



高等院校力学学习辅导丛书

Exercise Series in Mechanics for Higher Education

力学小问题及全国大学生 力学竞赛试题

高云峰 蒋持平
Gao Yunfeng Jiang Chiping

编

吴鹤华 殷金生
Wu Hahua Yin Jinsheng



清华大学出版社



Springer

本书是从《力学与实践》“小问题”栏目300多个小问题精选汇集而成的，内容包括：理论力学部分（120题，分为静力学、运动学、动力学、趣味力学问题等4章）；材料力学部分（60题，分为拉压及扭转、弯曲、能量法、超静定、其他等5章）；全国大学生力学竞赛试题（1988年第一届、1992年第二届、1996年第三届、2000年第四届）。可作为理工科院校大学生的参考书，也可以作为准备报考硕士研究生的参考资料，还可作为理论力学、材料力学或工程力学教师的教学参考书。

本书主要特色

- 内容广泛，形式多样，融新颖、灵活、趣味于一体。
- 由各高校有丰富教学经验的教师出题，了解学生易于犯什么样的错误，因此问题更具针对性，解答更具指导性。
- 题型多样化，既有通常的习题、证明题、概念题等，也有生活中的实际问题，还有讨论题、设计题、找错题等，并有利用计算机求解的问题。
- 有助于学生培养兴趣、开阔视野、提高处理问题的能力。
- 汇集了全国大学生力学竞赛的试题和答案（共四届）。

作者简介

高云峰 清华大学工程力学系副教授，现任中国力学学会一般力学专业委员会委员，中国自动化学会空间及运动体控制专业委员会委员，中国空间学会空间机械专业委员会委员，并任《力学与实践》编委，负责《小问题》专栏。主讲课程有“工程力学”、“航天器动力学”、“高等动力学”等。合作编著《理论力学》、《理论力学辅导与习题集》、《现代运动生物力学进展》、《生物力学测量方法》。曾负责第四届全国周培源大学生力学竞赛理论力学试题的出题，多次担任中央电视台1频道《奇思妙想》和10频道《异想天开》栏目嘉宾并提供题目。曾获军队科技进步一等奖。研究领域为航天器轨道动力学、多刚体动力学、运动生物力学等。

蒋持平 北京航空航天大学飞行器设计与应用力学系教授，博士生导师，固体力学研究所副所长。现任《力学与实践》副主编、教育部第四届课程指导小组成员、北京力学学会理事。从事力学教学与科研工作。曾主持第四届全国周培源大学生力学竞赛。研究领域为复合材料力学、断裂与损伤力学、力学在工程中的应用等。在国内外核心期刊发表论文80余篇，大量由SCI、EI收录。获国家级教学成果二等奖、北京市教学成果一等奖、国家教委科技进步二等奖各一项。

ISBN 7-302-06993-X



9 787302 069935 >

定价：19.00元



高等院校力学学习辅导丛书

Exercise Series in Mechanics for Higher Education

力学小问题及全国大学生 力学竞赛试题

高云峰 蒋持平

Gao Yunfeng Jiang Chiping

吴鹤华 殷金生

Wu Hehua Yin Jinsheng

编



清华大学出版社
北京



Springer

内 容 简 介

本书是从《力学与实践》“小问题”栏目 300 多个小问题中精选汇集而成的,内容包括:理论力学部分(120 题,分为静力学、运动学、动力学、趣味力学问题等 4 章);材料力学部分(60 题,分为拉压及扭转、弯曲、能量法、超静定、其他等 5 章);全国大学生力学竞赛试题(1988 年第一届、1992 年第二届、1996 年第三届、2000 年第四届)。

这些问题与解答是由近百位编者在二十多年间(1980—2002)陆续编出的,他们绝大部分是各高校有丰富教学经验的教师,了解学生易于犯什么样的错误,因此提出的问题和解答都很有指导性,并且内容广泛,形式多样,融新颖、灵活、趣味于一体。书中除了有通常的习题、证明题、概念题外,还有理论联系实际的问题、解答不惟一的讨论题、设计题,此外还有少量利用计算机求解的问题等。

由于以上特点,经常有一些高校的同学向“小问题”栏目的编委索要有关资料,所以现在把《力学与实践》中的“小问题”精选汇集出版,并增加了历届全国周培源大学生力学竞赛的试题和答案,相信会使更多的读者受益。

本书可作为理工科院校大学生的参考书,也可作为硕士研究生应考者的参考资料,还可作为理论力学、材料力学或工程力学教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

力学小问题及全国大学生力学竞赛试题/高云峰等编. —北京:清华大学出版社,2003
(高等院校力学学习辅导丛书)
ISBN 7-302-06993-X

I. 力… II. 高… III. 力学—高等学校—教学参考资料 IV. O3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 070825 号

出 版 者:清华大学出版社

<http://www.tup.com.cn>

社 总 机:010-62770175

地 址:北京清华大学学研大厦

邮 编:100084

客户服务:010-62776969

组稿编辑:陈朝晖

文稿编辑:杨 倩

印 刷 者:北京国马印刷厂

装 订 者:北京密云京文制本装订厂

发 行 者:新华书店总店北京发行所

开 本:175×245 印张:15 字数:272 千字

版 次:2003 年 11 月第 1 版 2003 年 11 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 7-302-06993-X/O · 315

印 数:1~6000

定 价:19.00 元

目 录

第 1 篇 理论力学部分	1
第 1 章 静力学部分	2
第 2 章 运动学部分	29
第 3 章 动力学部分	62
第 4 章 趣味力学问题	103
第 2 篇 材料力学部分	127
第 5 章 拉压及扭转	128
第 6 章 弯曲	147
第 7 章 能量法	167
第 8 章 超静定	179
第 9 章 其他	191
第 3 篇 全国大学生力学竞赛试题及答案	199
1988 年第一届全国青年力学竞赛理论力学试题	200
第一届全国青年力学竞赛理论力学试题答案	203
1992 年第二届全国青年力学竞赛理论力学试题	205
第二届全国青年力学竞赛理论力学试题答案	208
1996 年第三届全国周培源大学生力学竞赛理论力学试题	209
第三届全国周培源大学生力学竞赛理论力学试题答案	213
2000 年第四届全国周培源大学生力学竞赛理论力学试题	214
第四届全国周培源大学生力学竞赛理论力学试题答案	217
1988 年第一届全国青年力学竞赛材料力学试题	219

第一届全国青年力学竞赛材料力学试题答案	222
1992 年第二届全国青年力学竞赛材料力学试题	223
第二届全国青年力学竞赛材料力学试题答案	226
1996 年第三届全国周培源大学生力学竞赛材料力学试题	227
第三届全国周培源大学生力学竞赛材料力学试题答案	230
2000 年第四届全国周培源大学生力学竞赛材料力学试题	231
第四届全国周培源大学生力学竞赛材料力学试题答案	233

第 1 篇

理论力学部分

第 1 章

静力学部分

1. 曲杆 DCE 中的 CD 、 CE 是相互垂直的两段均质杆, 每段长为 $2l$, 重量均为 P 。将此曲杆搁在宽度为 a 的光滑平台上(图 1a), 求平衡时的 φ 角。(姜锐, 浙江大学力学系。引自 1991 年浙江大学硕士研究生入学考试试题。原第 250 题, 1994, No. 2。)

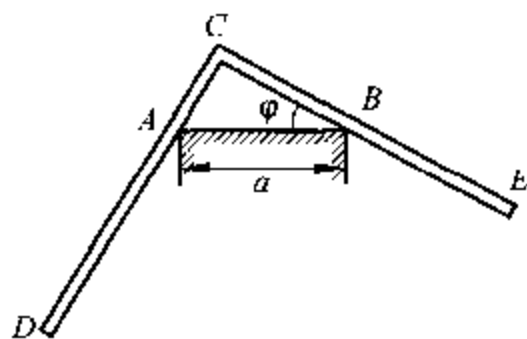


图 1a

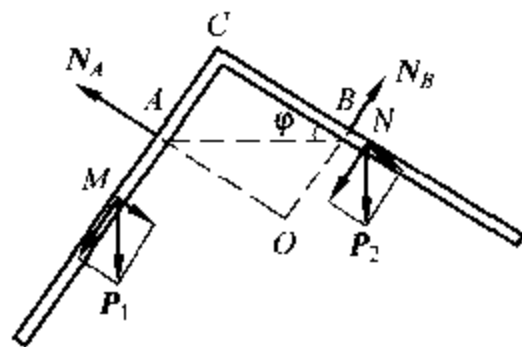


图 1b

解: 以曲杆为研究对象(图 1b), 设 M 为 CD 段的中点, N 为 CE 段的中点。由 $\sum m_O(F) = 0$, 得

$$P_1 \cos \varphi \cdot \overline{OA} + P_1 \sin \varphi \cdot \overline{AM} - P_2 \cos \varphi \cdot \overline{BN} - P_2 \sin \varphi \cdot \overline{OB} = 0 \quad (1)$$

其中 $P_1 = P_2 = P$, $\overline{OA} = a \cos \varphi$, $\overline{AM} = l - a \sin \varphi$, $\overline{BN} = l - a \cos \varphi$, 故有

$$a \cos^2 \varphi + \sin \varphi (l - a \sin \varphi) - \cos \varphi (l - a \cos \varphi) - a \sin^2 \varphi = 0$$

化简后得

$$(\cos \varphi - \sin \varphi) \left(\cos \varphi + \sin \varphi - \frac{l}{2a} \right) = 0 \quad (2)$$

由

$$\cos\varphi - \sin\varphi = 0$$

得到

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

由

$$\cos\varphi + \sin\varphi - \frac{l}{2a} = 0$$

解得

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{2}a}\right) \quad (4)$$

式(4)存在的条件为

$$\frac{l}{2\sqrt{2}a} \leq 1 \quad \text{且} \quad \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{2}a}\right) \leq \frac{\pi}{4}$$

即

$$2a \leq l \leq 2\sqrt{2}a$$

因此,当 $l < 2a$, 或 $l > 2\sqrt{2}a$ 时,曲杆只有一个平衡位置: $\varphi = \frac{\pi}{4}$; 当 $2a \leq l \leq 2\sqrt{2}a$ 时,

曲杆有三个平衡位置: $\varphi_1 = \frac{\pi}{4} - \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{2}a}\right)$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_3 = \frac{\pi}{4} + \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{2}a}\right)$ 。

2. 最佳场址选择问题。设 A、B、C 三个村子里的学生人数分别为 n_1, n_2, n_3 , 在选择校址时,为了使全体学生所走的路程之和最少,可用如下的力学实验测定:根据各村的位置,按比例在光滑平板上开三个小孔。取三个重物 P_1, P_2, P_3 ,使它们的重量之比满足 $P_1 : P_2 : P_3 = n_1 : n_2 : n_3$ 。将三个重物分别用细线系住,依次穿过三个小孔,并在 E 点相联结(见图 2)。设三个小孔是光滑的,则当三物平衡时, E 点的位置即为所求的校址。试证明为什么可以这样做?(梁法库,黑龙江克山师专物理系。原第 169 题,1989, No. 5。)

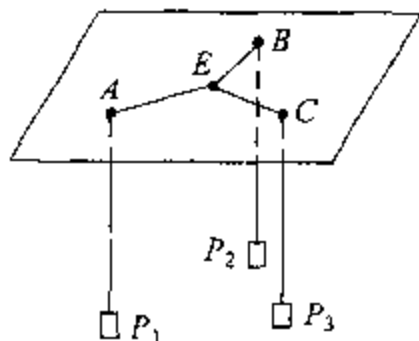


图 2

解: 设每个重物的挂线长度均为 a , $\overline{EA} = l_1$, $\overline{EB} = l_2$, $\overline{EC} = l_3$, 平衡时系统的势能应取极小值, 即

$$V = - \sum_{i=1}^3 P_i (a - l_i) = -a \sum_{i=1}^3 P_i + \sum_{i=1}^3 P_i l_i \quad (1)$$

其中

$$V_1 = \sum_{i=1}^3 P_i l_i \quad (2)$$

应取极小值。设 S 为全体学生所走的总路程, 则有

$$S = \sum_{i=1}^3 n_i l_i \quad (3)$$

利用

$$P_1 : P_2 : P_3 = n_1 : n_2 : n_3 \quad (4)$$

则式(2)取极小值时, 式(3)也取极小值。即: 物体平衡时的位置等价于在该位置建校全体学生所走的总路程最短。此问题及处理方法可推广至 N 个村的情形。

3. 罗培伐秤由两杠杆和两秤盘铰接而成, 如图3所示。求平衡时 P 和 Q 的比值以及支座 A 、 B 处的反力。(朱照宣, 北京大学力学系。原第69题, 1984, No. 3。)

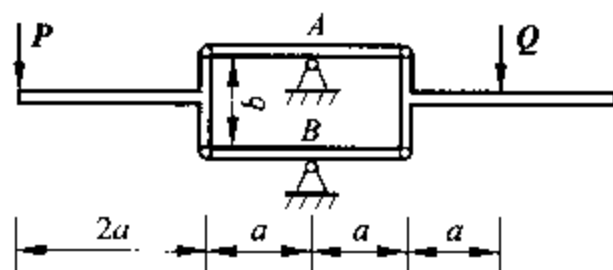


图 3

解: 利用虚位移原理, 当两杠杆有虚位移时, 两秤盘保持水平。则容易证明平衡时有

$$P = Q$$

然后, 利用受力图(不再用虚位移原理), 分别对 A 点、 B 点取矩, 可以求出 A 、 B 处反力的水平分量为

$$\frac{Pa}{b}$$

其中 A 处反力方向向右, B 处反力方向向左。竖直分量不定, 如不计秤的自重, 两者合计为 $2P$ (向上)。

罗培伐(G. P. Roberval, 1602—1675, 法国数学家)。这个问题见 1636 年默森(M. Mersenne, 1588—1648)的《普遍和谐》一书。1803 年潘索(L. Poinsot, 1777—1859, 静力学奠基人之一)在其《静力学原理》中才给出正确解释。

4. 图4a所示结构中, 不计各处摩擦, 滑块 B 可沿 OC 杆滑动, 滑块 E 可在水平方向运动。已知在 AB 杆上作用一水平力 Q , $OD = DB = l$, $ED \perp DC$, 求该机构平衡时作用于滑块 E 上的力 P 大小。(徐德才, 江西农业大学农业工程系。原第209题, 1991, No. 5。)

解: 系统各点的虚位移(图4b)之间有如下关系:

$$\begin{aligned} \delta r_A &= \delta r_B, & \delta r_{B_e} &= \delta r_B \sin \varphi \\ \delta r_{B_e} &= 2\delta r_D, & \delta r_D &= \delta r_E \sin \varphi \end{aligned}$$

由虚位移原理, 有

$$Q\delta r_A - P\delta r_E = 0$$

所以

$$Q\delta r_B = \frac{P\delta r_D}{\sin \varphi} = \frac{P\delta r_{B_e}}{2\sin \varphi} = \frac{1}{2}P\delta r_B$$

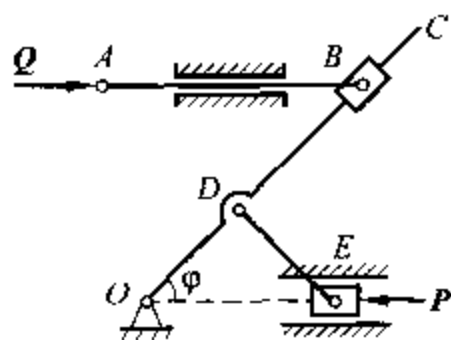


图 4a

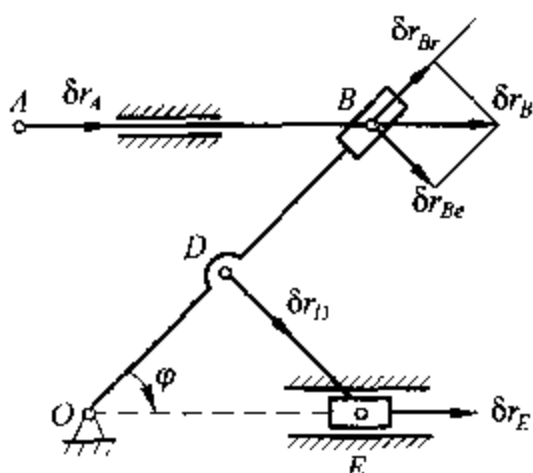


图 4b

因此有

$$P=2Q$$

5. 不计组合梁(图 5a)的自重, 已知 $P=1\text{kN}$, $M=0.6\text{kN}\cdot\text{m}$, $l_1=2\text{m}$, $l_2=3\text{m}$, H 、 B 、 G 、 D 、 E 为铰链, 试用虚位移原理求固定端 A 处的反力偶。(林敬圣, 浙江农业大学工程技术学院。原第 257 题, 1994, No. 4。)

解: 解除 A 处固定端约束而以铰链约束代替, 补充一个约束反力偶 M_A , 组合梁变成一个自由度系统。选 φ 为广义坐标, 其虚位移关系如图 5b 所示。类似于速度投影定理, 各点的虚位移有如下关系:

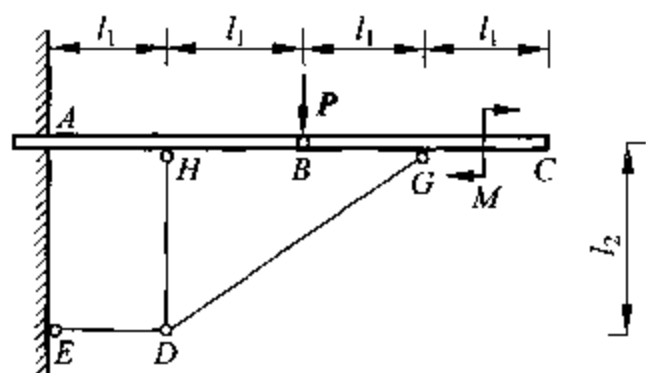


图 5a

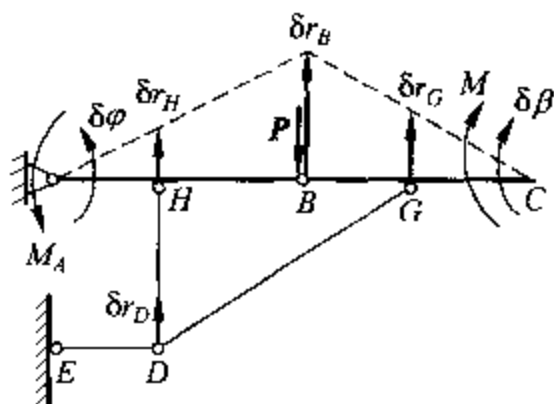


图 5b

$$\delta r_B = 2l_1 \delta \varphi, \quad \delta r_H = \delta r_D = \delta r_G = l_1 \delta \varphi$$

从而 BC 梁的虚转角为

$$\delta \beta = \frac{\delta r_B - \delta r_G}{l_1} = \delta \varphi$$

应用虚位移原理, 有

$$M_A \delta \varphi - P \delta r_B + M \delta \beta = 0$$

代入 δr_B 、 $\delta \beta$, 解得

$$M_A = 2Pl_1 - M = 3.4\text{kN}\cdot\text{m}$$

6. 钳形工具的尺寸如图 6a 所示, $\angle AOB = 120^\circ$, $\angle OAC = \angle OBC = 90^\circ$ 。不计其自重, 靠 D 和 E 处的摩擦力将重物提起。问 D 、 E 处的摩擦系数至少应为多少时才能将重物提起? (史希陶, 山东工业大学理论力学教研室。原第 97 题, 1985, No. 4。)

解: 以 BCD 为研究对象, 由对称性, C 点的作用力为水平方向。由三力平衡条件, 三力汇交于 O_1 点。设 H 为 DE 的中点(图 6b), 所以有

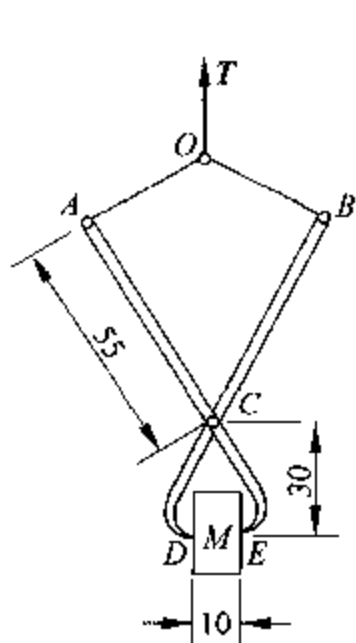


图 6a

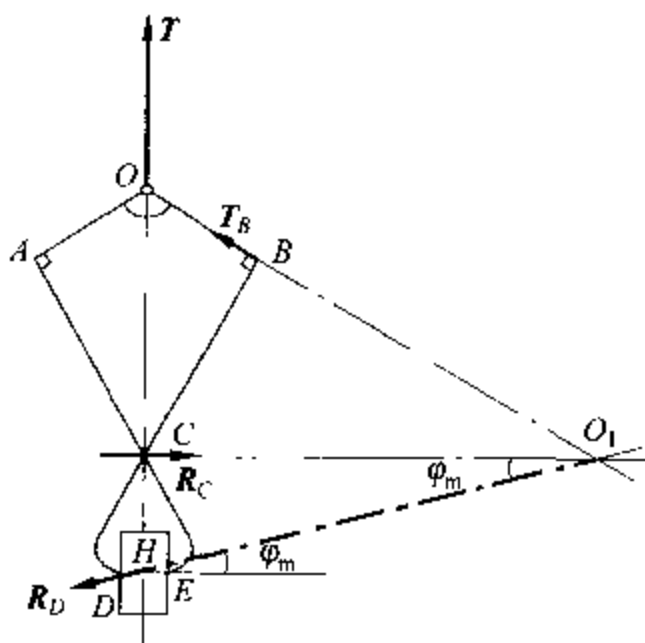


图 6b

$$\mu = \tan \varphi_m = \frac{HC}{O_1C + HD} = \frac{30}{110 + 5} \approx 0.26$$

7. 机构如图 7 所示。杆 AF 和 BD 在 C 处用铰链联接, $\overline{AF} = \overline{BD} = 30\text{cm}$, $\overline{AC} = \overline{BC} = 10\text{cm}$, A 处为一套筒, D 、 F 在同一水平面上, B 处作用一铅垂力 P 。当 $\theta = 0$ 时, 弹簧无变形, 其弹性系数 $k = 18\text{N/cm}$, 不计自重和各处摩擦, 求 P 值在什么范围内, $\theta = 0$ 为系统的稳定平衡位置? (叶柏年, 太原工业大学理论力学教研室。原第 88 题, 1985, No. 1。)

解: 以 $\theta = 0$ 时为系统的零势能位置, 则系统的势能为

$$V = -30P(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}k(20\sin\theta)^2$$

代入 k 值, 得

$$V = -30P(1 - \cos\theta) + 3600\sin^2\theta$$

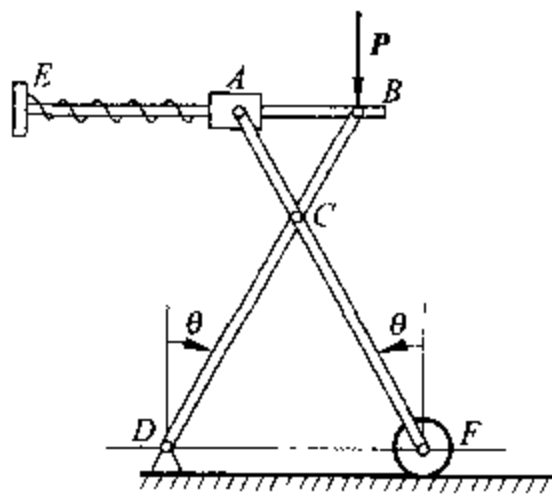


图 7

$$\frac{dV}{d\theta} = -30P\sin\theta + 7200\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -30P\cos\theta + 7200(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

当 $\theta=0$ 时, $\frac{dV}{d\theta}=0$, 因此 $\theta=0$ 是系统的平衡位置。若系统要保持稳定, 将 $\theta=0$ 代入二阶导数中, 应使

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -30P + 7200 > 0$$

从而求出

$$P < 240\text{N}$$

即 $P < 240\text{N}$ 时, $\theta=0$ 是系统的稳定平衡位置。

8. 质量为 M 的尖劈放在倾角为 30° 的斜面上(图 8a), 已知所有接触处的摩擦系数均为 $\mu = \tan\varphi$, 为使质量为 m 的重物匀速上升, 求必须对尖劈施加多大的水平力 P ? (张伟东, 石家庄市拖拉机厂教育中心。引自上海力学学会智力竞赛题。原第 101 题, 1985, No. 5。)

解: 取坐标系如图 8b, 分别对尖劈和重物进行受力分析, 可得如下方程组

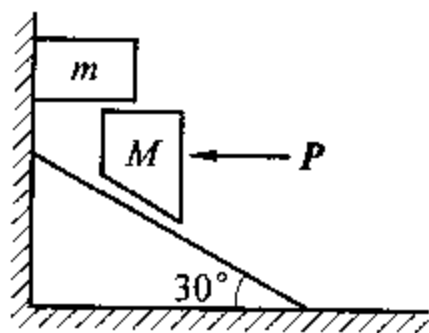


图 8a

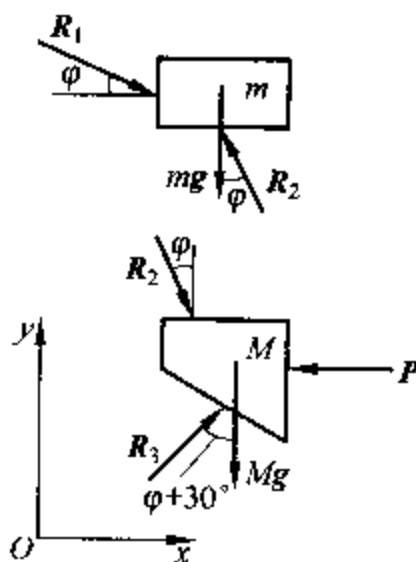


图 8b

$$R_1 \cos\varphi - R_2 \sin\varphi = 0$$

$$-R_1 \sin\varphi + R_2 \cos\varphi - mg = 0$$

$$R_2 \sin\varphi + R_3 \sin(\varphi + 30^\circ) - P = 0$$

$$-R_2 \cos\varphi + R_3 \cos(\varphi + 30^\circ) - Mg = 0$$

由此可解得

$$P = mg \left[\sin\varphi + \cos\varphi \tan(\varphi + 30^\circ) \right] \frac{\cos\varphi}{\cos 2\varphi} + Mg \tan(\varphi + 30^\circ)$$

9. 抛物线形状的铁丝(图 9a), 其方程为 $cz = x^2$, z 为铅垂轴。小环 A 串在铁丝

上,它们之间的摩擦系数为 μ 。求平衡时小环离 x 轴的最大距离。(徐蕾,务川汞矿教育心理组。原第 109 题,1986, No. 1。)

解: 设小环重量为 G , 小环处于临界状态时, 铁丝与小环接触处的斜率为

$$\tan\theta = \frac{dz}{dx} = \frac{2x}{c}$$

法向力为 N , 摩擦力为 $F = \mu N$, 如图 9b 所示, 由力三角形立即可得

$$F = \mu N = N \tan\theta = N \frac{2x}{c}$$

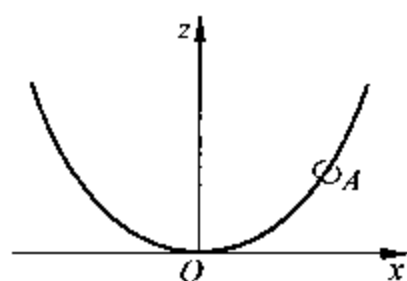


图 9a

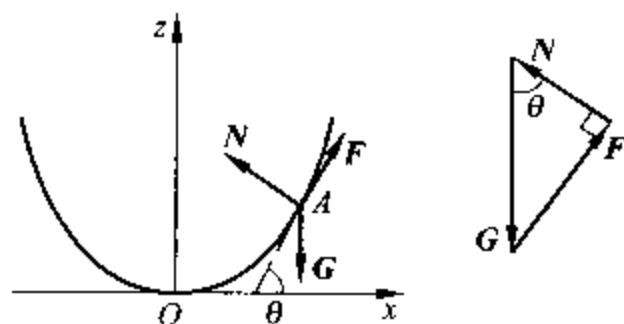


图 9b

所以

$$x = \frac{c}{2} \mu$$

即平衡时小环离 x 轴的最大距离为

$$z_{\max} = \frac{\mu^2 c}{4}$$

10. 均质矩形物体 $ABCD$ 重为 P , 置于斜面上, 与跨过滑轮的细绳相连, 细绳另一端与重为 W 的物体相连。设物体 $ABCD$ 的宽 $\overline{AB} = a$, 高 $\overline{BC} = 4a$, 与斜面间的摩擦系数为 $\mu = 0.4$, 斜面斜率为 $3/4$, 细绳的 AE 段保持水平(见图 10a)。不计滑轮摩擦, 求使物体 $ABCD$ 保持平衡的 W 的取值范围。(梁艳春, 吉林大学数学系力学教研组。原第 125 题, 1986, No. 5。)

解: 物体 $ABCD$ 的受力如图 10b 所示, 对其建立平衡方程

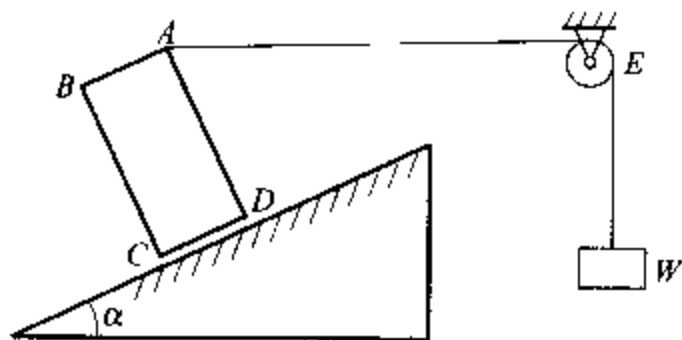


图 10a

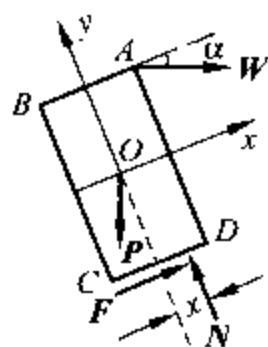


图 10b

$$\left. \begin{aligned} F + W \cos \alpha - P \sin \alpha &= 0 \\ N - W \sin \alpha - P \cos \alpha &= 0 \\ 2aF - 2aW \cos \alpha - 0.5aW \sin \alpha + Nx &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

摩擦力满足的条件为

$$|F| \leq \mu N \quad (2)$$

根据方程(1)和式(2),得

$$\frac{3-4\mu}{4+3\mu}P \leq W \leq \frac{3+4\mu}{4-3\mu}P$$

即

$$0.27P \leq W \leq 1.64P$$

为保证物体不翻倒,必须满足

$$-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \quad (3)$$

根据方程(1)和式(3),得

$$0.21P \leq W \leq 0.5P$$

综上,故 W 的取值范围是

$$0.27P \leq W \leq 0.5P$$

11. 如图 11a 所示,一均质长方体放在水平面上,接触面间摩擦系数为 μ ,长方体重量为 G 。试证明:(1)长方体顶部加一水平力 P ,长方体高和宽比值最小为 $\frac{1}{2\mu}$ 时,长方体才有可能翻倒。(2)若长方体高和宽比值小于 $\frac{1}{2\mu}$ 时,如果想翻动长方体,作用于长方体顶部的推力与水平夹角至少为 $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{\mu} - \frac{2h}{b}\right)$,并且此力大小至少应等于 $\frac{Gb}{2(bsin\alpha + hcos\alpha)}$ 。(杨贺田,地矿部张家口技工学校力学教研室。原 314 题,1998, No. 3。)

解:(1) 首先研究在长方体顶部作用水平力 P 且刚好翻动的情况,如图 11b 所示。图中 R 为长方体所受的最大全反力。根据三力平衡汇交原理,设三力交于 O 点。因此,具有最小高宽比的长方体顶部必定过 O 点。由几何关系,有

$$\frac{b/2}{h} = \tan \varphi = \mu$$

即

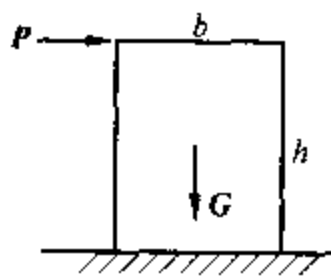


图 11a

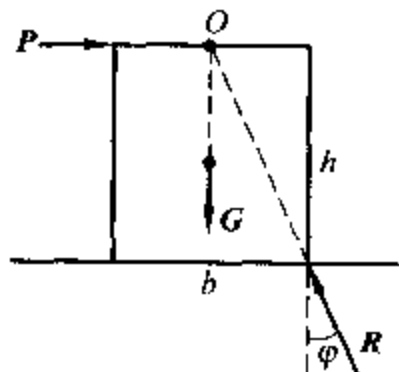


图 11b

$$\frac{b}{h} = 2\mu \quad \text{或} \quad \frac{h}{b} = \frac{1}{2\mu}$$

由此可见,当均质长方体高和宽比值小于 $\frac{1}{2\mu}$ 时,不管作用于长方体顶部的水平力和长方体重量有多大,都不可能将长方体翻动,此时长方体只有滑动可能。

(2) 再研究长方体高和宽比值小于 $\frac{1}{2\mu}$ 时,在临界平衡情况下,由三力平衡汇交原理,三力交点 O 一定在长方体顶部的上方(见图11c)。由几何关系,有

$$\tan\alpha = \frac{x}{b/2} = \frac{2x}{b} \quad (1)$$

因为 $\tan\varphi = \frac{b/2}{x+h} = \mu$, 即 $x = \frac{b}{2\mu} - h$, 将其代入式(1), 则有

$$\tan\alpha = \frac{2\left(\frac{b}{2\mu} - h\right)}{b} = \frac{1}{\mu} - \frac{2h}{b}$$

即

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{\mu} - \frac{2h}{b}\right)$$

至于所求力 P 的大小, 则可由以下平衡方程求得

$$\begin{aligned} \sum m_A(F) &= 0 \\ -G \cdot \frac{b}{2} + P \cos\alpha \cdot h + P \sin\alpha \cdot b &= 0 \end{aligned}$$

因此

$$P = \frac{Gb}{2(b \sin\alpha + h \cos\alpha)}$$

12. 跳板 AB 长为 l , 不计其重量, 水平置于直角槽内(图12a)。 A 、 B 两端的摩擦角均为 φ 。试求重量为 P 的人站在跳板上且保持平衡的范围。(任贵斌, 辽河油田职工大学力学教研室, 选自中央电大《理论力学教学参考》。原第137题, 1987, No. 2。)

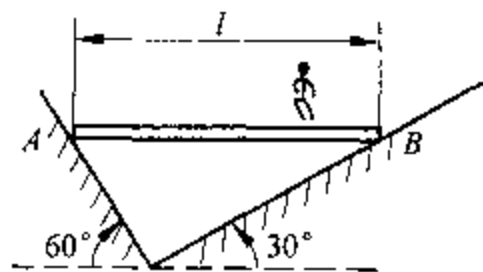


图 12a

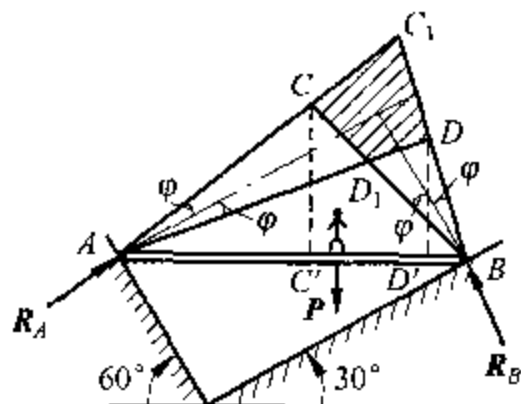


图 12b

解：分别作 A、B 两点处的摩擦角如图 12b 所示，可得区域 CC_1DD_1 （图中阴影部分）。设过 C、D 两点的铅垂线与 AB 的交点为 C' 、 D' 。板 AB 受到 R_A 、 R_B 和 P 三力作用而平衡，其作用线必交于一点，且交点在区域 CC_1DD_1 内。因此，人安全活动的范围在 $C'D'$ 内（否则力作用线不可能汇交于一点）。通过几何关系，可以计算出 AC' 和 AD' 的长度：

$$\overline{AC'} = \frac{l(\sqrt{3} - \tan\varphi)^2}{4(1 + \tan^2\varphi)}$$

$$\overline{AD'} = \frac{l(\sqrt{3} + \tan\varphi)^2}{4(1 + \tan^2\varphi)}$$

13. 如图 13a 所示，长为 L 的梯子 AB，B 端放在与水平面成 α 角的支撑面上，A 端靠在竖直的支撑面上，梯子与竖直方向的夹角为 θ ，梯子两端与支撑面间的摩擦系数均为 μ ，梯子重为 Q 。有一重量为 W 的人，从下往上爬梯。试求出保持梯子不滑动时，此人可沿梯子上爬的最高位置。（杨贺田，地矿部张家口技工学校力学教研组。原第 281 题，1996，No. 1。）

解：设 M 点为所求人爬梯的最高位置，分别作 A、B 点的摩擦角 φ_A 和 φ_B ，有

$$\varphi_A - \varphi_B = \arctan\mu$$

设两摩擦角的交点为 O，AF 为墙面过 A 点的法线；作 OF 垂直于 AF；作 AC 垂直于 BO；作两重力 W 、 Q 的延长线与 AF 交于点 D、E。几何关系如图 13b 所示，且有

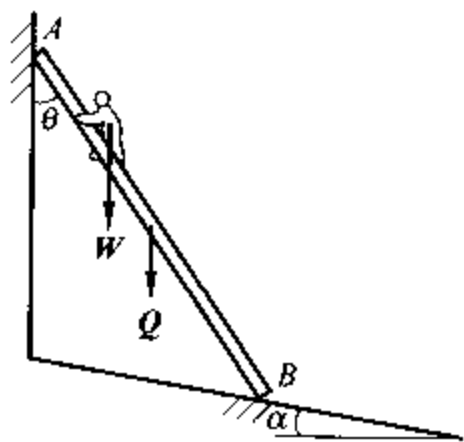


图 13a

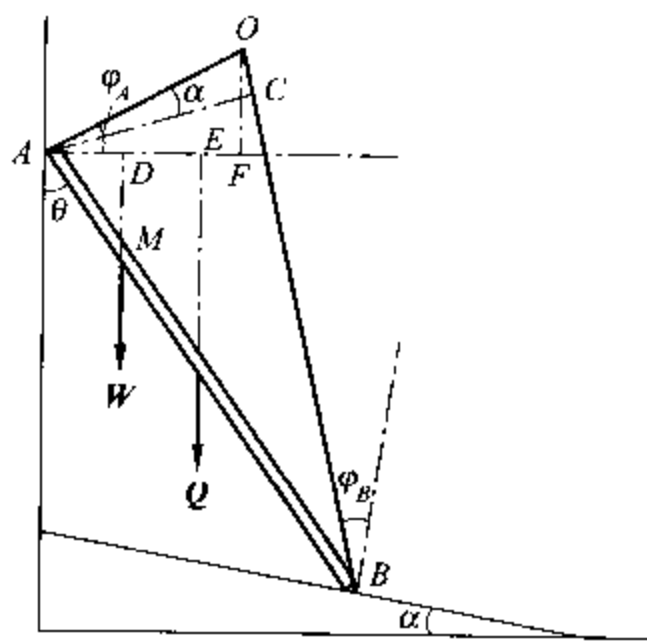


图 13b

$$\overline{AF} = \overline{AO} \cos\varphi_A = \overline{AC} \frac{1}{\cos\alpha} \cos\varphi_A = L \sin(\theta - \varphi_B + \alpha) \frac{\cos\varphi_A}{\cos\alpha} \quad (1)$$

$$\overline{EF} = \overline{AF} - \overline{AE} = \overline{AF} - \frac{L}{2} \sin\theta = L \sin(\theta - \varphi_B + \alpha) \frac{\cos\varphi_A}{\cos\alpha} - \frac{L}{2} \sin\theta \quad (2)$$

$$\overline{DF} = \overline{AF} - \overline{AD} = L \sin(\theta - \varphi_B + \alpha) \frac{\cos\varphi_A}{\cos\alpha} - \overline{AM} \sin\theta \quad (3)$$

将梯子所受各力分别对 O 求力矩, 即

$$Q \cdot \overline{EF} + W \cdot \overline{DF} = 0$$

将(1)、(2)、(3)式代入上式, 有

$$Q \left[L \sin(\theta - \varphi_B + \alpha) \frac{\cos \varphi_A}{\cos \alpha} - \frac{L}{2} \sin \theta \right] + W \left[L \sin(\theta - \varphi_B + \alpha) \frac{\cos \varphi_A}{\cos \alpha} - \overline{AM} \sin \theta \right] = 0$$

故可得出

$$\overline{AM} = \frac{1}{W \sin \theta} \left\{ WL \sin(\theta - \varphi_B + \alpha) \frac{\cos \varphi_A}{\cos \alpha} + Q \left[L \sin(\theta - \varphi_B + \alpha) \frac{\cos \varphi_A}{\cos \alpha} - \frac{L}{2} \sin \theta \right] \right\}$$

编者注: 原题解答中缺图。

14. 两等长的均质梯, 用光滑铰链 C 连接, 两梯之间夹角为 2α , 每个梯子的长度均为 l , 重量均为 Q (图 14a), 梯子与地面的静摩擦系数为 μ 。有重量为 P 的人 M 沿梯子缓慢地向上爬, $\overline{MB} = a$ 。问 α 角在什么范围内, 梯子能保持静止? (祝一鸣, 无锡职业大学机械专业。原第 53 题, 1983, No. 5。)

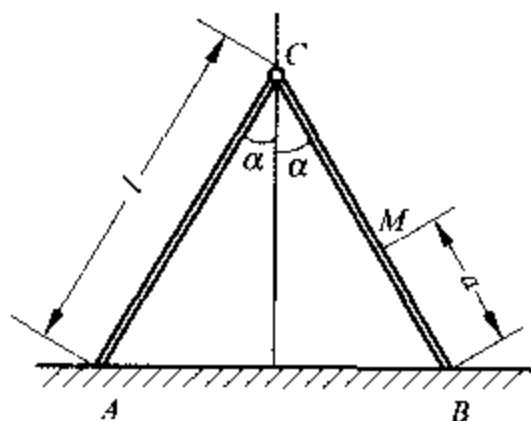


图 14a

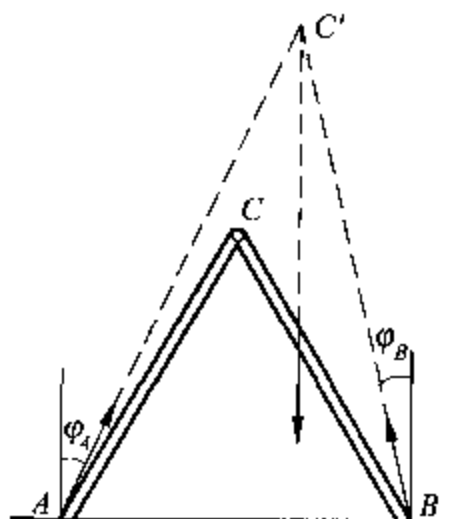


图 14b

解: 以整体为研究对象, 梯子与人的合力(三个平行力)应在 C 点的右边。系统平衡时, 支点 A 、 B 的反力与这个合力汇交于 C' 点(图 14b)。显然有 $\varphi_A > \varphi_B$, 故 A 点首先达到滑动临界状态。系统对 B 点的力矩平衡方程为

$$2Ql \sin \alpha + P a \sin \alpha - N_A \cdot 2l \sin \alpha = 0$$

得

$$N_A = Q + \frac{a}{2l} P$$

再以 AC 杆为研究对象(图 14c), 对 C 点取矩得

$$F_A l \cos \alpha + Q \cdot \frac{l}{2} \sin \alpha - N_A l \sin \alpha = 0$$

即

$$F_A = \left(N_A - \frac{1}{2} Q \right) \tan \alpha$$

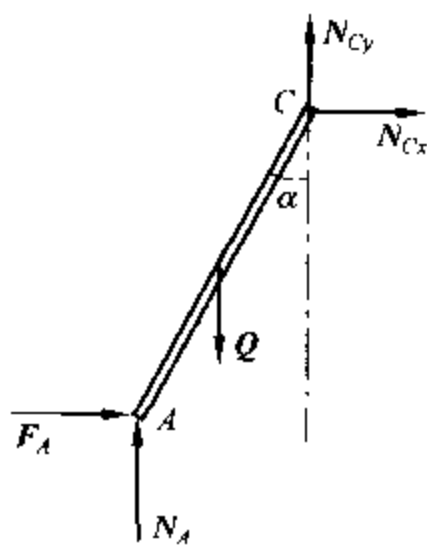


图 14c

所以

$$\tan \varphi_A = \frac{F_A}{N_A} = \left(\frac{2N_A - Q}{2N_A} \right) \tan \alpha = \left(\frac{Pa + Ql}{Pa + 2Ql} \right) \tan \alpha \leq \mu$$

即

$$\tan \alpha \leq \left(1 + \frac{Ql}{Pa + Ql} \right) \mu$$

当 $a=l$ 时, 右端达到最小值, 所以, 当

$$\alpha \leq \arctan \left(\frac{P+2Q}{P+Q} \mu \right)$$

时, 在人爬梯子的过程中, 梯子可以一直保持平衡。

15. 如图 15a 所示为碰头式门锁机构, 依靠滑块 A 的出入可开门和锁门。已知滑块 A 与各接触面的摩擦系数为 μ , 求滑块 A 不自锁的条件。(杨贺田, 张家口市地矿部张家口技工学校力学教研组。原第 142 题, 1987, No. 3。)

解: 以滑块 A 为研究对象, 滑块的斜面上受力为 R_1 , 底面上受力为 R_2 (见图 15b), 当滑块自锁时, 有

$$R_1 = R_2$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \alpha$$

$$\min(\varphi_1, \varphi_2) < \arctan \mu$$

只有当

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \arctan \mu$$

且满足

$$\varphi_1 + \varphi_2 < \alpha$$

即 R_1 和 R_2 不在同一直线上时, 滑块才能滑动。所以不自锁的条件为

$$2\arctan \mu < \alpha$$

在实际中, 当碰门而滑块不滑动时 (滑块处于自锁状态), 只要在斜面和底面上加一滴油, 即减小 $\arctan \mu$ 的值, 自锁便能解除。

16. 如图 16 所示, 一圆轮半径为 R , 重量为 P , 在其铅垂直径的上端 B 点处作用水平力 Q , 轮与水平面间的滚动摩擦系数为 δ 。问水平力 Q 使轮子只滚动而不滑动时, 轮与水平面间的滑动摩擦系数 μ 需要满足什么条件? (李强兴, 武汉测绘科技大学工程力学组。原第 133 题, 1987, No. 1。)

解: 轮子滚动的条件为

$$Q \cdot 2R > M_{\max} = \delta P$$

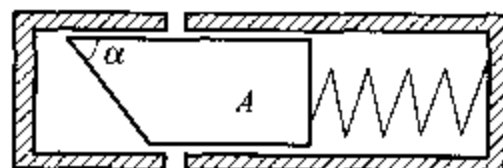


图 15a

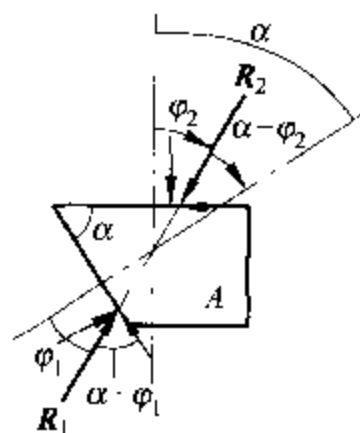


图 15b

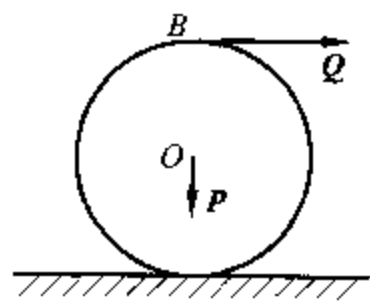


图 16

轮子不滑动的条件为

$$Q \leq F_{\max} = \mu P$$

所以轮子只滚不滑的条件为

$$\mu P \geq Q > \frac{\delta}{2R} P$$

注: 本题若只写 $\mu \geq \frac{\delta}{2R}$ 是不完善的, 因为当 $Q > \mu P$ 时, 轮子将又滚又滑。

17. 半径为 r 的圆柱体重 W , 置于倾角为 α 的两粗糙斜面上(图 17a), 圆柱与两斜面间的摩擦系数均为 $\mu = \tan \varphi_m$ 。在圆柱体上作用一力矩 M , 求使圆柱转动的最小力矩 M_{\min} 。又当 μ 一定时, 讨论 M_{\min} 随 α 的变化规律; 当 α 一定时, 讨论 M_{\min} 随 μ (或 φ_m) 的变化规律; 当 μ 加大时, M_{\min} 是否一定变大。(贾书惠, 清华大学工程力学系。原第 277 题, 1995, No. 6。)

