证明思路2： 前面有一道题目结论，这种条件下，生成树是唯一的。于是利用普林算法，以v为起点，去形成一棵生成树，包含了边e. 而这里生成树是唯一的。所以就必须包含最小权的边e.

树的理论习题选讲

- 树补充练习P352T42：三队夫妇到达一条河流的岸边。每个妻子都是容易嫉妒的，当她的丈夫单独跟别人的妻子在一起时，而她不在场时，就会不信任自己的丈夫。；六个人如何用一条只能装不超过两个人的船来渡河，使得没为丈夫无法与妻子之外的女人单独相处。解答时用图论模型。
- **解答**：记A为6个人及船的集合，三队夫妇分别用Xx, Yy, Zz (其中大些字母表示丈夫，小写表示相应的妻子）。用B表示船。于是A={X,x, Y,y, Z,z, B }.
- 构造一个图，每一个结点是A的一个这样的子集，子集内的所有元素表示的对象按游戏规则可以在一起的， 比如说在船上、本岸和对岸。
- 最初的起始位置点是XY ZxyzB（所有人以及船在本岸时的位置，是最初的结点）。想得到的最后结果是是空集（一个结点，最后在本岸为空）。
- 两个结点之间有边（结点是邻接的），当且仅当如果可能从一个结点（一种状态位置，一次合规则的搭乘，或者在本岸或对岸的一起的状态等）得到一个位置。该船只能搭乘一人或者两人过河。例如结点 XY ZxyzB与结点YZyz 是邻接的（因为通过Xx搭船走后，剩下YZyz 两对夫妇的状态，已婚夫妇Xx可以一起搭船到对岸）。
- 我们的任务是在这个图中去寻找一条路，起始于最初的状态，终止于想得到的最后状态（本岸没人，空集对应的结点）。
- Dijkstra's算法可以用来寻找一条路。图太大，不便在这里画出。但用这些个标记以及箭头可以表示出一条路可能的路是
  - **XY ZxyzB→Y Zyz→Y ZxyzB→YZy→Y ZyzB→Zz→ZyzB→Z→ZzB→Ø.**

树的例题

- 学生问的题目：要么画出带有84个树叶而且高度为3的正则m元树，其中m是正整数，要么证明这样的树不存在。（难）
- 解答：首先任意的高度为3的m元正则树的叶结点数最大为m^3; 最小为3m-2个叶结点，这种情况是m个叶结点在第3层上，m-1个叶结点在第1层上，m-1个叶结点在第2层上；
- 思路：在叶结点数最少的这种情况的基础上，可以以第2层上的叶结点或者第1层上的叶结点为根，添加一颗m元的子树上去，该子树高度为1,m个叶结点。如此添加后还是一棵正则m元树，叶结点数增加了m-1个。
- 如此类推，按这种方法添加的话，添加k棵子树后，叶结点数就是 $3m-2 + k(m-1)$. 那么上面的问题是否有解就看
- $3m-2 + k(m-1) = 84$是否有合理的正整数解m与k.
- 将方程变化为： $3m+(m-1)k = 86$.
- 所以这里不能是奇数，m-1也不能被3整除。且$28>m>4$,
- 根据这个分析，m可能的选择就是, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 26. 但利用穷举法，将上面的可能的取值代入方程$3m+(m-1)k = 86$， 都不可能有正整数解k.
- 所以这样的树应该是不存在的。

解法2：

- 正则m元树，i个内点，mi+1个结点，树叶数mi+1-i=(m-1)i+1=84，(m-1)i=83，83是素数，故m-1=83或i=83，即m=84，i=1，高度为1，或者m=2，i=83，高度3的满二元树最多2^4-1=15个结点，故不存在。