Exercícios Lógica 2019/2020

Rúben Lucas

March 9, 2020

1. Sintaxe do Cálculo Proposicional

1.1. De entre as seguintes palavras sobre o alfabeto do Cálculo Proposicional, indique, justificando, aquelas que pertencem ao conjunto $\mathcal{F}^{CP}$

a) $(\neg(p_1 \vee p_2))$

$$\begin{aligned} p_1 &\in \mathcal{F}^{CP} \text{ por b)} \\ p_2 &\in \mathcal{F}^{CP} \text{ por b)} \\ (p_1 \vee p_2) &\in \mathcal{F}^{CP} \text{ por (1), (2) e d)} \\ (\neg(p1_{\vee}p_2)) &\in \mathcal{F}^{CP} \text{ por (3) e c)} \end{aligned}$$

b) $((p_0 \wedge \neg p_0) \to \bot)$

$$\begin{aligned} p_0 &\in \mathcal{F}^{CP} \text{ por b)} \\ \neg p_0 &\in \mathcal{F}^{CP} \text{ por c)} \\ p_0 \wedge \neg p_0 &\notin \mathcal{F}^{CP} \text{ porque } \neg p_0 \text{ devia estar entre ()} \end{aligned}$$

Como uma das subfórmulas não pertence a $\mathcal{F}^{CP}$ então $((p_0 \wedge \neg p_0) \to \bot) \notin \mathcal{F}^{CP}$

c) $((\neg p_5) \to (\neg p_6))$

$$\begin{aligned} p_5 &\in \mathcal{F}^{CP} \text{ por b)} \\ (\neg p_5) &\in \mathcal{F}^{CP} \text{ por (1) e c)} \\ p_6 &\in \mathcal{F}^{CP} \text{ por b)} \\ (\neg p_6) &\in \mathcal{F}^{CP} \text{ por (3) e c)} \\ ((\neg p_5) \to (\neg p_6)) &\in \mathcal{F}^{CP} \text{ por (2), (3) e d)} \end{aligned}$$

d) $(\bot)$

$$\begin{aligned} \bot &\in \mathcal{F}^{CP} \text{ por a)} \\ (\bot) &\notin \mathcal{F}^{CP} \text{ Não existe regra} \end{aligned}$$

e) $((p_3 \wedge p_1) \vee ($

$$(\notin \mathcal{F}^{CP} \text{ Não existe regra}$$

Como uma das subfórmulas não pertence a $\mathcal{F}^{CP}$ então $((p_3 \wedge p_1) \vee (\notin \mathcal{F}^{CP}$

f) $(((p_9 \to ((p_3 \lor (\neg p_8)) \land p_{12})) \leftrightarrow (\neg p_4)) \to (p_7 \lor \bot)))$

$$
\begin{aligned}
p_3 \in \mathcal{F}^{CP} &\quad \text{por b)}\\
p_4 \in \mathcal{F}^{CP} &\quad \text{por b)}\\
p_7 \in \mathcal{F}^{CP} &\quad \text{por b)}\\
p_8 \in \mathcal{F}^{CP} &\quad \text{por b)}\\
p_9 \in \mathcal{F}^{CP} &\quad \text{por b)}\\
p_1 2 \in \mathcal{F}^{CP} &\quad \text{por b)}\\
\bot \in \mathcal{F}^{CP} &\quad \text{por a)}\\
(\neg p_4) \in \mathcal{F}^{CP} &\quad \text{por c) e (2)}\\
(\neg p_8) \in \mathcal{F}^{CP} &\quad \text{por c) e (4)}\\
(p_3 \lor (\neg p_8)) \in \mathcal{F}^{CP} &\quad \text{por d), (8) e (9)}\\
((p_3 \lor (\neg p_8)) \land p_{12}) \in \mathcal{F}^{CP} &\quad \text{por d), (10) e (6)}\\
(((p_3 \lor (\neg p_8)) \land p_{12}) \leftrightarrow (\neg p_4)) \in \mathcal{F}^{CP} &\quad \text{por d), (11) e (7)}\\
(p_7 \lor \bot) \in \mathcal{F}^{CP} &\quad \text{por d), (7) e (3)}\\
((((p_3 \lor (\neg p_8)) \land p_{12}) \to (\neg p_4)) \to (p_7 \lor \bot)) \in \mathcal{F}^{CP} &\quad \text{por d), (11) e (7)}
\end{aligned}
$$

1.2. Para cada uma das seguintes fórmulas φ do Cálculo Proposicional:

a) Calcule $\varphi[p_2/p_0], \varphi[p_0 \land p_1/p_1]$ e $\varphi[p_{2016}/p_{2015}]$

i) $\varphi = p_{2015}$

$$
\begin{aligned}
p_{2015}[p_2/p_0] &= p_{2015}\\
p_{2015}[p_0 \land p_1/p_1] &= p_{2015}\\
p_{2015}[p_{2016}/p_{2015}] &= p_{2016}
\end{aligned}
$$

ii) $\varphi = \neg\bot \lor \bot$

$$
\begin{aligned}
\neg\bot \lor \bot[p_2/p_0] &= \neg\bot \lor \bot\\
\neg\bot \lor \bot[p_0 \land p_1/p_1] &= \neg\bot \lor \bot\\
\neg\bot \lor \bot[p_{2016}/p_{2015}] &= \neg\bot \lor \bot
\end{aligned}
$$