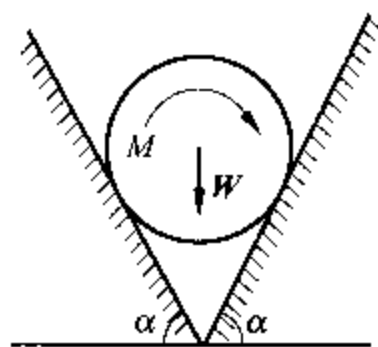


图 17a

解: 考虑圆柱平衡的临界状态(图 17b), 列写平衡方程及补充方程

$$F_A \cos \alpha + F_B \cos \alpha - N_A \sin \alpha + N_B \sin \alpha = 0$$

$$F_A \sin \alpha - F_B \sin \alpha + N_A \cos \alpha + N_B \cos \alpha = W$$

$$(F_A + F_B)r - M = 0$$

$$F_A = \mu N_A, F_B = \mu N_B$$

解之得

$$N_A = \frac{\sin(\alpha + \varphi_m) \cos \varphi_m}{\sin 2\alpha} W$$

$$N_B = \frac{\sin(\alpha - \varphi_m) \cos \varphi_m}{\sin 2\alpha} W$$

$$M = \frac{1}{2} \frac{\sin 2\varphi_m}{\cos \alpha} W r$$

注意上式只在 $\varphi_m < \alpha$ 时才正确 ($N_B > 0$)。当 $\varphi_m > \alpha$ 时, B 点脱离接触, 圆柱只与 A 点接触; 平衡时 A 点全反力 R_A 应落在摩擦锥以内(图 17c), 且有

$$M = W r \sin \alpha$$

当 $M > W r \sin \alpha$ 时, 圆柱将绕 A 点向上滚动。

总结以上知, 使圆柱转动的最小力矩为

$$M_{\min} = \begin{cases} W r \sin \alpha & \text{当 } \alpha \leq \varphi_m \text{ (单面接触)} \\ \frac{1}{2} \frac{\sin 2\varphi_m}{\cos \alpha} W r & \text{当 } \alpha > \varphi_m \text{ (双面接触)} \end{cases} \quad (1)$$

(2)

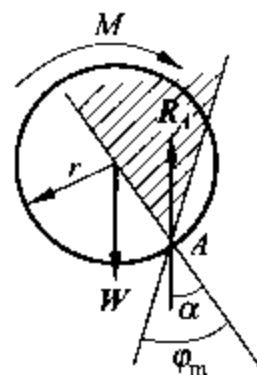


图 17c

讨论: 首先应注意到一般情况下有 $\mu < 1$ 或 $\varphi_m < \frac{\pi}{4}$ 。当摩擦

系数 μ (或 φ_m) 一定时, $M_{\min}/(Wr)$ 随 α 的变化规律如图 17d 所示, 其中曲线 (1)、(2) 分别与前面所得结果 (1)、(2) 相对应。可以证明, 两曲线一定相交或相切。根据两者的适用范围知 $M_{\min}/(Wr)$ 沿实线变化。同理, 当 α 一定时, $M_{\min}/(Wr)$ 随 μ (或 φ_m) 沿图 17e 中的实线变化。实际工程中, 摩擦系数大于 1 也有可能 (参见《力学与实践》1993 年第 5 期的文章“滑动摩擦系数能大于 1 吗?”), 这时 $M_{\min}/(Wr)$ 随 α 或 φ_m 的变化规律, 如图 17f 及图 17g 中的实线所示。可见, 在 α 一定的情况下, M_{\min} 并不是随着 μ 的增大而单调增大, 在某一范围内, 它会保持常值, 甚至减小。

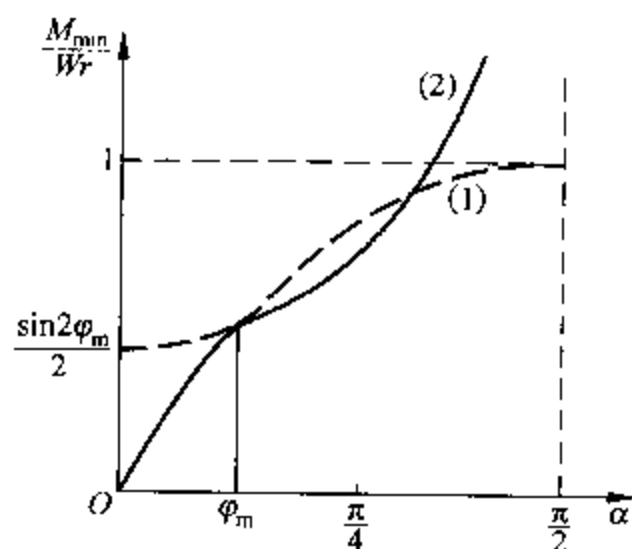


图 17d

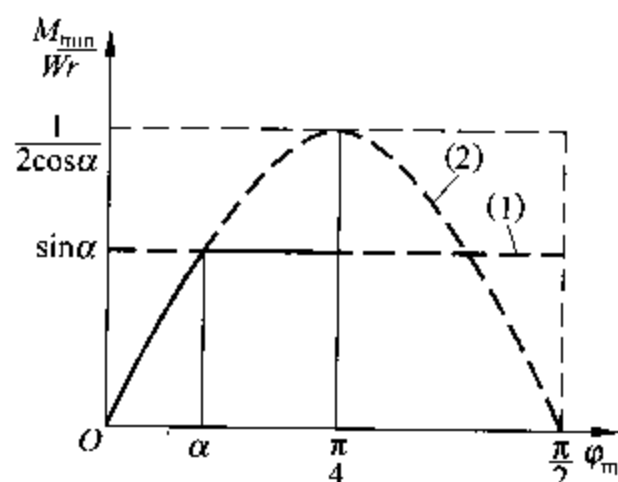


图 17e

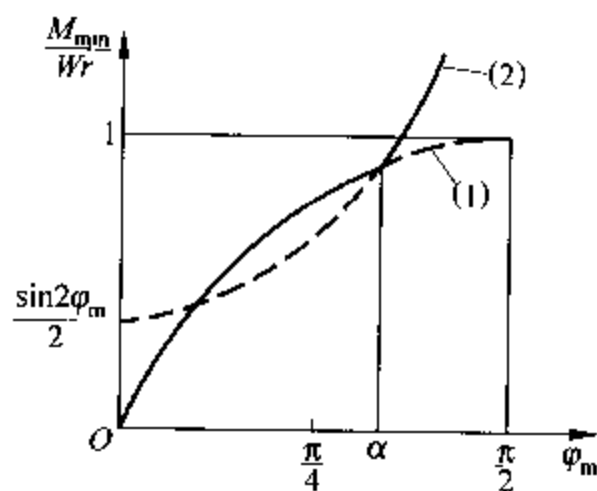


图 17f

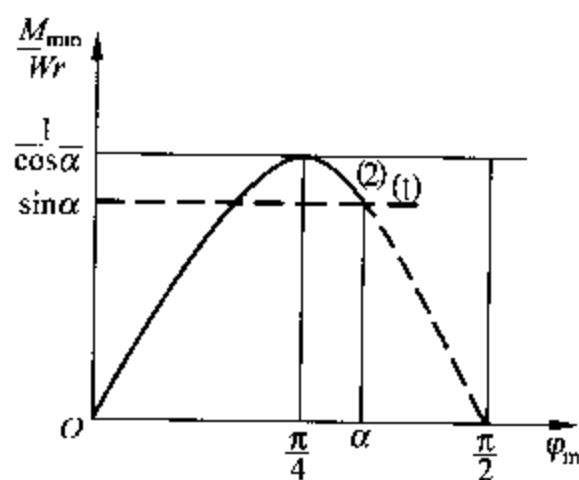


图 17g

18. 长为 l , 重为 G 的直杆 AB 铅直地立在地面上; 直杆的 A 端用绳子 AC 连结在地面上, AB 与 AC 的夹角为 θ ; 又杆端 B 与地面的摩擦系数为 μ 。现在直杆上某点 D 处施加水平力 P (如图 18a 所示)。问要使杆 AB 平衡, 力 P 的大小和高度 h 应满足什么条件? (卢其宜, 江西省机械工业学校, 选自西北工业大学《理论力学》(上册)。原第 161 题, 1988, No. 3。)

解: 以杆 AB 为研究对象, 根据图 18b 可列出平衡方程

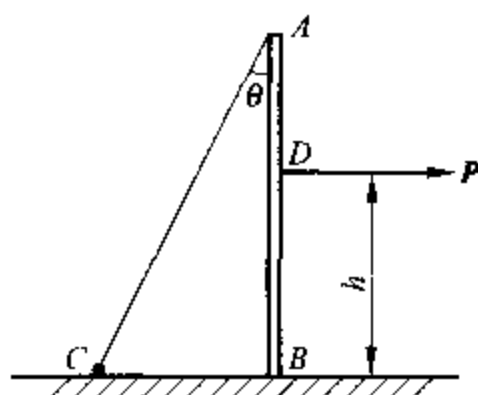


图 18a

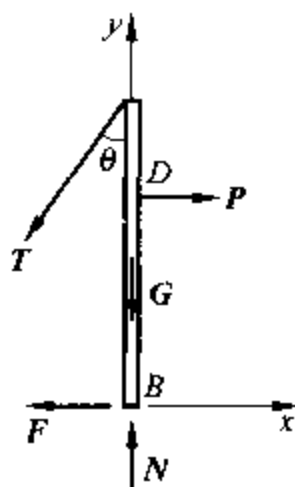


图 18b

$$\sum F_x = 0: P - F - T \sin \theta = 0$$

$$\sum F_y = 0: N - G - T \cos \theta = 0$$

$$\sum m_B(F) = 0: T \sin \theta \cdot l - Ph = 0$$

解得

$$T = \frac{Ph}{l \sin \theta}, \quad F = P - \frac{Ph}{l}, \quad N = G + \frac{Ph}{l \cdot \tan \theta}$$

B 点不滑动的条件是 $F \leq \mu N$, 由上面的结果得

$$P \left[1 - \frac{h}{l} \left(1 + \frac{\mu}{\tan \theta} \right) \right] \leq \mu G$$

当 $h < \frac{l}{1 + \mu / \tan \theta}$ 时,

$$P \leq \frac{\mu Gl}{l - h(1 + \mu / \tan \theta)}$$

当 $h \geq \frac{l}{1 + \mu / \tan \theta}$ 时, P 为任意值 ($P > 0$)。

19. 长为 l 的均质细直杆, 一端放在水平地面上, 同时斜搁在半径为 r 的均质圆柱上(图 19a)。三个接触处的摩擦系数均为 μ 。证明: (1) 如果 $r < l\mu < \frac{1 + \mu^2}{1 - \mu^2} r$, 则平衡时杆与地面的最大倾角 $\alpha = 2 \arctan \mu$ 。

(2) 如果 $l\mu > \frac{1 + \mu^2}{1 - \mu^2} r$, 则当平衡时最大倾角 α

由下列方程确定: $l \cos \alpha \left(1 + \frac{1}{\mu} \tan \frac{\alpha}{2} \right) \tan \frac{\alpha}{2} = 2r$ 。

(殷金生, 北京大学力学系。原第 21 题, 1982, No. 1。)

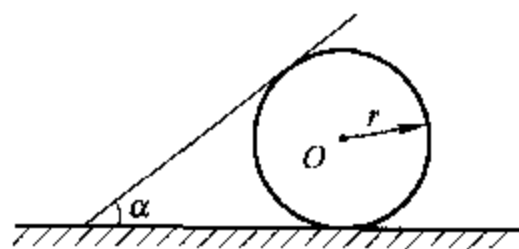


图 19a

证明:以圆柱为研究对象,它受三个力作用,三力平衡汇交于 D 点(图 19b)。显然 $\gamma < \beta \leq \theta$, 其中 θ 是摩擦角, $\theta = \arctan \mu$ 。故接触点 B 处总是比点 D 处先达到临界状态。

以杆为研究对象,当接触点 A 、 B 处同时达到临界状态时(图 19c),作用在杆上的三力汇交于点 E ,由图 19c 中直角三角形 ABO (图中 AO 线未画出)不难看出 $\alpha = 2\theta$ 。此时杆长为

$$l_0 = 2 \overline{AD} = \frac{\overline{AD}}{\cos \alpha} = \frac{r}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos \alpha} = \frac{r(1+\mu^2)}{\mu(1-\mu^2)}$$

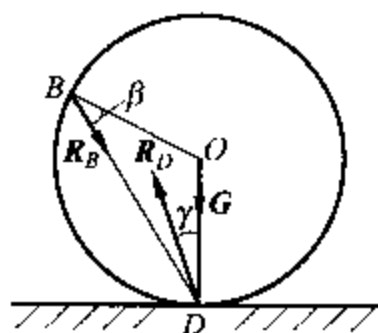


图 19b

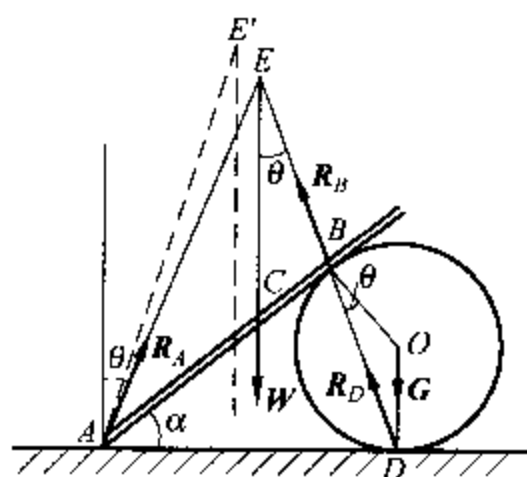


图 19c

当杆长 $l < l_0$ 时,图中杆的重心 C 将下降,三力汇交于 E' 。此时 B 点处将比 A 点处先滑动,杆的最大倾角 $\alpha = 2\theta$ 。又因为 $\overline{AB} = r / \tan \theta \leq l$,所以当

$$r < l\mu < \frac{1+\mu^2}{1-\mu^2} r$$

时,最大倾角 $\alpha = 2\arctan \mu$ 。

当杆长 $l > l_0$ 时,图 19c 中杆的重心 C 将上移,可能的临界平衡状态只能如图 19d 所示。此时 A 点处将滑动而 B 点不滑动,有 $\alpha = 2\varphi < 2\theta$ 。不难由几何关系 $\overline{AD} = \overline{AF} + \overline{FD}$ 得出最大倾角 α 所满足的方程

$$l \cos \alpha \left(1 + \frac{1}{\mu} \tan \frac{\alpha}{2} \right) \tan \frac{\alpha}{2} = 2r$$

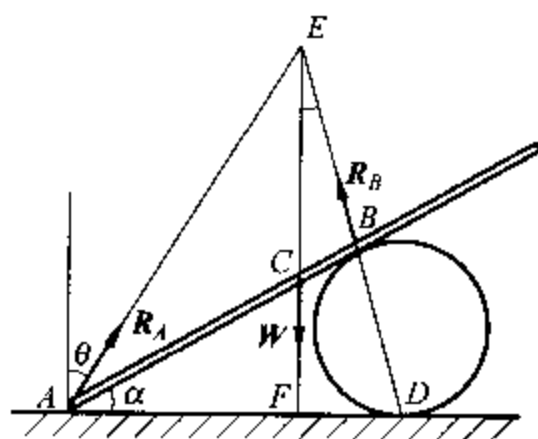


图 19d

20. 均质细杆 AB , 重为 P , 均质圆柱 O , 半径为 R , 重为 $W = 0.5P$ 。两者在 A 点铰接(见图 20a), 放在粗糙的水平面上, 已知 OA 水平, 且 $\overline{OA} = 0.5R$, 杆、圆柱与水平面之间的摩擦系数均为 μ 。求 μ 至少为多少时系统可以平衡。(彭常户, 陕西工学院力学教研室, 选自 1984 年浙江大学研究生试题。原第 157 题, 1988, No. 2。)

解: 取整个系统为对象, 整体受力图如图 20b 所示, 易求得

$$N_B = \frac{4P}{7}, \quad N_C = \frac{13P}{14}$$

设 B 处摩擦力先达到临界状态, 以 AB 杆为研究对象, 因 AB 杆平衡, 对 A 点取矩, 有

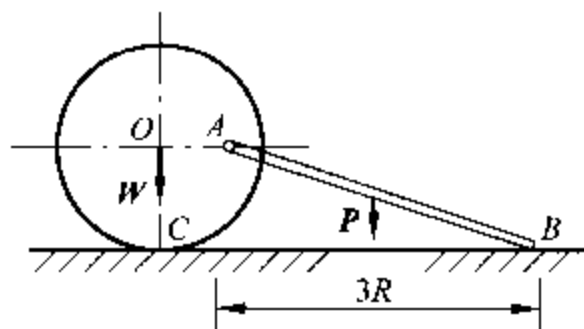


图 20a

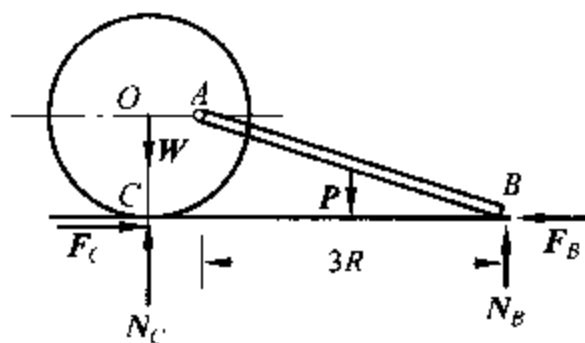


图 20b

$$N_B \cdot 3R - F_B \cdot R - P \cdot \frac{3R}{2} = 0$$

可得

$$F_B = 3N_B - \frac{3P}{2} \leq \mu N_B$$

所以

$$\mu \geq \frac{3}{8}$$

设 C 处摩擦力先达到临界值, 以圆柱为对象, 对 A 点取矩, 有

$$(W - N_C) \frac{R}{2} + F_C R = 0$$

可得

$$F_C = \frac{3}{14}P \leq \mu N_C$$

所以

$$\mu \geq \frac{3}{13}$$

综上, 摩擦系数 μ 至少大于等于 $\frac{3}{8}$ 时, 系统才能保持平衡状态。

21. 三个大小相同, 重量相等的均质圆柱体如图 21a 放置, 问各接触处的最小摩擦系数为多少时, 可以维持其平衡? (史希陶, 山东大学理论力学教研室。原第 93 题, 1985, No. 3。)

解: 设系统处于临界平衡状态(各接触处的摩擦力均

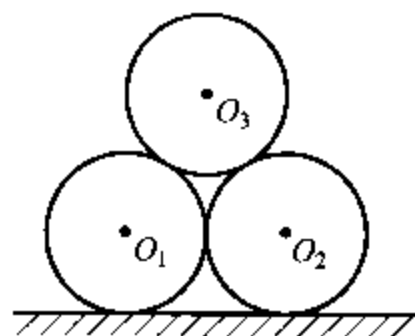


图 21a

达到最大值),如图 21b 所示。柱体 O_2 所受的力有:重力、柱体 O_3 对它的作用力和地面反力,由三力平衡可知,这三个力应汇交于 B 点。故 D 处(同理 C 处)的摩擦角 φ_{1m} 由几何关系为

$$\varphi_{1m} = \frac{1}{2}(180^\circ - 150^\circ) = 15^\circ$$

即圆柱与圆柱之间的最小摩擦系数为

$$\mu_{\min} = \tan \varphi_{1m} \approx 0.27$$

再取圆柱 O_1 和 O_3 一起作为研究对象(图 21c),两圆柱重力的合力应通过 C 点,此合力与柱 O_2 对它的作用力 R_D 交于 H 点。由系统平衡知, A 处地面反力 R_A 必沿 A 、 H 两点的连线(三力汇交),故 A 处(同理 B 处)的摩擦角 φ_{2m} 如图 21c 所示,由几何关系可得圆柱与地面之间的最小摩擦系数为

$$\mu_{2\min} = \tan \varphi_{2m} = \frac{\frac{1}{2}R}{\frac{3}{2}R \tan 75^\circ} = \frac{1}{3} \tan 15^\circ \approx 0.09$$

22. 如图 22a 所示,3 个相同的均质圆柱,重量为 Q ,半径 $r=10\text{cm}$,搁置在水平倾角均为 α 的对称夹板 OA 、 OB 上, $\alpha=60^\circ$,且 $OA=OB=100\text{cm}$,各接触处的摩擦系数均为 $\mu=\sqrt{3}/3$,圆心 O_1 、 O_2 连线水平。若不计夹板自重,试求维持系统平衡时,作用在板端水平力 P 的大小。(刘又文,湖南大学力学系。原第 313 题,1998, No. 3。)

解:由对称性,圆柱 O_1 、 O_2 之间的摩擦力为零,圆柱 O_1 受力如图 22b 所示,由 $\sum m_{O_1}=0$,有 $F_1=F_3$,又由 $\sum m_K=0$,易知 $N_3 < N_1$,故临界平衡时,接触处 E 先滑动。

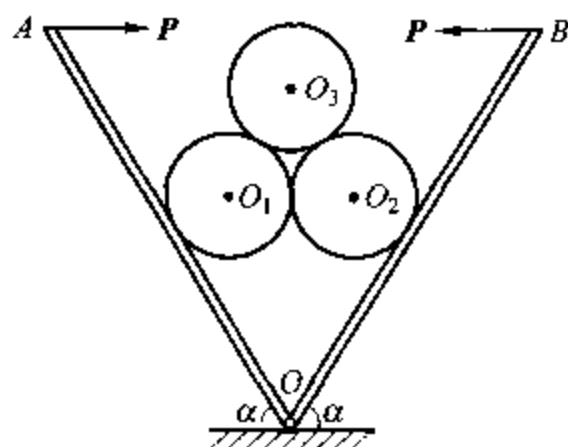


图 22a

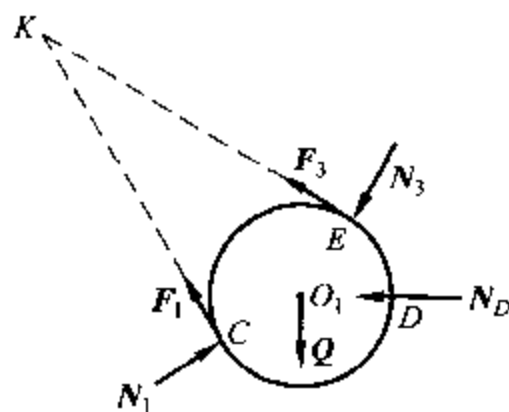


图 22b

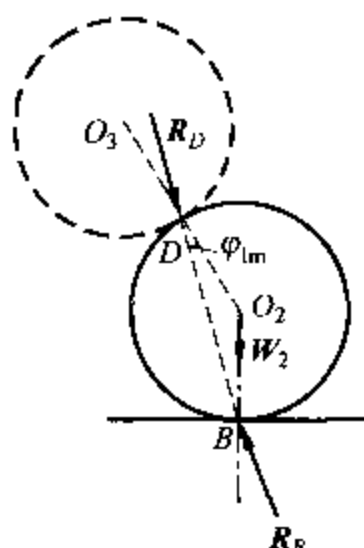


图 21b

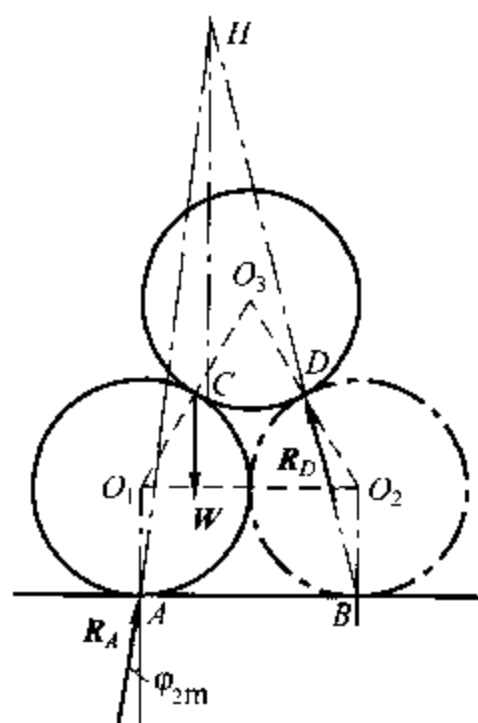


图 21c

(1) 先设圆柱 O_1 处于下滚的临界状态, 有

$$F_3 = \mu N_3 \quad (1)$$

研究圆柱 O_3 , 由对称性, 其受力如图 22c 所示, 由 $\sum F_y = 0$

$$2N_3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = Q + 2F_3 \cdot \frac{1}{2} = Q + F_3 = Q + \frac{\sqrt{3}}{3}N_3$$

故

$$N_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}Q, \quad F_3 = \frac{1}{2}Q \quad (2)$$

研究圆柱 O_1 , 由 $\sum m_D = 0$, 有

$$N_1 \cdot \frac{1}{2}r + F_1 r \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = Qr + F_3 \cdot \frac{1}{2}r + N_3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}r$$

注意到 $F_1 = F_3$ 及式(2), 得

$$N_1 = \frac{6 - \sqrt{3}}{2}Q \quad (3)$$

再研究板 OA , 由 $\sum m_O = 0$, 有

$$P_1 \cdot 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = N_1 \cdot 10 \cdot \tan 75^\circ$$

将式(3)代入, 得

$$P_1 = \frac{3\sqrt{3} + 4}{10}Q$$

(2) 再设圆柱 O_1 处于上滚的临界状态, 此时图 22b、22c 中各处的摩擦力改变方向, 按与上述类似的步骤, 可求得

$$N_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}Q, \quad F_3 = \frac{1}{4}Q, \quad N_1 = \frac{12 + \sqrt{3}}{4}Q, \quad P_2 = \frac{14 + 9\sqrt{3}}{20}Q$$

综上, 故 $P_1 \leq P \leq P_2$ 为所求。

23. 如图 23a 所示, 质量均为 m 的 $n(n > 3)$ 个均质圆柱体依次搁置在倾角为 30° 的斜面上, 并用铅垂设置的铰支板挡住。若已知圆柱半径为 R , 板长为 l , 各圆柱与斜面和挡板之间的摩擦系数 $\mu = \frac{1}{3}$, 且不计各圆柱之间的摩擦, 试求维持系统平衡时的最大水平力 P 。(刘又文, 中南工业大学建工系。原第 280 题, 1996, No. 1.)

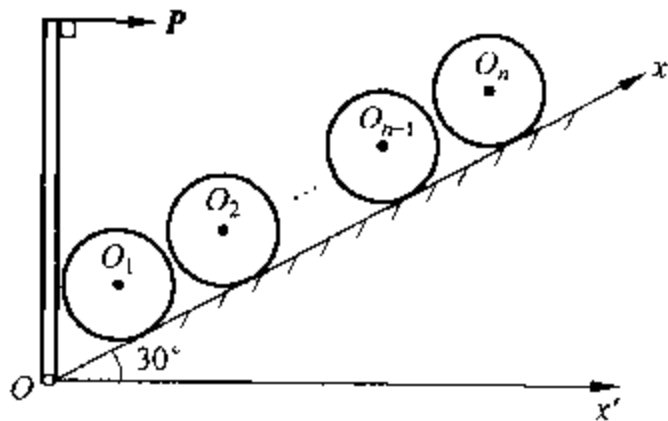


图 23a

解：先研究圆柱 O_n ，由三力平衡汇交定理知其斜面间摩擦力为零，依次判断，直到圆柱 O_2 与斜面间摩擦力均为零。再研究圆柱 O_2, O_3, \dots, O_n 共 $n-1$ 个柱体的整体平衡，由

$$\sum F_x = 0$$

有

$$N_2 = \frac{n-1}{2}mg$$

N_2 为圆柱 O_1 与 O_2 间的作用力。

再研究 O_1 圆柱，受力如图 23b，由

$$\sum m_{O_1} = 0$$

有

$$F_1 = F'_1$$

设 $\overline{AO} = \overline{BO} = a$ ，由

$$\sum m_O = 0$$

$$N_1 a + mgR = N'_1 a + N_2 R$$

当 $n > 3$ 时， $N'_1 < N_1$ ，可知 A 处先滑动，且 $F'_1 = \mu N'_1$ 。

由

$$\sum m_B = 0$$

$$N'_1 R \cos 30^\circ = F'_1 R (1 + \sin 30^\circ) + mgR + N_2 R \sin 30^\circ$$

将 N_2 代入，得

$$N'_1 = \frac{(n+3)(\sqrt{3}+1)}{4}mg$$

所以

$$F'_1 = \mu N'_1 = \frac{(n+3)(\sqrt{3}+1)}{12}mg$$

由 $\sum F_x = 0$

$$N_1 = N_2 \cos 30^\circ + F'_1 \cos 30^\circ + N'_1 \sin 30^\circ = \frac{(5\sqrt{3}+3)n + 3\sqrt{3} + 9}{12}mg$$

最后研究铰支板的平衡，由

$$\sum m_O = 0$$

$$Pl = N_1 \sqrt{3}R$$

所以

$$P_{\max} = \frac{R}{4l} [(5+\sqrt{3})n + 3(1+\sqrt{3})]mg$$

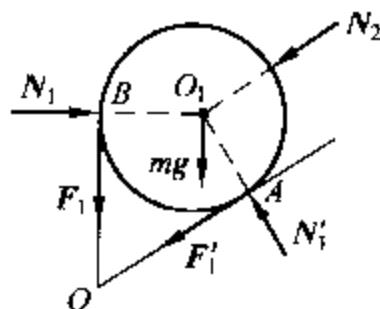


图 23b

24. 如图 24a 所示, 物块 A 和 B 由一根拉直的无重细线相连, 放在粗糙平板上, 两物块重量分别为 P_A 和 P_B , 且 $P_A = 2P_B = 2P$ 。物块与平板间的摩擦系数分别为 μ_A 和 μ_B , 且 $\mu_B = 2\mu_A = 2\mu$ 。试求当平板自水平位置开始绕水平轴缓慢转动时, 欲使系统在平板上保持静止, 平板转角 φ 的最大值。(冯立富, 空军工程学院力学教研室。原第 158 题, 1988. No. 2.)

解: 依题意, 当 $\tan\varphi \leq \mu$ 时, 系统可在平板上保持静止, 细线的张力为零。

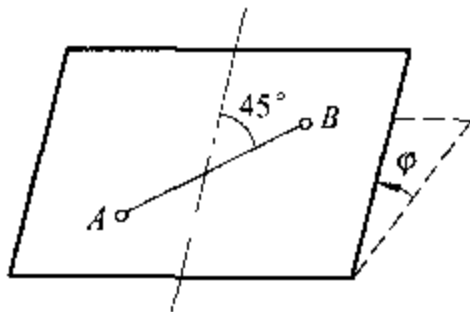


图 24a

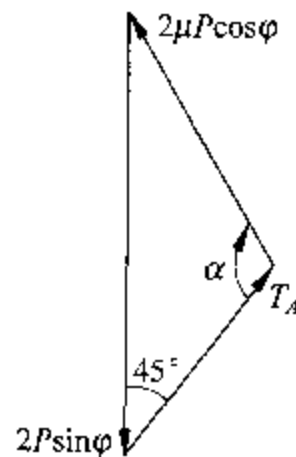


图 24b

当 φ 继续增大时, 细线的张力不再为零, 但物块 A 相对平板仍可保持静止。物块 A 在平板平面内的受力如图 24b 所示。由正弦定理

$$\frac{\sin 45^\circ}{2\mu P \cos \varphi} = \frac{\sin \alpha}{2P \sin \varphi} = \frac{\sin(135^\circ - \alpha)}{T_A}$$

又因 $\tan\varphi = \mu$ 时, $T_A = 0$, 可解得线中张力

$$\begin{aligned} T_A &= \sqrt{2} P \cos \varphi (\tan \varphi - \sqrt{2\mu^2 - \tan^2 \varphi}) \\ &= \sqrt{2} P (\sin \varphi - \sqrt{2\mu^2 - (1 + 2\mu^2) \sin^2 \varphi}) \end{aligned}$$

可见 T_A 是 φ 的增函数, 若视物块 B 是固定在平板上的, 则物块 A 在范围

$$\mu \leq \tan \varphi \leq \sqrt{2}\mu$$

内, 皆可在平板上静止。

现考察物块 B。设它在平板上处于临界状态, 则它在平板面内受力如图 24c 所示。由正弦定理

$$\frac{\sin 135^\circ}{2\mu P \cos \varphi} = \frac{\sin \beta}{P \sin \varphi} = \frac{\sin(45^\circ - \beta)}{T_B}$$

可解得线中张力

$$\begin{aligned} T_B &= P \cos \varphi (\sqrt{8\mu^2 - \tan^2 \varphi} - \tan \varphi) / \sqrt{2} \\ &= P (\sqrt{8\mu^2 - (1 + 8\mu^2) \sin^2 \varphi} - \sin \varphi) / \sqrt{2} \end{aligned}$$

由上式可以看出, T_B 是 φ 的减函数。但因 $T_A = T_B$, 故 $\tan \varphi = 2\sqrt{10}\mu/5$ 。即当 φ

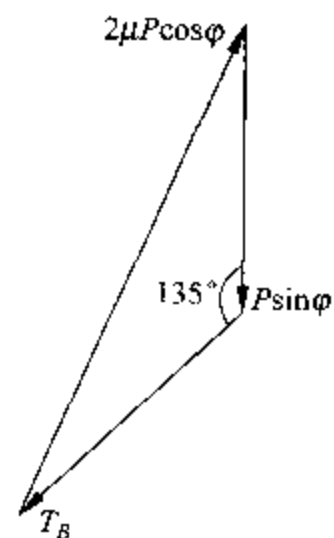


图 24c

角由 $\arctan \mu$ 增至 $\arctan(2\sqrt{10}\mu/5)$ 时, 物块 A 和 B 同时处于临界状态。所以平板转角的最大值为

$$\varphi_{\max} = \arctan(2\sqrt{10}\mu/5)$$

25. 如图 25a 所示, 三根长度相等, 重量为 G 的匀质刚性杆 OA 、 OB 、 OC 在 O 点铰接, 放置于摩擦系数为 μ 的水平面上, OH 为垂线, H 为垂足, $\angle BHC = \alpha_1$, $\angle AHC = \alpha_2$, $\angle OCH = \varphi$, 沿 OH 方向作用力 P 。求维持这个结构平衡所需的条件。(邵金雨, 北京大学力学系 88 级研究生。原第 206 题, 1991, No. 3。)

解: 因为

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$$

故

$$\angle OBH = \angle OCH = \angle OAH = \varphi$$

以 OA 杆为研究对象, 其受力图如图 25b, 各力均在平面 OAH 内。 OB 和 OC 杆的受力图如图 25c 和图 25d 所示。

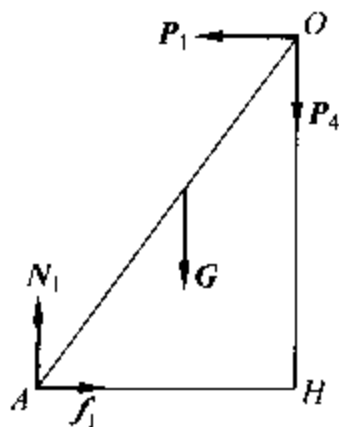


图 25b

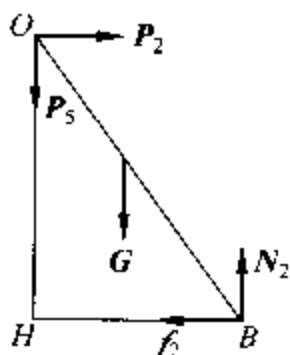


图 25c

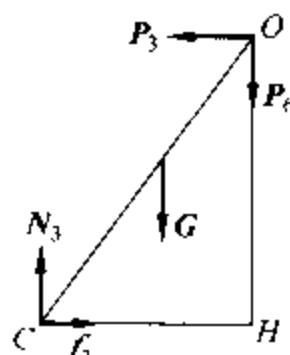


图 25d

令 $\angle AHB = \alpha_3$, 则

$$\alpha_3 = 2\pi - \alpha_1 - \alpha_2$$

O 点水平受力图如图 25e 所示。由 O 点平衡, 有

$$\left. \begin{aligned} P_4 + P_5 + P_6 &= P \\ \frac{P_1}{\sin \alpha_1} &= \frac{P_2}{\sin \alpha_2} = \frac{P_3}{\sin \alpha_3} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

由 OA 、 OB 、 OC 三杆各自平衡, 有

$$\left. \begin{aligned} P_i &= f_i \\ N_i - P_{i+3} &= G \\ G \cos \varphi / 2 + P_{i+3} l \cos \varphi - P_i l \sin \varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2, 3) \quad (2)$$

以 $P_j (j=1, 2, \dots, 6)$ 、 N_i 和 $f_i (i=1, 2, 3)$ 为未知量, 求解 (1) 和 (2) 构成的方程

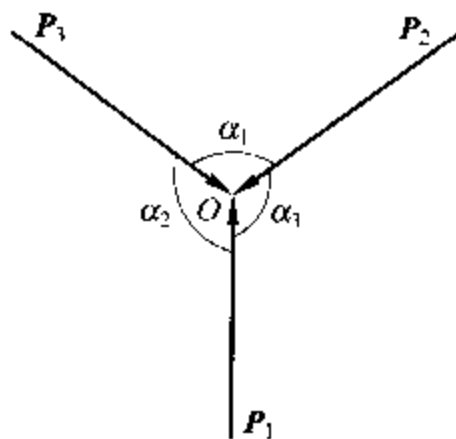


图 25e

组,有

$$f_i = \left(\frac{3}{2}G + P \right) \frac{\sin \alpha_i}{\eta \tan \varphi}$$

$$N_i = \frac{G}{2} + \left(\frac{3}{2}G + P \right) \frac{\sin \alpha_i}{\eta}$$

其中 $\eta = \sum_{k=1}^3 \sin \alpha_k$, 维持结构平衡的条件为

$$f_i \leq \mu N_i \quad (i=1, 2, 3)$$

即

$$\tan \varphi \geq \frac{(3G + 2P) \sin \alpha_i}{\mu [G\eta + (3G + 2P) \sin \alpha_i]} \quad (i=1, 2, 3)$$

也即

$$\tan \varphi \geq \max_{i=1, 2, 3} \frac{(3G + 2P) \sin \alpha_i}{\mu [G\eta + (3G + 2P) \sin \alpha_i]}$$

26. 如图 26a 所示, 圆柱重 P , 滑块的斜面倾角为 α , 各接触处的摩擦系数均为 $\mu = \tan \varphi$, 且 $\alpha > 2\varphi$, 求系统静止时滑块的重量 Q 至少应为多少? (张兆瑞, 兰州大学数学力学专业学生。原第 85 题, 1985, No. 1。)

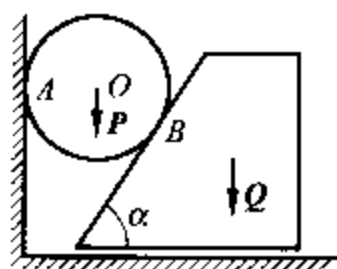


图 26a

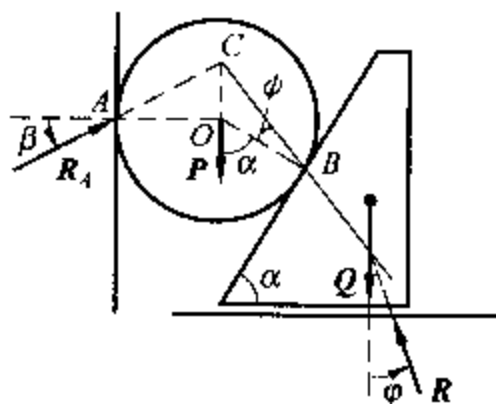


图 26b

解: 因为只有滑块滑动时圆柱才能动, 所以在临界状态平衡时地面反力 R 与竖直线夹角为 φ 。设圆柱半径为 r , 力 R_A 、 R_B 和角度 β 、 ψ 如图 26b 所示。由图知

$$OC = r \tan \beta, \quad OC \sin(\alpha - \psi) = r \sin \psi$$

由此可得

$$\tan \psi = \frac{\sin \alpha \tan \beta}{1 + \cos \alpha \tan \beta} \quad (1)$$

显然 $\psi < \beta$ 。由于可能有 $\psi < \varphi < \beta$, 所以在临界状态下 A 点可能先滑动, 此时 $\beta = \varphi$, 所以有

$$\tan \varphi = \frac{\mu \sin \alpha}{1 + \mu \cos \alpha} \quad (2)$$

以圆柱为研究对象,可得其力三角形如图 26c 所示,所以

$$R_B = P \cos \varphi / \cos(\alpha - \varphi - \psi)$$

以滑块为研究对象,可得其力三角形如图 26d 所示,所以

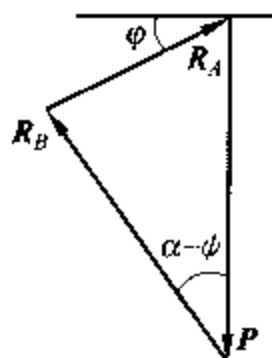


图 26c

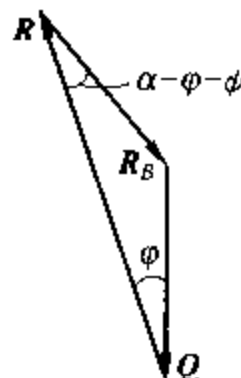


图 26d

$$Q = \frac{R_B \sin(\alpha - \varphi - \psi)}{\sin \varphi}$$

将 R_B 代入,最后得

$$Q_{\min} = \frac{P \tan(\alpha - \varphi - \psi)}{\tan \varphi}$$

其中 ψ 角由(2)式确定。

27. 如图 27a 所示,长 $l = 3.05\text{m}$,重 $W = 223\text{N}$ 的杆 AB 支撑住位于光滑竖直导槽内的物块 E,物块 E 重 $G = 890\text{N}$,A、B 接触面的静摩擦系数均为 $\mu = 0.5$ 。求杆 AB 能保持平衡的最大角度 φ 。(马友发,华南理工大学工程力学系,选自张陵编译《国外理论力学新题精选》。原第 221 题,1992.No.5。)

解:(1) 设 B 点先达到临界状态,A 点未达到,则有关系式

$$F_B = \mu N_B \quad (1)$$

取物块 E 进行分析,有

$$N_A = G \quad (2)$$

取杆 AB 进行分析,有

$$\sum F_y = 0: N_A + W - N_B = 0 \quad (3)$$

$$\sum M_A = 0: N_B l \sin \varphi - F_B l \cos \varphi - \frac{1}{2} W l \sin \varphi = 0 \quad (4)$$

由方程(1)~(4),解得

$$\tan \varphi = \frac{2\mu(W+G)}{W+2G} \approx 0.5557, \quad \varphi_1 = 29^\circ 3'$$

(2) 设 A 点先达到临界状态,B 点未达到,则有关系式

$$F_A = \mu N_A \quad (5)$$

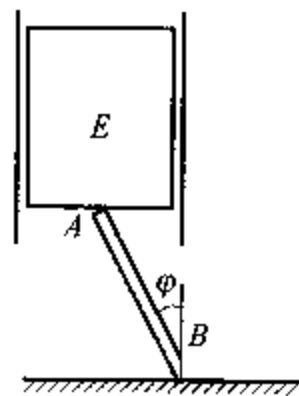


图 27a

取杆 AB 进行分析,有

$$\sum M_B = 0: N_A l \sin \varphi + \frac{1}{2} W l \sin \varphi - F_A l \cos \varphi = 0 \quad (6)$$

由方程(2)、(3)、(5)、(6)式解得

$$\tan \varphi_2 = \frac{2\mu G}{W + 2G} \approx 0.4443, \quad \varphi_2 = 23^\circ 57'$$

比较 φ_1 和 φ_2 , 使 AB 杆保持平衡的最大夹角 $\varphi_{\max} = 23^\circ 57'$, 此时 A 处达到临界状态。

编者注:对于多点摩擦问题,本题的方法是常用的,即采用穷举法,把各种可能列出来,解就在其中。

28. 如图 28a 所示,两个完全相同的均质圆轮搁置于水平倾角为 α ($\alpha < 45^\circ$) 的斜面上,各接触处摩擦系数均为 μ ($\mu < 1$),平行于斜面的力 P 作用于轮 C 的中心。试求推动圆轮的最小力 P 以及轮 C 纯滚动的条件。(刘义文,中南工业大学数力系。原第 245 题,1994, No. 1.)

解:以轮 O 为对象,在图 28b 中,由 $\sum m_O = 0$,得

$$F_A = F_B$$

又 $\sum m_K = 0$, 且 $\alpha < 45^\circ$, 知 $N_A > N_B$ 。由于 A 处的压力大,可以提供较大的摩擦力,而 B 处的压力小,不能提供较大的摩擦力,故 B 处先滑动,轮 O 作滚动。故 $F_B = \mu N_B$, 由 $\sum m_A = 0$, 有

$$N_B = F_B + G \sin \alpha$$

所以

$$N_B = G \sin \alpha / (1 - \mu)$$

以轮 C 为对象,由 $\sum m_D = 0$, 可得

$$P = 2G \sin \alpha / (1 - \mu)$$

由 $\sum F_x = 0$, 得

$$P = F_D + N_B + G \sin \alpha$$

$$F_D = \mu G \sin \alpha / (1 - \mu)$$

由 $\sum F_y = 0$, 得

$$N_D = G \cos \alpha - \mu G \sin \alpha / (1 - \mu)$$

由纯滚动条件 $F_D < \mu N_D$, 得轮 C 纯滚动条件为

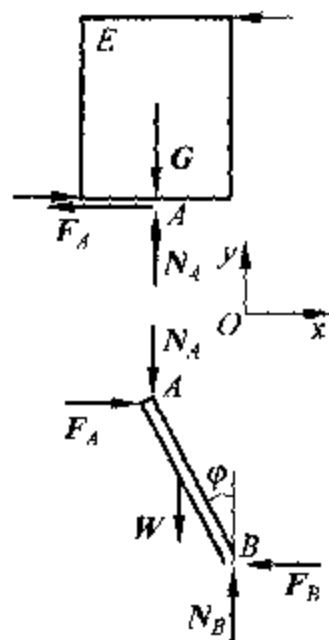


图 27b

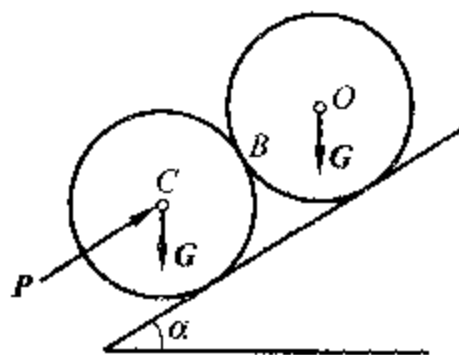


图 28a

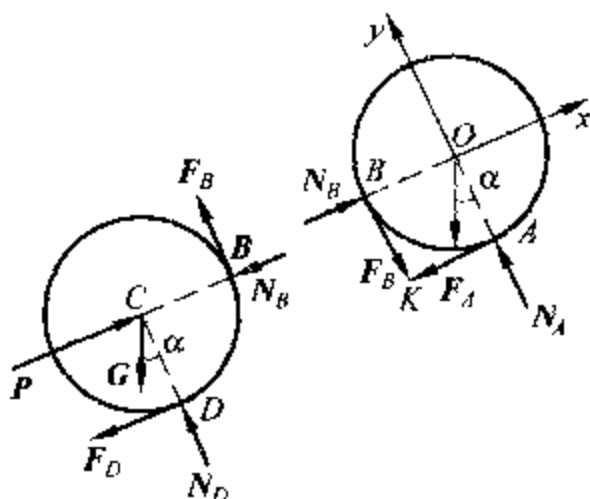


图 28b

$$\tan \alpha < \frac{1-\mu}{1+\mu}$$

编者注:本题中,如果 $\mu=1$,会出现分子为零的情况,如何解释?

