Cadenas de Markov

Los procesos que evolucionan en el tiempo de una manera probabilística se llaman Procesos Estocásticos. Las cadenas de Markov son un ejemplo de estos procesos estocásticos. Estas cadenas tienen la propiedad particular de que las probabilidades que describen la forma en que el proceso evolucionará en el futuro depende solo del estado actual en que se encuentra el proceso, por lo cual son independientes de los eventos que ocurrierón en el pasado (Falta de Memoria).

La explicación de estas cadenas la desarrolló el Matemático de origen ruso Andréi Márkov en 1907. Así, a lo largo del siglo XX, se ha podido emplear dicha metodología en numerosos casos prácticos de la vida cotidiana, tales como en los campos de la morosidad, el estudio de las conductas de consumidores, la demanda estacional de mano de obra, entre otros.

Procesos Estocásticos

Se definen como una colección indexada de variables aleatorias $\{X_t\}$, donde el índice t toma valores de un conjunto T dado. Con frecuencia T se considera el conjunto de enteros no negativos mientras que X_t representa una características de interés cuantificable en el tiempo t. Por ejemplo, X_t puede representar los niveles de inventario al final de la semana t.

Un proceso estocástico tiene la siguiente estructura: La condición actual del sistema puede estar en una de $M+1$ categorías mutuamente excluyentes llamadas Estados. Por conveniencia en la notación, estos estados se etiquetan $0, 1, 2, 3, \ldots, M$. La variable aleatoria X_t representa el estado del sistema en el tiempo t, de manera que sus únicos valores posibles son $0, 1, \ldots, M$. El sistema se observa en puntos del tiempo dados, etiquetados $t = 0, 1, 2, \ldots$ De esta forma, los procesos estocásticos $\{X_t\} = \{X_0, X_1, X_2, \ldots\}$ proporcionan una representación matemática de la forma en que evoluciona la condición del sistema físico a través del tiempo.

Este tipo de procesos se conocen como procesos estocásticos de tiempo discreto con espacio de estado finito.

Tenemos que los procesos estocásticos se dividen en estados discretos o continuos, según la naturaleza del fenómeno observado.

A su vez, el tiempo puede ser también Discreto si el fenómeno se presenta en momentos de tiempo determinados, o Continuo si el fenómeno puede suceder en cualquier momento.

Tipos de Cadenas de Markov

1 - Cadenas irreducibles

Se dice que una cadena es Irreducible si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:

- Desde cualquier estado se puede acceder a cualquier otro
- Todos los se comunican entre si.
- El único conjunto cerrado es el total

2 - Cadenas Recurrentes Positivas.

Se dice que una cadena de Markov es Recurrente Positiva si todos los estados son recurrentes positivos

3 - Cadenas Regulares

Se dice que una cadena de Markov es Regular si existe alguna potencia positiva de la matriz de transición cuyas entradas sean todas estrictamente mayores que cero

4- Cadenas absorbentes

Una cadena de Markov con espacio de estados finito se dice absorvente si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- La cadena tiene al menos un estado absorvente
- De cualquier estado no absorbente se accede a algún estado absorbente.

5 - Cadenas de Markov a tiempo continuo.

Si se consideran las variables aleatorias X_t con t que varia en un intervalo continuo del conjunto $\mathbb{R}$ de números reales, tendremos una cadena en tiempo continuo.

Aplicaciónes de Cadenas de Markov

- Meteorología

  Tiempo atmosférico de una región a través de distintos días, es posible asumir que el estado actual solo depende del último estado y no de toda la historia en sí, como los modelos de recurrencia de las lluvias.

- Modelos epidemiológicos

  Se puede modelar el desarrollo de una epidemia.

- Internet

  El pagerank de una página web (Google), donde la posición que tendrá una página en el buscador se determinara por su peso en la distribución estacionaria de la cadena

- Juegos de azar.

  Son muchos los juegos de azar que se pueden modelar como el de la "Ruina del jugador".

- Economía y Finanzas

  Tales como "Bolsa de Valores", "Volatilidad de los precios", "Deudores morosos", etc.

- Genética

Se emplean en teoría de genética de poblaciones como en la construcción del modelo de difusión de "Motō Kimura".

- Música

Diversos algoritmos de composición musical

- Operaciones

Se emplean en inventarios, mantenimiento y flujo de proceso

- Simulación

Problemas de simulación como por ejemplo "Teoría de colas".

Antonio De Abreu
CI-7048814