iii) $\varphi = p_0 \to (\neg p_0 \to \neg p_1)$

$$
\begin{aligned}
p_0 \to (\neg p_0 \to \neg p_1)[p_2/p_0] &= p_2 \to (\neg p_2 \to \neg p_1)\\
p_0 \to (\neg p_0 \to \neg p_1)[p_0 \land p_1/p_1] &= p_0 \to (\neg p_0 \to \neg(p_0 \land p_1))\\
p_0 \to (\neg p_0 \to \neg p_1)[p_{2016}/p_{2015}] &= p_0 \to (\neg p_0 \to \neg p_1)
\end{aligned}
$$

b) Indique o conjunto das suas subfórmulas

i) $\varphi = p_{2015}$

$$\{p_{2015}\}$$

ii) $\varphi = \neg\bot \lor \bot$

$$\{\bot\} \cup \{(\neg\bot)\} \cup \{((\neg\bot) \lor \bot)\}$$

iii) $\varphi = p_0 \to (\neg p_0 \to \neg p_1)$

$$\{p_0\} \cup \{(\neg p_0)\} \cup \{p_1\} \cup \{(\neg p_1)\} \cup \{((\neg p_0) \to (\neg p_1))\} \cup \{(p_0 \to ((\neg p_0) \to (\neg p_1)))$$

1.3. Defina por recursão estrutural as seguintes funções (na alínea c) $BIN = \wedge, \vee, \rightarrow, \Leftrightarrow$):

a) $p : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathbb{N}_0$ tal que $p(\varphi) =$ número de ocorrências de parêntesis em φ.

$$\begin{aligned}&p : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathbb{N}_0\\&p(p) = 0\\&p(\perp) = 0\\&p(\neg\varphi) = 1 + p(\varphi)\\&p(\varphi\Box\psi) = 1 + p(\varphi) + p(\psi)\end{aligned}$$

b) $v : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathbb{N}_0$ tal que $v(\varphi) =$ número de ocorrências de vars. proposicionais em φ.

$$\begin{aligned}&v : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathbb{N}_0\\&v(p) = 1\\&v(\perp) = 0\\&v(\neg\varphi) = v(\varphi)\\&v(\varphi\Box\psi) = v(\varphi) + v(\psi)\end{aligned}$$

c) $b : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathcal{P}(BIN)$ tal que $b(\varphi) = \{\Box \in BIN : \Box \text{ ocorre em } \varphi\}$.

$$\begin{aligned}&b : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathcal{P}(BIN)\\&??\end{aligned}$$

d) $\_[\perp/p_7] : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathcal{F}^{CP}$

$$\begin{aligned}&\_[\perp/p_7] : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathcal{F}^{CP}\\&p_n[\perp/p_7] = p_n, n \in \mathbb{N}_0\backslash\{7\}\\&p_7[\perp/p_7] = \perp\\&(\neg p_n)[\perp/p_7] = \neg(p_n[\perp/p_7])\\&(\varphi\Box\psi)[\perp/p_7] = \varphi[\perp/p_7]\Box\psi[\perp/p_7]\end{aligned}$$

1.4. Considere de novo as funções definidas no exercício anterior. Prove, por indução estrutural, que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$:

a) $v(\varphi) \geq \#var(\varphi)$

b) $p(\varphi) \geq \#b(\varphi)$

c) $v(\varphi) \geq v(\varphi[\perp/p_7])$

d) $b(\varphi) = b(\varphi[\perp/p_7])$

e) se $b(\varphi) \neq \emptyset$ então $p(\varphi) > 0$

f) se $p_7 \notin var(\varphi)$ então $\varphi[\perp/p_7] = \varphi$

1.5. Seja $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. O tamanho de φ , denotado por $|\varphi|$, define-se por recursão do seguinte modo:

i) $|p| = 1$, para cada variável proposicional p;

ii) $|\perp| = 1$

iii) $|\neg\varphi| = 1 + |\varphi|$

iv) $|\varphi\Box\psi| = 1 + |\varphi| + |\psi|$

a) Qual das fórmulas $\neg\neg\neg p_0$ ou $(p_1 \wedge p_2) \vee (p_3 \wedge p_4)$ tem maior tamanho?

$$
\begin{aligned}
&|\neg\neg\neg p_0| && \\
=&1 + |\neg\neg p_0| && \text{por iii)} \\
=&1 + 1 + |\neg p_0| && \text{por iii)} \\
=&1 + 1 + 1 + |p_0| && \text{por iii)} \\
=&1 + 1 + 1 + 1 && \text{por i)} \\
=&4 &&
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|(p_1 \wedge p_2) \vee (p_3 \wedge p_4)| && \text{something} \\
=&1 + |p_1 \wedge p_2| + |p_3 \wedge p_4| && \text{por iv) (x2)} \\
=&1 + 1 + |p_1| + |p_2| + 1|p_3| + |p_4| && \text{por iv) (x2)} \\
=&3 + 1 + 1 + 1 + 1 && \text{por i) (x2)} \\
=&7 &&
\end{aligned}
$$

Logo $(p_1 \wedge p_2) \vee (p_3 \wedge p_4)$ tem maior tamanho.

b) Dê exemplo de fórmulas de φ e ψ, com 3 subfórmulas, tais que $|\varphi| = 3$ e $|\psi| > 3$.

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \neg\neg p_0 \\
\psi &= ??
\end{aligned}
$$

c) Mostre que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $|\varphi| \geq \#subf(\varphi)$.

1.6. Seja $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. A complexidade lógica de φ, denotada por $cl(\varphi)$, define-se por recursão do seguinte modo:

2. Semântica do Cálculo Proposicional

3. Dedução Natural para o Cálculo Proposicional