29. 滚筒以匀角速度 ω 转动,带动一皮带运行。滚筒半径为 R ,皮带在滚筒上的包角为 β (图 29a),皮带与滚筒间的静摩擦系数为 μ ,皮带单位长度的质量为 ρ ,不计重力作用。当 B 端皮带的拉力为 T_0 时,问皮带在滚筒上不打滑时, A 端皮带的最大拉力 T 为多大?(季平,安徽蚌埠粮食学校。原第 33 题,1982, No. 4。)

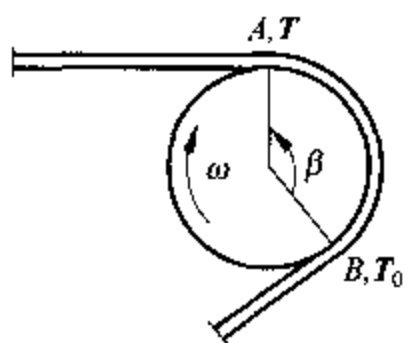


图 29a

解:取滚筒上弧长为 ds 的一段皮带,其包括惯性力在内的受力图如图 29b 所示,列出平衡方程为

$$\begin{cases} 2T \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) + dT \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = N + \rho ds \omega^2 R \\ dT \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) = F \end{cases}$$

其中 N 为正压力, F 为摩擦力。因为 $ds = R d\theta$, $d\theta \ll 1$, 因此近似有

$$\begin{cases} (T - \rho \omega^2 R^2) d\theta = N \\ dT = F \end{cases}$$

由上式可解出

$$\frac{dT}{T - \rho \omega^2 R^2} = \mu d\theta$$

积分后得

$$\ln \frac{T - \rho \omega^2 R^2}{T_0 - \rho \omega^2 R^2} = \mu \beta$$

最后解出

$$T_{\max} = T_0 e^{\mu \beta} - \rho \omega^2 R^2 (e^{\mu \beta} - 1)$$

30. 均匀圆柱体比重为 0.5, 高为直径的 λ 倍, 浮在水面上。证明其稳定平衡姿态如图 30a 所示。(a) $\lambda \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, 对称轴是铅垂的; (b) $\frac{1}{\sqrt{2}} < \lambda \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$ 时, 轴线倾斜且上底和下底都不和水面相交; (c) $\sqrt{\frac{2}{3}} < \lambda < 1$ 时, 轴线倾斜, 柱体两底和水面相交; (d) $\lambda \geq 1$ 时, 轴线水平。(朱照宣, 北京大学力学系。原第 244 题, 1993, No. 6。)

证明: 设 C 为圆柱体重心。当水面通过 C , 柱体轴线与铅垂线所成的倾角为 α , B 为柱体水下部分的重心(简称浮心)。重心和浮心间距离 $\overline{BC} = h$ 将依赖于高径比 λ

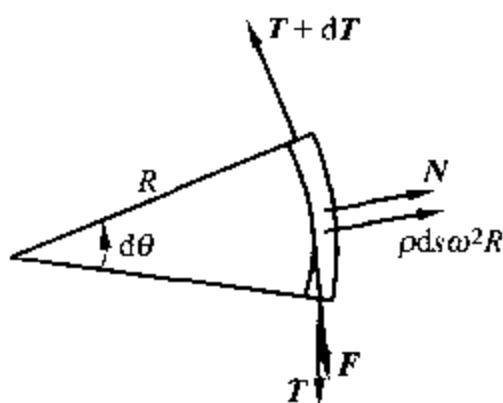


图 29b



图 30a

和倾角 α , 即

$$h = h_{\lambda}(\alpha)$$

λ 在式中是参量。稳定平衡条件是

$$h'_{\lambda}(\alpha) = 0, \quad h''_{\lambda}(\alpha) > 0$$

不失一般性可设直径为 1, 高为 λ 。于是当 $0 \leq \alpha \leq \arctan \lambda$ 时, $h_{\lambda}(\alpha)$ 的表达式为

$$h_{\lambda}(\alpha) = \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{8\lambda} \right) \cos \alpha + \frac{1}{8\lambda \cos \alpha}$$

当 $\arctan \lambda \leq \alpha \leq \frac{1}{2}\pi$ 时, $h_{\lambda}(\alpha)$ 的表达式为

$$h_{\lambda}(\alpha) = \frac{\sin^2 \alpha}{12\pi \lambda \cos \alpha} \left[3 \left(4 \frac{\lambda^2}{\tan^2 \alpha} + 1 \right) \arcsin \frac{\lambda}{\tan \alpha} + \frac{\lambda}{\tan \alpha} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\tan^2 \alpha}} \left(13 + \frac{2\lambda^2}{\tan^2 \alpha} \right) \right]$$

计算虽冗长, 但只要用定积分求体积的重心。由 $h'_{\lambda}(\alpha) = 0$ 可得平衡时 α 和 λ 的关系如图 30b 所示, 其中粗实线代表稳定平衡态满足 $h''_{\lambda}(\alpha) > 0$ 。计算时用数值方法较方便。稳定平衡曲线的四段分别代表: (a) 轴线铅垂, (b) 轴线倾斜, 下底淹没在水中, (c) 倾斜, 但两个底都有部分在水中和 (d) 轴线水平。

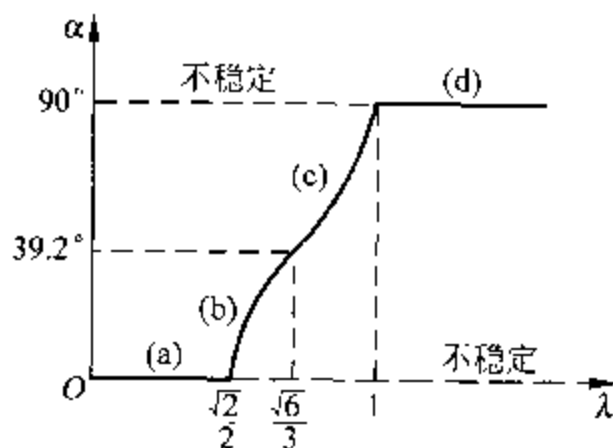


图 30b

第 2 章

运动学部分

31. 在录音机或连续印刷机中,磁带(或纸张)以匀速 v 运动(图 31)。设以 r 表示磁带盘(纸筒)的半径, b 表示磁带的厚度。试导出磁带盘角加速度的表达式。(卢其宜,江西省机械工业学校。原第 205 题,1991, No. 3。)

解: 设初始时纸筒半径为 r_0 , 在任一瞬时 t , 纸筒半径为 r , 角速度为 ω , 纸筒已转过的圈数为 n (不一定为整数)。则有

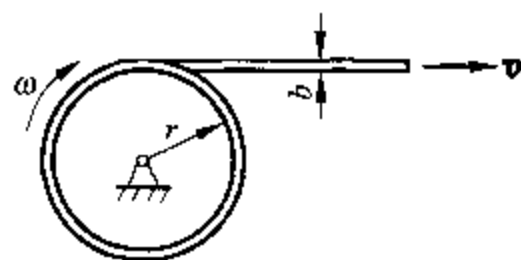


图 31

$$r = r_0 - nb, \quad v = r\omega$$

因 v 和 b 为常量, 故有

$$\Delta r = -\Delta n \cdot b, \quad \Delta r \cdot \omega + r \cdot \Delta \omega = 0$$

又因

$$\Delta n = \frac{\omega \Delta t}{2\pi} = \frac{v \Delta t}{2\pi r}$$

所以

$$\Delta r = -\frac{bv \Delta t}{2\pi r}, \quad \Delta \omega = -\frac{\omega \Delta r}{r} = \frac{bv^2 \Delta t}{2\pi r^3}$$

最后有角速度

$$\epsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{bv^2}{2\pi r^4}$$

32. 在图 32 所示放大机构中, 杆 I 和杆 II 分别以速度 v_1 和 v_2 沿箭头方向运动, 其位移分别以 x 和 y 表示。如杆 II 和杆 III 间的距离为 a , 求杆 III 的速度和滑道 IV 的角速度。(屠居贤, 山东省烟台大学机械系, 引自王铎:《理论力学习题选集》183 题。原第 213 题, 1992, No. 1。)

解: 由图示几何关系, 有

$$\tan\varphi = \frac{x}{y}$$

两边对时间 t 求导数, 得

$$\dot{\varphi} \sec^2 \varphi = \frac{y \dot{x} - x \dot{y}}{y^2}$$

所以

$$\omega_{\text{IV}} = \dot{\varphi} = \frac{v_1 y - v_2 x}{x^2 + y^2}$$

杆 III 作平动, 其端点 C 的坐标为

$$y_C = -\frac{a}{\tan\varphi} = -\frac{(a-x)y}{x}$$

所以杆 III 的速度为

$$v_3 = \dot{y}_C = v_1 \frac{ay}{x^2} - v_2 \frac{a-x}{x}$$

33. 设动点沿平面曲线轨迹运动(图 33)。求证: 此轨迹的曲率半径可由下式确定

$$\rho = \frac{v}{|\dot{\alpha}|}$$

式中 v 是动点的速率, $|\dot{\alpha}|$ 是轨迹切线与 x 轴的夹角对时间的变化率的绝对值。对曲线 $y = e^x$, 写出 ρ 与 α 的函数关系。(林敬圣, 浙江农业大学工程技术学院。原第 295 题, 1996, No. 5。)

解: 设在瞬时 t 动点 M 的速度为 v , 它与水平线的夹角为 α , 则其速度在直角坐标轴上的投影分别为

$$v_x = v \cos \alpha, \quad v_y = v \sin \alpha$$

将上式对时间求导, 得

$$a_x = \dot{v}_x = \dot{v} \cos \alpha - v \sin \alpha \cdot \dot{\alpha}$$

$$a_y = \dot{v}_y = \dot{v} \sin \alpha + v \cos \alpha \cdot \dot{\alpha}$$

动点的加速度为

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\dot{v}^2 + (v \cdot \dot{\alpha})^2} = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

且有

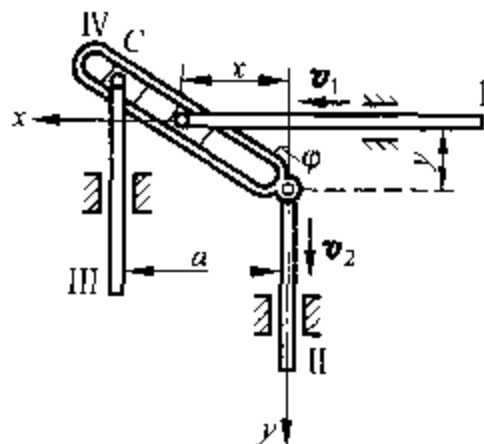


图 32

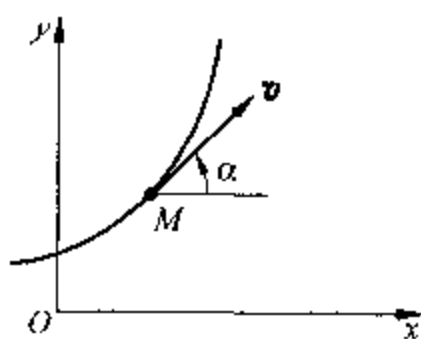


图 33

$$a_t = \dot{v}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

即

$$|v \cdot \dot{\alpha}| = \frac{v^2}{\rho}$$

于是 $\rho = \frac{v}{|\dot{\alpha}|}$ 证毕。

由已知轨迹 $y = e^x$, 其切线斜率为

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} = e^x$$

对时间 t 求导数, 得

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} \dot{\alpha} = e^x \dot{x} = e^x v \cos \alpha$$

即

$$\dot{\alpha} = v e^x \cos^3 \alpha$$

应用本公式, 可得此曲线的曲率半径为

$$\rho = \frac{v}{|\dot{\alpha}|} = \left| \frac{1}{e^x \cos^3 \alpha} \right|_{x \in R}$$

注: 本式 $\rho = \frac{v}{|\dot{\alpha}|}$ 可由高等数学公式 $\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$ 与力学公式 $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ 导出。这里只需求一阶导数, 较为简便。

34. AC、BD 两杆各以匀角速度 ω 分别绕距离为 l 的 A、B 轴作定轴转动, 转向如图 34a 所示。小圆环 M 套在 AC 及 BD 杆上。在某一瞬时 $\alpha = \beta = 60^\circ$, 求小圆环 M 在任意瞬时的速度和加速度。(吴羽佳, 北京航空学院 508 教研室。原第 71 题, 1984, No. 3。)

解: 由题意杆 AC 和 BD 的角速度均为 ω , 所以 $\angle AMB = 60^\circ$, 亦即 M 点的运动轨迹为一圆周, 其圆心为 O (图 34b), 不难算出其半径 $R = \frac{l}{\sqrt{3}}$ 。图 34b 中 AOE 为

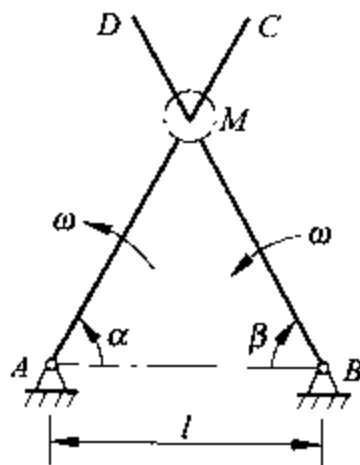


图 34a

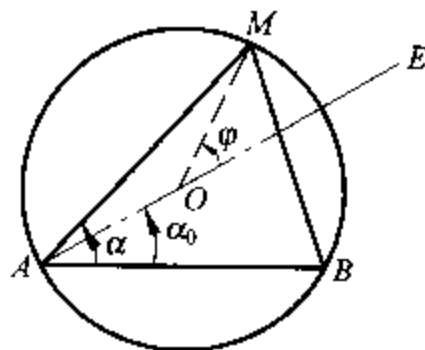


图 34b

间固定直线,则有 $\varphi = 2(\alpha - \alpha_0)$, 且 $\alpha_0 = \frac{\pi}{6}$ 。故

$$v_M = R \dot{\varphi} = \frac{2l\omega}{\sqrt{3}} \text{ (方向与 } O, M \text{ 连线垂直)}$$

$$a_n = R \dot{\varphi}^2, \quad a_t = R \ddot{\varphi}$$

因 $\ddot{\varphi} = 0$, 得

$$a_M = \frac{4l\omega^2}{\sqrt{3}} \text{ (方向指向圆心 } O)$$

35. 图 35 所示契比谢夫 (Чебышев, П. Л., 1821—1894) 直线机构。设 $\overline{OA} = 2$, $\overline{AB} = 1$, $\overline{OC} = \overline{BC} = \overline{PC} = 2.5$, 验证当 $|\alpha| \leq 90^\circ$ 时, 点 $P(x, y)$ 的轨迹近似是一直线段, 在这段轨迹上 x 值的变化为 4 而 y 值的最大变化不到 0.01。(朱照宣, 北京大学力学系。原第 73 题, 1984, No. 4。)

解: B 点坐标为 $(2 + \cos\alpha, -\sin\alpha)$ 。对于三角形 OBP , 设

$$\angle 1 = \angle OPC, \quad \angle 2 = \angle POC, \quad \angle 3 = \angle COB, \quad \angle 4 = \angle OBC$$

由于 $\overline{OC} = \overline{BC} = \overline{PC}$, 因此有

$$\angle 1 = \angle 2, \quad \angle 3 = \angle 4$$

由于三角形内角之和为 180° , 因此有

$$\angle POB = \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$$

即三角形 OBP 是直角三角形。再由几何关系, 有

$$\frac{y}{x} = \frac{2 + \cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (1)$$

利用直角三角形 OBP 的边长关系, 有

$$[(2 + \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha] + (x^2 + y^2) = 25 \quad (2)$$

由式(1)和式(2)得

$$y = 2(2 + \cos\alpha) \sqrt{\frac{5 - \cos\alpha}{5 + 4\cos\alpha}}$$

当 $-90^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ 时, x 的变化范围为 $[-2, 2]$, y 的最小值为 4, 最大值为 4.0098 (当 $\alpha = \pm 51^\circ$ 时)。

36. 一质点 H 沿三角形 ABC 的中线 AD 作匀速运动。设 B 处有一光源, BE 为三角形的中线 (图 36)。设 F 点为质点 H 在 AC 上的投影, 证明 F 点在过 A, E, C 三点时速度大小之比为 $2^2 : 3^2 : 4^2$,

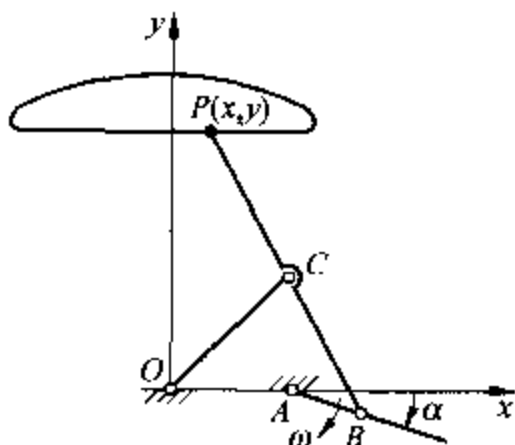


图 35

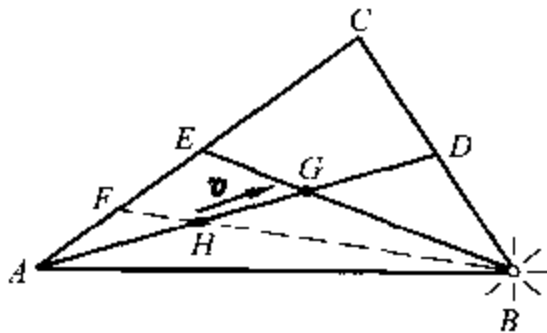


图 36

其加速度大小之比为 $2^3 : 3^3 : 4^3$ 。(朱照宣, 北京大学力学系。原第 77 题, 1984, No. 5。)

证明: 设质点 H 和其投影点 F 在 AD 和 AC 线段上与 A 点的距离分别为

$$\overline{AH} = x, \quad \overline{AF} = \xi$$

则由射影几何可知, ξ 与 x 的关系可用分式变换表示为

$$\xi(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

其中 a, b, c, d 为待定常数。因

$$\xi(0) = 0$$

故

$$b = 0$$

设中线 AD 长为 $3e$, 则分别有

$$\xi(3e) = \overline{AC}, \quad \xi(2e) = \overline{AE}$$

故

$$\xi(3e) = 2\xi(2e)$$

由此得

$$d = -6ec$$

于是

$$\xi(x) = \frac{a}{c} - \frac{6ae}{c(6e-x)}$$

按题意 $\dot{x} = u$ (常量), 将上式求导得影子速度、加速度为

$$v(x) = -\frac{6aeu}{c(6e-x)^2}, \quad a(x) = -\frac{12aeu^2}{c(6e-x)^3}$$

所以影子过 A, E, C 三点时速度大小比为

$$v(0) : v(2e) : v(3e) = 2^2 : 3^2 : 4^2$$

加速度大小比为

$$a(0) : a(2e) : a(3e) = 2^3 : 3^3 : 4^3$$

37. 在运动学中, 轨迹是个重要概念, 但简单机构也可能有复杂的轨迹曲线, 利用计算机技术可直观地画出这些曲线。如图 37a, 小齿轮 O_1 在大齿轮 O 内作纯滚动。其中大齿轮半径为 R , 小齿轮半径为 r , E 是小齿轮上的偏心点, 偏心距为 e 。求小齿轮上偏心点 E 的轨迹。并讨论轨迹的特点。(高云峰, 清华大学工程力学系。原第 271 题, 1995, No. 5。)

解: 建立坐标(图 37b), 由运动学知识有

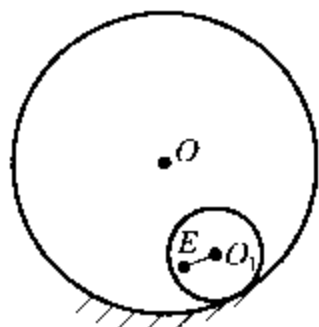


图 37a

$$\begin{cases} x_E = (R-r)\cos\theta + e\cos\varphi \\ y_E = (R-r)\sin\theta - e\sin\varphi \end{cases} \quad (1)$$

利用纯滚动条件 $R\theta = r(\varphi + \theta)$, 方程(1)简化后有

$$\begin{cases} x_E = (R-r)\cos\theta + e\cos\left(\frac{R-r}{r}\theta\right) \\ y_E = (R-r)\sin\theta - e\sin\left(\frac{R-r}{r}\theta\right) \end{cases} \quad (2)$$

引入无量纲化参数

$$x^* = \frac{x_E}{r}, \quad y^* = \frac{y_E}{r}, \quad \xi = \frac{R}{r}, \quad \eta = \frac{e}{r}$$

方程(2)为

$$\begin{cases} x^* = (\xi-1)\cos\theta + \eta\cos[(\xi-1)\theta] \\ y^* = (\xi-1)\sin\theta - \eta\sin[(\xi-1)\theta] \end{cases} \quad (3)$$

方程(3)在不同参数下的轨迹如下:

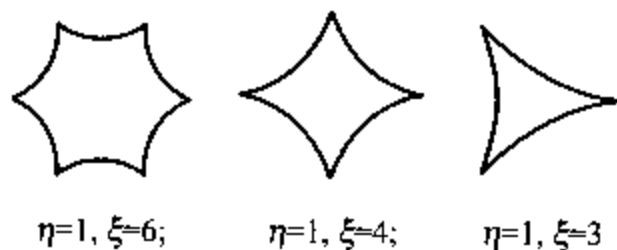


图 37c

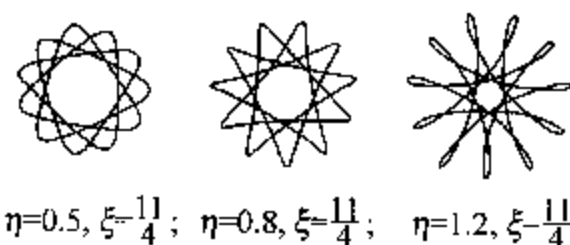


图 37d

讨论:

(a) 若 ξ 为无理数, 则轨迹曲线不封闭;

(b) 若 ξ 为有理数, 则轨迹曲线封闭。进一步, 设 $\xi = \frac{m}{n}$, m, n 为不可约自然数, 则曲线的周期为 $2n\pi$, 或小齿轮转 n 圈后曲线重合。并且曲线有 m 个尖点或花瓣;

(c) $\eta=1$ 时曲线有尖点。 $\eta<1$ 时尖点变为圆凸, $\eta>1$ 时曲线的尖点变为花瓣。 $\eta=0$ 时曲线为圆;

(d) $\xi=2, \eta=1$ 时曲线退化为直线。 $\xi=1$, 曲线退化为一个点。

38. 圆心为 C 的钢圈可绕位于钢圈边缘的 O 轴转动, 钢圈在竖直平面内运动。小环 M 可沿钢圈滑动。当 $t=0$ 时, $\varphi=\varphi_0$ (φ_0 不为零, 图 38a)。为使小环能铅垂地自由落下, 求钢圈的转动方程(表示成 t 和 φ_0 的函数)。(于振深, 天津纺织工学院理论力学教研室。原第 181 题, 1990, No. 2。)

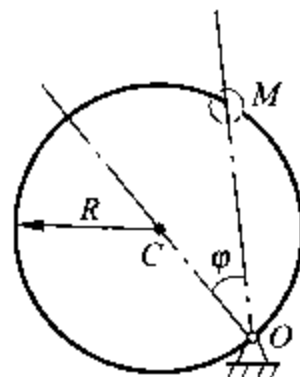


图 38a

解: 取 M 为动点, 动系固结在钢圈上, 则有(图 38b)

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r \quad (1)$$

由题意, 小环绝对速度 $v_a = gt$, 小环牵连速度为

$$v_e = 2R \cos \varphi \cdot \omega = \frac{v_a}{\tan \varphi} \quad (2)$$

因 $\omega = \dot{\varphi}$, 代入式(2), 积分后有

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} 2R \sin \varphi d\varphi = \int_0^t gt dt$$

即得

$$\varphi = \arccos \left(\cos \varphi_0 - \frac{gt^2}{4R} \right)$$

39. 直线 AB 和 CD 夹角为 α , 直线 AB 以速度 v_1 沿垂直于 AB 的方向朝下移动, 而直线 CD 以速度 v_2 沿垂直于 CD 的方向朝右下运动(图 39a)。求套在这两直线交点处的小环 M 的速度大小。(雷晓燕, 华东交通大学建工系理力教研室。原第 113 题, 1986, No. 2。)

解: 设小环 M 的绝对速度为 v_M , 若以直线 AB 为动参考系(图 39b), 由速度合成定理可得

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_{r1}$$

若以直线 CD 为动参考系, 则有

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_{r2}$$

由此可得

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_{r1} = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_{r2}$$

上式在水平方向和垂直方向的投影方程为

$$v_{r1} = v_{r2} \cos \alpha + v_2 \sin \alpha$$

$$v_1 = -v_{r2} \sin \alpha + v_2 \cos \alpha$$

从中解得

$$v_{r1} = \frac{v_2 - v_1 \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$v_{r2} = \frac{v_2 \cos \alpha - v_1}{\sin \alpha}$$

最后得

$$v_M = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \alpha}}{\sin \alpha}$$

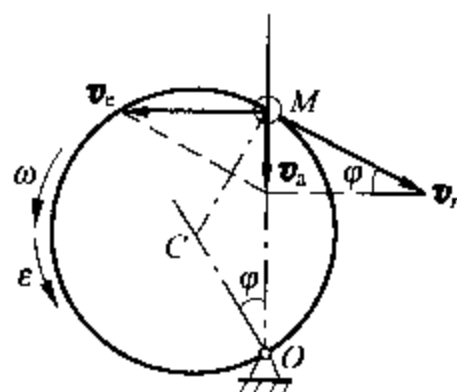


图 38b

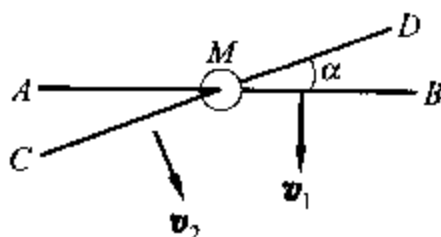


图 39a

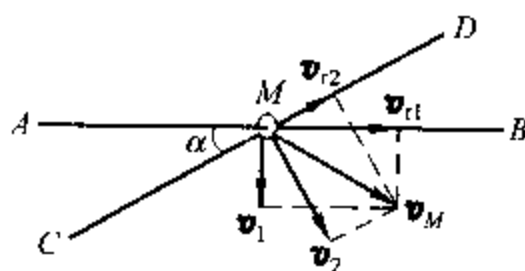


图 39b

40. 两辆汽车匀速前进, 如图 40a 所示, A 车沿直线行驶, $\overline{OA} = x_0 - v_A t$, B 车沿

圆周行驶, $\theta = \omega t$, 圆周半径为 R 。问: (1) A 车上的乘客看到 B 车的运动方程及轨迹; (2) B 车上的乘客看到 A 车的运动方程及轨迹。(高云峰, 清华大学工程力学系。原第 335 题, 2002, No. 2。)

解: (1) 建立动坐标系 Ax_Ay_A 与 A 车固结, 如图 40b 所示。根据几何关系, 有

$$\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$$

其中 \mathbf{r}_{AB} 就是 A 车上的乘客所看到的 B 车的矢径, 把 \mathbf{r}_{AB} 向动坐标系 Ax_Ay_A 投影有

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos \omega t - (x_0 - vt) \\ y &= R \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

利用计算机作图, 若设 $R = 1000\text{m}$, $x_0 = 2000\text{m}$, $\omega = 0.1\text{rad/s}$, $v_A = 10\text{m/s}$, $t = 200\text{s}$, 可得到方程 (1) 的轨迹如图 40c 所示。其中的小圆圈表示初始时的相对位置。

(2) 建立动坐标系 Bx_By_B 与 B 车固结 (见图 40d)。根据向径的关系, 有

$$\mathbf{r}_{BA} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$$

其中 \mathbf{r}_{BA} 就是 B 车上的乘客所看到的 A 车的矢径, 把 \mathbf{r}_{BA} 向动坐标系 Bx_By_B 投影有

$$\left. \begin{aligned} x &= (x_0 - vt) \sin \omega t \\ y &= (x_0 - vt) \cos \omega t - R \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

在前面所给的参数下, 可得方程 (2) 的轨迹为图 40e。

可以发现: A 和 B 所看到的对方的相对运动方程和相对运动轨迹完全不同。

讨论: $\mathbf{r}_{AB} = -\mathbf{r}_{BA}$, 但为什么双方所看到的相对运动轨迹不同? 本题中与 A 车

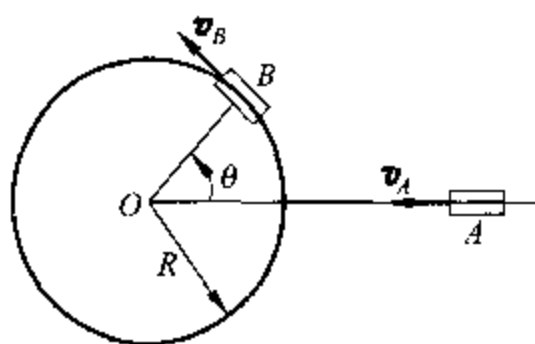


图 40a

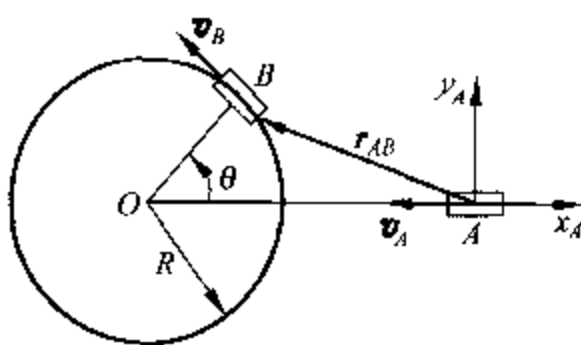


图 40b

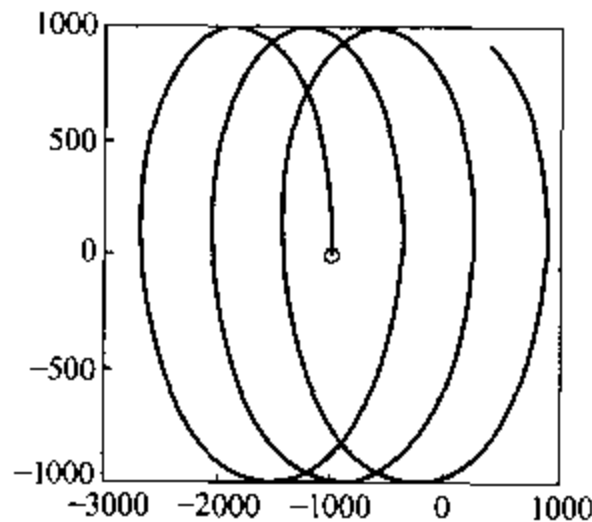


图 40c

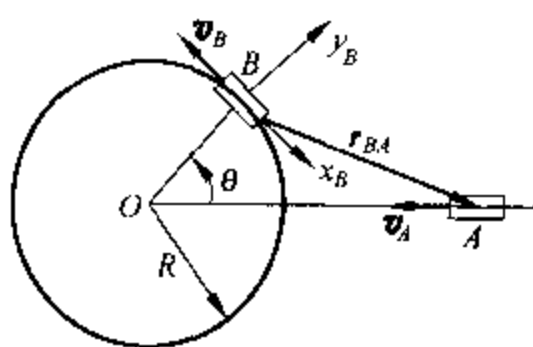


图 40d

固连的是平动坐标系,而与B车固连的是转动坐标系。由于同一个矢量在不同的坐标系中有不同的坐标分量,因此两者所看到的相对运动轨迹不同是自然的结果。

41. 杆AB的A端沿水平线运动,速度为 v_A ,杆在运动时始终与一半圆周相切,半圆周的半径为 R ,杆与水平线的夹角为 θ (图41a)。试证明AB杆与半圆弧接触点C的速度沿圆弧的切线方向。(杨越宁,沈阳工学院力学教研室。原229题,1993, No. 1。)

解:选动系 Oxy 的 x 轴始终与AB杆平行,杆上与圆弧接触的C点为动点(图41b),根据运动合成定理,有

$$v_a = v_c + v_r$$

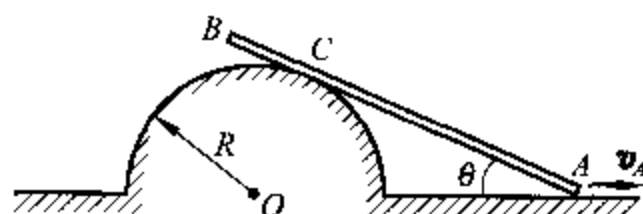


图 41a

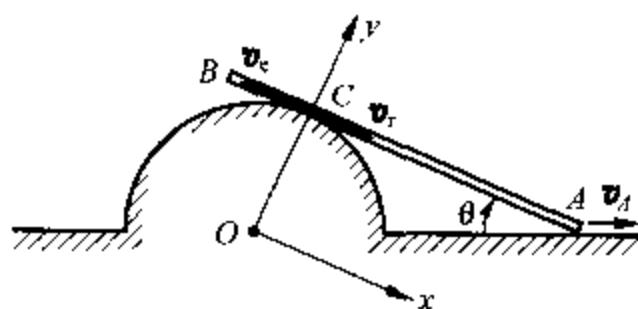


图 41b

注意到 v_c 与 v_r 都沿杆的方向,所以 v_a 也沿杆的方向。由于AB就是圆弧在C点处的切线,所以C点运动方向沿圆弧的切线方向。

编者注:原题采用基点法加上求导数的方法加以证明,把问题复杂化了,现在仅根据有关物理概念就可证明。

42. 半径为 R 的水平圆盘绕通过盘心的铅垂轴匀速转动,测得一质点通过盘心时相对圆盘的速度为 v ,离开圆盘边缘时相对速度为 $2v$ 。设运动过程中质点不受水平外力且不计摩擦,求质点通过圆盘中心时,相对于圆盘的加速度的大小。(蒋持平,哈尔滨工业大学844信箱。原第129题,1986, No. 6。)

解:取圆盘为动参考系,则质点的绝对速度为

$$v_a = v_c + v_r$$

因为质点不受水平外力,所以质点的绝对运动为匀速直线运动。

当质点通过圆盘中心时,有

$$v_{a1} = v, \quad v_{c1} = 0$$

所以有

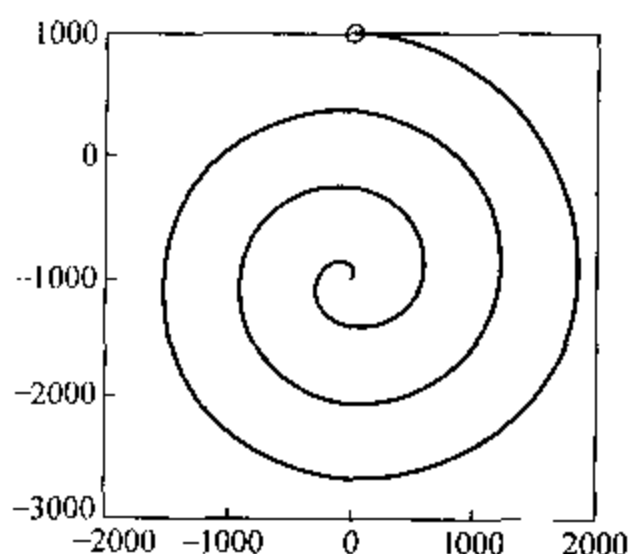


图 40e

$$v_{r1} = v_{s1} = v$$

当质点通过圆盘边缘时,有

$$v_{s2} = v, \quad v_{r2} = 2v$$

所以

$$v_{c2} = \sqrt{3}v$$

因此可求出圆盘的角速度(由于不受水平外力,圆盘作匀角速度转动)为

$$\omega = \frac{v_{c2}}{R} = \frac{\sqrt{3}v}{R}$$

质点的加速度为

$$a_s = a_c + a_r + a_e$$

质点作匀速直线运动,且当质点通过圆盘中心时,有

$$a_s = 0, \quad a_e = 0$$

所以有

$$a_r = -a_c$$

因此

$$|a_r| = |a_c| = 2\omega v_{r1} = \frac{2\sqrt{3}v^2}{R}$$

43. 在图 43a 所示平面内,半径 $R = 4\sqrt{3}\text{cm}$ 的圆盘以匀角速度 $\omega = 1.5\text{rad/s}$ 绕 O 轴转动,并带动螺旋弹簧使杆紧压在盘上,杆绕 O_1 轴转动。试确定机构在图示位置时, D 点的速度和加速度。图示位置 $\varphi = 30^\circ$, $\overline{O_1D} = 4\text{cm}$ 。(马友发,华南理工大学工程力学系,引自前苏联 K. C. 科列斯尼科夫《新编理论力学作业 1000 题》。原第 225 题,1992, No. 6.)

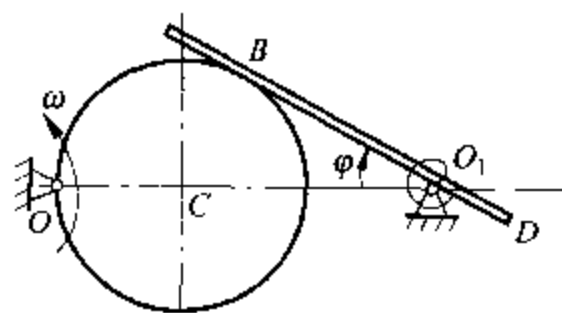


图 43a

解: 选动参考系 O_1xy 固连在杆上, 设其角速度为 ω_1 , 角加速度为 ϵ_1 , 如图 43b 所示。则 C 点的相对速度 v_r 和相对加速度 a_r 与 x 轴平行。 C 点的绝对速度为

$$v_s = \omega \times \overline{OC}$$

牵连速度为

$$v_e = \omega_1 \times \overline{O_1C}$$

$$v_s = v_e + v_r$$

因 v_s 、 v_e 均垂直 $\overline{OO_1}$, 式(1)向 $\overline{OO_1}$ 投影, 得

$$v_r = 0$$

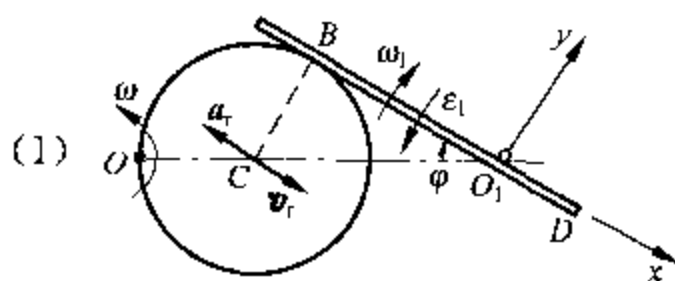


图 43b

所以

$$\omega_1 = \frac{R\omega}{O_1C} = \frac{\omega}{2}$$

所以

$$\mathbf{v}_D = \boldsymbol{\omega}_1 \times \overline{O_1D} = \omega_1 \cdot \overline{O_1D}(-\mathbf{j}) = -3\mathbf{j}(\text{cm/s}),$$

C点的绝对加速度为

$$\mathbf{a}_s = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overline{OC}) = -\omega^2 \overline{OC}$$

又因为

$$\mathbf{a}_s = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c \quad (2)$$

因

$$v_r = 0$$

故

$$a_c = 0$$

因此式(2)点乘 \mathbf{j} 得

$$-\omega^2 R \sin \varphi = -\epsilon_1 \cdot 2R \cos \varphi + \omega_1^2 \cdot 2R \sin \varphi$$

由此解得

$$\epsilon_1 = \frac{\sqrt{3}\omega^2}{4}$$

所以

$$\mathbf{a}_D = \epsilon_1 \cdot \overline{O_1D}\mathbf{j} - \omega_1^2 \cdot \overline{O_1D}\mathbf{i} \approx -2.25\mathbf{i} + 3.90\mathbf{j}(\text{cm/s}^2)$$

44. 半径为 R 的两圆环 O_1 和 O_2 , 分别绕圆环上的固定点 A 与 B 以相同的角速度 ω 、角加速度 ϵ 沿图 44a 所示方向运动, $\overline{AB} = 3R$ 。当 A 、 O_1 、 O_2 、 B 四点位于同一直线时, 求交点 M 的速度和加速度。(王世文, 山西阳泉矿务局职工大学技术教研组。原第 149 题, 1987, No. 5。)

解: (1) 求 M 点的速度。以动点 M 为研究对象, 分别取圆环 O_1 和 O_2 为动参考系, 地面为定参考系。设动点 M 相对圆环 O_1 、 O_2 的相对速度分别为 \mathbf{v}_{r1} 、 \mathbf{v}_{r2} , 牵连速度分别为 \mathbf{v}_{e1} 、 \mathbf{v}_{e2} (图 44b), 则 M 点的绝对速度为

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_{e1} + \mathbf{v}_{r1} = \mathbf{v}_{e2} + \mathbf{v}_{r2} \quad (1)$$

将式(1)在 y 轴方向投影, 得

$$v_{e1} - v_{r1} \cos 30^\circ = -v_{e2} \cos 60^\circ$$

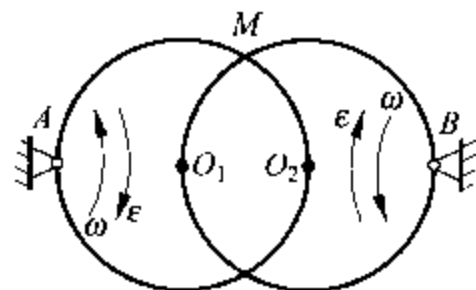


图 44a

因为

$$v_{e1} = \overline{AM} \omega = \sqrt{3}R\omega, \quad v_{e2} = \overline{BM} \omega = \sqrt{3}R\omega$$

可得

$$v_{r1} = 3R\omega$$

所以有

$$\mathbf{v}_s = \sqrt{3}R\omega \mathbf{j} + 3R\omega \left(\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}R\omega(\sqrt{3}\mathbf{i} - \mathbf{j})$$

(2) 求 M 点的加速度。因为

$$\mathbf{a}_s = \mathbf{a}_{e1} + \mathbf{a}_{r1} + \mathbf{a}_{c1} = \mathbf{a}_{e2} + \mathbf{a}_{r2} + \mathbf{a}_{c2} \quad (2)$$

其中

$$\mathbf{a}_{e1} = -\sqrt{3}R(\omega^2 \mathbf{i} + \epsilon \mathbf{j})$$

$$\mathbf{a}_{r1} = -9R\omega^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} \right) + a_{r1}^r \left(\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j} \right)$$

$$\mathbf{a}_{c1} = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{r1} = 6R\omega^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} \right)$$

$$\mathbf{a}_{e2} = \sqrt{3}R\omega^2 \left(\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j} \right) + \sqrt{3}R\epsilon \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} \right)$$

$$\mathbf{a}_{r2} = -9R\omega^2 \mathbf{j} + a_{r2}^r \mathbf{i}$$

$$\mathbf{a}_{c2} = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{r2} = 6R\omega^2 \mathbf{j}$$

式(2)两边点乘 \mathbf{j} , 得

$$\begin{aligned} & -\sqrt{3}R\epsilon - \frac{9}{2}R\omega^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}a_{r1}^r + 3R\omega^2 \\ & = -\frac{3}{2}R\omega^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}R\epsilon - 9R\omega^2 + 6R\omega^2 \end{aligned}$$

因此

$$a_{r1}^r = 2\sqrt{3}R\omega^2 - 3R\epsilon$$

所以

$$\mathbf{a}_s = -\frac{3}{2}R(\sqrt{3}\omega^2 + \epsilon)\mathbf{i} + \frac{1}{2}R(-9\omega^2 + \sqrt{3}\epsilon)\mathbf{j}$$

45. 图 45a 所示的平面机构中, 凸轮 C 以常角速度 $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$ 绕 O_1 轴转动, 从面带动摇杆 O_2B 绕 O_2 轴摆动。已知凸轮是半径 $r = 3 \text{ cm}$ 的圆轮, 偏心距 $e = \overline{O_1C} = 2 \text{ cm}$, $\overline{O_1O_2} = l = 10 \text{ cm}$ 。试求当 $\varphi = 60^\circ$ 时, 凸轮上和摇杆的

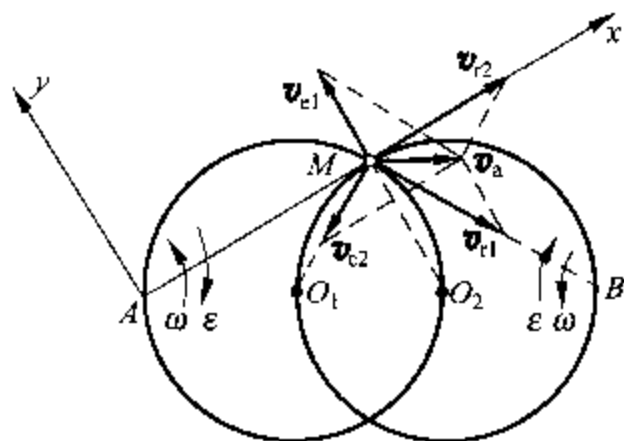


图 44b

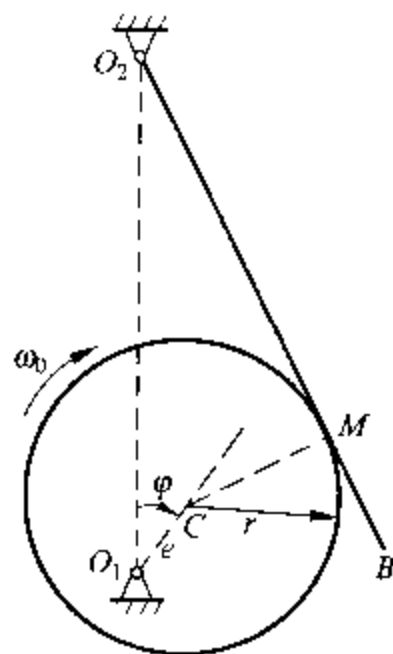


图 45a

接触点 M 的速度和加速度。(冯立富, 空军工程学院力学教研室。原第 114 题, 1986, No. 2。)

解: 当 $\varphi = 60^\circ$ 时, O_1, C, M 三点共线(图 45b)。由于始终有 $CM \perp BM$, 因此凸轮的轮心 C 和接触点 M 相对于摇杆的速度、加速度相同。

(1) 以摇杆为动参考系, C 点为动点, 则有

$$v_C = v_{e1} + v_{r1} \quad (1)$$

式(1)在 O_1C 方向和垂直 O_1C 的方向投影, 得

$$v_{e1} = 0, \quad v_{r1} = v_C = e\omega_0 = 2\text{cm/s}$$

由此可得此时摇杆的角速度为

$$\omega = 0$$

根据加速度分析图(图 45c), 对 C 点, 有

$$a_C = a_{e1}^r + a_{e1}^n + a_{r1} + a_{c1} \quad (2)$$

其中

$$a_C = e\omega_0^2 = 2\text{cm/s}^2, \quad a_{e1}^n = a_{c1} = 0$$

把式(2)向 CM 方向和 CO_2 方向投影, 可求得

$$a_{e1}^r = \frac{4\sqrt{7}}{5}\text{cm/s}^2, \quad a_{r1} = \frac{2\sqrt{3}}{5}\text{cm/s}^2$$

因此摇杆的角加速度为

$$\epsilon = \frac{a_{e1}^r}{O_2C} = \frac{2\sqrt{3}}{15}\text{rad/s}^2$$

(2) 仍以摇杆为动系, 以凸轮上 M 点为动点, 则有

$$v_M = v_{e2} + v_{r2}$$

其中

$$v_{e2} = 0, \quad v_{r2} = v_{r1} = 2\text{cm/s}$$

可求得

$$v_M = v_{r2} = 2\text{cm/s}$$

再由

$$a_M = a_{e2}^r + a_{e2}^n + a_{r2} + a_{c2}$$

其中

$$a_{e2}^n = a_{c2} = 0, \quad a_{e2}^r = \epsilon \cdot O_2M = 2\text{cm/s}^2, \quad a_{r2} = a_{r1} = \frac{2\sqrt{3}}{5}\text{cm/s}^2$$

可求得

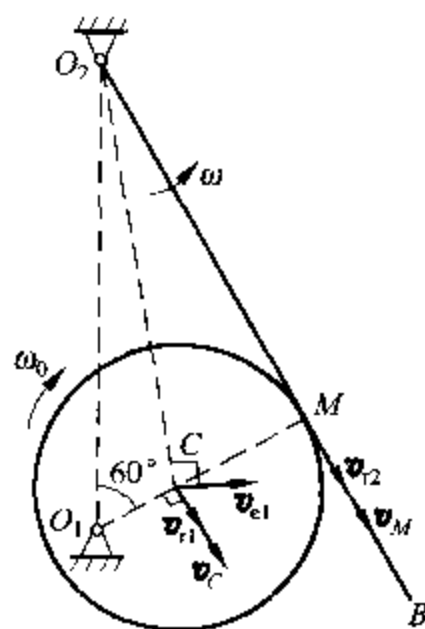


图 45b

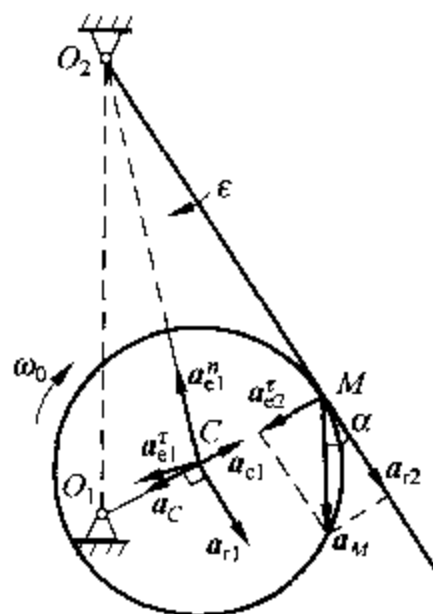


图 45c

$$a_M = \frac{4\sqrt{7}}{5} \text{ cm/s}^2$$

a_M 与杆的夹角为

$$\alpha = \arctan \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

46. 小环 M 将大圆环和丁字尺套在一起。大圆环半径为 r , 以匀角速度 ω 绕 O 轴转动, 在图 46a 所示 $\theta = 60^\circ$ 位置, 丁字尺 AB 沿水平面以等速 u 向左运动, 设 $u = r\omega$ 。试求此位置小环 M 的速度和加速度。(林敬圣, 浙江农业大学工程技术学院。改写自刘延柱、杨海兴《理论力学》的习题 7.15。原第 291 题, 1996, No. 4。)

解: 本题的特点在于 M 点的复合运动涉及了两个动系(一个平动, 一个定轴转动)的选取。取小环 M 为动点, 可选丁字尺 AB 和大圆环两个动系。根据速度合成定理有

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_{e1} + \mathbf{v}_{r1} = \mathbf{v}_{e2} + \mathbf{v}_{r2} \quad (1)$$

式中各速度分量方向如图 46b 所示, 其大小为

$$v_{e1} = u = r\omega, \quad v_{e2} = 2r\omega \cos 60^\circ = r\omega$$

将式(1)向 x 轴投影, 则得

$$-u + 0 = v_{e2} - v_{r2} \cos 60^\circ$$

$$v_{r2} = 2r\omega + \frac{u}{\cos 60^\circ} = 4r\omega$$

于是

$$v_{Mx} = v_{e2} - v_{r2} \cos 60^\circ = -r\omega$$

$$v_{My} = v_{r2} \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}r\omega$$

根据加速度合成定理, 有

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_{e1} + \mathbf{a}_{r1} = \mathbf{a}_{e2} + \mathbf{a}_{r2}^n + \mathbf{a}_{r2}^t + \mathbf{a}_{c2} \quad (2)$$

式中

$$a_{e1} = 0, \quad a_{e2} = 2r\omega^2 \cos 60^\circ = r\omega^2$$

$$a_{r2}^n = \frac{v_{r2}^2}{r} = 16r\omega^2, \quad a_{c2} = 2\omega v_{r2} = 8r\omega^2$$

方向如图 46c 所示。将(2)式向 n 轴投影, 则得

$$a_{r1} \cos 60^\circ = a_{e2} \cos 60^\circ + a_{r2}^n - a_{c2}$$

$$a_{r1} = a_{e2} + \frac{a_{r2}^n - a_{c2}}{\cos 60^\circ} = 17r\omega^2$$

于是

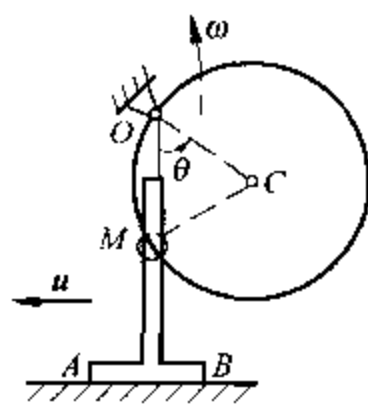


图 46a

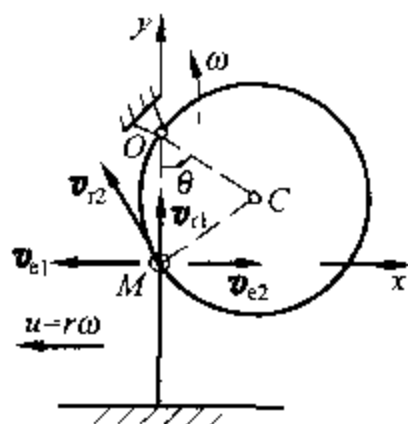


图 46b

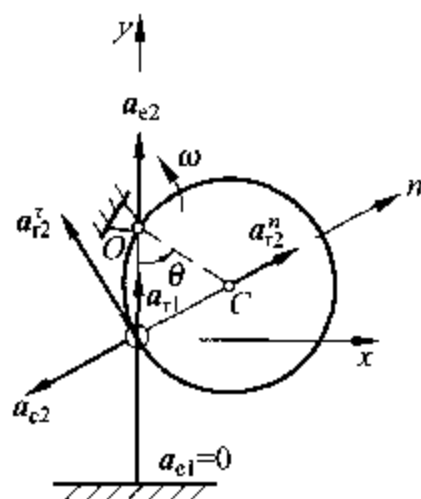


图 46c

$$a_{Mx}=0, \quad a_{My}=a_{r1}=17r\omega^2$$

47. 如图 47a 所示, 销钉 M 能在 DBE 杆的竖直槽内滑动, 同时又能在 OA 杆的槽内滑动。 DBE 杆以等速度 $v_1=10\text{cm/s}$ 向右运动, OA 杆以等角速度 $\omega=1\text{rad/s}$ 顺时针转动, 设某时刻 OA 与水平夹角 $\theta=45^\circ$, OM 的距离 $l=10\text{cm}$, 求 M 点的绝对运动轨迹在此位置的曲率半径。(虞润禄, 天津大学。引自天津大学 1983 年硕士研究生考题。原第 58 题, 1983, No. 6。)

解: 首先作速度分析。取销钉 M 为动点, 分别取曲杆 DBE 和直杆 OA 为动系, 地面为定系。根据速度合成定理, 如图 47b 所示, M 点的绝对速度为

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_{e1} + \boldsymbol{v}_{r1} = \boldsymbol{v}_{e2} + \boldsymbol{v}_{r2} \quad (1)$$

将式(1)投影到 \boldsymbol{v}_{e2} 方向上, 并考虑到 $v_{e1} = v_1 = 10\text{cm/s}$, $v_{e2} = l\omega = 10\text{cm/s}$, 得

$$v_{e1} \cos 45^\circ + v_{r1} \cos 45^\circ = v_{e2}$$

$$v_{r1} = \frac{v_{e2} - v_{e1} \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = 4.14\text{cm/s}$$

$$v_a = \sqrt{v_{e1}^2 + v_{r1}^2} = 10.82\text{cm/s}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{v_{r1}}{v_a}\right) = 22.45^\circ$$

再作加速度分析, 由加速度合成定理, 有

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_{e1} + \boldsymbol{a}_{r1} = \boldsymbol{a}_{e2} + \boldsymbol{a}_{r2} + \boldsymbol{a}_{c2} \quad (2)$$

式中各分量如图 47c 所示。

因为 $v_1 = \text{const.}$, 故 $a_{e1} = 0$, 所以有

$$\boldsymbol{a}_{r1} = \boldsymbol{a}_{e2} + \boldsymbol{a}_{r2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{r2}$$

将式(2)投影于 \boldsymbol{a}_{e2} 方向, 并考虑到 $a_{e2} = l\omega^2 = 10\text{cm/s}^2$, $a_{c2} = 2\omega v_{r2} = 8.28\text{cm/s}^2$, 得

$$a_{r1} \cos 45^\circ = a_{c2}$$

$$a_{r1} = 11.71\text{cm/s}^2$$

$$a_a = a_{r1} = 11.71\text{cm/s}^2$$

将 M 点的绝对加速度 \boldsymbol{a}_a 投影到与绝对速度 \boldsymbol{v}_a 垂直的方向(法线方向), 如图 47d 所示, 得

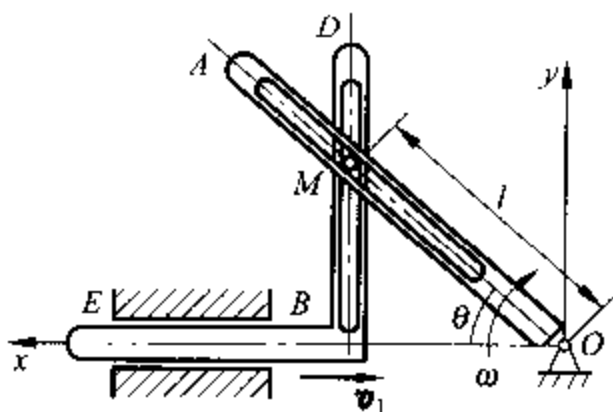


图 47a

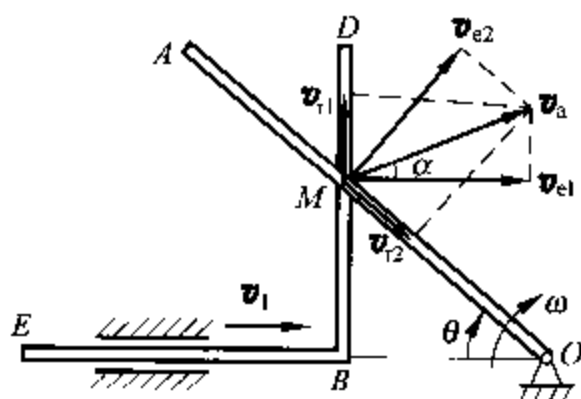


图 47b

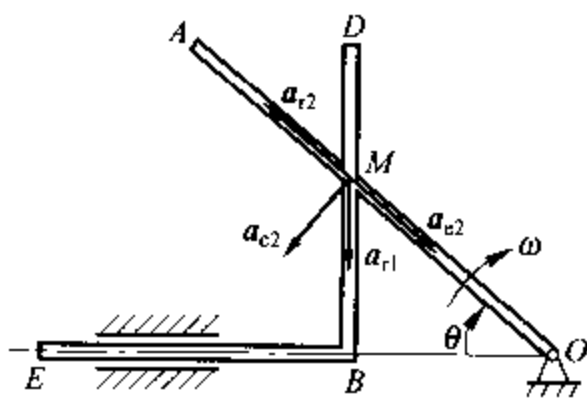


图 47c

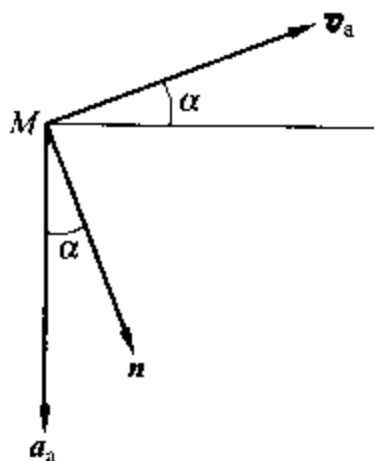


图 47d

M 点的法向加速度 $a_n'' = a_d \cos \alpha = 10.82 \text{ cm/s}^2$ 。故 M 点的绝对运动轨迹在该位置处的曲率半径为

$$\rho = \frac{v_d^2}{a_n''} = 10.82 \text{ cm}$$

48. 如图 48a、b、c 所示, 各机构中的 AB 杆均可在套筒 C 中滑移, 且其 A 端沿固定的水平面在图示平面内作直线运动。图 a 中套筒 C 和曲柄 OC 成直角地固连成一体; 图 b 中套筒 C 和曲柄 OC 成 α 角固连为一体; 图 c 中套筒 C 和曲柄 OC 通过铰链 C 相连接, 若 $OC = r$, 图示瞬时曲柄的角速度为 ω , AB 杆的角速度为 2ω , 方向如图 c 所示。请确定 AB 杆在图示瞬时的速度瞬心。(高云峰, 清华大学工程力学系, 选自费伟智, 杨长俊, 朱本华编《理论力学质疑一百例》, 上海交通大学工程力学系。原第 328 题, 2000, No. 3。)

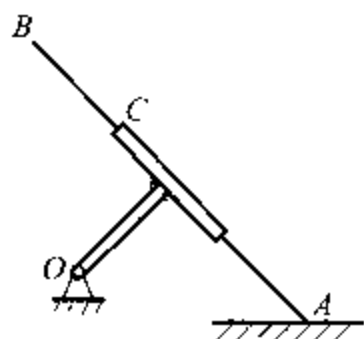


图 48a

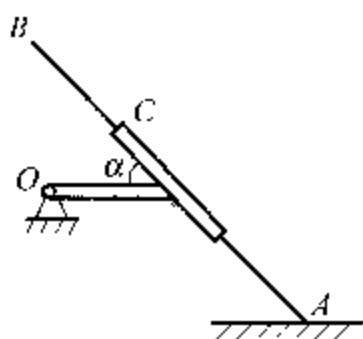


图 48b

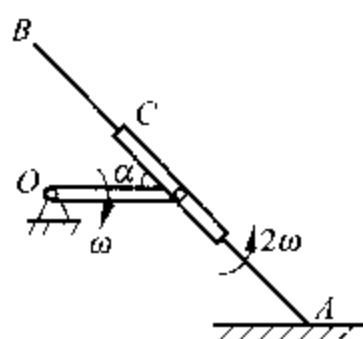


图 48c

解: 设 AB 杆的速度瞬心为 C^* , 则结果见图 48d、e、f。简要说明如下:

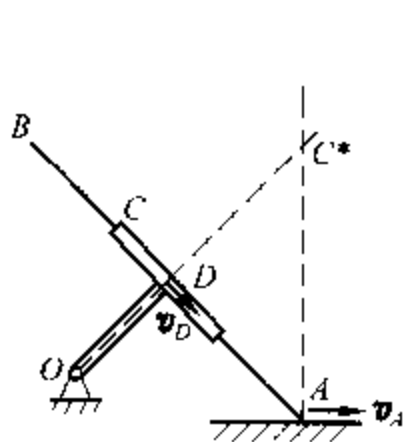


图 48d

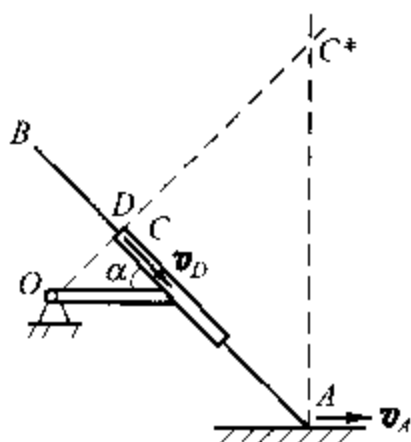


图 48e

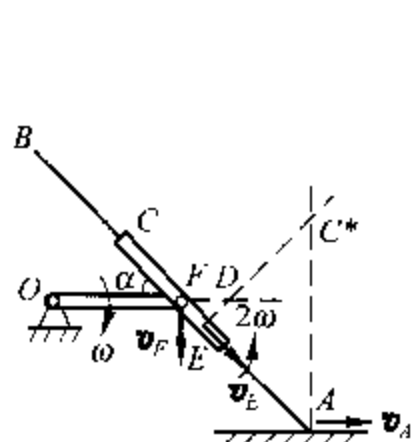


图 48f

(1) 过 O 点作 AB 杆的垂线, 与套筒 C 交于 D 点。套筒 C 绕 O 作定轴转动, 则其上 D 点速度方向沿 AB 方向。以套筒为动系, 杆上 D 点 (与套筒上 D 点重合) 为动点。根据 $v_a = v_e + v_r$, 牵连运动、相对运动均沿 AB 方向, 则杆上 D 点的绝对速度方向一定沿 AB 方向。 AB 杆上 A 、 D 点速度方向已知, 则瞬心 C^* 可作速度的垂线得到。

(2) 过 O 点作 AB 杆的垂线, 与套筒 C 交于 D 点。然后与 (1) 类似分析, 只不过 D 点有可能在套筒之外。

(3) 由于曲柄及 AB 杆的角速度已知, 可先求出套筒的速度瞬心 D 。过 D 点作

AB 杆的垂线,与 AB 杆交于 E 点,则 E 点速度方向与 AB 杆平行。A、E 两点速度方向已知,可定出速度瞬心 C^* 。

小结:这三个问题的共性是:利用了 AB 杆相对套筒的运动方向沿 AB 方向。找出套筒上速度沿 AB 方向的点(过套筒的瞬心作 AB 杆的垂线,与 AB 的交点即是)。

49. 任意匀质三角形平板在板平面内作平面运动,三个顶点为 A、B、C,其形心为 D。已知某瞬时三顶点的速度为 v_A, v_B, v_C ,试求其形心 D 的速度。(刘贵富,长春大学力学教研室。原第 170 题,1996, No. 4。)

解:先证如下一般性的结论。对于任意一刚性杆 AB,设其端点速度为 v_A, v_B ,杆长为 l 。C 是杆上任一点,设

$$\overline{AC} = \lambda l, \quad \overline{CB} = (1-\lambda)l \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

则根据图 49a,有

$$v_C = \lambda v_B + (1-\lambda) v_A$$

证明:设杆的角速度为 ω , O 为 AB 杆的速度瞬心,则有

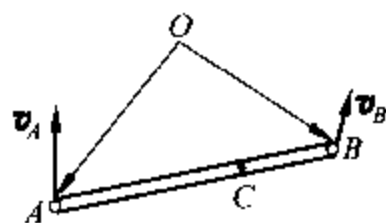


图 49a

$$v_B = v_A + \omega \times \overline{AB}$$

$$v_C = v_A + \omega \times \overline{AC} = v_A + \omega \times (\lambda \overline{AB})$$

$$= v_A + \lambda \omega \times (\overline{OB} - \overline{OA})$$

$$= v_A + \lambda (v_B - v_A) = \lambda v_B + (1-\lambda) v_A$$

再回到本题,由图 49b,有

$$\overline{AG} = \frac{1}{2} \overline{AB}, \quad \overline{CD} = \frac{1}{3} \overline{GC}$$

利用前面的结论,所以有

$$v_G = \frac{1}{2} (v_A + v_B)$$

$$v_D = \frac{1}{3} v_C + \frac{2}{3} v_G = \frac{1}{3} (v_A + v_B + v_C)$$

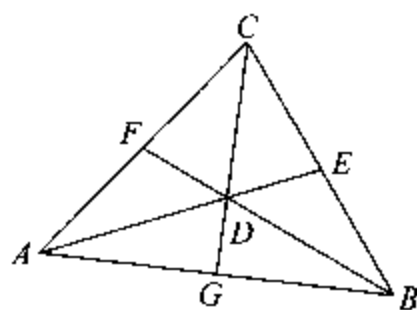


图 49b

编者注:加速度是否有类似关系?

50. 一平面机构如图 50a 所示,已知 $\overline{OA} = \overline{BC} = \sqrt{3}r$, $\overline{AB} = 2\overline{CD} = 2r$, OA 杆以匀角速度 ω 绕 O 轴转动, CD 杆以匀角速度 2ω 绕 D 轴转动。在图示位置, $OA \perp AB$, $CD \parallel AB$, BC 与 AB 夹角为 60° 。试求该瞬时各杆的瞬时速度中心位置和角速度。(林敬圣,浙江农业大学力学组。原第 201 题,1991, No. 1。)

解:机构中 OA 杆和 CD 杆作定轴转动, AB 杆和 BC 杆作平面运动, A、C 点的速度方向如图 50b 所示,其大小为

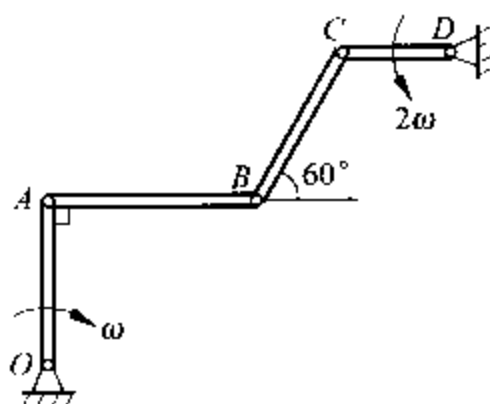


图 50a

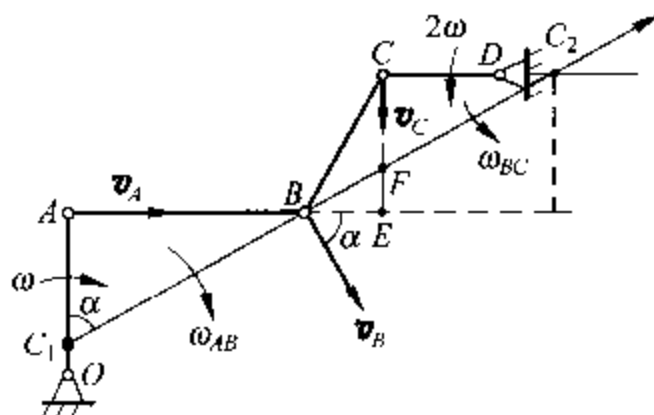


图 50b

$$v_A = \sqrt{3}r\omega, \quad v_C = 2r\omega \quad (1)$$

设 B 点速度 v_B 的方向与 AB 的夹角为 α , 分别作 A 、 B 、 C 三点速度方向的垂线, 则交点 C_1 、 C_2 分别为 AB 杆和 BC 杆的速度瞬心。设 AB 杆和 BC 杆的角速度分别为 ω_{AB} 、 ω_{BC} , 则有

$$v_B = \omega_{AB} \cdot \overline{BC_1} = \frac{v_A}{\overline{AC_1}} \cdot \overline{BC_1} = \frac{v_A}{\cos \alpha}$$

$$v_B = \omega_{BC} \cdot \overline{BC_2} = \frac{v_C}{\overline{CC_2}} \cdot \overline{BC_2} = \frac{v_C \sin 120^\circ}{\sin(\alpha - 30^\circ)}$$

所以有

$$v_A \sin(\alpha - 30^\circ) = v_C \sin 120^\circ \cos \alpha \quad (2)$$

将式(1)代入式(2), 有

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\overline{AC_1} = 2r \tan 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}r}{3}, \quad \overline{BE} = \frac{\sqrt{3}}{2}r, \quad \overline{EF} = \frac{r}{2}$$

$$\overline{CE} = \overline{BC} \sin 60^\circ = \frac{3r}{2}, \quad \overline{CF} = \overline{CE} - \overline{EF} = r$$

所以,

$$\overline{CC_2} = \overline{CF} \tan \alpha = \sqrt{3}r, \quad \omega_{AB} = \frac{v_A}{\overline{AC_1}} = \frac{3\omega}{2},$$

$$\omega_{BC} = \frac{v_C}{\overline{CC_2}} = \frac{2\sqrt{3}\omega}{3}$$

51. 半径为 r 的圆柱沿水平面作无滑动的滚动。若已知角速度 ω 和角加速度 ϵ , 且均不为零(图 51a)。求: (1) 圆柱上速度方向和加速度方向一致的点的集合; (2) 速度方向和加速度方向互相垂直的点的集合; (3) 证明圆柱的速度瞬心、

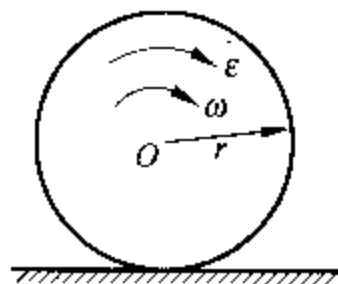


图 51a

加速度瞬心和圆心的连线为一个直角三角形。(陈嘉,南通纺织工学院。原第107题,1985,No.6。冯木友,淮南矿业学院理论力学教研室。原第159题,1988,No.2。)

解: 设 P 为圆柱与水平面的接触点, 取圆上任意一点 M , 设 $\overline{PM} = \rho$, 沿 PM 的单位矢量为 \mathbf{n} , 与 PM 垂直方向的单位矢量为 $\boldsymbol{\tau}$ (图 51b)。 P 为速度瞬心, M 点的速度为

$$\mathbf{v}_M = \boldsymbol{\omega} \times \overline{PM} = \omega \rho \boldsymbol{\tau} \quad (1)$$

根据式(1), M 点的速度方向与 $\boldsymbol{\tau}$ 一致。 M 点的加速度为

$$\mathbf{a}_M = \mathbf{a}_P + \boldsymbol{\varepsilon} \times \overline{PM} - \omega^2 \cdot \overline{PM} = \mathbf{a}_P + \varepsilon \rho \boldsymbol{\tau} - \omega^2 \rho \mathbf{n} \quad (2)$$

其中 $a_P = \omega^2 r$, 方向向上。

(1) 若 \mathbf{a}_M 沿 $\boldsymbol{\tau}$ 方向, 则式(2)应满足

$$\mathbf{a}_M \cdot \mathbf{n} = 0$$

即

$$\omega^2 r \sin \theta - \omega^2 \rho = 0$$

即

$$\rho = r \sin \theta$$

所以圆柱上速度方向与加速度方向一致的点的集合是圆, 其直径为 r , 圆心在 OP 中点 (图 51c 中以 OP 为直径的圆)。

(2) 若 \mathbf{a}_M 沿 \mathbf{n} 方向, 则式(2)应满足

$$\mathbf{a}_M \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$$

即

$$-\omega^2 r \cos \theta + \varepsilon \rho = 0$$

即

$$\rho = \frac{\omega^2}{\varepsilon} r \cos \theta$$

所以圆柱上速度方向与加速度方向相垂直的点的集合是圆, 其圆心 A 在水平轴上, 直径大小为 $\frac{\omega^2 r}{\varepsilon}$ (图 51c 中以 A 为圆心的圆)。

此外, 由图 51c 可知, 这两个集合圆有两交点 P 和 C 。根据题意, 在 P 和 C 点, 圆柱的加速度方向既要与该点的速度方向平行, 又要垂直, 因此只有两种可能性: 或者该点的速度为零 (P 点为速度瞬心); 或者该点的加速度为零 (C 点为加速度瞬心)。

(3) 根据前面分析, 圆柱的速度瞬心 P 、加速度瞬心 C 和圆心 O 三点共圆, 且 OP 为直径, 则这三点连线构成直角三角形。

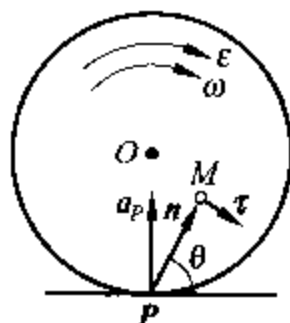


图 51b

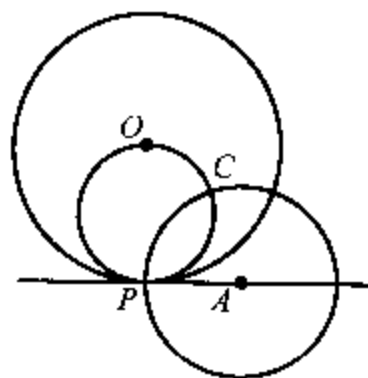


图 51c

编者注：本题(1)、(2)问属于原第107题，第(3)问属于原第159题。

52. 刚体作平面运动(图52)，其上一点A的速度为u，刚体的角速度为 ω ，求动速度瞬心C点(固连于刚体上的点)的加速度 a_C ，并证明 $a_C \cdot u^\circ = \dot{u} - \frac{\dot{\omega}u}{\omega}$ ， u° 为u的单位矢量。

(殷金生，北京大学力学系，引自 F. Chorlton, Textbook of Dynamics. 原第242题，1993, No. 6.)

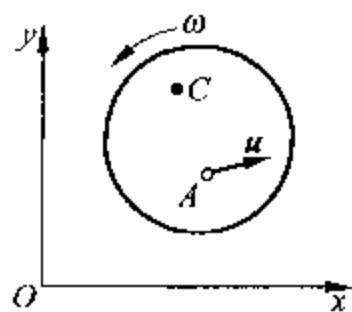


图 52

解：如图52，有几何关系

$$r_A = r_C + r \quad (1)$$

根据题意，有

$$\dot{r}_A = u = u u^\circ, \quad \dot{r}_C = 0 \quad (2)$$

由式(1)可得

$$\ddot{r}_A = \ddot{r}_C + \epsilon \times r - \omega^2 r \quad (3)$$

式(3)两边点乘 u° ，注意到 r 与 u° 垂直，有

$$a_C \cdot u^\circ = a_A \cdot u^\circ - \dot{\omega} r \quad (4)$$

根据式(1)、(2)，有

$$u = r\omega, \quad a_A = \dot{u}u^\circ + u\dot{u}^\circ \quad (5)$$

利用单位矢量与其导数垂直的结论，把式(5)代入式(4)，得

$$a_C \cdot u^\circ = \dot{u} - \frac{\dot{\omega}u}{\omega}$$

53. 证明加速度投影定理：在任一瞬时，平面图形上任意两点的加速度按角加速度的方向转过角度 $\alpha = \arctan \frac{\epsilon}{\omega^2}$ ，然后在该两点连线之垂直方向上的投影相等。(卢其宜，江西省机械工业学校。原第226题，1992, No. 6.)

证明：如图53所示，设平面图形上任意两点A、B的加速度分别为 a_A 和 a_B ，它们与连线AB的夹角分别为 θ_A 、 θ_B 。设P为加速度瞬心，因为A、B两点的加速度 a_A 和 a_B 与该两点到P的连线之间的夹角相等，且有

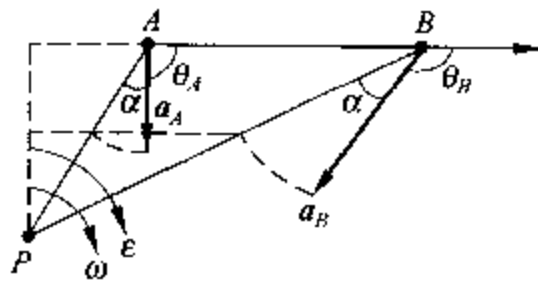


图 53

$$\alpha = \arctan \frac{\epsilon}{\omega^2}$$

则在 $\triangle PAB$ 中，根据正弦定理有

$$\frac{PA}{\sin(\theta_B + \alpha)} = \frac{PB}{\sin(\theta_A + \alpha)}$$

又各点加速度的大小与该点到P的距离成正比，即

$$\overline{PA} : \overline{PB} = a_A : a_B$$

所以有

$$a_A \sin(\theta_A + \alpha) = a_B \sin(\theta_B + \alpha)$$

上式的物理意义就是: A 点、B 点的加速度按角加速度的方向转过角度 $\alpha = \arctan \frac{\epsilon}{\omega^2}$ (转动后加速度大小不变, 方向指向加速度瞬心 P 点), 然后在 AB 连线之垂直方向上的投影相等。

54. 一刚体作平面运动, 其角速度为 ω 。某瞬时它的动速度瞬心为 C (刚体上的点), 此时相应的定速度瞬心为 P, P 点在定瞬心轨迹上的运动速度为 v_P 。求证 $a_C = v_P \times \omega$, 其中 a_C 为动瞬心 C 点的加速度。(吴黎明, 北京大学力学系 82 级学生。原第 81 题, 1984, No. 6。)

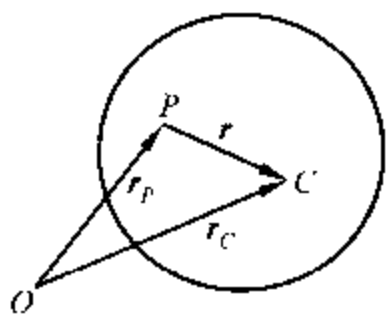


图 54

证明: 设 O 点为固定参考点 (图 54)。由于 C 是刚体上的点, P 是定速度瞬心, 刚体在平面运动中下式总成立

$$v_C = \omega \times r = \omega \times (r_C - r_P) \quad (1)$$

式(1)两边对时间 t 求导数, 有

$$a_C = \epsilon \times r + \omega \times (v_C - v_P) \quad (2)$$

而当 C 为动瞬心时, 有

$$\overline{PC} = 0, \quad v_C = 0 \quad (3)$$

把式(3)代入式(2), 即得

$$a_C = v_P \times \omega$$

55. 如果刚体上 A、B 两点的加速度 a_A 、 a_B 的大小及方向均已知 (如图 55a 所示), 试用作图法求出刚体的加速度瞬心。(高云峰, 清华大学工程力学系。原第 318 题, 1999, No. 1。)

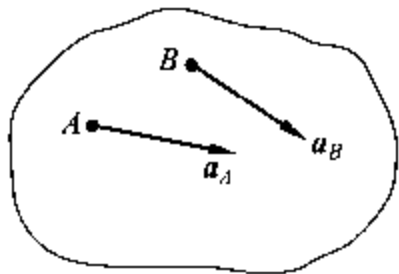


图 55a

解: 设 a_A 的两端点为 A, A', a_B 的两端点为 B, B', AA' 与 BB' 的延长线交于 D 点。则过 A、B、D 三点作一圆, 过 A'、B'、D 三点作另一圆, 设两圆的另一交点为 C*, 则 C* 即为刚体在此瞬时的加速度瞬心 (图 55b)。

证明: 设刚体在某瞬时的角速度为 ω , 角加速度为 ϵ 。根据图 55c, 对于刚体上的任意点 M, 如果 C* 是加速度瞬心, 则应有关系式

$$\alpha = \arctan \left(\frac{\epsilon}{\omega^2} \right) = \text{const}_1 \quad (1)$$

$$\frac{a_M}{C^*M} = \sqrt{\omega^4 + \epsilon^2} = \text{const}_2 \quad (2)$$

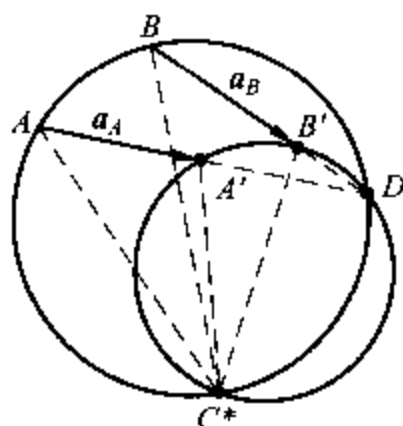


图 55b

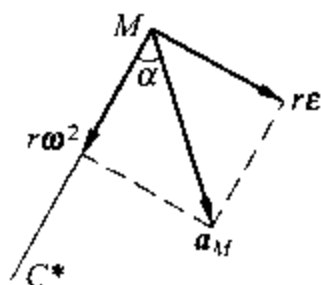


图 55c

再回到图 55b, 由于几何关系, 有

$$\angle A'AC^* = \angle B'BC^* \quad (3)$$

$$\angle DA'C^* = \angle DB'C^* \Rightarrow \angle AA'C^* = \angle BB'C^* \quad (4)$$

由式(3)、(4), 因此有

$$\triangle AA'C^* \sim \triangle BB'C^*$$

所以有

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{AC^*}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{BC^*}} \quad (5)$$

因此式(3)与式(1)相对应, 式(5)与式(2)相对应。即 C^* 为加速度瞬心。

56. 证明: 在某一瞬时, 若平面图形上任意三点的加速度矢量的延长线相交于一点, 则该交点即为此瞬时平面图形的加速度瞬心, 而且此瞬时图形的角加速度等于零。(卢其宜, 江西省机械工业学校。原第 218 题, 1992, No. 3。)

证明: 在某瞬时, 设平面图形上任意两点 A 和 B 的加速度分别为 a_A 和 a_B , 它们的延长线交于 C 点(图 56a)。设 P 为加速度瞬心。由加速度瞬心的定义, 有

$$\angle CAP = \angle CBP = \alpha = \arctan \frac{\epsilon}{\omega^2}$$

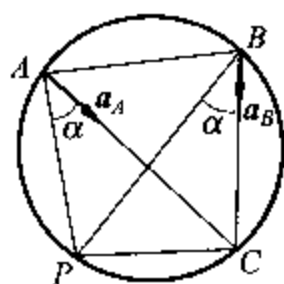


图 56a

故 P、A、B、C 四点共圆。于是可得如下结论: 在某一瞬时, 加速度瞬心在平面图形上任意两点加速度矢量延长线的交点与该两点所组成的三角形的外接圆上。

设某瞬时平面图形上任意三点 A、B、C 的加速度矢量 a_A 、 a_B 、 a_C 的延长线相交于一点 P(图 56b), 根据前述结论可作出三个外接圆。P 点应同时位于这三个外接圆上, 所以这三个圆的公共交点 P 即为加速度瞬心。

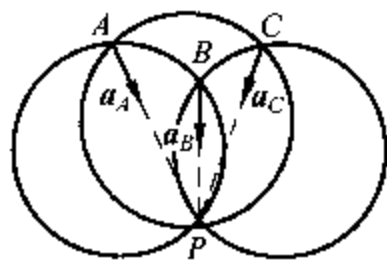


图 56b

由图 56b 可见, A、B、C 三点相对 P 点只有法向加速度, 而切向加速度为零。所以, 在此瞬时, 图形的角加速度等于零。

57. 图 57a 中直杆 AB 表示齿条, 圆轮 O 表示齿轮。A 端以 $v_A = 30\text{cm/s}$ 的速度向右匀速运动, 并带动半径为 $r = 5\text{cm}$ 的齿轮绕 O 轴转动。求当 $\theta = 60^\circ$ 时, 齿条 AB 以及齿轮 O 的角速度与角加速度。(吕玫, 上海交通大学土木工程系, 16191 班。原第 210 题, 1991, No. 5。)

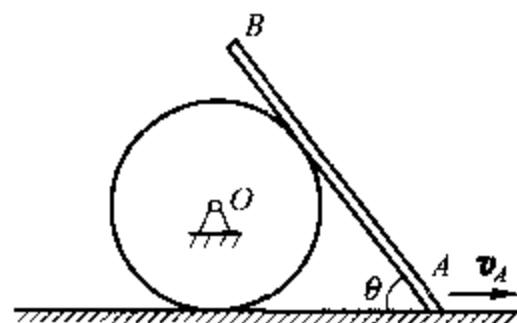


图 57a

解: 建立直角坐标系 $O'xy$ 如图 57b 所示, 设 $\overline{O'A} = x = \overline{AC}$, 有

$$x = \frac{r}{\tan(\theta/2)} = 5\sqrt{3}\text{cm}$$

上式对时间求导, 得

$$\dot{x} = -\frac{r\dot{\theta}}{2\sin^2(\theta/2)} = v_A$$

所以齿条 AB 的角速度为

$$\omega_{AB} = \dot{\theta} = -\frac{2\dot{x}}{r}\sin^2\frac{\theta}{2} = -3\text{rad/s}$$

角加速度为

$$\epsilon_{AB} = \ddot{\theta} = \frac{2\dot{x}^2}{r^2}\sin\theta\sin^2\frac{\theta}{2} = 9\sqrt{3}\text{rad/s}^2$$

因为

$$v_C = v_A \cos\theta = 15\text{cm/s}$$

所以齿轮 O 的角速度为

$$\omega = \frac{v_C}{r} = 3\text{rad/s}$$

以 A 为基点, 分析 C 点的加速度, 有

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\epsilon}_{AB} \times \overline{AC} - \omega_{AB}^2 \overline{AC}$$

其中 $a_A = 0$, 所以有

$$a_C^n = \omega_{AB}^2 \overline{AC}, \quad a_C^t = \epsilon_{AB} \overline{AC} = \epsilon r$$

因此得

$$\epsilon = \frac{\epsilon_{AB} \cdot \overline{AC}}{r} = 9\sqrt{3}\text{rad/s}^2$$

编者注: 本题混合使用了求导与刚体平面运动的公式。实际上若采用点的复合运动公式, 就可避免求导。

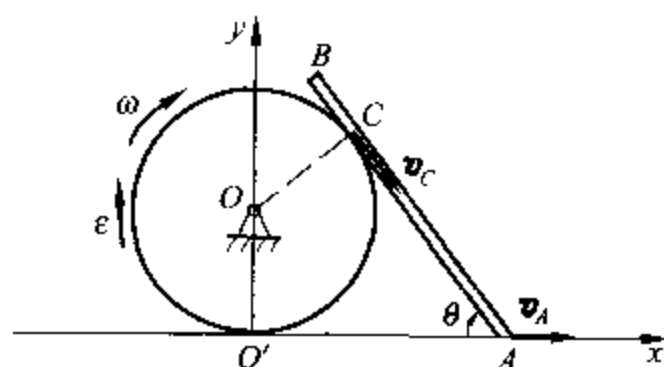


图 57b

58. 半径为 r 的圆柱体, 在水平地面上作纯滚动。一杆 AB 斜靠在它上面, 杆与圆柱之间无相对滑动, 杆端 A 不脱离地面。已知柱心 O 的速度 v_0 为常值, 杆与地面夹角为 φ (图 58a), 求杆 AB 的角速度 ω 和角加速度 ϵ 。(生宝琳, 天津河北工学院理论力学教研室。原第 177 题, 1990, No. 1。)

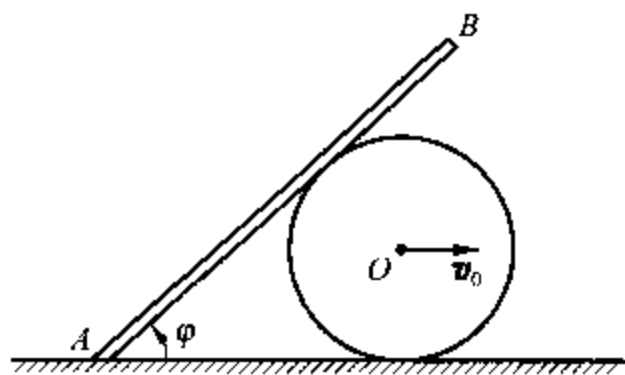


图 58a

解: 设杆 AB 与圆柱体的接触点为 D , 易知此瞬时圆柱体上 D 点速度方向如图 58b 所示。选杆 AB 为动参考系, 圆柱体上 D 点为动点, 则有

$$v_D = v_e + v_r$$

由于杆与圆柱之间无相对滑动, 所以有

$$v_D = v_e \quad (1)$$

其中 v_D 表示圆柱体上 D 点速度, v_e 表示杆 AB 上的 D 点速度。因此式(1)表示杆 AB 上 D 点的速度就是圆柱体上 D 点的速度。杆 AB 作平面运动, 因此易于求出杆 AB 的速度瞬心为 P (图 58b)。根据几何关系及运动关系, 有

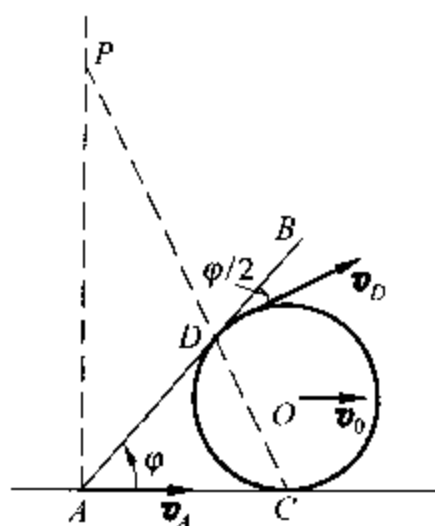


图 58b

$$v_D = 2v_0 \cos \frac{\varphi}{2}$$

$$v_A \cos \varphi = v_D \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{v_0 (1 + \cos \varphi)}{\cos \varphi}$$

所以杆 AB 的角速度为

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_0 (1 - \cos \varphi)}{r \cos \varphi}$$

杆 AB 的角加速度为

$$\epsilon = \ddot{\varphi} = \frac{v_0^2 \tan \varphi \sec^2 \varphi (1 - \cos \varphi)}{r^2}$$

编者注: 本题混合使用了求导与刚体平面运动的公式。实际上若采用点的复合运动公式, 就可避免求导。

59. 半径为 r 的小圆柱 O 沿固定的半径为 R 的大圆柱内壁作纯滚动 (图 59a), 小圆柱中心速度 v_0 为常量。A 为大圆柱内壁上的固定点, 设某瞬时连线 CO 与 CA 间的夹角为 β , 试求固定点 A 相对小圆柱的速度和加速度。(姜锐, 浙江大学力学系。引自 1991 年浙江大学硕士研究生入学试题。原第 230 题, 1993, No. 1。)

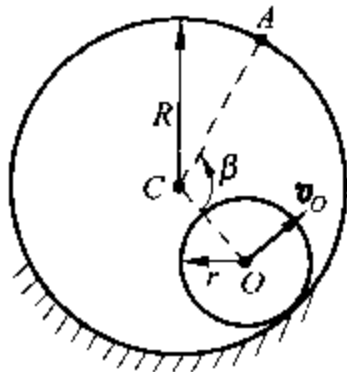


图 59a

解：小圆柱的角速度 $\omega_0 = \frac{v_0}{r}$ (常量)。为求 A 点相对于小圆柱的速度和加速度，可将小圆柱作为参考体，在参考系中看，大圆柱沿小圆柱作纯滚动，其滚动角速度的大小为 $\omega = \omega_0$ ，方向相反 (图 59b)。接触点 P 为速度瞬心，所以有

$$v_A = \omega \times \overrightarrow{PA}, \quad v_A = \omega \cdot 2R \sin \frac{\beta}{2} = \frac{2Rv_0}{r} \sin \frac{\beta}{2}$$

$$v_C = \omega \times \overrightarrow{PC}, \quad v_C = \omega R = \frac{Rv_0}{r} \text{ (常量)}$$

$$a_C = \frac{v_C^2}{R-r} = \frac{\omega^2 R^2}{R-r}$$

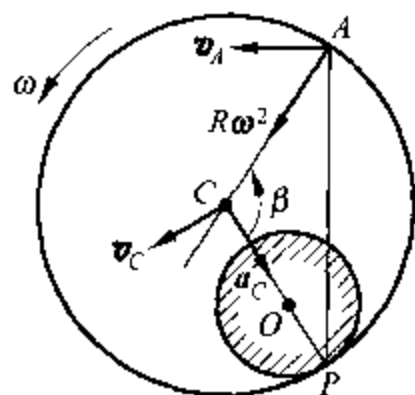


图 59b

圆柱的角加速度为

$$\varepsilon = \dot{\omega} = 0$$

所以 A 点的相对加速度为

$$a_A = a_C + \varepsilon \times \overrightarrow{CA} - \omega^2 \overrightarrow{CA}$$

$$a_A = \sqrt{a_C^2 + \omega^4 R^2 + 2a_C \omega^2 R \cos(180^\circ - \beta)}$$

$$= \frac{v_0^2 R}{r^2 (R-r)} \sqrt{r^2 + 4R(R-r) \sin^2 \frac{\beta}{2}}$$

编者注：本题实际上是采用了“反转法”进行求解。要注意求 a_C 时，C 点只是在该瞬时绕 P 点运动，但 C 点始终绕 O 点作圆周运动。

60. 曲柄 OA 以匀角速度 ω 绕 O 轴转动，连杆 AB 通过滑块 B 带动摇杆 $O_1 D$ 绕 O_1 轴摆动，同时在 C 处与滑块 C 铰链。设 $\omega = 10 \text{ rad/s}$, $\overline{OO_1} = 50 \text{ cm}$, $\overline{OA} = l = 10\sqrt{3} \text{ cm}$, $\overline{AC} = \overline{CB} = 2l$ 。求图 60a 所示 OA 处于竖直位置时摇杆 $O_1 D$ 的角加速度。(刘桂斋，山东矿业学院理论力学教研室。原 110 题，1986, No. 1.)

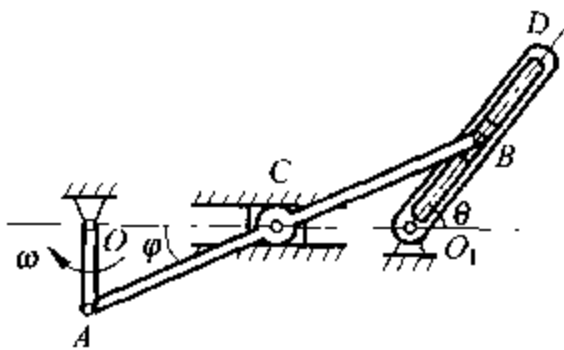


图 60a

解：由图 60b 所示，不难求得此时

$$\varphi = 30^\circ, \quad \theta = 60^\circ$$

对曲柄 AC，由速度投影定理，得

$$v_C = v_A$$

从而

$$\omega_{AB} = 0$$

设 $\overline{O_1 B} = r$ ，此时 $r = 20 \text{ cm}$ ， v_B 与 BO_1 的夹角为 60° 。因此有

$$v_r = v_B \cos 60^\circ = \frac{l\omega}{2}$$

由

$$v_c = r \dot{\theta} = v_B \sin 60^\circ$$

得

$$\dot{\theta} = \frac{3\omega}{4}$$

设 AB 杆的角加速度为 ϵ_0 (图 60c), 因

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_A + \epsilon_0 \times \overline{AC} - \omega_{AB}^2 \overline{AC} = \mathbf{a}_A + \epsilon_0 \times \overline{AC}$$

又 $a_A = l\omega^2$, \mathbf{a}_C 沿 x 轴方向, 上式点乘 \mathbf{j} , 得到

$$0 = l\omega^2 - 2l\epsilon_0 \sin 60^\circ$$

即

$$\epsilon_0 = \frac{\sqrt{3}\omega^2}{3}$$

又因

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \epsilon_0 \times \overline{AB} \quad (1)$$

同时 B 点加速度可由复合运动得到, 为

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c \quad (2)$$

联立式(1)、(2), 并向 O_1D 垂直方向投影, 得

$$r \ddot{\theta} - 2v_c \dot{\theta} = l\omega^2 \cos 60^\circ - 4l\epsilon_0 \cos 30^\circ$$

由此可解得

$$\ddot{\theta} = -\frac{3\sqrt{3}\omega^2}{8} \approx -65 \text{ rad/s}^2$$

即杆 O_1D 此时的角加速度为 65 rad/s^2 , 方向为顺时针。

61. 边长为 l 的等边三角形板 ABC 在其所处的平面内作平面运动, 已知在某瞬时 A 点的速度 $\mathbf{v}_A = \omega_0 \overline{AC}$, 加速度 $\mathbf{a}_A = 2l\omega_0^2 \overline{AC}$ (图 61a), B 点速度的大小 $v_B = \frac{1}{2}l\omega_0$, 加速度的大小 $a_B = \frac{1}{2}l\omega_0^2$, 其中 l, ω_0 为常量。求在此瞬时 C 点速度及加速度的大小。(孙纯义, 山东莱阳农学院力学教研室。原第 25 题, 1982, No. 2。)

解: 设 B 点速度与 AB 的夹角为 α (图 61a), 由速度投影定理

$$v_A \cos 60^\circ = v_B \cos \alpha$$

代入已知条件, 有

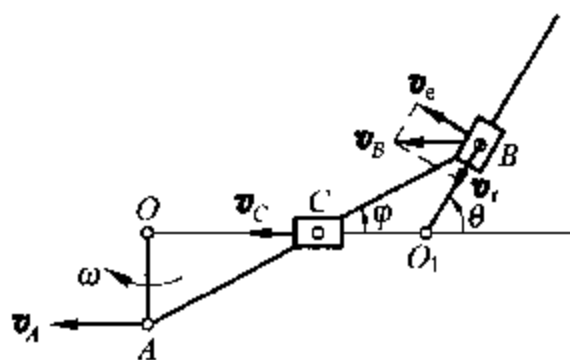


图 60b

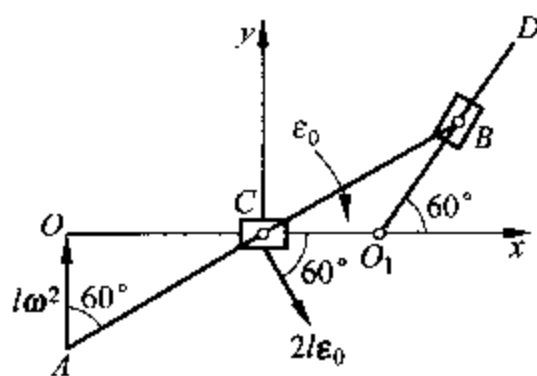


图 60c

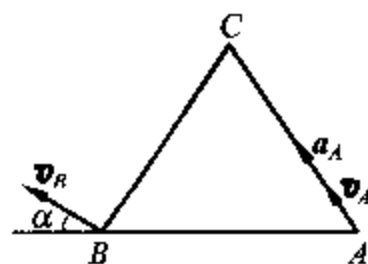


图 61a

$$\cos \alpha = \frac{v_A \cos 60^\circ}{v_B} = 1$$

因此

$$\alpha = 0$$

即 v_B 沿 AB 方向(图 61b)。于是三角板 ABC 的速度瞬心 P 的位置如图 61b 所示。

三角板平面运动角速度为

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_0 \text{ (逆时针方向)}$$

由几何关系得

$$\overline{PC} = \sqrt{\overline{PB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \overline{PB} \cdot \overline{BC} \cos 150^\circ} = \sqrt{\frac{7}{3}} l$$

于是 C 点速度的大小为

$$v_C = \overline{PC} \cdot \omega = \frac{\sqrt{7}}{2} l \omega_0$$

方向与 PC 垂直。

下面求 a_C 。设 B 点加速度 a_B 与 AB 的夹角为 β (图 61c), 板的角加速度为 ϵ (逆时针方向为正), 由加速度公式

$$a_B = a_A - \omega^2 \overline{AB} + \epsilon \times \overline{AB} \quad (1)$$

将式(1)向 AB 方向投影得

$$a_B \cos \beta = a_A \cos 60^\circ - l \omega^2$$

即

$$\left(\frac{1}{2} l \omega_0^2 \right) \cos \beta = (2 \omega_0^2 l) \frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \omega_0 \right)^2 l$$

因此得

$$\cos \beta = \frac{1}{2}, \quad \beta = \pm 60^\circ$$

再将式(1)投影到垂直于 AB 的方向得

$$a_B \sin \beta = a_A \sin 60^\circ - l \epsilon$$

即

$$\left(\frac{1}{2} l \omega_0^2 \right) \sin \beta = (2 \omega_0 l) \frac{\sqrt{3}}{2} - l \epsilon$$

亦即

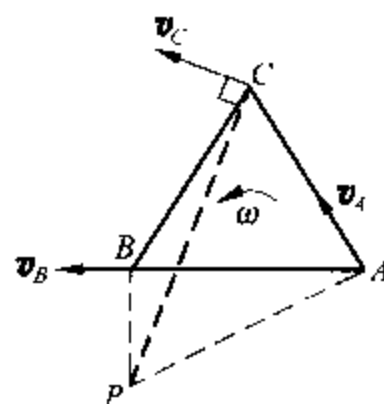


图 61b

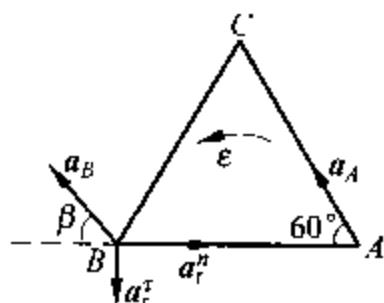


图 61c

$$\varepsilon = \frac{3\sqrt{3}}{4}\omega_0^2 \quad (\beta=60^\circ) \quad \text{或} \quad \varepsilon = \frac{5\sqrt{3}}{4}\omega_0^2 \quad (\beta=-60^\circ)$$

再对 C 点应用加速度公式(图 61d), 有

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_A - \omega^2 \overrightarrow{AC} + \varepsilon \times \overrightarrow{AC} \quad (2)$$

将式(2)分别向 x 轴和 y 轴方向投影得

$$a_{Cx} = l\varepsilon$$

$$a_{Cy} = -a_A + l\omega^2 = -\frac{5}{4}l\omega_0^2$$

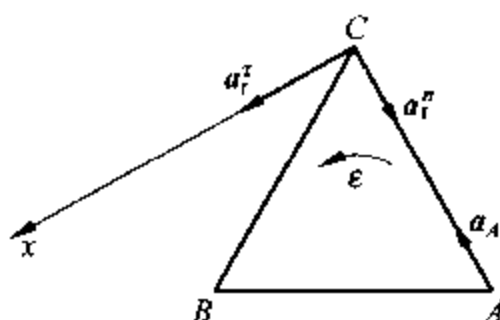


图 61d

因此, C 点加速度的大小

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = \sqrt{l^2\varepsilon^2 + \frac{25}{16}l^2\omega_0^4}$$

于是

$$a_C = \frac{\sqrt{13}}{2}l\omega_0^2 \quad (\beta=60^\circ)$$

或

$$a_C = \frac{5}{2}l\omega_0^2 \quad (\beta=-60^\circ)$$

编者注: 原题还包括求加速度的瞬心, 现略去。

62. 两滚轮轴半径均为 0.5m, 由杆 AB 连在一起, 杆 A 端上的滑块按规律 $S_A(t) = \frac{\sqrt{3}}{3}t^3$ 沿竖直导杆运动, 假设各处之间均无滑动。试求 $t=1\text{s}$ 时, 滚轮 2 的角速度 ω_2 和角加速度 ε_2 。设此瞬时机构位置如图 62a 所示, AB 杆与水平的夹角 $\theta=30^\circ$ 。(黄新平, 新疆阿拉尔塔里木农垦大学农机系, 引自 K. C. 科列斯尼夫《新编理论力学典型作业 1000 题》。原第 193 题, 1990, No. 5。)

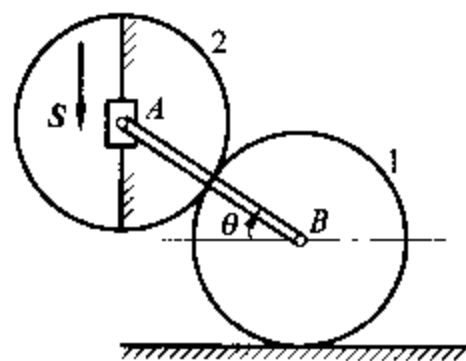


图 62a

解: 已知图示瞬时

$$v_A = \sqrt{3}\text{m/s}, \quad a_A = 2\sqrt{3}\text{m/s}^2$$

假设各构件的角速度、角加速度的正向如图 62b 和图 62c 所示。

(1) 速度分析

由速度投影定理, 有

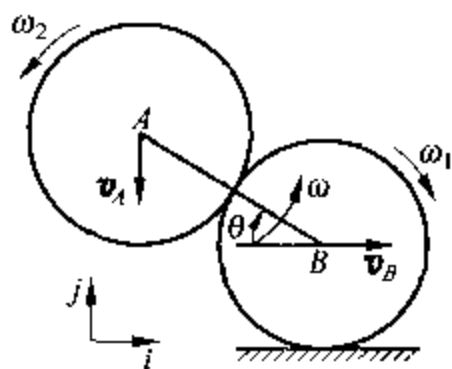


图 62b

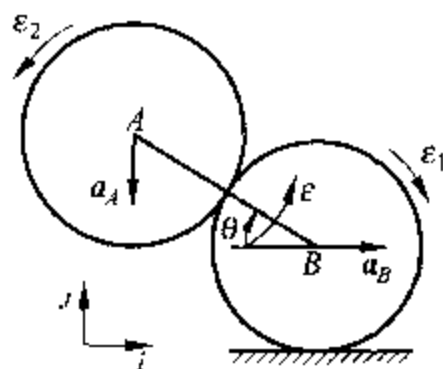


图 62c

$$v_A \cos 60^\circ = v_B \cos 30^\circ$$

得

$$v_B = 1 \text{ m/s}$$

由

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}$$

上式向水平方向投影,得

$$v_B = 2\omega r \cos 60^\circ$$

故

$$\omega = 2 \text{ rad/s}$$

又

$$\omega_1 = \frac{v_B}{r} = 2 \text{ rad/s}$$

以 AB 杆为动参考系,两轮的相对角速度的大小均为 ω_r ,转向相反,故有

$$\omega_1 = \omega_r - \omega, \quad \omega_2 = \omega_r + \omega$$

所以

$$\omega_2 = \omega_1 + 2\omega = 6 \text{ rad/s}$$

(2) 加速度分析

因为

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{AB} - \omega^2 \overrightarrow{AB}$$

上式分别向水平、垂直方向投影,有

$$0 = -a_A + 2r\varepsilon \cos 30^\circ + 2r\omega^2 \cos 60^\circ$$

$$a_B = 2r\varepsilon \cos 60^\circ - 2r\omega^2 \cos 30^\circ$$

得

$$\varepsilon = \frac{4(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}}, \quad a_B = \frac{2(\sqrt{3}-4)}{\sqrt{3}}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{a_B}{r} = \frac{4(\sqrt{3}-4)}{\sqrt{3}}$$

以 AB 杆为动参考系, 两轮的相对角加速度的大小均为 ε , 但转向相反。由公式

$$\varepsilon_a = \varepsilon_e + \varepsilon_r + \omega_e \times \omega_r$$

这里 $\omega_e = \omega$, 且 $\omega_e \times \omega_r = 0$, 故有

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_r - \varepsilon, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_r + \varepsilon$$

所以

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon = 4(3 - 2\sqrt{3}) \text{ rad/s}^2$$

63. 长为 r 的曲柄 OA 以匀角速度 ω 绕 O 轴转动, 通过铰接于 A 点的套筒 C ($\overline{AC} = a$) 带动摆杆 O_1B 绕 O_1 轴转动。在图 63a 所示瞬时, 曲柄转角为 φ_0 , 摆杆 O_1B 处在铅垂位置, $\overline{O_1C} = b$ 。试求这一瞬时摆杆的角速度 ω_1 和角加速度 ε_1 。(林敬圣, 浙江农业大学力学组。原第 146 题, 1987, No. 4。)

解: 因套筒与摆杆套在一起, 两者有相同的角速度 ω_1 和角加速度 ε_1 (图 63b)。套筒作平面运动, 其上 C 点的速度、加速度为

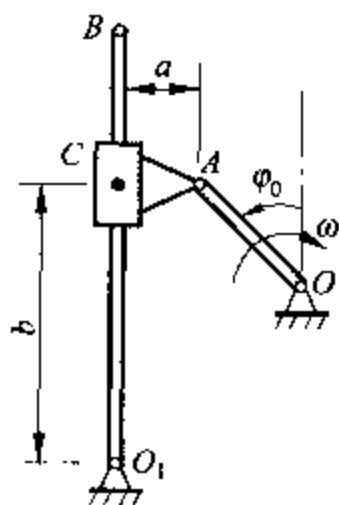


图 63a

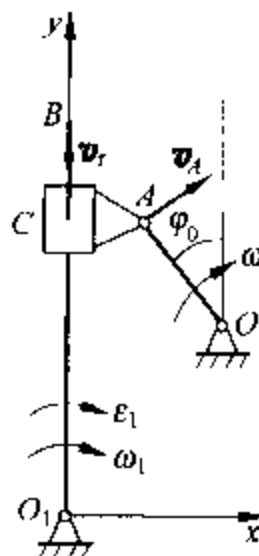


图 63b

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \times \vec{AC}$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_1 \times \vec{AC} - \omega_1^2 \vec{AC}$$

其中 $v_A = r\omega$, $a_A = r\omega^2$ 。

以摆杆 O_1B 为动系, 研究 C 点的复合运动, 有

$$\vec{\omega}_1 \times \vec{O_1C} + \vec{v}_r = \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \times \vec{AC}$$

$$\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{O_1C} - \omega_1^2 \vec{O_1C} + \vec{a}_r + 2\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_r = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_1 \times \vec{AC} - \omega_1^2 \vec{AC}$$

将上述方程分别投影在 x 、 y 轴上, 可得

$$v_r = r\omega \left(\sin\varphi_0 + \frac{a}{b} \cos\varphi_0 \right)$$

$$\omega_1 = \frac{r\omega}{b} \cos\varphi_0$$

$$\epsilon_1 = \frac{r\omega^2}{b} \left(\sin\varphi_0 - \frac{r}{b} \sin 2\varphi_0 - \frac{ar}{b^2} \cos^2 \varphi_0 \right)$$

64. 图示平面机构中, 轮 O 半径为 r , 沿半径为 $R=4r$ 的大圆弧面以常角速度 $\omega_0=4\omega$ 作纯滚动。杆 OC 在 O 点与轮 O 铰接, B 是杆 OC 上的滑块。杆 AB 长为 l , 并以匀角速度 $\omega_{AB}=\omega$ 绕 A 作定轴转动。在图 64a 所示瞬间, 杆 AB 正好经过大圆弧中心 O' 且 $OO' \perp AB$, $\theta=30^\circ$, 求此时杆 OC 的角速度和角加速度。(姚书声, 石家庄军械工程学院力学教研室。原第 173 题, 1989, No. 6。)

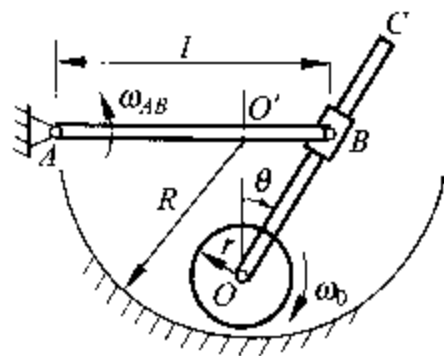


图 64a

解: 取杆 OC 为动系, 以坐标系 $B\xi\eta$ 表示。由题意

$$\overline{OO'} = 3r, \quad \overline{OB} = \frac{\overline{OO'}}{\cos\theta} = 2\sqrt{3}r$$

(1) 速度分析。B 点的速度为

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{OB} + \mathbf{v}_t \quad (1)$$

其中

$$v_B = l\omega = (4 + \sqrt{3})r\omega, \quad v_O = r\omega_0 = 4r\omega, \quad v_{OB} = 2\sqrt{3}r\omega_{OB}$$

(图 64b, ω_{OB} 在图中未画出, 以逆时针转向为正)。将式(1)分别在 $B\xi$ 、 $B\eta$ 轴上投影, 可得

$$v_r = \left(2\sqrt{3} - \frac{1}{2} \right) r\omega, \quad v_{OB} = \left(2 + \frac{5}{2}\sqrt{3} \right) r\omega$$

由此可得

$$\omega_{OB} = \frac{v_{OB}}{OB} = \frac{4\sqrt{3} + 15}{12} \omega$$

(2) 加速度分析。B 点的加速度为

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t$$

即

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{OB}^r + \mathbf{a}_{OB}^t + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t \quad (2)$$

其中

$$a_O = \frac{v_O^2}{3r} = \frac{16r\omega^2}{3}$$

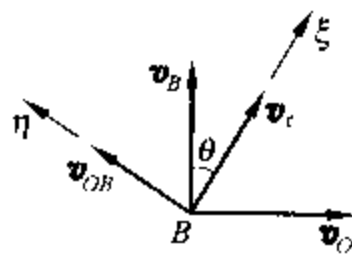


图 64b

$$a_c = 2\omega_{OB}v_t$$

$$a_B = l\omega^2 = (4 + \sqrt{3})r\omega^2$$

$$a_{OB}^t = \varepsilon_{OB} \cdot \overline{OB}$$

$$a_{OB}^n = \omega_{OB}^2 \cdot \overline{OB}$$

(图 64c, ε_{OB} 在图中未画出, 以逆时针为正)。式(2)在 $B\eta$ 轴上投影, 得

$$a_B \cos\theta = a_{OB}^t + a_c + a_O \sin\theta$$

所以

$$\varepsilon_{OB} = -\left(\frac{4}{3} + \frac{47\sqrt{3}}{72}\right)\omega^2$$

负号表示 ε_{OB} 为顺时针方向旋转。

编者注: 原题中 $l=5r$, 这一条件与 $\theta=30^\circ$ 不相容。现只保留 $\theta=30^\circ$ 这一条件。

65. 一圆锥沿半径为 r 的轮 I 表面作纯滚动, 其顶点 A 始终处在轮 I 的中心 A 。圆锥母线长为 r , 顶角 $\alpha=90^\circ$ 。轮 I 本身由曲柄 OA 带动, 使它绕固定轮 II 作纯滚动, 曲柄 OA 的角速度 ω_0 为常值, 方向如图 65a 所示。已知圆锥底面中心点 D 相对于轮 I 的速度大小 $v_t = r\omega_0$ 为常值。求当圆锥母线 AC 平行于曲柄 OA ($OC > OA$) 时圆锥上一点 B (图中最高点) 的绝对加速度。(殷金生, 北京大学力学系。选自勃拉日尼钦科《理论力学习题集》第 700 题。原第 94 题, 1985, No. 3。)

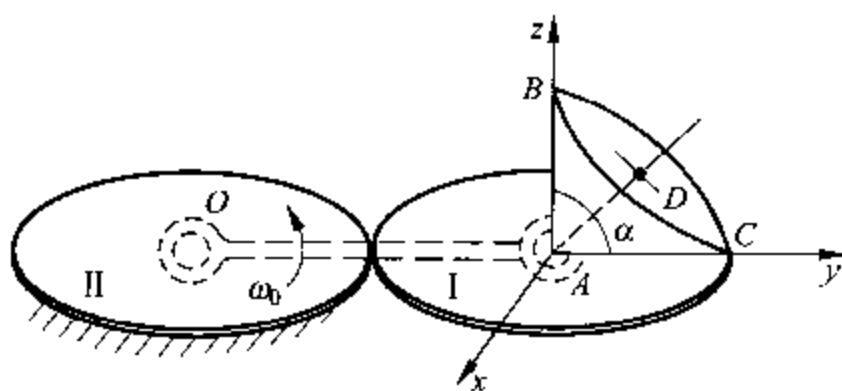


图 65a

解: 取坐标系 $Axyz$ 如图 65b 所示。由题意, 圆盘 I 的角速度

$$\omega_1 = \frac{2r\omega_0}{r} \mathbf{k} = 2\omega_0 \mathbf{k}$$

其角加速度为

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = 0$$

以圆盘 I 为动参考系, 则圆锥的相对角速度为

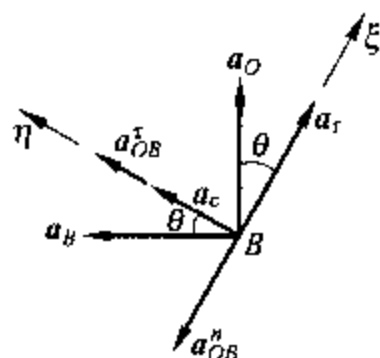


图 64c

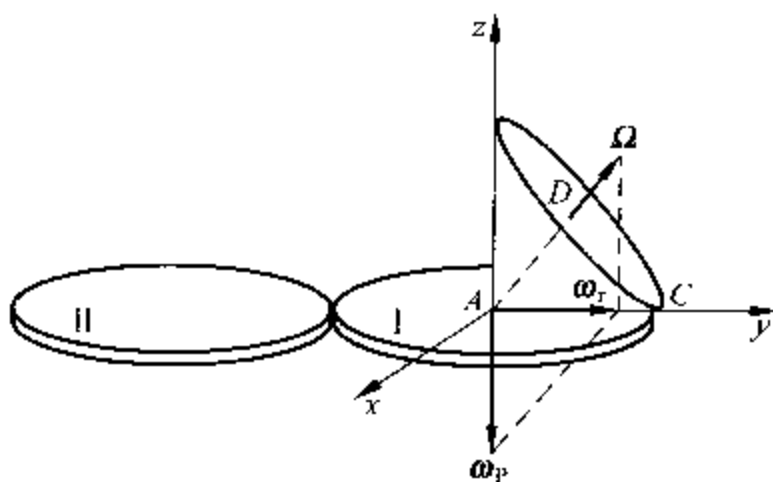


图 65b

$$\omega_r = \frac{r\omega_0}{0.5r}j = 2\omega_0j$$

相对角加速度为(将 ω_r 分解为自转角速 Ω 和进动角速度 ω_p 之和,图 65b)

$$\varepsilon_r = \frac{d\omega_r}{dt} = \omega_p \times \omega_r = 4\omega_0^2 i \quad (\text{注意: } \varepsilon_r \text{ 不等于零})$$

所以圆锥的绝对角速度为

$$\omega = \omega_r + \omega_1 = 2\omega_0(j+k)$$

绝对角加速度为

$$\varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_1 + \omega_1 \times \omega = 0$$

由此可得 B 点的加速度为

$$\begin{aligned} a_B &= a_A + \varepsilon \times \overrightarrow{AB} + \omega \times (\omega \times \overrightarrow{AB}) \\ &= 2r\omega_0^2(-j) + 0 + 4r\omega_0^2(j-k) \\ &= 2r\omega_0^2(j-2k) \end{aligned}$$



第 3 章

动力学部分

66. 牛顿第二定律的表达式可以写成 $m a = F$ 。当作用力 $F \equiv 0$ 时, 可得 $a \equiv 0$, 即 $v = \text{常量}$ 。就是说, 当外力为零时, 物体保持静止或等速直线运动状态。这样, 牛顿第一定律不是独立的, 它可由第二定律推出。上述说法对不对? 为什么? (殷金生, 北京大学力学系, 引自朱照宣等编《理论力学》上册, P246。原第 249 题, 1994, No. 2。)

答: 牛顿第一定律是独立的, 它不能由第二定律导出。牛顿第一定律定义了惯性系; 牛顿第二定律只有在惯性系中才成立。

67. 质量都为 M 的甲、乙两船沿同一直线以相同的匀速 v_0 前进(甲船在前)。甲船上以水平相对速度 u 向后抛出一质量为 m 的物体。问乙船接到物体 m 后其速度有何变化? 物体 m 落于乙船前相对乙船的水平速度为何? 如果乙船接到 m 后立即以水平相对速度 u 抛向甲船, 问小质量 m 能够落在甲船上的条件是什么? 不考虑小质量 m 在空中飞行的时间和两船之间的距离。(朴淑贤, 吉林大学数学系。原第 217 题, 1992, No. 3。)

解: 以甲船和物体 m 为质点系, 设 v_1 为甲船抛出物体 m 后的速度。由动量定理, 有

$$(M+m)v_0 = Mv_1 + m(v_1 - u)$$

由上式解得

$$v_1 = v_0 + \frac{mu}{M+m}$$

设乙船接到 m 后的速度为 v' , 以整个系统为研究对象, 则有

$$(2M+m)v_0 = Mv_1 + (M+m)v'$$

将 v_1 代入, 得

$$v' = v_0 - \frac{Mmu}{(M+m)^2}$$

设 m 落入乙船前相对乙船的速度为 u' , 则

$$u' = (v_1 - u) - v_0 = -\frac{Mu}{M+m}$$

负号说明方向向后。设乙船以相对速度 u 抛出 m 后的速度为 v_2 , 则有

$$Mv_2 + m(v_2 + u) = (M+m)v'$$

解得

$$v_2 = v' - \frac{mu}{M+m}$$

小物体 m 的绝对速度为

$$v_2 + u = v' + \frac{Mu}{M+m}$$

所以小物体 m 能够落入甲船的条件为

$$v_2 + u > v_1$$

即

$$v_0 - \frac{Mmu}{(M+m)^2} + \frac{Mu}{M+m} > v_0 + \frac{mu}{M+m}$$

整理后得

$$M^2 - (M+m)m > 0$$

所以小物体能够回到甲船的条件为

$$\frac{m}{M} < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$$

与相对速度 u 无关。

68. 图 68 所示装置中两物体的质量为 M_1 、 M_2 ($M_2 > M_1$), 滑轮的质量为 M , 半径为 r (视为匀质圆盘), 绳子质量为 m , 单位长度的质量为 λ 。轴承光滑, 初始时绳子两端的高度差为 S_0 , 绳子与滑轮无相对滑动, 系统由静止释放, 求系统的运动规律 (在 M_1 碰到滑轮之前)。(罗维亮, 渭南师专物理系。原 118 题, 1986, No. 3。)

解: 系统有一个自由度, 设 x 为物块 M_1 由初始状态上升

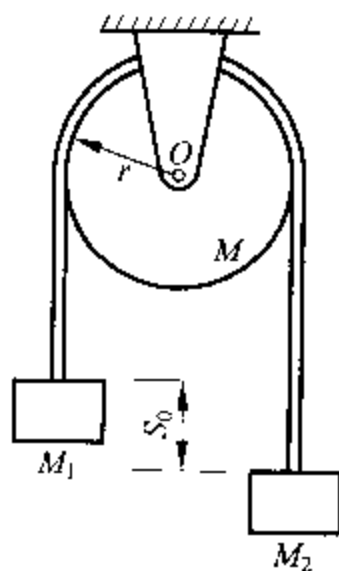


图 68

的距离(或 M_2 下降的距离)。则质点系相对于 O 点的动量矩为

$$H_O = (M_1 + M_2 + m)r\dot{x} + \frac{1}{2}Mr^2 \frac{\dot{x}}{r}$$

外力对 O 点的力矩为

$$I_{O0} = (M_2 + \lambda S_0 - M_1)rg + 2\lambda xrg$$

由动量矩定理可得

$$\ddot{x} - \omega^2 x = b \quad (1)$$

其中

$$\omega^2 = \frac{4\lambda g}{2(M_1 + M_2 + m) + M}, \quad b = \frac{2(M_2 - M_1 + \lambda S_0)g}{2(M_1 + M_2 + m) + M}$$

由此可解得

$$x = \frac{M_2 - M_1 + \lambda S_0}{4\lambda} (e^{\omega t} + e^{-\omega t} - 2)$$

此题应用机械能守恒定理求解也很方便:

$$\frac{1}{2}(M_1 + M_2 + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{4}M^2 r^2 \left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 = (M_2 - M_1)xg + \lambda xg(x + S_0)$$

两边求导经整理后便得式(1)。

69. 在光滑水平面上有一质量为 M 的任意形状的薄板, O 点为薄板的质心, 其中心回转半径为 ρ_0 , 薄板上有一质量为 m 的甲虫 A 。甲虫 A 相对于薄板的运动规律 $\rho(t)$ 、 $\varphi(t)$ 为已知(图 69a)。求在任意时刻薄板运动的绝对角速度 Ω 。(殷金生, 北京大学力学系, 据蒲赫哥尔茨《理论力学习题集》775 题改编。原第 84 题, 1984, No. 6。)

解: 取 $O\xi\eta$ 为固连在薄板上的坐标系, C 为甲虫与板的共同质心, Cxy 为惯性系, φ, θ, α 如图 69b 所示, 且

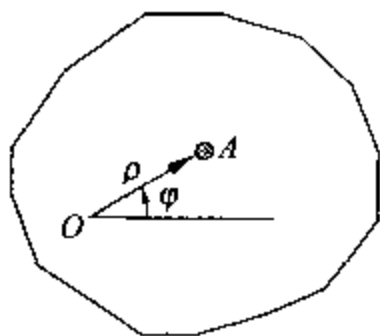


图 69a

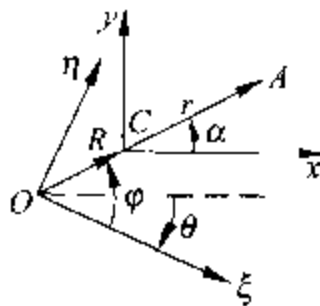


图 69b

$$\overline{CA} = r, \quad \overline{OC} = R$$

$$\omega = \dot{\varphi}, \quad \Omega = \dot{\theta}, \quad \alpha = \varphi - \theta$$

由动量定理, 有

$$MR = mr$$

得

$$r = \frac{M}{M+m} \rho, \quad R = \frac{m}{M+m} \rho$$

由系统对 C 点的动量矩守恒, 有

$$mr^2 \dot{\alpha} + M\rho_0^2 \dot{\theta} + MR^2 \dot{\alpha} = 0$$

考虑到 $\rho = R + r$, 可得

$$\Omega = \frac{m\rho^2 \omega}{m(\rho_0^2 + \rho^2) + M\rho_0^2}$$

70. 均质直杆 AB 的质量为 m , 长为 l , 置于光滑的直角墙间 (图 70a), 今在 A 端加一水平力使它沿地面以常速率 v_0 运动。求直杆倒地时 B 端的速度 v_B 。(杭庆平, 扬州师范学院物理系工作室。原第 111 题, 1986, No. 1.)

解: 本题有两个物理过程, 即 B 端离墙以前和 B 端离墙以后。B 端离墙以前, 作用在杆上的力有墙的反力 N_B , 地面反力 N_A , 水平约束力 F_A 和重力 mg (如图 70b 所示)。因 A 点加速度为零, 对 A 点用动量矩定理, 有

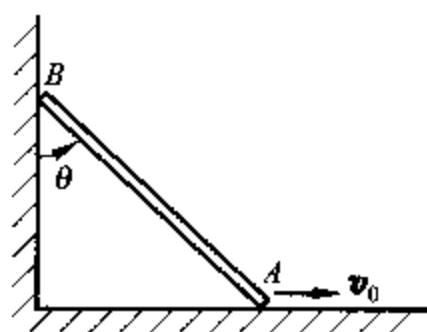


图 70a

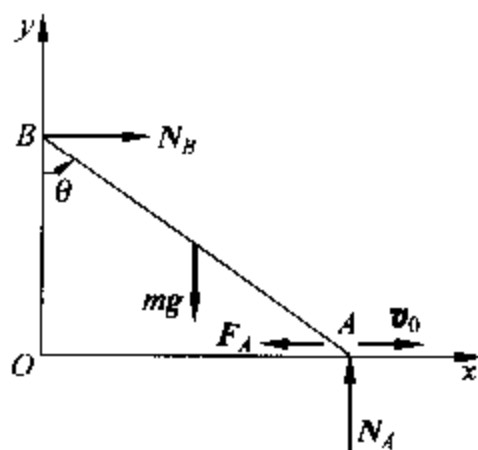


图 70b

$$\frac{1}{3}ml^2 \ddot{\theta} = \frac{1}{2}mgl \sin\theta - N_B l \cos\theta \quad (1)$$

因 $x_A = l \sin\theta$, 所以

$$v_0 = \dot{x}_A = l \dot{\theta} \cos\theta, \quad \dot{\theta} = \frac{v_0}{l \cos\theta}$$

$$\ddot{x}_A = l \ddot{\theta} \cos\theta - l \dot{\theta}^2 \sin\theta = 0$$

得

$$\ddot{\theta} = \frac{v_0^2 \sin\theta}{l^2 \cos^3\theta} \quad (2)$$

B 端离墙时, $N_B = 0$, 代入式(1), 且利用式(2), 可得

$$\cos\theta_1 = \left(\frac{2v_0^2}{3gl}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \dot{\theta}_1^2 = \left(\frac{3gv_0}{2l^2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

B 端离墙后, 由相对 A 点的动量矩定理, 有

$$\frac{1}{3}ml^2 \ddot{\theta} = \frac{1}{2}ml\sin\theta$$

积分得

$$\dot{\theta}^2 = -\frac{3g}{l}\cos\theta + C$$

其中积分常数 C 由初始条件 θ_1 和 $\dot{\theta}_1$ 确定, 经计算得

$$C \approx 3.93 \left(\frac{gv_0}{l^2} \right)^{\frac{2}{3}}$$

所以杆子落地时, B 点的水平速度为

$$\dot{x}_B = v_0$$

B 点的垂直速度为

$$\dot{y}_B = -l\dot{\theta}_1 \approx -1.98(gv_0 l)^{\frac{1}{3}}$$

71. 如图 71a 所示, 均质杆 OA 和 AB 长均为 l , 质量均为 m , OA 杆在水平位置, AB 杆与水平成 30° 角, B 轮半径为 $r = \frac{1}{2}l$, 质量 $M = 2m$, 放在水平面上, D 处有足够的摩擦力保证它只滚不滑, 不计滚动摩擦阻。在 A 处有一铅垂的绳子 AC , 使系统保持静止。求当绳子 AC 被剪断的瞬时, O 、 A 、 B 、 D 处的力及杆 OA 、 AB 和 B 轮的角加速度。(叶柏年, 太原工业大学理论力学教研室。原第 119 题, 1986, No. 3.)

解: 在 AC 绳子被剪断的瞬时, 系统各点的速度为零, 各刚体的角速度为零, 所以此时各刚体的加速度瞬心在加速度的垂线上, 即 OA 杆、 AB 杆和 B 轮的加速度瞬心分别在 O 、 E 和 D 点(图 71b), 且有

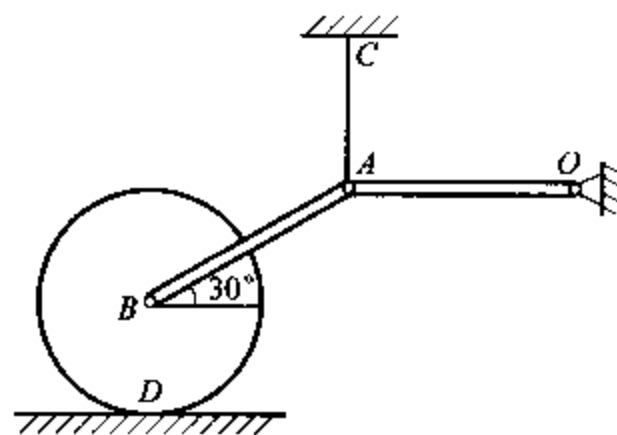


图 71a

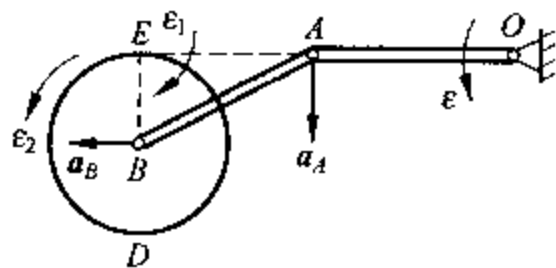


图 71b

$$a_A = l\epsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}l\epsilon_1, \quad a_B = r\epsilon_1 = r\epsilon_2$$

所以有

$$\epsilon_1 = \frac{2\epsilon}{\sqrt{3}}, \quad \epsilon_2 = \frac{2\epsilon}{\sqrt{3}} \quad (1)$$

以轮为对象,由图 71c 得

$$\frac{1}{2}Mr^2\epsilon_2 = rF_D \quad (2)$$

$$Mr\epsilon_2 = F_{Bx} - F_D \quad (3)$$

$$0 = N - F_{By} - Mg \quad (4)$$

由式(1)至式(4)得

$$F_{Bx} = \sqrt{3}m\epsilon \quad (5)$$

以杆 AB 为对象(图 71d)得

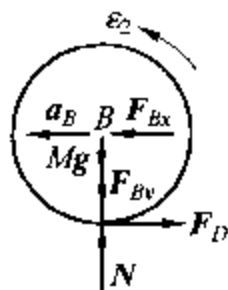


图 71c

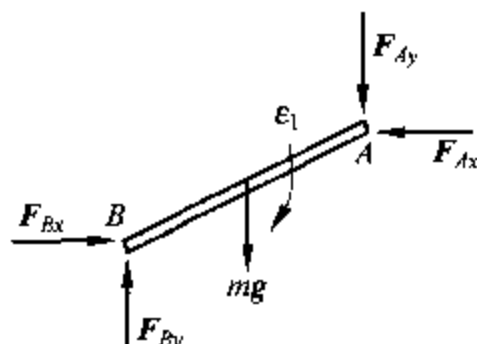


图 71d

$$\frac{1}{12}ml^2\epsilon_1 = (F_{Ay} + F_{By}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}l - (F_{Ax} + F_{Bx}) \cdot \frac{l}{4} \quad (6)$$

$$\frac{1}{4}m\epsilon_1 = F_{Ax} - F_{Bx} \quad (7)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}m\epsilon_1 = F_{Ay} - F_{By} + mg \quad (8)$$

由式(6)、(7)、(8)可得

$$2F_{Bx} - 2\sqrt{3}F_{Ay} + \frac{4}{3}m\epsilon_1 = \sqrt{3}mg \quad (9)$$

以杆 OA 为对象,由图 71e 得

$$\frac{1}{3}ml^2\epsilon = \frac{1}{2}mgl - F_{Ay} \cdot l \quad (10)$$

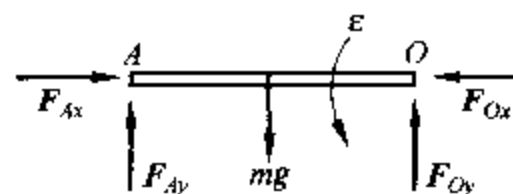


图 71e

$$\frac{m}{2}l\epsilon = mg - F_{Ay} - F_{Oy} \quad (11)$$

$$0 = F_{Ax} - F_{Ox} \quad (12)$$

将式(5)、(10)、(1)代入式(9)可解出

$$\epsilon = \frac{9g}{16l}$$

将此结果代入有关的式子可解得

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{3\sqrt{3}g}{8l}, \quad N = \frac{97}{32}mg$$

$$F_{Ay} = \frac{5}{16}mg, \quad F_{Ax} = \frac{21\sqrt{3}}{32}mg - F_{Ox}$$

$$F_{By} = \frac{9\sqrt{3}}{16}mg, \quad F_{Bx} = \frac{33}{32}mg$$

$$F_D = \frac{3\sqrt{3}}{16}mg, \quad F_{Oy} = \frac{13}{32}mg$$

72. 如图 72 所示, 均质细杆 AB 的杆长为 $2l$, 质量为 M , A 端铰接于固定点 A , AB 杆自水平位置无初速度的释放, 当 AB 杆通过铅垂位置时, 突然去掉铰链约束, 使 AB 杆成自由体。求此后 (1) AB 杆的运动微分方程; (2) AB 杆质心 C 的 y 坐标 $y_C = 2l$ 时, 杆的动量 p , 动能 T 和相对于质心 C 的动量矩 H_C 。(马友发, 华南理工大学工程力学系。原第 259 题, 1994, No. 4。)

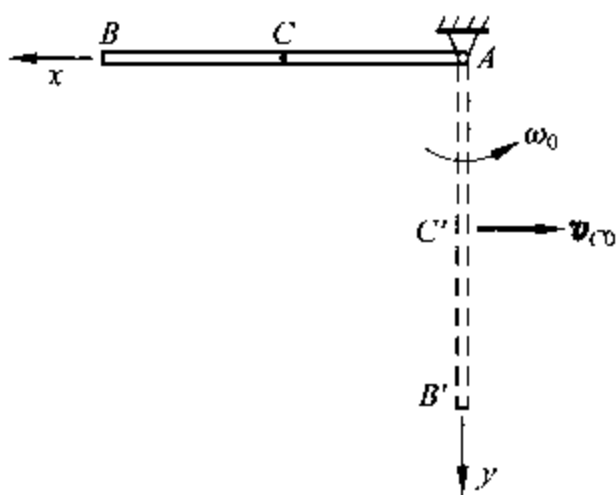


图 72

解: 第 1 阶段杆 AB 由水平位置运动至铅垂位置, 应用机械能守恒定理, 得

$$Mgl = \frac{1}{2}J_A\omega_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4Ml^2}{3}\omega_0^2$$

所以

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$$

杆心 C 的速度为

$$v_{C0} = l\omega_0 = \sqrt{\frac{3gl}{2}} \text{ (方向水平)}$$

第 2 阶段去掉约束后, 杆进入平面运动状态, 得运动微分方程为

$$\begin{cases} \ddot{x}_C = 0 \\ \ddot{y}_C = g \\ \ddot{\phi}_C = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_C = -v_{C0} = -\sqrt{\frac{3gl}{2}} \\ \dot{y}_C = 0 \\ \dot{\phi}_C = \omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2l}} \end{cases}$$

当 $y_C = 2l$ 时

$$2l = l + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2l}{g}}$$

此时, 系统动量为

$$p = \sqrt{(M\dot{x}_c)^2 + (M\dot{y}_c)^2} = M\sqrt{\frac{7gl}{2}}$$

系统动能为

$$T = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2 = \frac{M}{2}\left(\frac{3}{2}gl + 2gl\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{3}l^2\left(\frac{3g}{2l}\right) = 2Mgl$$

相对质心 C 的动量矩为

$$H_C = J_C\omega = \frac{1}{3}Ml^2 \cdot \sqrt{\frac{3g}{2l}}$$

73. 如图 73a 所示, 偏心轮质量为 m , 偏心距 $\overline{OC} = e$ 。轮对质心 C 的回转半径为 ρ_C , 置于光滑水平面上。初始时 OC 呈水平, 质心 C 有一水平初速 v , 轮的角速度为零。求当 C 点运动至最低位置时, 水平面对轮的约束反力。(杨越宁, 沈阳工业学院力学教研室。原第 222 题, 1992, No. 5。)

解: 取质心平动参考系 O_1xy (图 73b), 它以常速度 v 运动。质心 C 的相对速度 v_r 沿 y 轴。由动能定理, 有

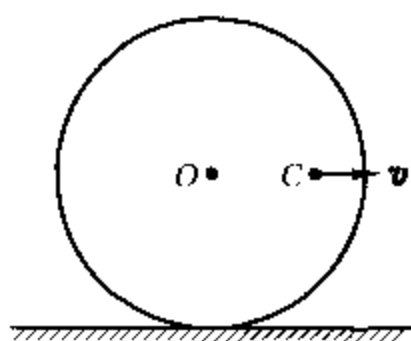


图 73a

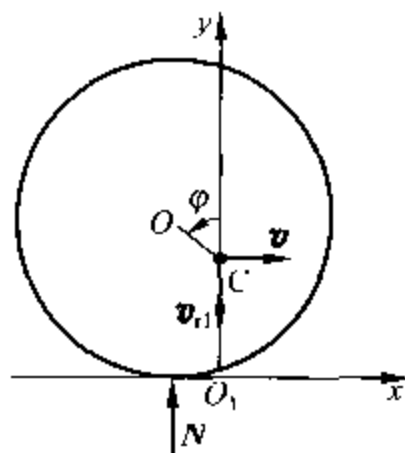


图 73b

$$\frac{1}{2}J_C\omega^2 + \frac{1}{2}m(v^2 + v_r^2) - \frac{1}{2}mv^2 = mge\cos\varphi$$

其中 $J_C = m\rho_C^2$ 。当质心 C 运动至最低点时, 有

$$v_r = 0, \quad \varphi = 0$$

故有

$$\omega^2 = \frac{2ge}{\rho_C^2}$$

此时运用相对质心的动量矩定理, 有

$$J_C\varepsilon = M_C = 0$$

故

$$\varepsilon = 0$$

所以 C 点的加速度向上, 为

$$a_c = e\omega^2$$

所以有

$$N - mg = ma_c$$

即

$$N = mg + me \cdot \frac{2ge}{\rho_c^2} = mg \left(1 + \frac{2e^2}{\rho^2} \right)$$

74. 圆环质量为 m , 半径为 R , 质量沿半径均匀分布, 不计厚度。圆环直立在光滑的水平面上, 质量为 m 的甲虫在圆环上爬。起始时甲虫静止地处于圆环的最低点, 然后突然沿圆环以相对匀速率 u 爬行(图 74a)。(1) 求甲虫开始运动时圆环的角速度。(2) 相对速率 u 多大时, 甲虫才能爬到和圆环中心 O 同样的高度? (3) 甲虫爬到和圆环中心同样高度时, 地面对圆环的作用力是多少? (殷金生, 北京大学力学系, 选自北京大学力学系 1987 年硕士研究生考题。原第 147 题, 1987, No. 4。)

解: (1) 由水平动量守恒, 得

$$-mv + m(-v - R\omega_0 + u) = 0$$

由相对固定 O 点的动量矩守恒, 有

$$-mR^2\omega_0 + m(-v - R\omega_0 + u)R = 0$$

由此得圆环的初始角速度为

$$\omega_0 = \frac{u}{3R}$$

(2) 设 θ 如图 74b 所定义, 则有

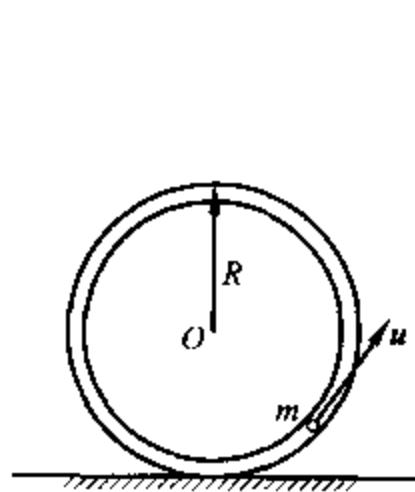


图 74a

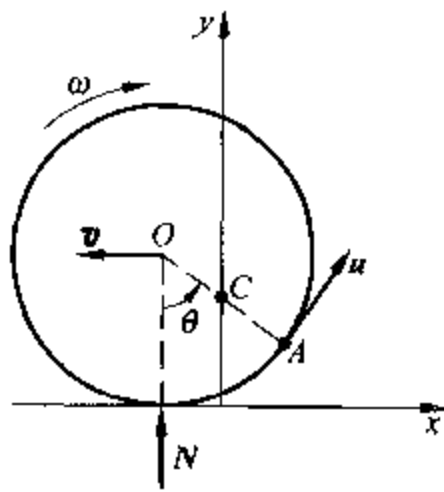


图 74b

$$\dot{\theta} = \frac{u}{R} - \omega, \quad \dot{\theta}_0 = \frac{u}{R} - \omega_0 = \frac{2u}{3R}$$

设甲虫和圆环的总质心为 C , 有

$$y_c = R - \frac{1}{2}R\cos\theta$$

$$\ddot{y}_c = \frac{1}{2}R(\dot{\theta}^2 \cos\theta + \ddot{\theta} \sin\theta) \quad (1)$$

由 y 方向动量定理, 得

$$N = mR(\dot{\theta}^2 \cos\theta + \ddot{\theta} \sin\theta) + 2mg$$

由相对质心 C 的动量矩定理, 可得

$$N \sin\theta = -3mR\ddot{\theta} \quad (2)$$

上两式中消去 N , 整理后得

$$R\dot{\theta}^2 \sin\theta \cos\theta + R\ddot{\theta} (3 + \sin^2\theta) + 2g \sin\theta = 0 \quad (3)$$

积分后有

$$R\dot{\theta}^2 (3 + \sin^2\theta) - \frac{4u^2}{3R} = 4g(\cos\theta - 1)$$

当 $\theta = 90^\circ$ 时, 有

$$\dot{\theta}^2 = \frac{u^2}{3R^2} - \frac{g}{R} \geq 0$$

即相对速率 u 至少为 $\sqrt{3Rg}$ 时, 甲虫才能爬到环心 O 的高度。

(3) 当 $\theta = 90^\circ$ 时, 由式(3), 得

$$4R\ddot{\theta} + 2g = 0$$

代入式(2), 得

$$N = \frac{3mg}{2}$$

75. 图 75a 所示机构在铅垂平面内运动, 不计 OA 杆和滑块 B 的重量, 均质杆 AB 的质量为 m 。 OA 杆长为 r , AB 杆长为 $\sqrt{5}r$ 。 滑块 B 可在铅垂、光滑的导轨 DE 上滑动。 初始时静止, 且 OA 杆呈铅垂, OB 呈水平 (图中虚线位置), 无初速度的释放。 当 OA 杆运动至水平位置时 (图中实线位置), 求: (1) AB 杆的角速度 ω_1 和 OA 杆的角速度 ω_0 ; (2) AB 杆的角加速度 ϵ_1 和 OA 杆的角加速度 ϵ_0 ; (3) 铰链 A 处的约束力 R 和滑块 B 处的约束力 N 。 (殷金生, 北京大学力学系。 原第 238 题, 1993, No. 4。)

解: (1) 如图 75b, 机构中 A 、 B 两点速度方向相同, 即 AB 杆作瞬时平动, 因此有

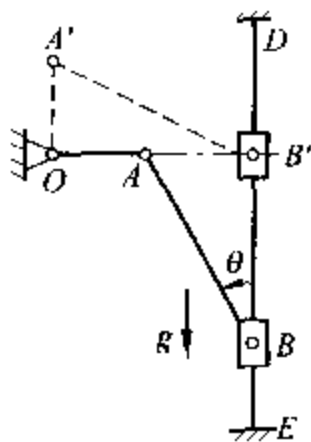


图 75a

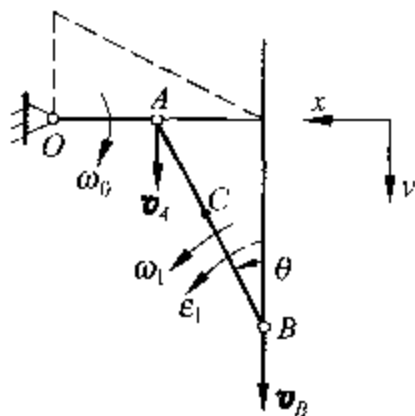


图 75b

$$\omega_1 = 0$$

$$v_A = v_B = v_C$$

由机械能守恒,有

$$\frac{1}{2}mv_C^2 - mgr = \frac{1}{2}mgr$$

得

$$v_C = \sqrt{3gr} = v_A$$

所以

$$\omega_0 = \frac{v_A}{r} = \sqrt{\frac{3g}{r}} \text{ (顺时针方向)}$$

(2) 由几何关系,有 $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ 。对 AB 杆,以 B 为基点,A 点加速度为

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\varepsilon}_1 \times \overline{BA} - \omega_1^2 \overline{BA} \quad (1)$$

式(1)向水平方向投影,得

$$r\omega_1^2 = \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \sqrt{5}r\cos\theta \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \frac{3g}{2r} \text{ (逆时针方向)}$$

对 AB 杆,以 A 为基点,C 点加速度为

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\varepsilon}_1 \times \overline{AC} = \boldsymbol{\varepsilon}_1 \times \overline{OA} - \omega_0^2 \overline{OA} + \boldsymbol{\varepsilon}_1 \times \overline{AC} \quad (2)$$

式(2)向铅垂方向投影,得

$$\ddot{y}_C = \varepsilon_0 r - \frac{3g}{2r} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}r \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \varepsilon_0 r - \frac{3}{4}g \quad (3)$$

因为不计 OA 杆质量,故 OA 杆两端受力沿杆方向。以 AB 杆为对象,其受力图如图 75c。R、N 沿水平方向,所以

$$m\ddot{y}_C = mg \quad (4)$$

由式(3)、(4)求得

$$\varepsilon_0 = \frac{7g}{4r}$$

(3) 对 AB 杆,由水平方向动量定理及相对质心动量矩定理,有

$$m\ddot{x}_C = R + N$$

$$\frac{1}{12}m(\sqrt{5}r)^2\varepsilon_1 = (R - N)r$$

补充运动学关系

$$\ddot{x}_C = \omega_0^2 r - \varepsilon_1 \overline{AC}\cos\theta = \frac{3}{2}g$$

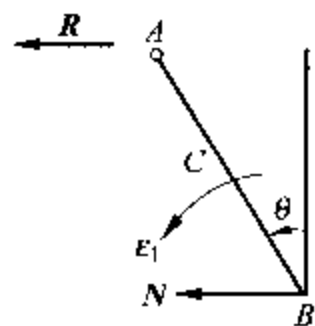


图 75c

可解得

$$R = \frac{17mg}{16}, \quad N = \frac{7mg}{16}$$

76. 均质物块高为 h , 宽为 b , 放在水平平台 AB 上, 如图 76a 所示, 物块与平台间的静滑动摩擦系数为 μ 。曲柄长 $\overline{O_1A} = \overline{O_2B} = r$, 且 O_1A 平行于 O_2B 。若 O_1A 以匀角速度 ω 转动, 试求能使物块与平台保持相对静止的最大角速度 ω_{\max} 。(冯立富, 空军工程学院力学教研室。原第 267 题, 1995, No. 3。)

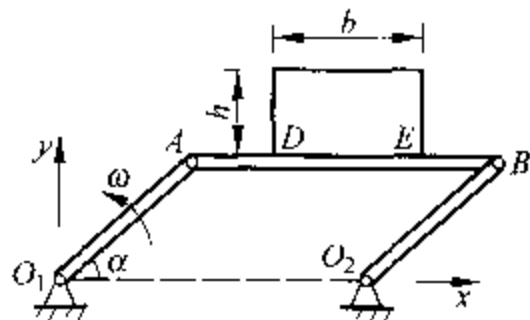


图 76a

解: 取物块为研究对象, 设其重为 W , 物块受到的外力有重力 W 、法向反力 N 和摩擦力 F 。物块与平台相对静止时, 物块质心 C 的加速度大小为

$$a_c = a_A^n = r\omega^2$$

物块的惯性力系可以合成为一个作用线通过质心 C 的合力

$$S = -\frac{W}{g} a_c$$

要使物块与平台相对静止, 则要求: (1) 物块与平台间无相对滑动, 也就是物块与平台之间的摩擦力应为静滑动摩擦力, 即有 $F \leq \mu N$; (2) 物块不应脱离平台, 即有 $N \geq 0$; (3) 物块不能绕点 E (或 D) 翻倒。下面就三种临界情形进行讨论。

(1) 相对滑动的临界情形

此时物块的受力如图 76b 所示, 其中

$$F = \mu N$$

根据质点系的达朗伯原理, 有

$$\sum F_x = 0, \quad S \cos \alpha - F = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad N + S \sin \alpha - W = 0$$

联立方程(1)至(3), 可得

$$\omega = \sqrt{\frac{g\mu}{r(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)}} = \sqrt{\frac{g \sin \varphi_m}{r \cos(\alpha - \varphi_m)}}$$

式中 φ_m 为摩擦角。当 $\alpha = \varphi_m$ 时, ω 有极小值

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g \sin \varphi_m}{r}} \quad (4)$$

(2) 脱离的临界情形

在方程(3)中, 令 $N = 0$, 可得

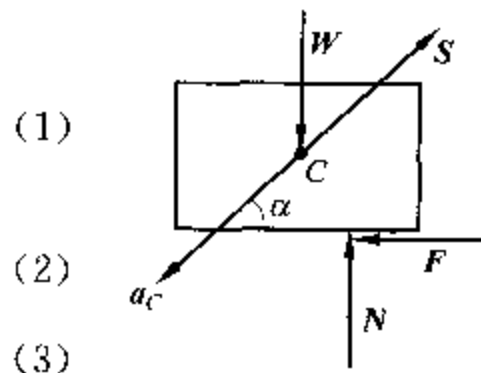


图 76b

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r \sin \alpha}}$$

当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, ω 有极小值

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{r}} \quad (5)$$

显然有

$$\omega_2 > \omega_1 \quad (6)$$

(3) 翻倒的临界情形

此时物块的受力如图 76c 所示, 根据质点系的达朗伯原理, 有

$$\sum m_E(\mathbf{F}) = 0, \quad W \cdot \frac{b}{2} - S \left(\frac{h}{2} \cos \alpha + \frac{b}{2} \sin \alpha \right) = 0$$

可解得

$$\omega = \sqrt{\frac{gb}{r(h \cos \alpha + b \sin \alpha)}} = \sqrt{\frac{g \cos \theta}{r \sin(\alpha + \theta)}}$$

当 $\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$ 时, ω 具有最小值

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{g}{r} \cos \theta} = \sqrt{\frac{gb}{r \sqrt{b^2 + h^2}}}$$

综合上述三种情形, 可知 ω 的最大值为

$$\omega_{\max} = \min(\omega_1, \omega_3) = \min \left(\sqrt{\frac{g \sin \varphi_m}{r}}, \sqrt{\frac{gb}{r \sqrt{b^2 + h^2}}} \right)$$

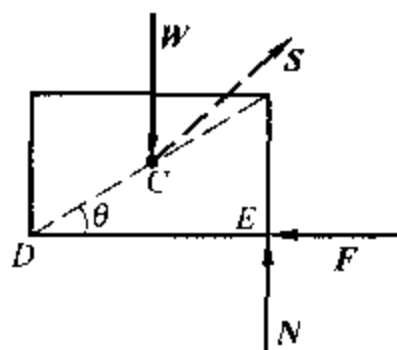


图 76c

77. 半径为 R 的滚轮 A , 质量为 m_A , 对轮心 A 的转动惯量 $J_A = \frac{1}{2} m_A R^2$ 。轴半径为 $r = \frac{1}{2} R$, 滚轮在 $\alpha = 30^\circ$ 的粗糙斜面上, 细绳(无重且不可伸长)绕过无重量的定滑轮 B 后, 挂一质量为 m_C 的物块。不计 B 轮轴系摩擦。(1) 求 A 轮轮心的加速度 a_A 和 C 块的加速度 a_C ; (2) 当 $m_A = 4.5 m_C$ 时, 求斜面给 A 轮的摩擦力。(马安新, 中国矿业大学 90 级学生, 引自太原机械学院 1983 年研究生试题。原第 251 题, 1994, No. 2。)

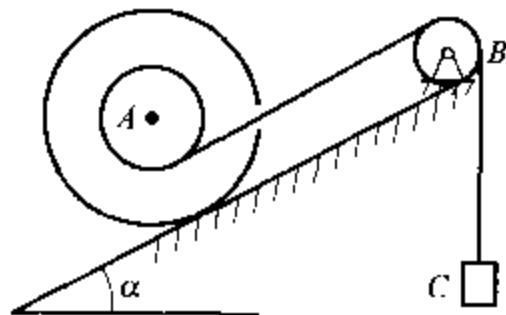


图 77a

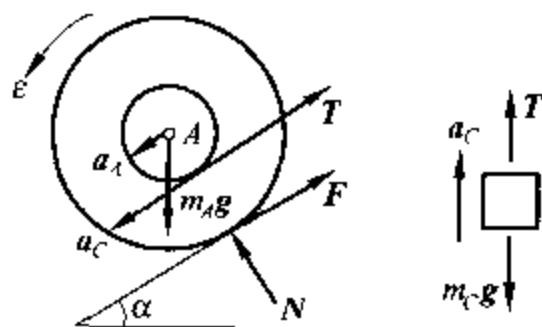


图 77b

解：系统的受力分析如图 77b 所示，可列出三个动力学方程

$$\frac{1}{2}m_A R^2 \epsilon = \frac{1}{2}TR + FR$$

$$m_A a_A = T - F + m_A g \sin \alpha$$

$$m_C a_C = T - m_C g$$

根据运动学关系（设摩擦系数足够大，无相对滑动），有

$$a_A = R\epsilon, \quad a_C = a_A - \frac{1}{2}R\epsilon$$

由上述五个方程，可解出

$$a_A = \frac{2(m_A - m_C)}{6m_A + m_C}g \quad a_C = \frac{1}{2}a_A$$

$$F = -\frac{1}{2}(2m_A + m_C)a_A + \frac{1}{2}(m_A - 2m_C)g$$

上式成立的条件为

$$|F| \leq \mu m_A g \cos \alpha$$

μ 是摩擦系数。当 $m_A = 4.5m_C$ 时

$$F = 0$$

78. 均质杆 AB ，质量为 m ，长为 $4l$ 。A 端用细绳 OA 系住，B 端置于光滑水平面上。细绳长为 l ，无重且不可伸长。初始时静止，O、A、B 三点共线（图 78a）。求（1）杆开始运动的瞬时，质心 C 的加速度和细绳的张力；（2）当杆端 A 第一次运动至 O 点的正下方时，杆质心 C 的加速度和绳中张力。（冯立富，空军工程学院力学教研室。原第 254 题，1994，No. 3。）

解：杆在运动的初始时受力与运动分析如图 78b 所示，此时 $\cos \theta_1 = \frac{3}{5}$ ， $\sin \theta_1 = \frac{4}{5}$ ，杆的角速度 $\omega_1 = 0$ ，B 点加速度 a_B 沿水平方向，A 点加速度 a_A 垂直于 AB 杆。所以 B 点为加速度瞬心，即 $a_B = 0$ （由于 $\omega_1 = 0$ ，杆 AB 上各点加速度只有切向方向）。

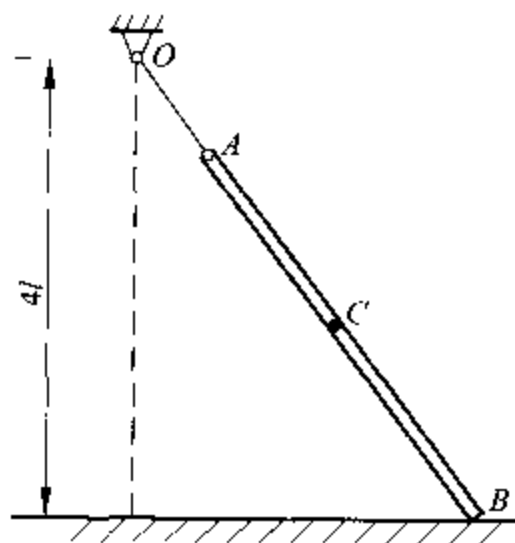


图 78a

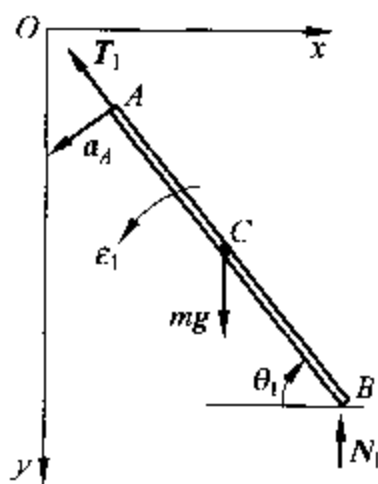


图 78b

对 B 点用动量矩定理,有

$$\frac{1}{3}m(4l)^2\epsilon_1 - mg \cdot 2l\cos\theta_1$$

解得

$$\epsilon_1 = \frac{9g}{40l}$$

杆的质心加速度为

$$a_{C1} = 2l\epsilon_1 = \frac{9g}{20}$$

由 $ma_{Cx} = \sum F_x$, 有

$$-ma_{Cx}\sin\theta_1 = -T_1\cos\theta_1$$

可求得绳中张力

$$T_1 = \frac{3}{5}mg$$

当杆端 A 第一次运动至 O 点的正下方时, 杆的受力与运动分析如图 78c。此时, $\cos\theta_2 = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\sin\theta_2 = \frac{3}{4}$, A 点和 B 点的速度均沿水平方向, AB 杆作平动, $\omega_2 = 0$ 。B 点的加速度沿水平方向, 质心 C 的加速度沿垂直方向(无水平方向外力), 所以加速度瞬心为 Q 点。由机械能守恒, 有

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = mg \cdot 2l(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)$$

得

$$v_C^2 = \frac{1}{5}gl, \quad a_{Ay} = -\frac{v_A^2}{l} = -\frac{1}{5}g$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\epsilon}_2 \times \overrightarrow{CA}, \quad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\epsilon}_2 \times \overrightarrow{CB}$$

上两式在 y 轴上投影, 得到

$$-\frac{1}{5}g = a_{Cy} - 2l\epsilon_2\cos\theta_2, \quad 0 = a_{Cx} + 2l\epsilon_2\cos\theta_2$$

可求得

$$a_{Cy} = -\frac{1}{10}g, \quad \epsilon_2 = \frac{\sqrt{7}g}{35l}$$

对 Q 点用动量矩定理

$$\left[\frac{1}{12}m(4l)^2 + m(2l\cos\theta_2)^2 \right] \epsilon_2 = (4T_2l - 2mgl)\cos\theta_2$$

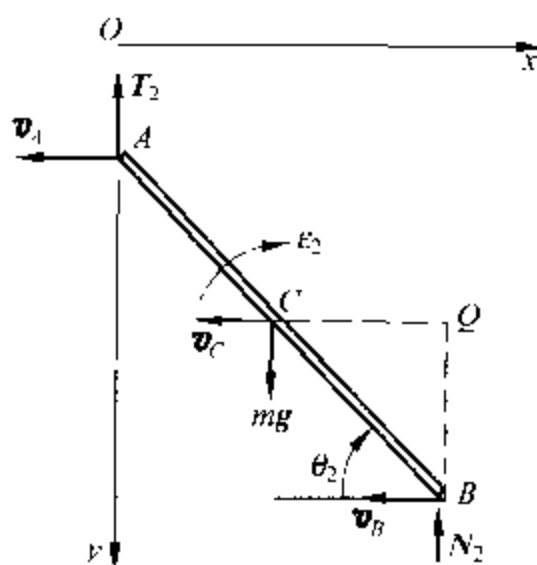


图 78c

可求得绳中张力

$$T_2 = \frac{247mg}{420}$$

79. 质量为 M , 半径为 r 的均质圆柱体 O 放在水平面上。质量为 m 的质点 A 放在柱表面的顶端, 所有接触都是光滑的。初始时静止, 质点在小扰动下自圆柱表面下滑。(1) 求质点未脱离圆柱面时的运动轨迹; (2) 证明质点脱离柱体的位置 θ (图 79a) 满足下列方程: $\frac{m}{m+M} \cos^3 \theta - 3 \cos \theta + 2 = 0$ 。(殷金生, 北京大学力学系。原第 234 题, 1993, No. 3.)

解: 选取坐标系 $O'xy$ 如图 79b, 设系统质心为 C , 则

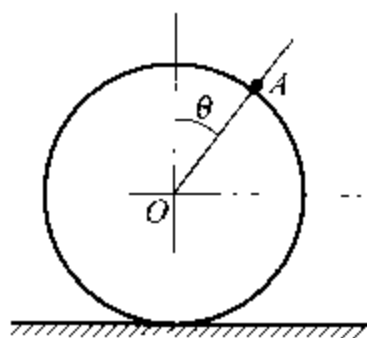


图 79a

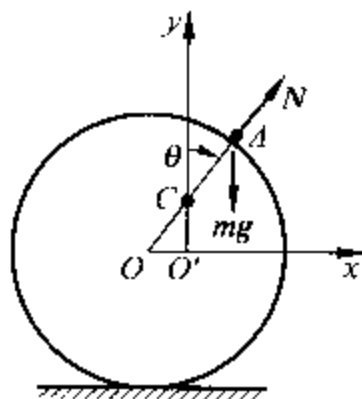


图 79b

$$\overline{OC} = \frac{mr}{M+m}, \quad \overline{CA} = \frac{Mr}{M+m}$$

系统水平方向动量守恒, 有

$$(M+m)\dot{x}_C = 0$$

得

$$x_C = 0$$

所以

$$x_A = \frac{Mr}{M+m} \sin \theta \quad (1)$$

$$y_A = r \cos \theta \quad (2)$$

因此质点在脱离前的绝对轨迹为椭圆, 具体为

$$\frac{(M+m)^2}{M^2} x_A^2 + y_A^2 = r^2$$

设圆柱对质点 A 的作用力为 N (79b), 则有

$$m\ddot{x}_A = N \sin \theta \quad (3)$$

$$m\ddot{y}_A = N \cos \theta - mg \quad (4)$$

$$M\ddot{x}_O = -N \sin \theta \quad (5)$$

联立求解方程(1)至(5),考虑到脱离时 $N=0$,得到脱离时满足

$$r\dot{\theta}^2 = g\cos\theta \quad (6)$$

因

$$x_O = -\frac{mr\sin\theta}{M+m}$$

得

$$\dot{x}_O = -\frac{mr\dot{\theta}\cos\theta}{M+m} \quad (7)$$

由机械能守恒,有

$$M\dot{x}_O^2 + m(\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2) = 2mgr(1 - \cos\theta)$$

将前面求得的 $\dot{x}_A, \dot{y}_A, \dot{x}_O$ 代入,可得

$$r\dot{\theta}^2 \left[1 - \frac{m\cos^2\theta}{M+m} \right] = 2g(1 - \cos\theta)$$

将质点 A 脱离时的条件(6)式代入,整理后得质点 A 脱离圆柱的位置 θ 所满足的方程为

$$\frac{m}{m+M}\cos^3\theta - 3\cos\theta + 2 = 0$$

80. 如图 80a 所示,质量为 m ,半径为 r 的均质圆柱体 C,自半径为 R 的固定圆柱面顶端无初速滚下。已知当 $\theta = \theta_1$ 时,圆柱体与固定圆柱面之间开始出现相对滑动。不计滚动摩擦阻,试求圆柱体 C 的转动角加速度与角 θ 间的关系。(冯立富,西安空军工程学院力学教研室。原第 179 题,1990, No. 1。)

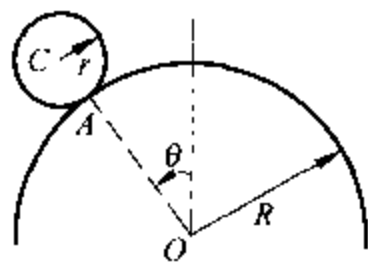


图 80a

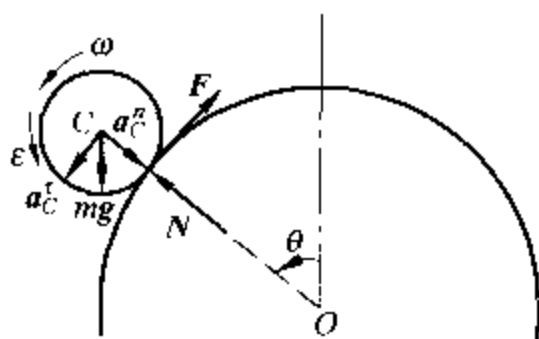


图 80b

解: 研究均质圆柱体 C, 受力与运动分析如图 80b 所示。其中 mg 为重力, N 为正压力, F 为滑动摩擦力; ω, ϵ 为圆柱体转动的角速度和角加速度, a_C^t, a_C^n 为圆柱体质心 C 的切向和法向加速度。设圆柱体与固定圆柱面间的滑动摩擦力系数为 μ , 根据刚体平面运动理论, 有

$$ma_C^t = mg\sin\theta - F \quad (1)$$

$$ma_C^n = mg\cos\theta - N \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}mr^2\epsilon = Fr \quad (3)$$

在上述三个方程中有五个未知量(N, F, a_C^x, a_C^y 和 ϵ), 因此必须补充两个方程才能求出全部未知量。依题意, 可供选择的补充方程如下。

(1) 固定圆柱面约束, 给出

$$N \geq 0 \quad (4a)$$

相应的运动学关系有

$$v_C = (R+r)\dot{\theta}, \quad a_C^x = (R+r)\ddot{\theta}, \quad a_C^y = (R+r)\dot{\theta}^2 \quad (4b)$$

(2) 当 $\theta \leq \theta_1$ 时, 即圆柱体与圆柱面间无相对滑动, 则还有

$$F \leq \mu N \quad (5a)$$

相应的运动学关系有

$$v_A = 0, \quad v_C = r\omega, \quad a_C^x = r\epsilon \quad (5b)$$

注意: 当 $\theta > \theta_1$ 时, 即圆柱体 C 与固定圆柱面间有相对滑动, 则有

$$F = \mu N \quad (6)$$

此时, 式(5b)不再成立。

方程(1)、(2)、(3)、(4b)、(5b)等式联立, 即可求得当 $\theta \leq \theta_1$ 时, 圆柱体转动的角加速度为

$$\epsilon = \frac{2g\sin\theta}{3r} \quad (7)$$

同时还可以求得

$$N = \frac{1}{3}mg(7\cos\theta - 4) \quad (8)$$

$$F = \frac{1}{3}mg\sin\theta \quad (9)$$

考虑到当 $\theta = \theta_1$ 时, $F = \mu N$, 由式(8)和式(9), 可得

$$\mu = \frac{\sin\theta_1}{7\cos\theta_1 - 4}$$

由方程(1)、(2)、(3)、(4b)、(6)等式联立, 可求得当 $\theta > \theta_1$ 时圆柱体的运动微分方程为

$$\ddot{\theta} - \mu\dot{\theta}^2 + \frac{g(\mu\cos\theta - \sin\theta)}{R+r} = 0$$

进一步求解, 可求出 $\theta > \theta_1$ 时的 $\epsilon(\theta)$ 。

81. 一质量为 m , 长为 l 的均质细杆, 上端以细线铅直挂起, 下端放在倾角为 α 的光滑斜面上(图 81a)。今把悬线剪断, 细杆将倒向斜面并向下滑行, 试求细杆的运动微分方程。(朱孝华, 苏州大学物理系。原第 199 题, 1990, No. 6。)

解: 细杆在运动过程中自由度为 2。取 φ 角和 x_A 为广义坐标(图 81b)。质心 C

的坐标为 x_C, y_C , 则有

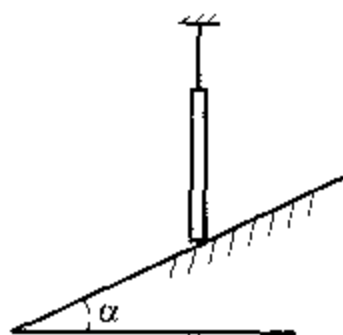


图 81a

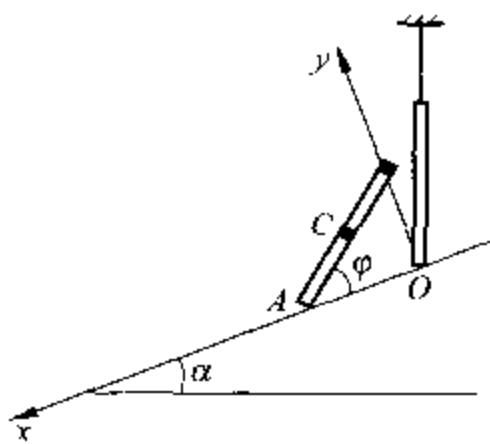


图 81b

$$x_C = x_A - \frac{1}{2}l\cos\varphi, \quad y_C = \frac{1}{2}l\sin\varphi$$

求导后得

$$\ddot{x}_C = \ddot{x}_A + \frac{1}{2}l(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)$$

$$\ddot{y}_C = \frac{1}{2}l(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)$$

由相对质心动量矩定理, 有

$$\frac{1}{12}ml^2 \ddot{\varphi} = -\frac{1}{2}Nl\cos\varphi \quad (1)$$

应用质心运动定理, 有

$$m\ddot{x}_C = m\ddot{x}_A + \frac{1}{2}ml(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) = mg\sin\alpha \quad (2)$$

$$m\ddot{y}_C = \frac{1}{2}ml(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) = N - mg\cos\alpha \quad (3)$$

由式(2)得

$$\ddot{x}_A = g\sin\alpha - \frac{1}{2}l(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) \quad (4)$$

由式(1)和(3)消去 N 得

$$l(1+3\cos^2\varphi)\ddot{\varphi} - 3l\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi + 6g\sin\varphi\cos\varphi = 0 \quad (5)$$

式(4)和式(5)即为细杆的运动微分方程组。

82. 轮子质量为 2kg , 半径 $r = \frac{l}{4}$, 可绕 O 轴转动, $J_O = \frac{1}{2}mr^2$ 。滑块 B 的质量为 1kg , 不计它与水平面的摩擦。 AO 为均质杆, 长度 $l = 0.6\text{m}$, 质量为 3kg , 其下部与轮子刚性固结在一起。弹簧弹性系数 $k = 20\text{N/cm}$ 。不计 AB 杆质量。物块 D 的质量为 1kg , 它的初位置 $y_0 = 0.2\text{cm}$, 初速度 $\dot{y}_0 = 8\text{cm/s}$ 。不计绳子的质量和变形。静平衡时, AB 杆水平, AO 杆垂直(图 82)。试求: (1) 系统微振动的固有频率 ω ;

(2) 物块 D 的运动方程。(王行新, 浙江大学力学系, 引自浙江大学 1983 年硕士研究生试题。原第 254 题, 1984.No. 3。)

解: 系统具有一个自由度, 取物块 D 的位移 y 为广义坐标。设 m_D 、 m_O 、 m_A 、 m_B 分别表示物块 D 、滑轮 O 、直杆 AO 和滑块 B 的质量, 则系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} \left(m_D + \frac{1}{2} m_O + \frac{16}{3} m_A + 16 m_B \right) \dot{y}^2$$

系统的势能为

$$V = \frac{1}{2} k (3y)^2 - m_D g y + m_A g \frac{l}{2} (1 - \cos \theta)$$

其中

$$\theta \approx \frac{y}{r} = \frac{4y}{l}$$

应用拉格朗日方程, 得

$$\left(m_D + \frac{1}{2} m_O + \frac{16}{3} m_A + 16 m_B \right) \ddot{y} + (9ky - 2m_A g \sin \theta) = m_D g$$

微振动时, 有

$$\sin \theta = \frac{4y}{l}$$

将各已知量代入, 得系统的固有频率

$$\omega = 22.76 \text{ rad/s}$$

物块 D 的运动规律可由上述方程解得, 考虑了初始条件后有

$$y = 0.2 \cos \omega t + 0.35 \sin \omega t \text{ (cm)}$$

83. 如图 83 所示, 刚架 $ABDE$ 固定在水平圆台上, 圆台可绕通过质心 C 的固定铅垂轴转动。在刚架上水平杆 BD 的 O 点悬挂一单摆, 摆球质量为 m , 摆线长 l , O 点在圆台的转动轴线上。刚架及圆台对其转动轴的转动惯量为 J , 单摆的摆动平面垂直于水平杆 BD , 不计轴承摩擦。如给圆台初始角速度 $\dot{\theta}_0$ 后即任其自由转动, 求单摆相对于刚架作微小振动的周期。(黎邦隆, 湖南大学理论力学教研室。原第 198 题, 1990.No. 6。)

解: 以整个系统为分析对象, 选圆台转角 θ 及单摆的摆角 φ 为广义坐标。取 $\varphi=0$ 时系统的势能为零。在任一瞬时, 系统的动能是

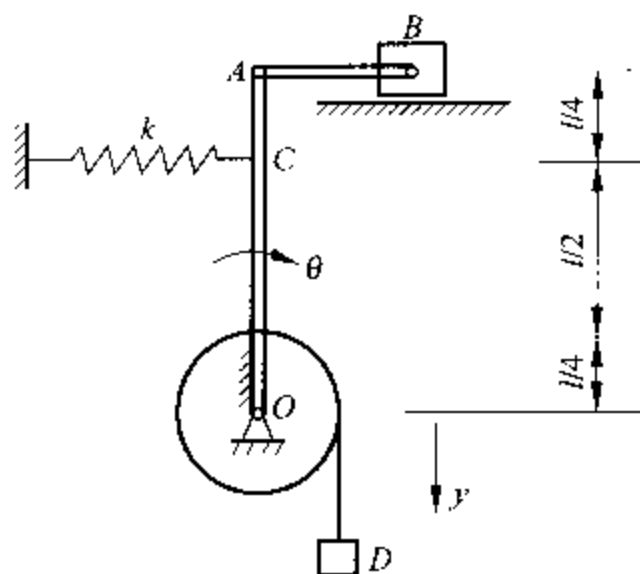


图 82

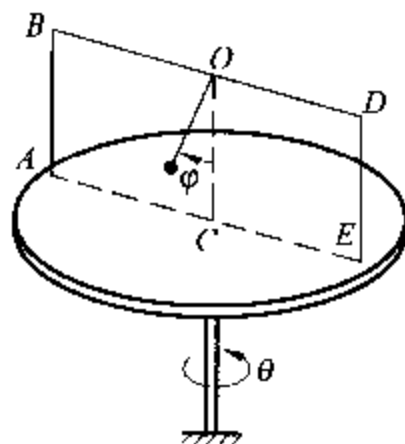


图 83

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m [(l \sin \varphi)^2 \dot{\theta}^2 + (l \dot{\varphi})^2]$$

系统的势能是

$$V = mgl(1 - \cos \varphi)$$

这是一个保守系统, 系统对广义坐标 φ 的拉格朗日方程为

$$ml^2 \ddot{\varphi} - ml^2 \sin \varphi \cos \varphi \cdot \dot{\theta}^2 + mgl \sin \varphi = 0 \quad (1)$$

作用在系统上的外力有重力和轴承反力, 但它们对圆台转动轴之矩均为零, 故系统对该轴的动量矩守恒, 有

$$J\dot{\theta} + m(l \sin \varphi)^2 \dot{\theta} = J\dot{\theta}_0$$

由此得

$$\dot{\theta} = \frac{J\dot{\theta}_0}{J + ml^2 \sin^2 \varphi}$$

代入式(1)后化简得

$$\ddot{\varphi} - \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{J\dot{\theta}_0}{J + ml^2 \sin^2 \varphi} \right)^2 + \frac{g}{l} \cdot \sin \varphi = 0 \quad (2)$$

对于单摆微小的相对摆动, φ 是一阶小量, 在上式中略去二阶小量后得

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l} - \dot{\theta}_0^2 \right) \varphi = 0 \quad (3)$$

对于方程式(3), 如果 $\dot{\theta}_0 \geq \sqrt{\frac{g}{l}}$, 则单摆的相对运动不是微小振动, 方程(2)就不能线性化, 也不存在振动周期; 如果 $\dot{\theta}_0 < \sqrt{\frac{g}{l}}$, 则单摆的相对运动可以是微小振动, 此时其振动周期为

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} - \dot{\theta}_0^2}}$$

84. 质量为 m , 半径为 r 的均质半圆柱 (质心在 C 点, $\overline{OC} = e = \frac{4r}{3\pi}$, $J_{Oz} = \frac{1}{2}mr^2$),

放在粗糙的水平面上, 如图 84a 所示。求: (1) 半圆柱的运动微分方程; (2) 半圆柱在平衡位置处作微小振动的周期; (3) 系统的平衡位置是属于哪一类平衡? (李银山, 太原工业大学应用数学力学系。原第 287 题, 1996, No. 3。)

解: (1) 由于粗糙, 本题为单自由度, 取广义坐标 θ , 速度瞬心为 P (图 84b), 有

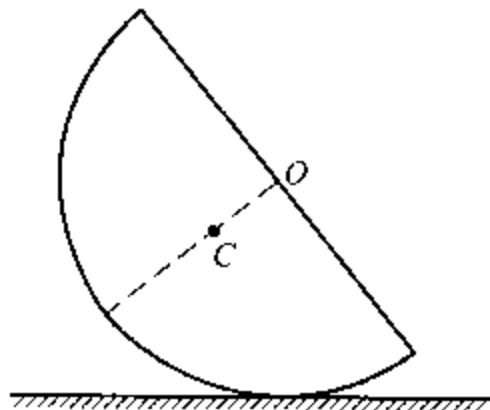


图 84a

$$J_C = J_O - me^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right) mr^2$$

$$J_P = J_C + m \overline{CP}^2 = \left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi} \cos\theta \right) mr^2$$

动能为

$$T = \frac{1}{2} J_P \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi} \cos\theta \right) mr^2 \dot{\theta}^2$$

势能为

$$V = mgr \left(1 - \frac{4}{3\pi} \cos\theta \right) \quad (\text{以地面为零势能面})$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} J_P \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi} \cos\theta \right) mr^2 \dot{\theta}^2 - mgr \left(1 - \frac{4}{3\pi} \cos\theta \right)$$

由拉格朗日方程 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$, 可得半圆柱在粗糙水平面上的运动微分方程为

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi} \cos\theta \right) \ddot{\theta} + \frac{4}{3\pi} \left(\frac{g}{r} + \dot{\theta}^2 \right) \sin\theta = 0 \quad (1)$$

(2) 在平衡位置微摆动时, 利用

$$\theta^2 \approx 0, \quad \sin\theta \approx \theta, \quad \cos\theta \approx 1, \quad \dot{\theta}^2 \approx 0$$

方程(1)线性化为

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi} \right) \ddot{\theta} + \frac{4}{3\pi} \frac{g}{r} \theta = 0 \quad (2)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{9\pi - 26}{8} \cdot \frac{r}{g}}$$

(3) 半圆柱势能为

$$V = mgr \left(1 - \frac{4}{3\pi} \cos\theta \right)$$

势能对 θ 的一阶偏导数为

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{4}{3\pi} mgr \sin\theta$$

令 $\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$, 得平衡位置

$$\theta = 0$$

势能对 θ 的二阶偏导数为

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=0} = \frac{4}{3\pi} mgr > 0$$

故 $\theta = 0$ 为系统的稳定平衡位置。

编者注: 原题还分析了地面光滑时的情况。但原题认为在地面光滑时系统也是单自由度, 这是错误的, 故删去了这一部分。

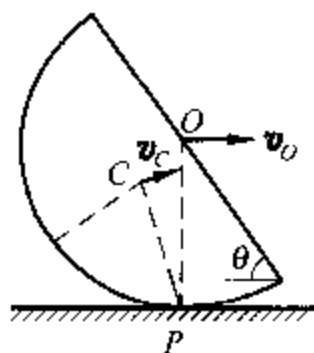


图 84b

85. 均质等边三角形薄板 ABC , 质量为 M , 边长为 l , 置于固定的半径为 R ($R \geq \frac{l}{\sqrt{3}}$) 的光滑球面的内表面上 (如图 85 所示), 求薄板 ABC 在平衡位置附近微振动的周期。(张仲毅, 华工汉口分院力学教研室。原第 227 题, 1992, No. 6.)

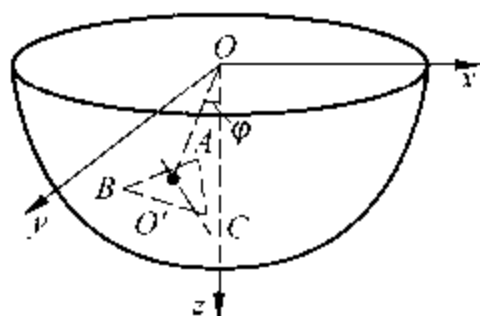


图 85

解: 设三角板的质心为 O' , 有

$$OO' = r = \sqrt{R^2 - \frac{1}{3}l^2}$$

三角板有 3 个自由度: 绕 OO' 轴转动, OO' 轴绕 z 轴转动, OO' 轴绕水平轴的转动。前两种转动不可能产生振动 (没有恢复力矩), 因此假定这两种转动的角速度为零。现只考虑第三种转动, 设摆角为 φ 。由于板是等边三角形, 故绕过质心的板平面内任一轴的转动惯量相等, 为

$$J_O = \frac{1}{24}Ml^2$$

板的动能为

$$T = \frac{1}{2}M(r\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}J_O\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}M\left(R^2 - \frac{7}{24}l^2\right)\dot{\varphi}^2$$

势能为

$$V = Mg\sqrt{R^2 - \frac{1}{3}l^2}(1 - \cos\varphi)$$

代入拉氏方程后, 经整理可得

$$\left(R^2 - \frac{7}{24}l^2\right)\ddot{\varphi} + g\sqrt{R^2 - \frac{l^2}{3}}\sin\varphi = 0$$

微振动时, $\varphi \approx \sin\varphi$, 方程线性化为

$$\left(R^2 - \frac{7}{24}l^2\right)\ddot{\varphi} + g\sqrt{R^2 - \frac{l^2}{3}}\varphi = 0$$

所以微振动周期为

$$T = \pi \sqrt{\frac{24R^2 - 7l^2}{2g\sqrt{9R^2 - 3l^2}}}$$

86. 半径为 r , 质量为 m 的均质圆盘, 以不变的角速度 $\dot{\varphi}$ 绕其 z 轴转动, 而 z 轴又可绕与它垂直的 AB 轴转动 (图 86a)。尺寸 l 和 b 均为已知。设系统初始时位于 $\theta = 0$ 的垂直位置, 并且无初速度释放。试求当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时轴承 A 、 B 处的水平约束力。假定除圆盘外其余物体的质量均可略去不计, 也不计摩擦阻力。(官飞, 清华大学工程力学系, 清华大学 1983 年硕士研究生试题, 引自 J. L. Jmeriam, "Dynamics"。原

第 82 题, 1984, No. 6.)

解: 先应用动能定理求得当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时 $\dot{\theta}$ 的值, 此时圆盘的角速度 $\dot{\phi}$ 与 $\dot{\theta}$ 如图 86b 所示, 有

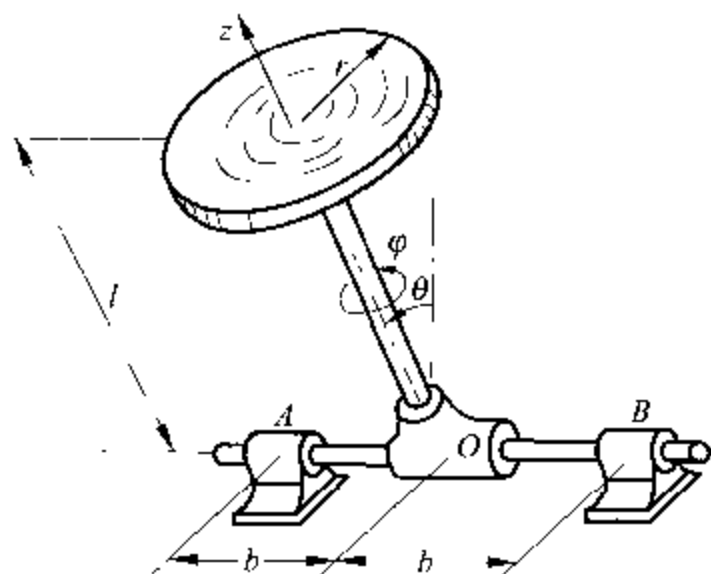


图 86a

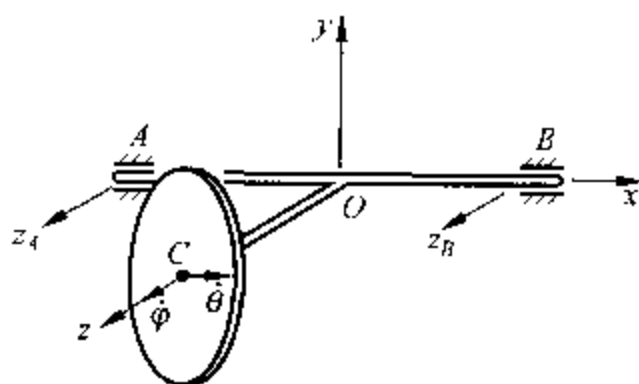


图 86b

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} m r^2 + m l^2 \right) \dot{\theta}^2 = m g l$$

得

$$\dot{\theta} = 2 \cdot \sqrt{\frac{2 g l}{r^2 + 4 l^2}}$$

由质心运动定理, 得

$$z_A + z_B = -m l \dot{\theta} \quad (1)$$

再求圆盘对于固定点 O 的动量矩, 其各分量表示在图 86c 上。应用赖柴耳 (Résal) 定理*, 显然动量矩端点沿 y 轴的速度为 $-J_z \dot{\phi} \dot{\theta}$, 由此可得

$$z_A \cdot b - z_B \cdot b = -\frac{1}{2} m r^2 \dot{\phi} \dot{\theta} \quad (2)$$

解(1)、(2)两个方程, 即得

$$z_A = -\frac{1}{2} m \dot{\theta} \left(\frac{r^2}{2b} \dot{\phi} + l \dot{\theta} \right)$$

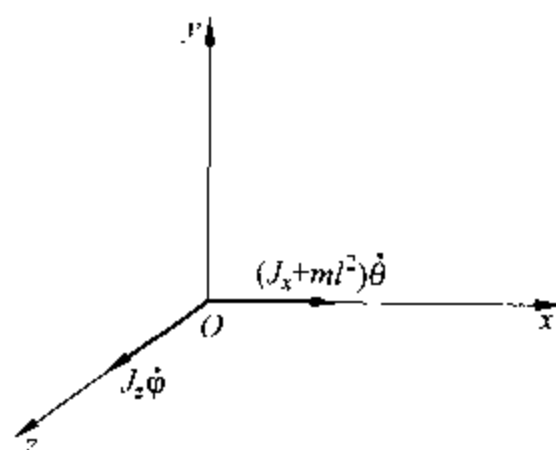


图 86c

* Résal 定理的内容是: 陀螺高速转动时自转动量矩端点的速度等于外力矩矢量。该定理认为陀螺的总动量矩近似等于自转的动量矩, 因为陀螺高速自转的角速度远大于进动或章动角速度。

$$z_B = \frac{1}{2} m \dot{\theta} \left(\frac{r^2}{2b} \dot{\phi} - l \dot{\theta} \right)$$

87. 光滑水平面上有两块平板 A 和 B, 质量均为 M , 厚薄相同。A 板以匀速 $u = \sqrt{8gR}$ 向右运动。B 板上放着一个均质圆柱体, 半径为 R , 质量也是 M 。圆柱与两板之间的摩擦系数 $\mu = \frac{1}{3}$, 圆柱与 B 板最初处于静止状态, 且接触点离 B 板左端距离为 R (图 87a)。某瞬时, A 板与 B 板突然发生完全非弹性碰撞。问自碰撞瞬时算起, 经过多长时间圆柱开始在板上作纯滚动? (殷金生, 北京大学力学系, 引自北京大学 1982 年硕士研究生考题。原第 42 题, 1983 年, No. 2。)

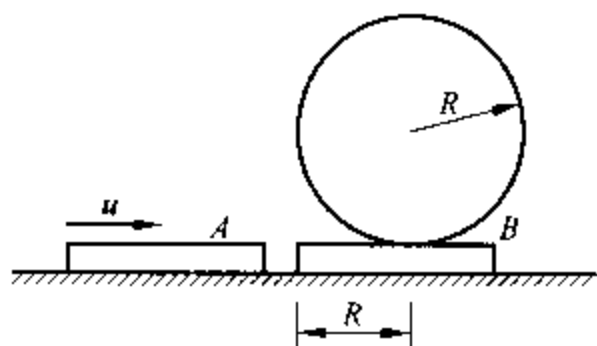


图 87a

解: (1) 碰撞阶段, 因为碰撞是完全非弹性的, 所以碰撞后 A、B 两板具有共同的速度 v_0 , 而圆柱仍保持不动, 由动量守恒, 有

$$Mu = (M + M)v_0$$

得

$$v_0 = \frac{1}{2} u = \sqrt{2gR}$$

(2) 圆柱在平板 B 上滚动阶段, 取坐标系 Oxy 固连在 A 板上 (图 87b, 它是非惯性系)。设圆柱中心的相对速度为 v_r , 圆柱的角速度为 ω , 板系的加速度为 a 。所以圆柱的相对运动动力学方程为

$$M \frac{dv_r}{dt} = -F - Ma \quad (1)$$

$$J_C \frac{d\omega}{dt} = FR \quad (2)$$

板系的动力学方程为

$$2Ma = F \quad (3)$$

上面三个动力学方程包含四个未知数, 必须补充一个方程。因为圆柱与板有相对滑动, 故

$$F = \mu Mg \quad (4)$$

解方程组 (1) 至 (4), 注意到 $\mu = \frac{1}{3}$, $J_C = \frac{1}{2} MR^2$, 初始条件为: $v_r(0) = v_0 = \sqrt{2gR}$, $\omega(0) = 0$, 解得

$$v_r = \sqrt{2gR} - \frac{1}{2} gt \quad (5)$$

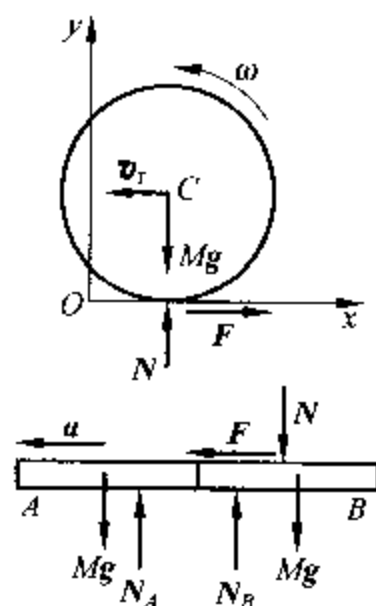


图 87b

$$\omega = \frac{2g}{3R}t \quad (6)$$

圆柱在板上作纯滚动的条件是

$$v_r - R\omega = 0 \quad (7)$$

将式(5)、(6)代入式(7),得

$$t = t^* = \frac{6\sqrt{2}}{7}\sqrt{\frac{R}{g}} = 1.212\sqrt{\frac{R}{g}}$$

即自碰撞瞬时算起,经过 t^* 时刻,圆柱开始在板上作纯滚动。

下面计算圆柱到达两板连接处的时间 t_1 。因为 $\dot{x}_C = -v_r$, 代入式(5)积分,有

$$\int_R^0 dx_C = \int_0^{t_1} \left(\frac{1}{2}gt - \sqrt{2gR} \right) dt$$

得

$$t_1 = 2(\sqrt{2} - 1)\sqrt{\frac{R}{g}} = 0.828\sqrt{\frac{R}{g}} < t^*$$

这说明当圆柱尚未开始作纯滚动之前,它已从 B 板运动到了 A 板。此后因 B 板不受水平力作用, B 板将作匀速运动,而 A 板将在圆柱的摩擦力作用下减速,所以 A 、 B 板开始分离。将 t_1 代入式(5)、(6),得下一阶段的初始条件为

$$v_r(t_1) = \sqrt{2gR} - \frac{1}{2}gt_1 = \sqrt{gR} \quad (8)$$

$$\omega(t_1) = \frac{2g}{3R}t_1 = \frac{4(\sqrt{2}-1)}{3R}\sqrt{gR} \quad (9)$$

(3) 圆柱在 A 板上滚动,此时 B 板已脱离 A 板(图 87c),圆柱的动力学方程仍然是式(1)和(2),但初始条件变了。板的动力学方程为

$$Ma = F \quad (10)$$

解方程(1)、(2)和(10), $t=0$ 时的初始条件如式(5)、(6),解得

$$v_r = \sqrt{gR} - \frac{2}{3}gt$$

$$\omega = \frac{2g}{3R}t - \frac{4(\sqrt{2}-1)}{3R}\sqrt{gR}$$

将上面两式代入纯滚动条件(7),有

$$\sqrt{gR} - \frac{2}{3}gt - \frac{2}{3}gt - \frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)\sqrt{gR} = 0$$

解得

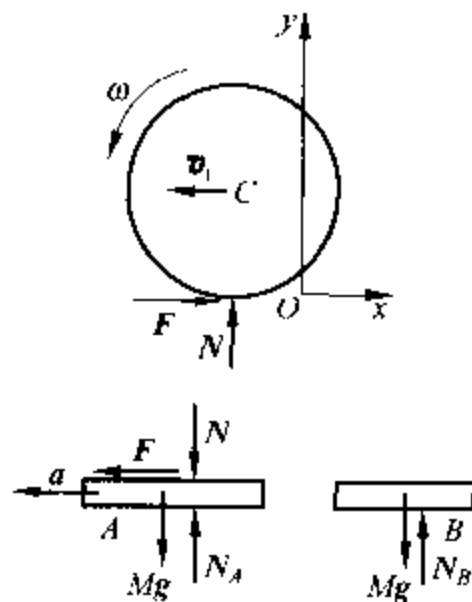


图 87c

$$t - t_2 = \left(\frac{7}{4} - \sqrt{2} \right) \sqrt{\frac{R}{g}}$$

最后,若从 A、B 两板发生碰撞的瞬时算起,则经过时间

$$T = t_1 + t_2 = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{4} \right) \sqrt{\frac{R}{g}}$$

后,圆柱开始纯滚动。

88. 杆 OA 和 AB 长均为 L, 质量均为 m, 在铅垂位置处于静止。现有一水平碰撞冲量 S, 为使 O 处不产生瞬时反力, b 应为多少(图 88a)? 碰撞结束时 AB 杆瞬心 E 的位置 d 应为多少?(叶柏年, 太原工业大学数理力学系。原第 215 题, 1992, No. 1。)

解: 以 OA 杆为研究对象, C 为 OA 杆的质心, S_A 为 AB 杆对 OA 杆的冲量, 若 O 点处无冲量(图 88b), 则由动量矩定理和动量定理, 有

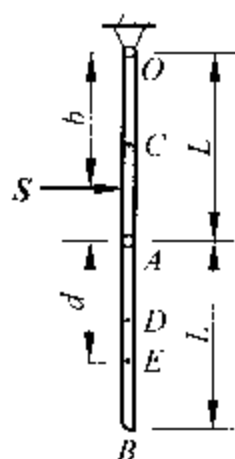


图 88a

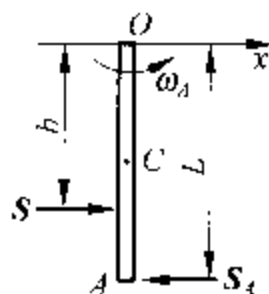


图 88b

$$\frac{1}{3} mL^2 \omega_A = Sb - S_A L \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} mL \omega_A = S - S_A \quad (2)$$

上两式中消去 S, 得

$$S_A = \frac{mL}{L-b} \left(\frac{b}{2} - \frac{L}{3} \right) \omega_A$$

以 AB 杆为研究对象, D 为 AB 杆的质心(图 88c), 由动量矩定理和动量定理得

$$\frac{1}{12} mL^2 \omega_B = -\frac{1}{2} L S_A \quad (3)$$

$$m \left(L \omega_A + \frac{1}{2} L \omega_B \right) = S_A \quad (4)$$

消去 ω_B , 得

$$S_A - \frac{1}{4} mL \omega_A = \frac{mL}{L-b} \left(\frac{b}{2} - \frac{L}{3} \right) \omega_A$$

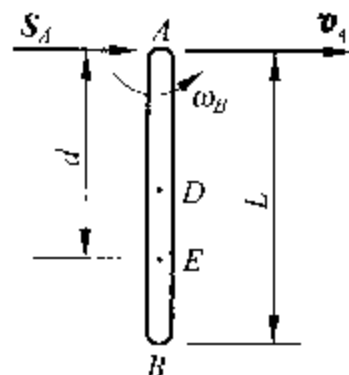


图 88c

$$b = \frac{7L}{9}$$

代入式(3)得

$$\omega_B = -\frac{6}{mL}S_A$$

因

$$\omega_A = \frac{4}{mL}S_A$$

E 点速度为零的条件为

$$L\omega_A - d\omega_B = 0$$

将上两式代入,解得 AB 杆瞬心 E 的位置 $d = \frac{2}{3}L$ 。

89. 两根杆 AB 和 BC, 长度均为 $2a$, 质量均为 m , 用光滑铰链连接于 B 处并放在光滑水平面上, 初始时, A、B、C 三点在一条直线上。今于端点 A 处作用一垂直于杆的冲量 S (图 89a), 求其运动方程。(唐盛球, 湖南农学院农业工程系。原第 183 题, 1990, No. 2。)

解: 首先推导有冲击力作用时的拉格朗日方程。设广义坐标为 q_i , 在冲击瞬间 $(0, \tau)$, 该系统有 $Q_k \neq 0$, 其他广义力 $Q_i = 0 (i \neq k)$ 。对拉氏方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

积分得

$$\int_0^\tau d \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \int_0^\tau \frac{\partial T}{\partial q_i} dt + \int_0^\tau Q_i dt$$

因为碰撞过程中假设系统的位置不变, 因此等式右边的第一项为零。第二项当 $i \neq k$ 时为零, $i = k$ 时为

$$\int_0^\tau Q_k dt = p_k$$

因此有

$$\left. \begin{aligned} \Delta \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) &= 0 \quad (i \neq k) \\ \Delta \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) &= p_k \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

下面用式(1)解本题, 如图 89b, 取 x, y 为 B 点的广义坐标, θ_1 , θ_2 表示两杆与初始位置的夹角。则动能为

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x} + a \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x} + a \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}_2^2 + m \dot{y}^2$$

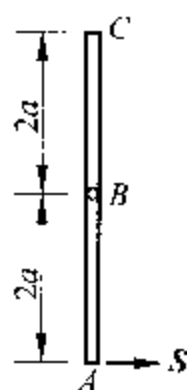


图 89a

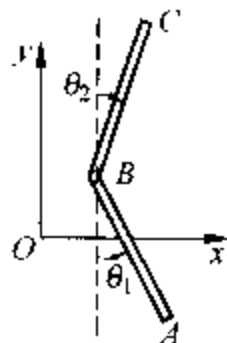


图 89b

冲量所做的元功为

$$\delta W = \sum p_i \delta q_i = S(\delta x + 2a\delta\theta_1) \quad (2)$$

一般表示式为

$$\delta W = p_x \delta x + p_y \delta y + p_{\theta_1} \delta\theta_1 + p_{\theta_2} \delta\theta_2 \quad (3)$$

比较式(2)、(3)后,有

$$p_x = S, \quad p_y = 0, \quad p_{\theta_1} = 2Sa, \quad p_{\theta_2} = 0 \quad (4)$$

把式(4)代入式(1),有

$$p_x: m(\dot{x} + a\dot{\theta}_1) + m(\dot{x} + a\dot{\theta}_2) = S$$

$$p_y: m\dot{y} = 0$$

$$p_{\theta_1}: ma(\dot{x} + a\dot{\theta}_1) + J\dot{\theta}_1 = 2Sa$$

$$p_{\theta_2}: ma(\dot{x} + a\dot{\theta}_2) + J\dot{\theta}_2 = 0$$

考虑到 $J = \frac{1}{3}ma^2$, 可解得

$$\dot{x} = -\frac{S}{m}, \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{\theta}_1 = \frac{9S}{4ma}, \quad \dot{\theta}_2 = \frac{3S}{4ma}$$

90. 均质杆 AB 静止在光滑水平面上, 其质量为 M , 长度为 $2l$ 。今有质量为 m 的小球, 以垂直于杆的速度 u 碰撞在杆的端点(图 90a), 两者之间的碰撞恢复系数为 e 。问当 $\mu = \frac{M}{m}$ 为何值时球与杆可能发生第二次碰撞, 第二次碰撞后球与杆各自的运动如何? (刘瑄, 南昌师范专科学校。原第 99 题, 1985, No. 4。)

解: 设第一次碰撞后小球的速度为 u_1 , 杆心速度为 v_1 , 角速度 ω_1 (图 90b)。由系统水平动量守恒, 得

$$Mv_1 + mu_1 = mu$$

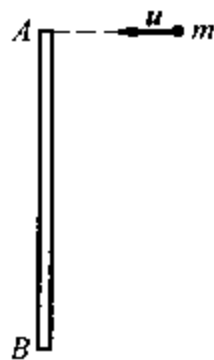


图 90a

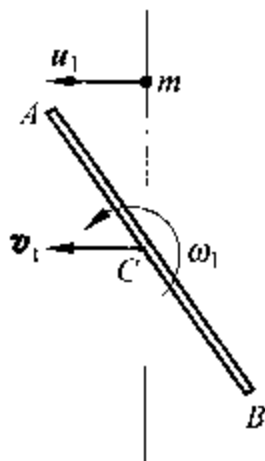


图 90b

对与碰撞点相重合的固定点动量矩守恒, 有

$$\frac{1}{3}Ml^2\omega_1 + Mv_1l = 0$$

由碰撞的恢复系数定义,有

$$v_1 + l\omega_1 - u_1 = eu$$

由此三式可解得

$$v_1 = \frac{(1+e)u}{4+\mu}$$

$$\omega_1 = \frac{3(1+e)u}{(4+\mu)l}$$

$$u_1 = \frac{(4-\mu e)u}{4+\mu}$$

只有当 $v_1 = u_1$ 时才有可能发生第二次碰撞,由此得

$$\mu = \frac{3}{e} - 1$$

设第二次碰撞后用 u_2 、 v_2 和 ω_2 表示相应的量,同理可得三个方程

$$Mv_2 + mu_2 = mu$$

$$\frac{1}{3}Ml^2\omega_2 - Mv_2l = 0$$

$$v_2 + \omega_2l - u_2 = (u_1 - v_1 - \omega_1l)e$$

由此可解得

$$v_2 = \frac{(1-e)ue}{3(1+e)}, \quad \omega_2 = \frac{(1-e)ue}{(1+e)l}, \quad u_2 = \frac{(7-e)ue}{3(1+e)}$$

91. 如图 91a 所示均质角尺 $\overline{AB} = \overline{BC} = l$, 各段质量均为 M , 平放于光滑的水平面上, 一质量为 m 的小球以 v_0 的速度沿水平面运动, 且 $v_0 \perp AB$, 并与 AB 的中点 D 相碰, 恢复系数 $e=0.5$ 。试求质量比 M/m 为何值时, 小球能恰好与角尺的 C 端相碰。(刘又文, 湖南大学工程力学系。原第 319 题, 1999, No. 5。)

解: 设碰撞后小球速度为 v_1 , 角尺质心速度为 v , 角速度为 ω , 如图 91b 所示, 由 v_0 方向系统动量守恒, 有

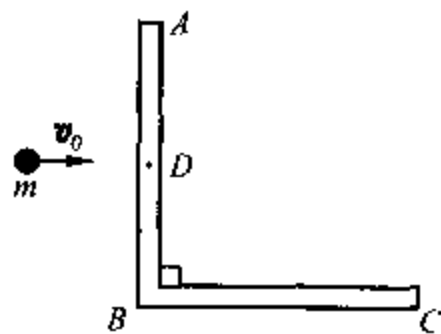


图 91a

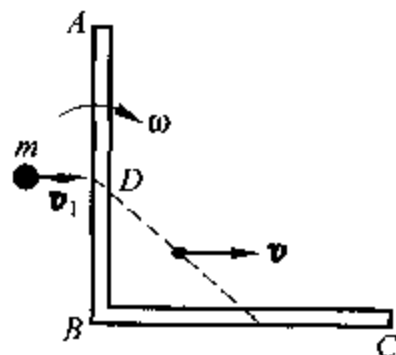


图 91b

$$mv_0 = mv_1 + 2Mv \quad (1)$$

又由恢复系数的定义,有

$$e = \frac{v + \frac{l}{4}\omega - v_1}{v_0} = 0.5 \quad (2)$$

再由角尺对固定点 D 动量矩守恒,有

$$2Mv \cdot \frac{l}{4} = 2 \left[\frac{1}{12}Ml^2 + M \left(\frac{\sqrt{2}}{4}l \right)^2 \right] \omega$$

即

$$v = \frac{5}{6}l\omega \quad (3)$$

联立式(1)、式(2)、式(3)可得

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{18m}{13ml + 20Ml} v_0 \\ v_1 &= \frac{13m - 10M}{13m + 2M} v_0 \\ v &= \frac{15m}{13m + 20M} v_0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

碰撞后角尺作平面运动, ω 为常量, 第一次旋转至图 91c 位置所经历时间为

$$t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi(13ml + 20Ml)}{18mv_0}$$

令

$$v_1 t = vt - \frac{1}{2}l \quad (5)$$

则小球正好与角尺 C 端相遇, 将式(4)代入式(5)得

$$\frac{M}{m} = \frac{39 - 2\pi}{10\pi}$$

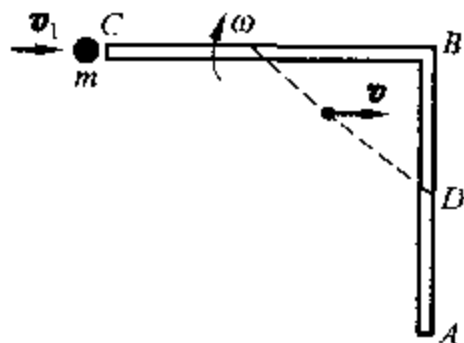


图 91c

92. 六根长度均为 l , 质量均为 m 的均质杆 AB 、 BC 、 CD 、 DE 、 EF 、 FA 在端点用光滑铰相连, 并用不计质量的杆 GH 用光滑铰与 BC 、 EF 两杆的中点联结(图 92a)。如原来六根杆形成一正六边形, 在铅垂面内落下, 以速度 v 与一固定水平面发生塑性碰撞, 且落下时 BC 、 EF 两杆是铅垂的, 求在碰撞过程中杆 GH 所受的冲量。(黎邦隆, 湖南大学理论力学教研室。原第 189 题, 1990, No. 4。)

解: 由对称性, 碰撞结束时杆 DC 、 DE 以等值反向的角速度绕 D 点作定轴转动, 点 G 、 A 、 H 的速度在竖直方向, 故杆 BC 的速度瞬心为 I 。由于 $v_B \perp AB$, 故 AB 杆的速度瞬心为 A 点, $v_A = 0$ 。由对称性, 只需分析左边三杆的情形(图 92b)。因为碰撞前后瞬间六边形各顶点的位置不变, 可看作固定点, 以它们为矩心列出的冲量矩方程

不必考虑附加修正项。设杆 AB 、 BE 、 CD 的角速度分别为 ω_1 、 ω_2 、 ω_3 (方向如图 92b), 因

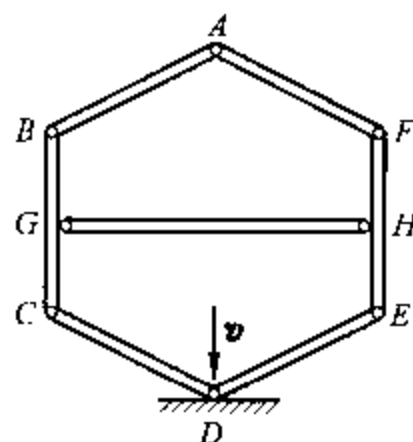


图 92a

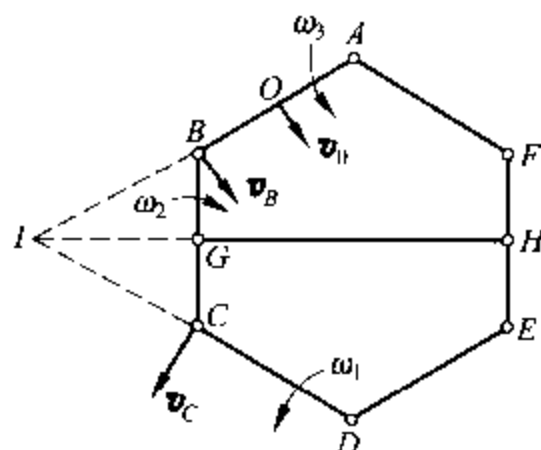


图 92b

$$\overline{DC} = \overline{IC} = \overline{IB} = \overline{AB}$$

故

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$$

AB 杆质心 O 的速度垂直于 AB , 大小为

$$v_0 = \frac{1}{2}l\omega_3 = \frac{1}{2}l\omega_1$$

以杆 AB 为研究对象, 作用在杆上的冲量有 S_A , S_{Bx} , S_{By} , 如图 92c 所示。以 B 点为矩心, 冲量方程为

$$\left(-mv_0 \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{12}ml^2\omega_3\right) - \left(-mv \cdot \frac{l}{2}\cos 30^\circ\right) = S_A l \sin 30^\circ$$

以 $v_0 = \frac{1}{2}l\omega$, $\omega_3 = \omega_1$ 代入, 化简后得

$$-\frac{1}{3}ml\omega_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}mv = S_A \quad (1)$$

以 AB 、 BC 两杆一起为研究对象(图 92d), 以 C 为矩心, 得冲量矩方程

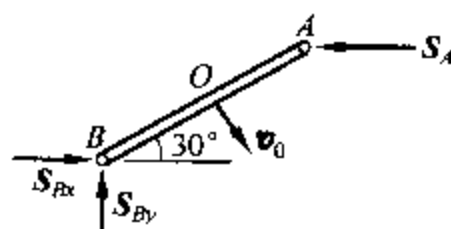


图 92c

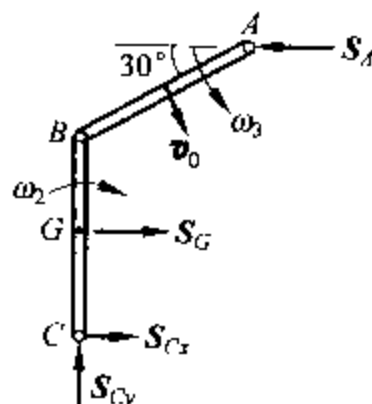


图 92d

$$\left\{ \left[-mv_0 \left(\frac{l}{2} + l \sin 30^\circ \right) + \frac{m}{12} l^2 \omega_3 \right] - \frac{m l^2}{12} \omega_2 \right\} - \left(-mv \cdot \frac{l}{2} \cos 30^\circ \right) = S_A \cdot \frac{3}{2} l - S_C \cdot \frac{l}{2}$$

以 $v_0 = \frac{1}{2} l \omega_3$, $\omega_3 = \omega_2 = \omega_1$ 代入, 化简后得

$$-ml\omega_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}mv = 3S_A - S_C \quad (2)$$

联解式(1)、(2), 即得

$$S_C = \sqrt{3}mv$$

93. 图 93a 所示各杆长均为 L , 质量均为 m , 相邻杆互相垂直, 处于静止状态。在 OA 杆上作用一垂直于杆的冲量 S , 为使 O 处不产生冲击力, b 应该为多少? (叶柏年, 太原工业大学数理系力学教研室。原第 260 题, 1994, No. 3。)

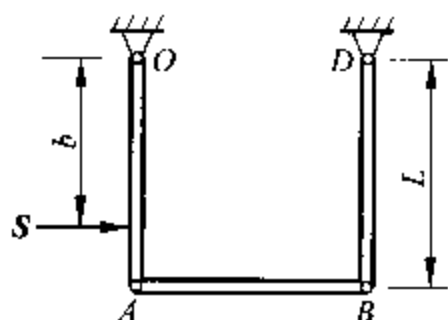


图 93a

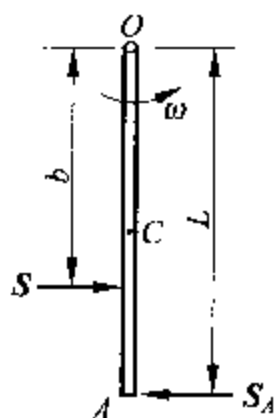


图 93b

解: 碰撞结束瞬时, 系统位置不变, 设 OA 杆及 OB 杆的角速度为 ω , 以 OA 杆为研究对象, C 为 OA 杆质心(图 93b), 可得

$$\frac{1}{3}mL^2\omega = Sb - S_A L$$

$$m \cdot \frac{L}{2}\omega = S - S_A$$



图 93c

消去 S 可解得

$$S_A = \frac{mL\omega}{L-b} \left(\frac{b}{2} - \frac{L}{3} \right) \quad (1)$$

以 AB 杆为研究对象, E 为 AB 杆质心(图 93c), 可得

$$mL\omega = S_A - S_B \quad (2)$$

以 DB 杆为研究对象(图 93d), 可得

$$\frac{1}{3}mL^2\omega = S_B L \quad (3)$$

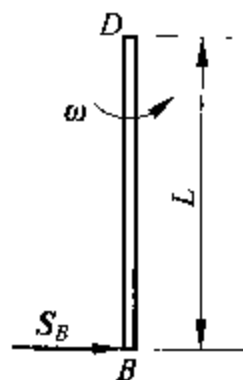


图 93d

由式(1)、(2)、(3), 可得

$$b = \frac{10}{11}L$$

94. 斜面与水平面夹角为 α , 从 O 点处射出一个小球, 射出的速度方向与斜面夹角为 β (图 94)。球在竖直平面内运动。若该球在第 n 次碰撞时跳回到 O 点, 证明

$$\frac{1-e}{\tan\alpha\tan\beta} = 1 - e^n$$

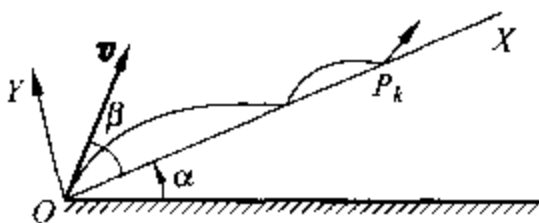


图 94

其中 e 是球与斜面的碰撞恢复系数。若第 r 次碰撞垂直于斜面, 证明

$$e^n - 2e^r + 1 = 0$$

(程稼夫, 中国科技大学近代力学系。原第 194 题, 1990, No. 5。)

证明: 取 OX 轴沿斜面向上, OY 轴垂直 OX 向上, 令 v 为小球在 O 点的射出速度。令 P_k 为第 k 个碰撞点, (u_k, v_k) 为第 k 次碰撞以后的速度分量 ($k=0, 1, 2, \dots$)。因为在 X, Y 方向的加速度分量为 $(-g\sin\alpha, -g\cos\alpha)$, 通过距离 $P_k P_{k+1}$ 花的时间 t_{k+1} 由下式给出

$$0 = v_k t_{k+1} - \frac{1}{2} g \cos\alpha \cdot t_{k+1}^2$$

则有

$$t_{k+1} = \frac{2v_k}{g \cos\alpha}$$

从 O 到 P_k 经历的总时间为

$$T_k = t_1 + t_2 + \dots + t_k = \frac{2(v_0 + v_1 + \dots + v_{k-1})}{g \cos\alpha}$$

现有

$$v_0 = v \sin\beta, \quad v_1 = e v \sin\beta, \quad v_2 = e^2 v \sin\beta, \dots$$

所以

$$T_k = \frac{2v \sin\beta (1 + e + \dots + e^{k-1})}{g \cos\alpha} = \frac{2v \sin\beta (1 - e^k)}{g \cos\alpha (1 - e)}$$

$$\overline{OP_k} = v \cos\beta \cdot T_k - \frac{1}{2} g \sin\alpha \cdot T_k^2$$

因为 $\overline{OP_n} = 0$, 所以

$$2v \cos\beta = g \sin\alpha \cdot T_n = \frac{g \sin\alpha \cdot 2v \sin\beta (1 - e^n)}{g \cos\alpha \cdot (1 - e)}$$

即

$$\frac{1-e}{\tan\alpha\tan\beta} = 1 - e^n \quad (1)$$

进一步有

$$u_k = v \cos \beta - g \sin \alpha \cdot T_k$$

若第 r 次碰撞垂直于斜面, 即 $u_r = 0$, 则有

$$v \cos \beta = g \sin \alpha \cdot T_r = \frac{2v \sin \beta \tan \alpha (1 - e^r)}{1 - e}$$

或

$$\frac{1 - e}{\tan \alpha \tan \beta} = 2(1 - e^r) \quad (2)$$

从方程(1)和(2)得

$$1 - e^n = 2(1 - e^r)$$

或

$$e^n - 2e^r + 1 = 0$$

95. 弹簧质量系统如图 95 所示。两个质点的质量均为 m , 两个弹簧的弹性系数均为 k , 自然长度均为 l , 杆 OB 在外力矩 M 的作用下绕竖直轴 O 转动, 不计弹簧和杆的质量, 不计摩擦。系统从静止开始, 然后以匀角速度 ω 转动, 试分析 ω 的临界值。(徐晓斌, 北京航空学院材料力学教研室 86 级硕士研究生。原第 163 题, 1988, No. 3.)

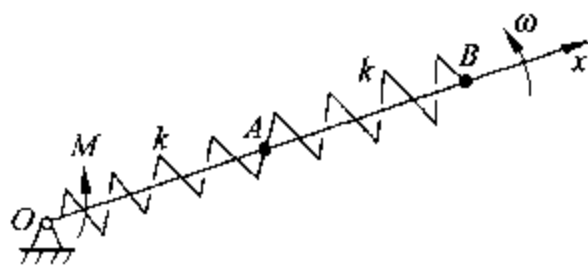


图 95

解: 设 x_1 为弹簧 OA 的长度, x_2 为弹簧 AB 的长度。当角速度为 ω , 系统处于动态平衡时, 有

$$\begin{aligned} k(x_2 - l) &= m\omega^2(x_1 + x_2) \\ k(x_1 - l) - k(x_2 - l) &= m\omega^2 x \end{aligned}$$

解得

$$x_1 = \frac{1}{\alpha^2 - 3\alpha + 1}, \quad x_2 = (1 - \alpha)x_1$$

其中 $\alpha = \frac{m\omega^2}{k}$, 方程 $\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0$ 的解为

$$\alpha_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

显然, $\alpha \geq 0$ 。对于 $\alpha > \alpha_1$, 两个弹簧的长度必有一个为负值, 这是不可能的。所以只有当 $\alpha < \alpha_1$ 时才有物理意义, 当 $\alpha \rightarrow \alpha_1$ 时

$$\omega \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} (\sqrt{5} - 1) = \omega_c$$

此时

$$x_1 \rightarrow \infty, \quad x_2 \rightarrow \infty$$

所以 ω 的临界值为 ω_c 。

96. 空心圆柱内半径 $R=3r$, 质量 $M=3m$, 它可绕 O 轴作定轴转动。半径为 r , 质量为 m 的实心圆柱 O_1 可在空心圆柱内作纯滚动(图 96a)。求系统微振动的固有频率。(刁顺, 武汉地质学院 84 级研究生。原第 139 题, 1987, No. 2。)

解: 系统有两个自由度, 取空心圆柱的绝对转角 θ 和小圆柱中心的偏角 φ 为广义坐标(图 96b)。则空心圆柱的动能为

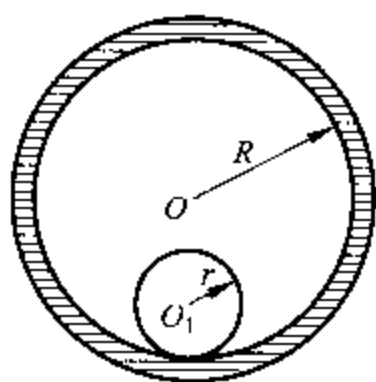


图 96a

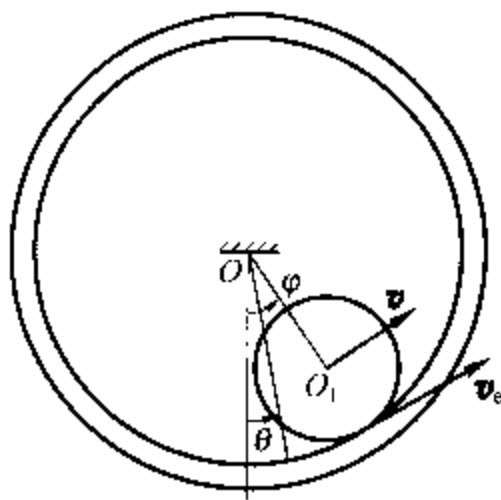


图 96b

$$T_1 = \frac{1}{2} MR^2 \dot{\theta}^2$$

小圆柱的动能为

$$T_2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$$

其中

$$v = (R-r)\dot{\varphi}, \quad J = \frac{1}{2} mr^2$$

$$\omega = \frac{1}{r}(v - v_e) = \frac{1}{r}[(R-r)\dot{\varphi} - R\dot{\theta}]$$

系统势能为

$$V = mg(R-r)(1 - \cos\varphi) \approx mg(R-r) \cdot \frac{1}{2}\varphi^2$$

注意到 $R=3r, M=3m$ 拉氏函数为

$$L = \frac{63}{4}mr^2 \dot{\theta}^2 + 3mr^2 \dot{\varphi}^2 - 3mr^2 \dot{\theta}\dot{\varphi} - mgr\varphi^2$$

代入拉氏方程后, 得

$$\begin{cases} 63\ddot{\theta} - 6\ddot{\varphi} = 0 \\ -3r\ddot{\theta} + 6r\ddot{\varphi} + 2g\varphi = 0 \end{cases}$$

由此得频率方程为

$$\begin{vmatrix} -63\omega^2 & 6\omega^2 \\ 3r\omega^2 & 2g-6r\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

解得

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{7g}{20r}}$$

97. 本题包括题目及解答两部分,你认为解答对否?如不对,错在哪里?

题目:一串链条由许多均质小环节组成,长为 L , 单位长度质量为 ρ 。静止悬挂时刚触及台秤,读数为零(图 97a)。若松手,问台秤的读数与链条下降长度 x 的关系。

解答:以整个链条为研究对象,很明显,上部分链条中各个环节正在自由下落,下部分链条已静止于台秤上了(图 97b)。由质心运动定理

$$\sum m_i a_{C_i} = R_x$$

上式向 x 方向投影有

$$m_1 a_{C_1} + m_2 a_{C_2} = m_1 g + m_2 g - N_x$$

代入链条质量与长度的关系,有

$$(L-x)\rho \cdot g + x\rho \cdot 0 = (L-x)\rho g + x\rho g - N_x$$

所以

$$N_x = \rho g x$$

由牛顿第三定理,台秤上受力也为 $\rho g x$, 即读数为 $\rho g x$ 。(高云峰,清华大学工程力学系。原第 275 题,1995, No. 5。)

解:上述解答不对。原因在于,在上述解答中,有一句“很明显,上部分链条中各个环节正在自由下落”,其实这个结论是错误的。

如果用质心运动定理,应把整个链条分为三个部分:(1)正在下落的部分,加速度为 g , 长度为 $L-x-\Delta L$, 其中 ΔL 为链条中一个环节的长度。(2)下落部分中最后一个环节,其长度为 ΔL , 加速度在这一时刻之前为 g , 而在这一时刻之后为零,而这一时刻加速度未知!(3)已下落静止于秤台上的部分,长度为 x , 加速度为零。由于上述解答未考虑第(2)部分中一个环节的加速度不为 g , 导致答案不对。

下面从另一个角度来研究。

以已下落静止于秤台的链条为研究对象(图 97c), 就成为一个变质量的问题了, 由公式有

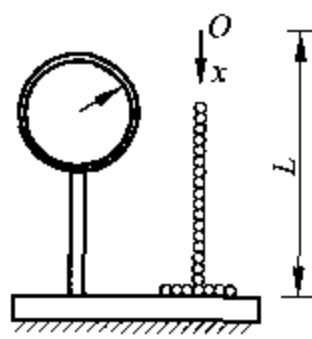


图 97a

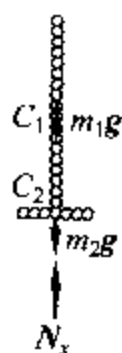


图 97b



图 97c

$$m a_c = R_c + \dot{m}_1 v_{r1} - \dot{m}_2 v_{r2}$$

其中: $m = x\rho$ 为已静止的链条质量, $a_c = 0$ 为静止链条质心的加速度, $\dot{m}_1 = \dot{x}\rho$ 为流入质量率, $\dot{m}_2 = 0$ 为流出质量率, $v_{r1} = v_1 - v_c$ 为流入质量相对静止链条质心的速度, R_c 为外力。把上式向 x 方向投影, 代入各量得

$$x\rho \cdot 0 = (x\rho g - N_x) + \dot{x}\rho(\dot{x} - 0) - 0$$

所以

$$N_x = \rho g x + \rho \dot{x}^2$$

对于正在下落的任一节链, 有

$$mgx = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

所以

$$\dot{x}^2 = 2gx$$

从而

$$N_x = 3\rho g x$$

再由牛顿第三定理, 台秤读数为 $3\rho g x$ 。

98. 本题包括题目及解答两部分, 你认为解答对否? 如不对, 错在哪里?

题目: 图 98a 所示机构中, AB 以匀角速度 Ω 转动, 附件 OC 可绕 O 轴转动, θ 垂直于 Ω 。已知 OC 质量为 m , $l_{OC} = r$, 过质心 C 的三个主转动惯量为 J_x, J_y, J_z , 其中 x 轴垂直于 AB 轴, y 轴沿 OC 方向, 求附件 OC 相对 AB 轴平衡时, θ 为多少?

解答: 采用动静法。因为附件 OC 相对 AB 平衡, 所以 $\dot{\theta} = 0, \ddot{\theta} = 0$ 。附件 OC 的质心加速度为

$$a_c = r \sin \theta \Omega^2$$

加上惯性力, 如图 98b 所示。利用

$$\sum m_O = 0$$

所以

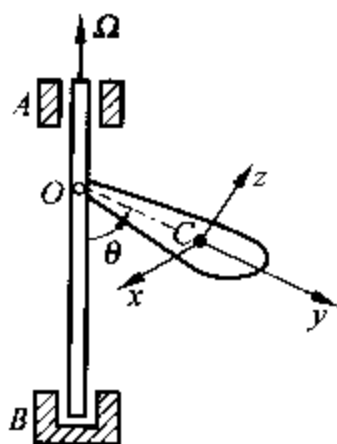


图 98a

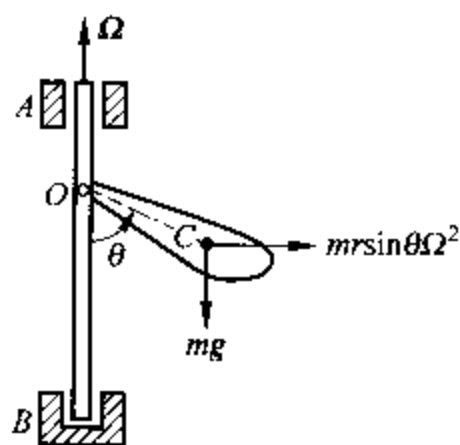


图 98b

$$mgr\sin\theta + mr\sin\theta\Omega^2 r\cos\theta = 0$$

所以

$$\sin\theta = 0, \quad \cos\theta = \frac{g}{r\Omega^2}$$

所以

$$\theta = 0, \quad \theta = \arccos \frac{g}{r\Omega^2}$$

即附件相对平衡的角度与附件的转动惯量无关。(高云峰, 清华大学工程力学系。原第 284 题, 1996, No. 2。)

解: 上述解答不对! 原因在于: 当加上惯性反力时, 该分布力系向质心 C 简化时还有力偶矩! 但力偶矩为多大, 用动静法却不太好确定, 不过可以肯定与质量分布或 J_x, J_y, J_z 有关, 下面换一种方法求解。

可以认为 OC 绕 O 点作定点运动, 有

$$\frac{d\mathbf{H}_O}{dt} = \mathbf{L}_O$$

在动坐标系 $Ox'y'z'$ 中 ($Ox'y'z'$ 与 $Cxyz$ 的各坐标轴相应平行), 动量矩定理进一步可写为

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{H}_O}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_O = \mathbf{L}_O$$

其中 $\frac{\tilde{d}\mathbf{H}_O}{dt}$ 表示 \mathbf{H}_O 在动系 $Ox'y'z'$ 中求导, $\boldsymbol{\omega}$ 为动系 $Ox'y'z'$ 的角速度。 \mathbf{L}_O 为外力对 O 点的力矩。如果将各矢量在动系 $Ox'y'z'$ 中用矩阵表示, 则有

$$\underline{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\Omega \cos\theta \\ \Omega \sin\theta \end{bmatrix}, \quad \underline{J}_O = \begin{bmatrix} J_x + mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z + mr^2 \end{bmatrix}, \quad \underline{H}_O = \underline{J}_O \underline{\omega}$$

在动系 $Ox'y'z'$ 中, \underline{J}_O 及 $\underline{\omega}$ 均为常阵, 所以 \underline{H}_O 亦为常阵。代入动量矩定理并用矩阵表达, 得

$$\begin{bmatrix} 0 & -\Omega \sin\theta & -\Omega \cos\theta \\ \Omega \sin\theta & 0 & 0 \\ \Omega \cos\theta & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x + mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z + mr^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\Omega \cos\theta \\ \Omega \sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mgr\sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

展开后有

$$[(J_x + mr^2) - J_y]\Omega^2 \sin\theta \cos\theta = mgr\sin\theta$$

解为

$$\sin\theta = 0 \quad \text{或} \quad \cos\theta = \frac{mgr}{(J_z - J_y + mr^2)\Omega^2}$$

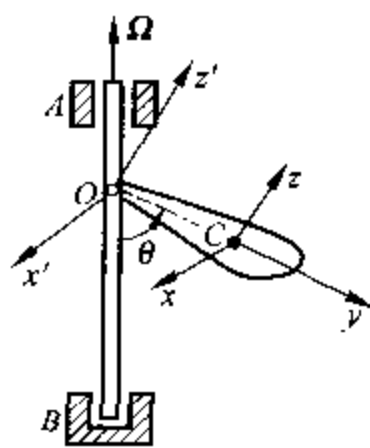


图 98c

所以

$$\theta=0, \quad \theta=\arccos \frac{mgr}{(J_x+J_y+mr^2)\Omega^2}$$

99. 在非常有利的条件下,当从正上方俯视时,若发现在海洋表面上有一个作逆时针旋转的海洋环流,其旋转周期是 14h,问这个海洋流是在什么纬度和哪个半球探测到的?(程稼夫,中国科技大学近代力学系。原第 186 题,1990, No. 3。)

解:这种环流运动是由科里奥利力引起的,设地球自转角速度为 ω ,海洋流相对运动速度为 v_r ,则由科氏加速度引起的科氏惯性力为

$$\mathbf{S}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$$

其在水平面上的分量 S_{cH} 决定于 $\boldsymbol{\omega}$ 的铅垂分量 ω_z 。因 $\boldsymbol{\omega}_z \cdot \mathbf{v}_r = 0$, 故 S_{cH} 的大小为

$$S_{cH} = 2m\omega_z v_r = 2m\omega v_r \sin\varphi \quad (1)$$

其中 φ 为纬度。

因 S_{cH} 始终垂直于 v_r , 且其大小在某确定纬度 φ 下不变, 故它只引起 v_r 方向的改变。使海洋流形成作圆周运动的环流。若以 Ω 表示圆周运动的角速度, 则

$$S_{cH} = m \frac{v_r^2}{r} = mv_r \Omega \quad (2)$$

把式(1)代入式(2), 整理得

$$\theta = \arcsin \frac{\Omega}{2\omega} = \arcsin \frac{24}{28} \approx 59^\circ$$

若在北半球, ω_z 竖直向上。此时 S_{cH} 指向速度 v_r 的右方, 使 v_r 向右偏转, 引起顺时针旋转, 若在南半球, ω_z 竖直向下, 则引起逆时针旋转。可见, 这个海洋环流是在南纬 59° 处发现的。

100. 在板簧试验中得到了“三角形”弹性力变化特征曲线, 如图 100a 所示。当板簧偏离静平衡位置时, 特征曲线的上分支(C_1)起作用; 当板簧返回时, 曲线的下分支(C_2)起作用。设初瞬时板簧对其静平衡位置的偏离是 x_0 , 而初速度为零。板簧上物体的质量是 m , 板簧的质量可以忽略, 板簧的弹性系数是 k_1 和 k_2 。

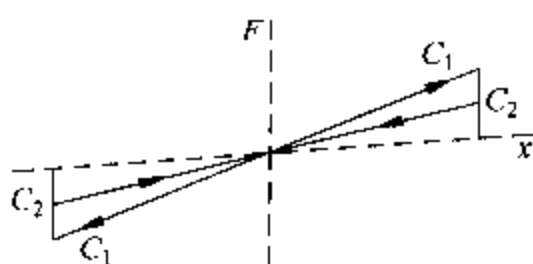


图 100a

(1) 试写出第一次半周期内板簧自由振动的方程, 并求出振动的全周期 T 。

(2) 求板簧自由振动的振幅衰减规律。已知记录自由振动时得到的振幅衰减序列是 13.0mm, 7.05mm, 3.80mm, 2.05mm, ...。根据已知的振动图线, 求出弹性系数比值 k_1/k_2 , 这里 k_1 和 k_2 对应于“三角形”刚度特征曲线的上、下分支的弹性系数。(李银山, 太原理工大学应用力学研究所。引自密歇尔斯基《理论力学习题集》第 36 版第 57-1 和第 57-2 题。原第 320 题, 1999, No. 5。)

解: (1) 板簧自由振动的运动微分方程为

$$\ddot{x} + F(x) = 0 \quad (1)$$

其中

$$F(x) = \begin{cases} k_1 x, & x \dot{x} \geq 0 \\ k_2 x, & x \dot{x} < 0 \end{cases} \quad (2)$$

初始条件

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (3)$$

当板簧返回静平衡位置时,其振动方程是

$$x = x_0 \cos p_2 t \quad (4)$$

其中 $p_2 = \sqrt{k_2/m}$ 。而板簧离开静平衡位置,其振动方程则是

$$x = -x_0 \frac{p_2}{p_1} \sin\left(p_1 t - \frac{\pi p_1}{2 p_2}\right) \quad (5)$$

其中 $p_1 = \sqrt{k_1/m}$ 。全周期是

$$T = \pi \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right) \quad (6)$$

(2) 由式(4)和式(5)可知每经过半个振动周期,振幅的值按几何级数衰减,公比是 p_2/p_1 。弹性系数比是 $k_2/k_1 = 3.4$ 。方程(1)的时程曲线和相平面图如图 100b 和图 100c 所示。

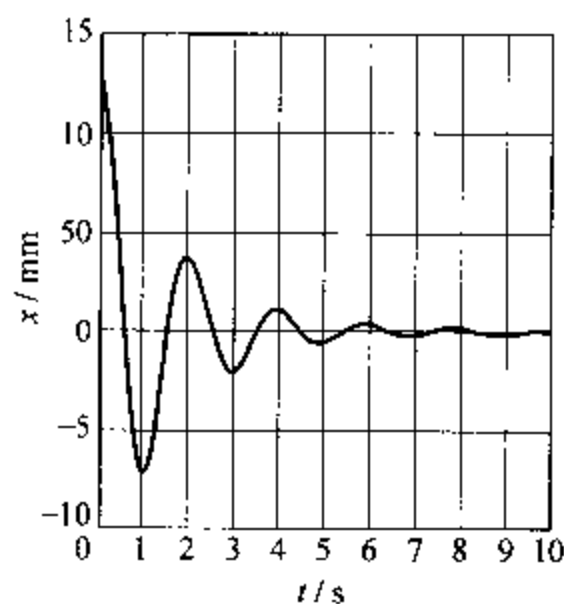


图 100b

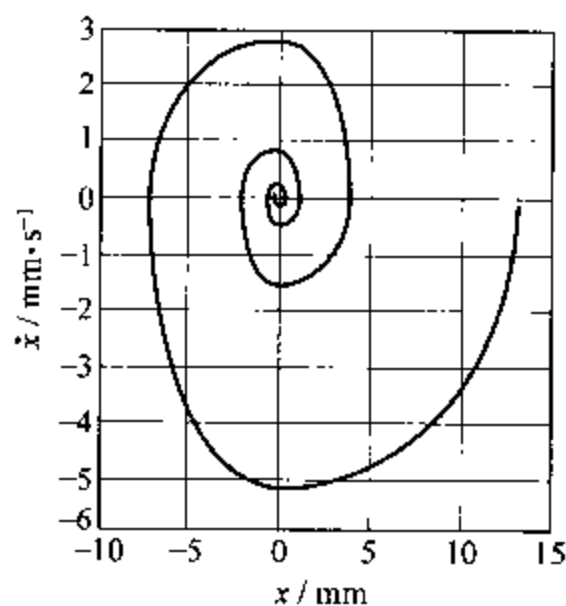


图 100c

第4章

趣味力学问题

101. 将桌面上的四根火柴棍摆成长方形的形状(图 101a), 双手各执一根火柴棍挑这一结构。当火柴棍的接触点靠近中部(图 101a 中的实线位置)时, 很难挑起这四根火柴; 但是当火柴棍的接触点靠近某一端(图中的虚线位置)时, 就容易挑起这四根火柴。请说明这个现象。(李华生, 南京工学院 5508 信箱。原第 17 题, 1981, No. 4。)

解: 当从中间挑时, 由于四根火柴构成的是几何可变体系, 它是不稳定的, 所以不易挑起。当在一端挑时, 由于火柴棍很轻, 可以认为两力在一直线上, 构成平衡力系。由于摩擦, 另一端的火柴棍也可以被夹起来。并且当 β 在 90° 附近变化时, 仍然可以保持平衡(图 101b)。

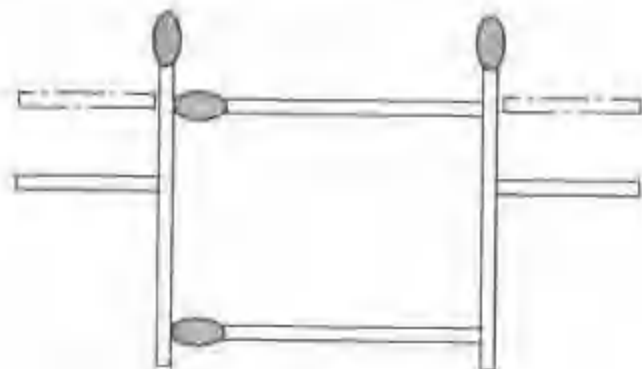


图 101a

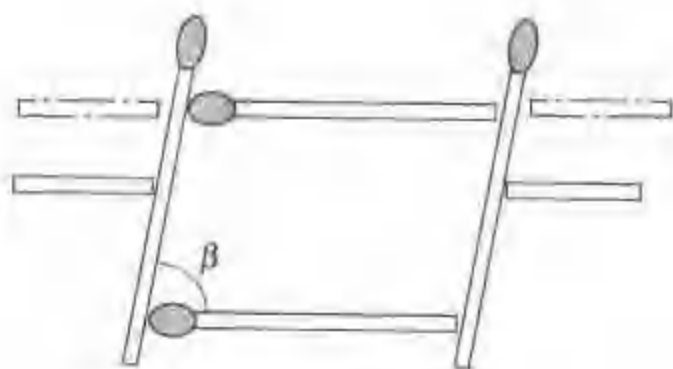


图 101b

102. 利用一个无底的薄壁圆筒(比如用饮料罐剪去上、下部分而得到, 设半径为 R), 再找两个乒乓球(设半径为 r), 如果有 $2R > 2r > R$, 就可以表演魔术了: 把两乒乓

球如图 102a 所示放入圆筒内,有时圆筒会翻倒,有时又不会翻倒。这里面有什么“机关”吗?(高云峰,清华大学工程力学系。原第 309 题,1997, No. 6。)

解:这个简单魔术的“机关”在于:两个乒乓球虽然外观一样,但重量不同:一个是空心的正常的乒乓球,另一个则用注射器注满水并用蜡封住针口。

如此一来,这个魔术实际上就是一个系统能否静力平衡的问题了。设圆筒重量为 Q ,两乒乓球的重量分别为 P_1 、 P_2 ,则系统整体的受力如图 102b 所示。在临界翻倒的情况下,应有 $N_A=0$,系统中只有 B 、 C 点接触水平面。对 B 点取矩,有

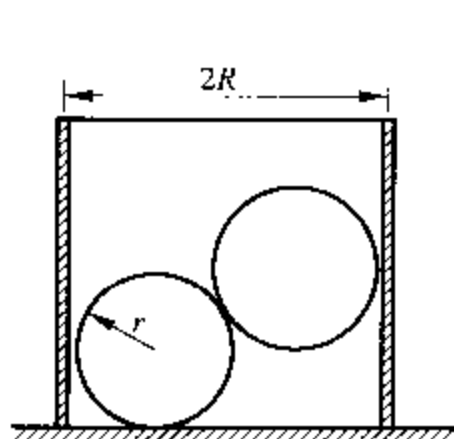


图 102a

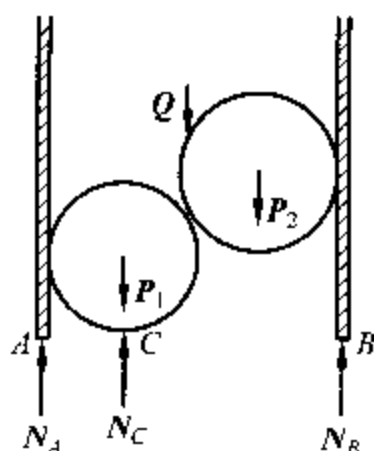


图 102b

$$QR + P_1(2R - r) + P_2r = N_C(2R - r) \quad (1)$$

再取两乒乓球为研究对象,由竖直方向的平衡(不考虑乒乓球与圆筒间的摩擦力,因为如果没有摩擦力时有同样的表演效果),有

$$N_C = P_1 + P_2 \quad (2)$$

联立式(1)、(2),得到临界平衡时的关系为

$$P_2 = \frac{QR}{2(R - r)} \quad (3)$$

因此,当 $P_2 > \frac{QR}{2(R - r)}$ 时,圆筒会翻倒;当 $P_2 < \frac{QR}{2(R - r)}$ 时,圆筒不会翻倒。

在表演魔术时,若先放空心的乒乓球后放注水的乒乓球,圆筒就会翻倒;若先放注水的乒乓球后放空心的乒乓球,圆筒就不会翻倒。由于观众从外表上看不出两个乒乓球的区别,自然会感到有些奇怪了。

103. 设位于同一平面中的 n^2 个点排成 n 行、 n 列(见图 103,图中的 n^2 个点只画出了位于四个角的一部分, n 为整数, $n \geq 3$),并且任意两相邻行和相邻列之间的距离都相等。记这 n^2 个点中位于四个角的点分别为 A 、 B 、 C 、 D ,则有 $AB \perp AD$ 。(1)现有 n^2 个质点,这些质点中质量为 i 克 ($1 \leq i \leq n$) 的质点数目有且仅有 n 个。试问如何将这 n^2 个质点分布在图 103 中的 n^2 个点的位置上(使每个点上都有

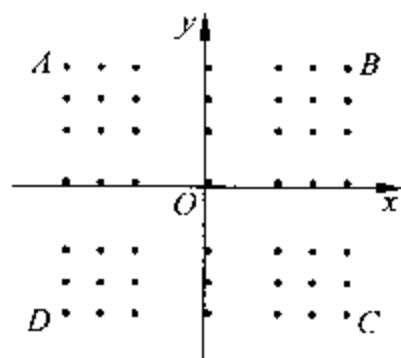


图 103

一个质点),才能使质点系的质心恰好在 AC 和 BD 的交点上? (2)若仅把 n^2 个质点换成质量分别依次为 1 克, 2 克, \dots , n^2 克的 n^2 个质点,那么问题的答案又将如何? (高建国, 河南大学数学系。原第 131 题, 1986, No. 6; 第 135 题, 1987, No. 1。)

解: (1) 首先介绍一个数学概念。由元素 $1, 2, \dots, n$ 构成的 n 阶方阵 A , 若其每行、每列中 $1, 2, \dots, n$ 各出现一次, 则称 A 为一个 n 阶拉丁方。

令 $B = (b_{ij})$ 为由元素 $1, 2, \dots, n$ 构成的一个 n 阶拉丁方。对于 $1 \leq i, j \leq n$, 在图 103 中位于第 i 行、第 j 列的点上放置一个质量为 b_{ij} 克的质点, 则有

$$\sum_{i=1}^n b_{ij} = \sum_{j=1}^n b_{ij} = \sum_{i=1}^n i = M \quad (1)$$

即 B 的任一行或任一列的元素之和均为 $M = \sum_{i=1}^n i$ 。这样得到的由给定的 n^2 个质点所构成的质点系即为所求的质点系, 证明如下:

在这个质点系中建立直角坐标系 Oxy , O 为 AC 与 BD 的交点, x 轴平行于线段 AB , y 轴平行于线段 BC , x 轴与 y 轴的单位长度即为相邻两行(或两列)间的距离。

在 Oxy 中, 记位于第 i 行、第 j 列的质量为 b_{ij} 的质点的横坐标为 x_j , 纵坐标为 y_i , 又记质系质心的坐标为 (x_0, y_0) , 则显然有

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{\sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_j}{\sum_{i,j=1}^n b_{ij}} = \frac{\sum_{j=1}^n (x_j \sum_{i=1}^n b_{ij})}{\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n b_{ij})} = \frac{M \sum_{j=1}^n x_j}{nM} = 0 \\ y_0 &= \frac{\sum_{i,j=1}^n b_{ij} y_i}{\sum_{i,j=1}^n b_{ij}} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i \sum_{j=1}^n b_{ij})}{\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n b_{ij})} = \frac{M \sum_{i=1}^n y_i}{nM} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

故按 n 阶拉丁方规律所得质点系即为第一问所求。

(2) 第 2 问中涉及另一个数学概念。由元素 $1, 2, \dots, n^2$ 所构成的 n 阶方阵 A , 若其每行、每列及两条对角线中诸数之和均相同, 即为 $n(n^2+1)/2$, 则称 A 为一个 n 阶幻方。对于 $n \geq 3$ 的整数, 现在已经证明 n 阶幻方都存在, 并且可以具体构造出来。

令 $H = (h_{ij})$ 为一个 n 阶幻方, 对于 $1 \leq i, j \leq n$, 在图 103 中位于第 i 行、第 j 列的点上放置一个质量为 h_{ij} 克的质点, 这样就恰好得到由给定的 n^2 个质点所构成的质点系。与在前面解答中完全相同地建立直角坐标系 Oxy , 容易证明, 上面所建立的质点系的质心恰好在 O 点。

上面令 $H = (h_{ij})$ 为一个 n 阶幻方, 要求过强了一点。事实上, 只要 H 的每行及每列中诸数之和均相同即可(不必考虑对角线)。对于取定的整数 $n \geq 3$, 满足这样条件的 n 阶方阵要比 n 阶幻方容易构造, 并且其数量也比 n 阶幻方多。

编者注:本题是由原第131题、第135题合并而成。

104. 古埃及人在四千年前就已懂得了摩擦学的原理,他们曾用滚子和滑板来搬运重物。有一幅浮雕反映了奴隶们搬运一台石雕巨像的情景(约公元前1900年)。仔细观察可以发现:巨像放在滑板上,由172个奴隶拉着,有一人在滑板上将液体倒在地面上进行润滑。

根据图104,试定性地分析一下,这些奴隶能否搬动巨像?估计巨像重量约为60t,其他各种参数可在合理范围内假设。(高云峰,清华大学工程力学系。背景资料见《摩擦学原理》,霍林主编,机械工业出版社,1981年,p.4。原第322题,2000, No. 2。)

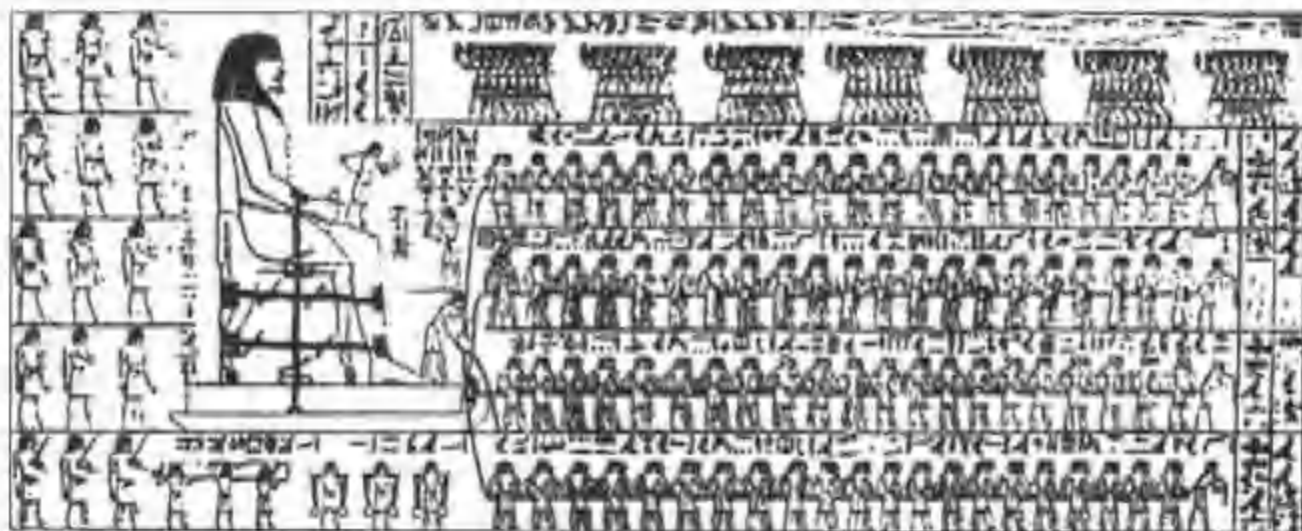


图 104

解:首先,我们估计一下背景资料中所给的巨像重量约为60t是否可靠。

假设浮雕的画面是按一定比例雕刻的,可测出巨像中的法老身高约为奴隶身高的5倍,则体积应为5的3次方即125倍。设奴隶体重60kg,人体密度约为 $1\text{g}/\text{cm}^3$,石块密度一般在 $3\text{g}/\text{cm}^3$ 左右,因此法老重量为 $(60 \times 125 \times 3)\text{kg} = 22500\text{kg} = 22.5\text{t}$ 。再加上座椅及底座,因此巨像总重为60t是比较可靠的。

其次,对奴隶的拉力进行估计。设滑板经润滑后与地面的摩擦系数为0.23,则要搬动巨像,每个奴隶的平均拉力至少应大于 $F = \frac{60 \times 1000 \times 9.8 \times 0.23}{172}\text{N} \approx 800\text{N}$ 。

对于体重为60kg,较为强壮的奴隶,使出800N的拉力应是不成问题的。

但有一个问题,体重为60kg,拉力为800N,那么摩擦系数不就大于1了吗?

实际上,当奴隶们光着脚拉重物时,脚底皮肤与地面的摩擦系数是可以大于1的。可以用一个简单的试验来验证:把一枚硬币放在手掌上,慢慢转动手掌,可以明显发现当倾角大于 45° 时,硬币并不会相对手掌滑动,由此证明皮肤与硬币间的摩擦系数大于1。

综上,从浮雕可以得出结论:这些奴隶是可以搬动这个巨像的,浮雕所表现的可能是当时真实的情况。至于奴隶们分为上下四排,是由于当时人们还不会(或不必要)使用透视关系。总之,利用摩擦理论来判断浮雕的内容是否真实,表明了力学的应用

范围极其广阔。

105. 假定设计一个“不倒翁”，其底部轮廓线在结体坐标 Bxy 中为 $y = ax^2$ ($a > 0$)，顶部形状暂不考虑，重心 C 在 y 轴上(图 105a)。为了让“不倒翁”具备应有的功能，重心 C 的位置有何限制？其物理意义如何？(高云峰，清华大学工程力学系。原第 290 题，1996, No. 4。)

解：首先明确“不倒翁”应具备的功能：(1) 无干扰时，底部顶点 B 是平衡位置，其余各点均不是平衡位置；(2) 有干扰时， B 点的平衡是稳定的。

设 OXY 是定系， Bxy 是结体系。假设“不倒翁”平衡时， M 为平衡时接触点， P 为重心 C 在 X 轴上的投影点(图 105b)。设 $\overline{PC} = Y$ ，则平衡时重力势能为

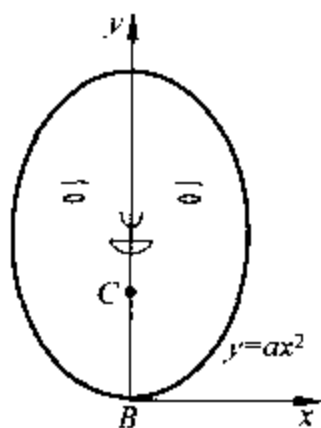


图 105a

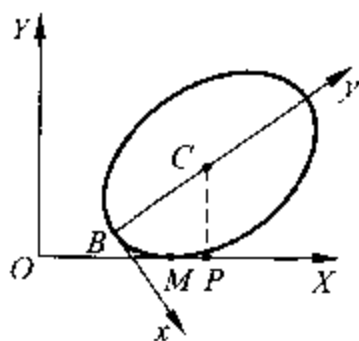


图 105b

$$V = mgY$$

且有

$$\left. \frac{dV}{dx_M} \right|_{M=B} = 0, \quad \left. \frac{dV}{dx_M} \right|_{M \neq B} \neq 0, \quad \left. \frac{d^2V}{dx_M^2} \right|_{M=B} > 0$$

下面具体求出 V 与 x_M 的关系。

在 Bxy 中，设 M 点的坐标为 (x_M, y_M) ， P 点的坐标为 (x_P, y_P) ， C 点的坐标为 $(0, y_C)$ 。则 X 轴在 Bxy 坐标中的方程为

$$y - y_M = 2ax_M(x - x_M) \quad (1)$$

CP 与 X 轴垂直，在 Bxy 坐标中为

$$y - y_C = -\frac{1}{2ax_M}x \quad (2)$$

联立方程(1)、(2)，可以求出 $P(x_P, y_P)$ 在 Bxy 坐标中的表达式为

$$x_P = \frac{y_C + ax_M^2}{1 + 4a^2x_M^2} \cdot 2ax_M, \quad y_P = y_C - \frac{1}{2ax_M}x_P$$

所以

$$Y = \overline{PC} = \sqrt{(x_C - x_P)^2 + (y_C - y_P)^2} = \sqrt{x_P^2 + \left(\frac{1}{2ax_M}x_P\right)^2} = \frac{y_C + ax_M^2}{\sqrt{1 + 4a^2x_M^2}}$$

所以

$$V = mg \frac{y_C + ax_M^2}{\sqrt{1+4a^2x_M^2}}$$

$$\frac{dV}{dx_M} = 2mgax_M(1+4a^2x_M^2)^{-3/2}(1+2a^2x_M^2-2ay_C)$$

$$\frac{d^2V}{dx_M^2} = 2mga(1+4a^2x_M^2)^{-5/2}(1+16a^3x_M^2y_C-2ay_C-2a^2x_M^2)$$

(1) 令 $\frac{dV}{dx_M} = 0$, 可解出

$$x_M = 0 \quad \text{或} \quad x_M = \sqrt{\frac{1}{a}\left(y_C - \frac{1}{2a}\right)}$$

为了让只有 $x_M = 0$ 时 $\frac{dV}{dx_M} = 0$, 必须有

$$y_C - \frac{1}{2a} < 0 \quad \text{即} \quad y_C < \frac{1}{2a}$$

此时 $x_M = \sqrt{\frac{1}{a}\left(y_C - \frac{1}{2a}\right)}$ 无实数解。

(2) $x_M = 0$ 时, $\frac{d^2V}{dx_M^2} = 2mga(1-2ay_C)$, 为了让 $\frac{d^2V}{dx_M^2} > 0$, 应有 $y_C < \frac{1}{2a}$ 。

综上(1)、(2)可知: 对于 $y = ax^2$, $y_C < \frac{1}{2a}$ 时, “不倒翁”在 B 点是平衡的, 且平衡是稳定的。除 B 点之外, 其余各点均不平衡。

讨论 $y_C < \frac{1}{2a}$ 的物理含义:

对于曲线 $y = ax^2$, 在 $x = 0$ 处的曲率半径为

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} \Big|_{x=0} = \frac{1}{2a}$$

曲率中心 (ζ, η) 为

$$\zeta = 0, \quad \eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} \Big|_{x=0} = \frac{1}{2a}$$

这表明, “不倒翁”平衡时, 在平衡位置附近可用半径为 $\rho = \frac{1}{2a}$ 的圆代替 (见图 105c)。那么很明显, 重心位置 $y_C < \rho$ 时平衡且稳定。 $y_C > \rho$ 时不平衡。因此 $y_C < \frac{1}{2a}$ 就表示重心的高度要小于底部 B 处的曲率半径。

106. 三名舞蹈演员在舞台上 (视作平面上三

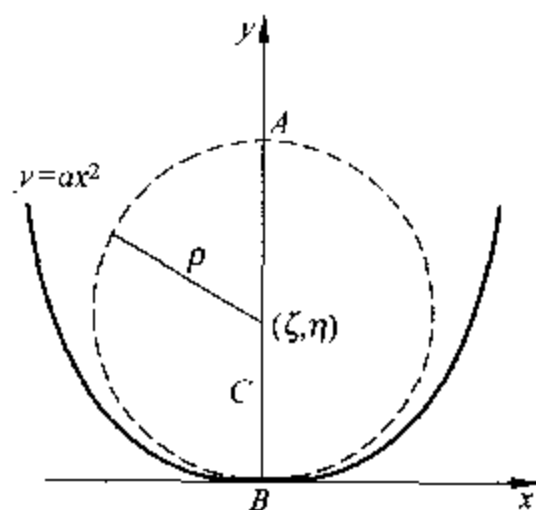


图 105c

点)组成一正三角形。音乐一开始,每一演员即朝向右侧的另一演员以常速率缓慢前进。如音乐时间足够长,问三个演员有没有可能相遇?如相遇,每个演员共转过多少转?演员走过的轨迹是什么曲线?
(朱照宣,北京大学力学系。原第22题,1982, No. 1。)

解:设三名演员初始时位于 A_0 、 B_0 、 C_0 , 他们之间的距离为 a , 在某瞬时他们的位置如图 106 所示。由对称性, 三角形 ABC 仍是正三角形。取极坐标如图, 中心 O 为极坐标原点。又设演员前进的速率为 v , 以演员 A 为例, 得运动方程为

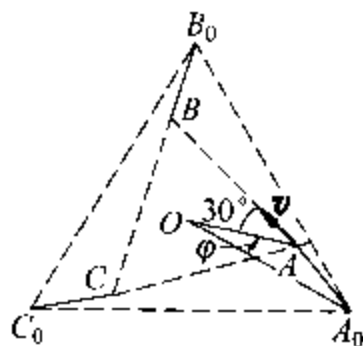


图 106

$$\dot{\rho} = -v \cos 30^\circ, \quad \rho \dot{\phi} = v \sin 30^\circ$$

由此解得

$$\rho = \rho_0 e^{-\sqrt{3}\phi}$$

即每个演员的运动轨迹是对数螺线。

设 $\overline{AB} = s$, 则有

$$\dot{s} = -v - v \cos 60^\circ$$

解得

$$a - s = \frac{3}{2}vt$$

因此他们能够相遇。再设他们相遇时

$$s = b (\ll a), \quad \rho = \rho_1$$

则有

$$\frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{a}{b}$$

设相遇时他们转过的角度为 ϕ_1 , 则

$$\rho_1 = \rho_0 e^{-\sqrt{3}\phi_1}, \quad \phi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{a}{b}$$

所以相遇时他们转过的圈数是 $\frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \ln \frac{a}{b}$ 圈。

107. 古人通过长时间的观察,发现了一些行星运行不规则。相对恒星而言,有时行星会顺行,有时又会逆行(设太阳从东向西运行为顺行)。试用有关运动学的知识来说明此现象。(高云峰,清华大学工程力学系。原第311题,1998, No. 1。)

解:要解释这一现象,就涉及“日心说”与“地心说”。若采用“地心说”,认为地球是宇宙的中心,则解释行星的运行现象就很麻烦,要做许多的假设(历史上,托勒密为了解释这一现象,认为各星体的运动是本轮上套着均轮,有的行星甚至要套好几层均轮)。但若采用“日心说”,认为太阳是宇宙的中心,则可方便地解释。

如果定性分析,以火星为例,选定某一个恒星作为参考坐标,在地心-恒星坐标系中,设地球与恒星的连线和地球与火星的连线夹角为 θ , θ 角的变化就表示了火星相对地球的运动。图107a表示了不同时刻 θ 角的变化。可以看出,从位置1到位置3, θ 角在减小,从位置3到位置4, θ 角在增加,从位置4到位置6, θ 角减小。由于 θ 角如此一会儿增加,一会儿减小,人们就能“看到”火星有时顺行,有时逆行了。

图107a的结论是定性的,如果要定量计算,则由计算机画出的 θ 角的变化曲线见图107b(1个地球年)。计算所用参数是:设地球、火星绕太阳作圆周运动,初始角度为 80° 。地球绕太阳一周为365个地球日,地球距太阳为1个天文单位,火星绕太阳一周为686.7个地球日,火星距太阳为1.524个天文单位,这些参数满足开普勒定律

$$T^2/R^3 = \text{const}$$

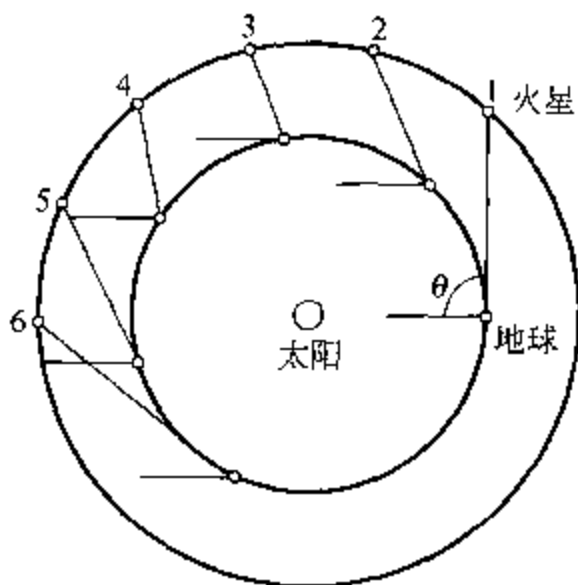


图 107a

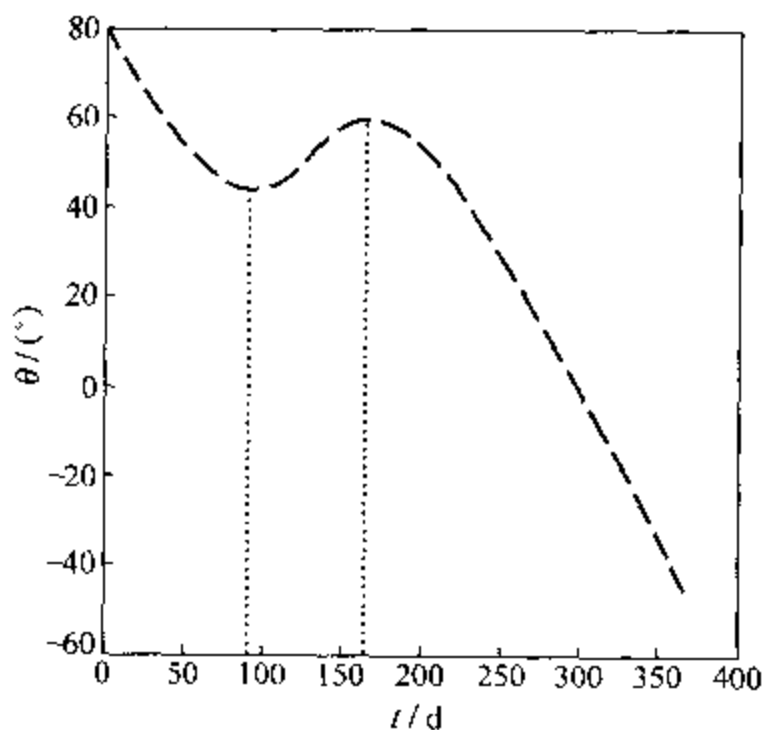


图 107b

从图107b中可以看出,火星绝大部分时间是顺行(角度减小),只有少部分是逆行(角度增加)。在本题所给的参数下,在第90天到160天是逆行。值得注意的是,各个行星都有不规则的运行现象。但要观察到这一现象可能需要几年的时间。

108. 图示108a平面机构中,已知A为主动轮,B为从动轮,两轮的半径均为 R ,轮心距为 L 。A轮与B轮间通过一些部件(比如齿轮,连杆等)相连接。要求当A轮匀速转动时,B轮的运动范围正好是 180° 。试设计一种可能的装置来实现这一要求,并求出需要说明的几何尺寸。(高云峰,清华大学工程力学系。原第316题,1998, No. 5。)

解:本题有多种解答,下面给出两种解答供参考。

第一种解答,如图108b的四连杆机构(BD杆与B轮固结),当CD, BD杆满足

一定的尺寸条件时,可以实现题目要求。

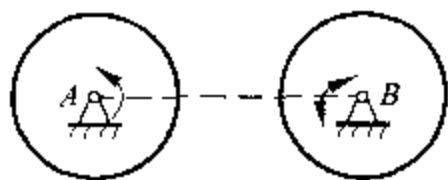


图 108a

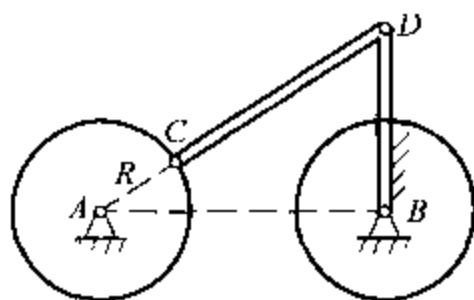


图 108b

设 $l_{CD} = x$, $l_{BD} = y$, 则 x, y 应满足

$$L^2 + y^2 = (R + x)^2 \quad (1)$$

$$L + R = x + y \quad (2)$$

式(1)保证了 $\angle ABD$ 最大为 90° , 由于对称性, B 轮的转角最大为 180° ; 式(2)保证了当 A, B, C, D 共线时, 各部件的几何尺寸是协调的, 从而 A 轮可以连续转动。

由式(1)、式(2)可以解出

$$l_{CD} = x = \frac{L(R+L)}{2R+L}, \quad l_{BD} = y = \frac{2R(R+L)}{2R+L}$$

第二种解答: 如图 108c 的曲柄滑块机构, 当 AC, CD 满足一定的尺寸条件时, 可以实现题目要求。

设 $l_{AC} = r$, $l_{CD} = l$, 滑块(齿条) D 的运动范围是

$$\Delta x_D = x_{D\max} - x_{D\min} = (l+r) - (l-r) = 2r$$

则滑块(齿条) D 带动 B 轮转动的范围是

$$\theta = \frac{2r}{R}$$

令

$$\theta = \pi$$

得

$$l_{AC} = r = \frac{\pi R}{2}$$

而 l_{CD} 可任意取, 但要满足如下条件

$$l_{CD} \geq r \text{ (保证 } AC \perp AD \text{ 时, 齿条不会脱离 } x \text{ 轴)}$$

$$l \leq \sqrt{L^2 - R^2} - r \text{ (保证当 } x_D = x_{D\max} \text{ 时, 齿条仍与轮 } B \text{ 接触)}$$

编者注: 原题解的第二种方法中有一些计算错误, 现已更正。

109. 给出一个曲线, 比如三叶玫瑰线 $\rho = a \cos 3\theta$ (如图 109a 所示), 怎样利用有关的理论力学知识, 设计出一个机构来画出这一曲线? (高云峰, 清华大学工程力学

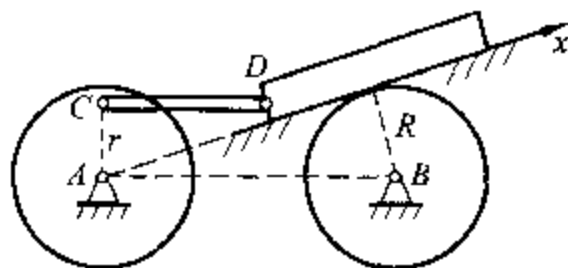


图 108c

系。原第 272 题, 1995, No. 5.)

解: 本题属于发散性思维的问题, 也是第 37 题的反问题, 其本质是将运动加以分解。

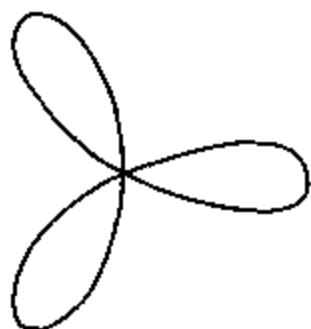


图 109a

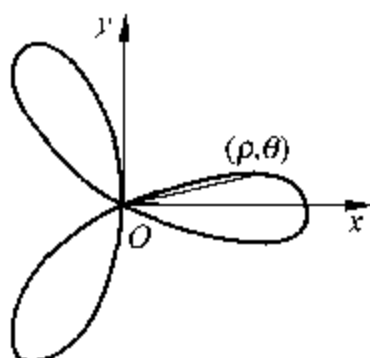


图 109b

对于 $\rho = a \cos 3\theta$, 在直角坐标中(图 109b)写成

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x = a \cos 3\theta \cos \theta \\ y = a \cos 3\theta \sin \theta \end{cases}$$

利用三角公式后(数学意义上的分解)有

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} (\cos 4\theta + \cos 2\theta) \\ y = \frac{a}{2} (\sin 4\theta - \sin 2\theta) \end{cases} \quad (1)$$

再由运动学知识, 认为 x 由 x_e 与 x_r 组成(物理意义上的运动分解)。对照第 37 题中的图 37b 中, 应有

$$\begin{cases} x_E = x_e + x_r = (R-r) \cos \theta + e \cos \left(\frac{R-r}{r} \theta \right) \\ y_E = y_e + y_r = (R-r) \sin \theta - e \sin \left(\frac{R-r}{r} \theta \right) \end{cases} \quad (2)$$

作变换 $\theta \rightarrow 4\beta$ 后, 式(2)为

$$\begin{cases} x_E = (R-r) \cos 4\beta + e \cos \left(4 \frac{R-r}{r} \beta \right) \\ y_E = (R-r) \sin 4\beta - e \sin \left(4 \frac{R-r}{r} \beta \right) \end{cases} \quad (3)$$

对照方程(1), (3)的系数, 有

$$R = \frac{3}{2}a, \quad r = a, \quad e = \frac{1}{2}a \quad (4)$$

所以, 做一个如图 37a 的机构, 取式(4)的参数, 即可画出 $\rho = a \cos 3\theta$ 的三叶玫瑰线。

110. 假想在平原上有一只野兔和一只猎狗, 在某一时刻同时发现对方。野兔立即向洞穴跑去, 猎狗也立即向野兔追去。在追击过程中, 双方均尽全力奔跑, 假设双

方速度大小不变,方向可变。问:(1)若野兔始终沿直线向洞穴跑去,求猎狗的运动方程和运动轨迹。(2)若野兔始终沿直线向洞穴跑去,试确定猎狗的初始位置范围,使得猎狗在这一范围内出发,总可以在野兔进洞前追上它。(高云峰,清华大学工程力学系。原第312题,1998, No. 2。)

解:(1)为方便可如图110a建立坐标。在任意时刻 t ,野兔 R 的位置为 (x_r, y_r) ,奔跑的方向与 x 轴夹角为 θ_r 。猎狗 D 的位置为 (x_d, y_d) ,奔跑的方向由 D 指向 R 。且设 v_r, v_d 大小均为常量, $\frac{v_d}{v_r} > 1$ 。出于一般性的考虑,认为 θ_r 可以变化,则 t 时刻野兔的位置为

$$\left. \begin{aligned} x_r &= x_{r0} + \int_0^t v_r \cos \theta_r dt \\ y_r &= y_{r0} + \int_0^t v_r \sin \theta_r dt \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

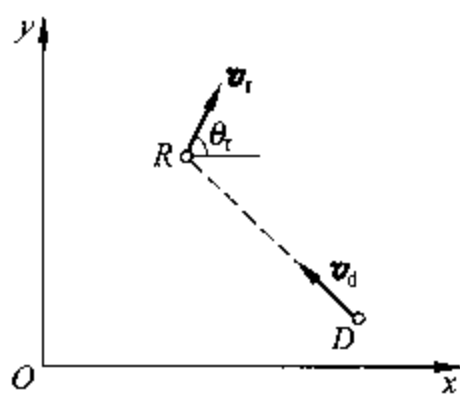


图 110a

而猎狗在追击过程中满足

$$\sqrt{\dot{x}_d^2 + \dot{y}_d^2} = v_d, \quad \frac{\dot{y}_d}{\dot{x}_d} = \frac{y_r - y_d}{x_r - x_d} \quad (2)$$

由式(2)可解出猎狗的运动微分方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_d &= \frac{v_d (x_r - x_d)}{\sqrt{(x_r - x_d)^2 + (y_r - y_d)^2}} \\ \dot{y}_d &= \frac{v_d (y_r - y_d)}{\sqrt{(x_r - x_d)^2 + (y_r - y_d)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

可以由式(3)解微分方程组求出 x_d, y_d ,从而得到猎狗的运动轨迹。一般情况下无法求出该运动轨迹的解析表达式,但若取 $\theta_r = 90^\circ, x_{r0} = 0, y_{r0} = 0$ 时,则可由式(1)、(3)消去时间 t 得到猎狗运动的轨迹方程

$$y_d = b - \frac{1}{2} \left(\frac{x_d}{a} \right)^\lambda \frac{x_d}{1+\lambda} + \frac{1}{2} \left(\frac{x_d}{a} \right)^{\lambda-1} \frac{x_d}{1-\lambda}$$

其中 a, b 为与初始条件有关的参数, $\lambda = \frac{v_r}{v_d}$,特别是当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时,有

$$y_d = y_{d0} + \frac{\sqrt{x_{d0}^2 + y_{d0}^2} - x_{d0}}{\sqrt{x_{d0}}} (\sqrt{x_d} - \sqrt{x_{d0}}) - \frac{3\sqrt{x_{d0}}}{\sqrt{x_{d0}^2 + y_{d0}^2} - x_{d0}} (\sqrt{x_d^3} - \sqrt{x_{d0}^3})$$

图110b就是 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时,野兔初始位置在原点, $\theta_r = 90^\circ$,猎狗分别在 D_1, D_2, D_3 的初始位置时所得到的猎狗运动轨迹,轨迹与 y 轴的交点表示猎狗在此位置追上了兔子。

(2)若野兔始终沿直线向洞穴跑去,可以想象,存在着一个位置范围 Γ ,若猎狗的初始位置在 Γ 内,猎狗可以在野兔进洞前追上它;而猎狗的初始位置若在 Γ 外,则

兔子可以安全跑进洞中,猎狗就再也追不着兔子了。为了求出 Γ 的边界,可以采用如下方法。

以 O 为原点,给出一组 ρ, θ , 则猎狗的初始位置为 $x_{d0} = \rho \cos \theta, y_{d0} = \rho \sin \theta$, 由前一问中微分法可在计算机屏幕上模拟两者的运动。若兔子安全进了洞,则减小 ρ 重新计算。若猎狗追上了兔子但兔子距洞口还很远,则增大 ρ 重新计算,直至猎狗可追上兔子,且兔子也几乎到达了洞口,则此时的 ρ, θ 就确定了边界 Γ 上的一个点。对 θ 进行循环就可找出整个边界 Γ 。

图 110c 就是一个典型的边界 Γ 图,它具有有一些性质(前提是 H 在 y 轴上, R 在原点):

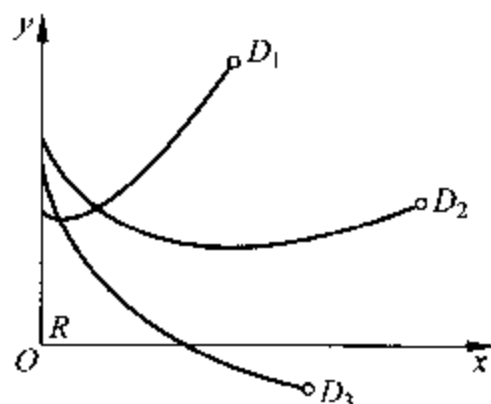


图 110b

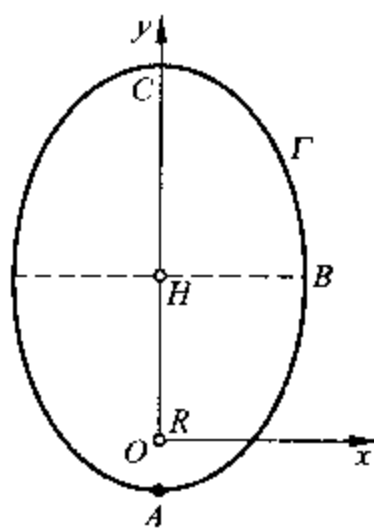


图 110c

① Γ 关于 y 轴(或 RH 连线)对称,并可能关于 BH 连线对称,也可能是一个椭圆。

② $l_{AH} = l_{HC}$, 且 $\frac{l_{AH}}{l_{RH}} = \frac{v_d}{v_r}$ 。

③ 从 Γ 边界上任意点开始追击,轨迹不同,但所花时间均相同。

说明:若洞不在 y 轴上,兔子初始位置不在原点,则 Γ 的图像只是平移、旋转而已。可以证明 Γ 是椭圆,感兴趣的读者可自己证明。

编者注:原题还讨论了兔子按曲线跑时,猎狗采用不同追击策略时的结果,本书略去了这一部分。另关于边界是椭圆的结论,后有读者给出了证明,见:毛澄映,追击问题中关于临界范围是椭圆的证明。《力学与实践》,2000, No. 5。

111. 一小球由 P 点自由落入半径为 R 的半球形碗内(图 111a)。它与碗壁之间的碰撞恢复系数 $e=1$ 。问小球 P 初始时在何区域内,小球经一次碰撞后能弹出碗外。(高百争,焦作矿业学院机电系学生。原第 23 题,1992, No. 6。)

解:取柱坐标 $O\rho\varphi z$ (φ 角在水平面内),如图 111b 所示。设小球 P 的初始位置的坐标为 (ρ, z) , 它与碗壁碰撞前的速度为 v , 则有

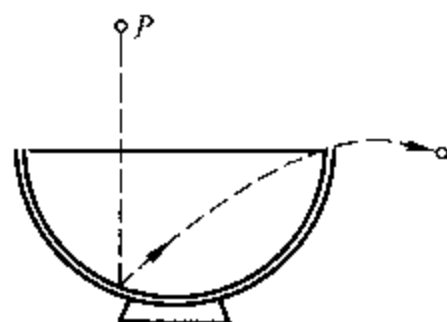


图 111a

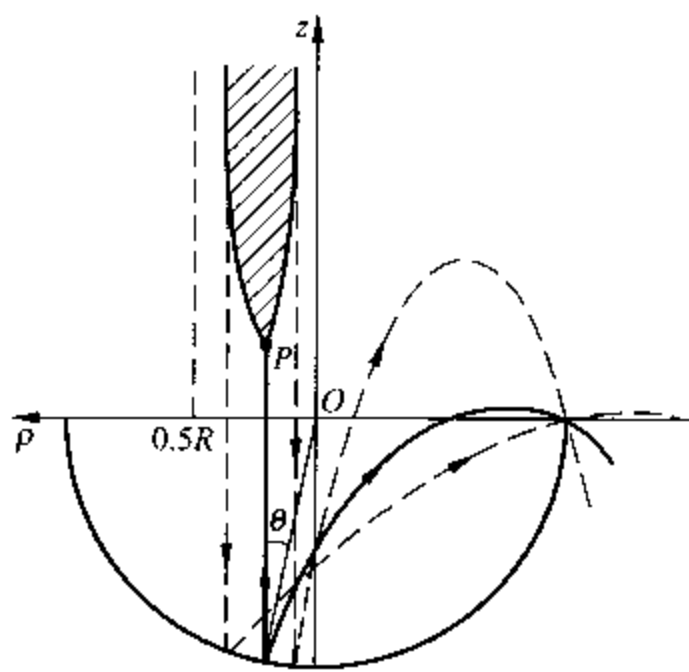


图 111b

$$v^2 = 2g(z + R\cos\theta) \quad (1)$$

小球从碰撞开始至到达碗边的时间为

$$t = \frac{R + \rho}{v \sin 2\theta}$$

其中 θ 为 O 点到碰撞点的连线与竖直线的夹角, 因此有

$$R\cos\theta = v t \cos 2\theta - \frac{1}{2} g t^2$$

消去 t , 得

$$R\cos\theta = \frac{R + \rho}{\tan 2\theta} - \frac{(R + \rho)^2 g}{2v^2 \sin^2 2\theta} \quad (2)$$

另外还有

$$\rho = R \sin\theta \quad (3)$$

联立求解式(1)、(2)、(3), 消去 v 和 θ 得

$$8(R - 2\rho)\rho[z\sqrt{R^2 - \rho^2} + (R^2 - \rho^2)] = R^3(R + \rho) \quad (4)$$

由式(4)可以看出

$$0 < \rho < \frac{R}{2}$$

当 ρ 取不同值时, 只要 z 大于方程(4)所确定的值, 则小球经一次碰撞后能弹出碗外。由于 φ 角的任意性, 所以小球所在区域为一旋轴曲面, 如图 111b 中阴影部分所示, 即

$$0 < \rho < \frac{R}{2}$$

$$z > \frac{(R + \rho)(R^3 - 8R^2\rho + 24R\rho^2 - 14\rho^3)}{8\rho(R - 2\rho)\sqrt{R^2 - \rho^2}}$$

112. 考虑分段线性的自激振动, $\ddot{x} + [\text{sgn}(x^2 - 1)]\dot{x} + x = 0$, 即当 $|x| < 1$ 时, 用 $\ddot{x} - \dot{x} + x = 0$, $|x| > 1$ 时, 用 $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$. 验核这个系统振动的振动周期是 6.5658, 振幅是 2.5011. (朱照宣, 北京大学力学系. 原第 240 题, 1993, No. 4.)

解: 利用线性振动的解可以分段得到运动方程, 从而求得 xy 相平面 ($y = \dot{x}$) 上轨线方程为

$$(x^2 \mp xy + y^2) \exp \left[\mp \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\sqrt{3}x}{2y \mp x} \right] = \text{const.}$$

设极限环(自激振动)如图 112 中 ABCA, 分段连接点 A、B、C 的坐标为

$$(-1, \eta), (1, \xi), (1, -\eta)$$

则由上式可导出 ξ, η 要满足的方程

$$\begin{aligned} \frac{1 - \xi + \xi^2}{1 + \eta + \eta^2} &= \exp \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{\sqrt{3}}{2\xi - 1} + \arctan \frac{\sqrt{3}}{2\eta + 1} \right) \right] \\ \frac{1 + \xi + \xi^2}{1 - \eta + \eta^2} &= \exp \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\pi - \arctan \frac{\sqrt{3}}{2\xi + 1} - \arctan \frac{\sqrt{3}}{2\eta - 1} \right) \right] \end{aligned}$$

采用适当的迭代计算, 可求得数值解

$$\xi = 3.4479, \quad \eta = 1.3206$$

再利用线性振动的解可求出振幅和周期分别为

$$x_{\max} = 2.5011, \quad T = 2(t_1 + t_2) = 6.5658$$

其中 $t_1 = 0.8426$, 是由 A 到 B 的时间; $t_2 = 2.4403$, 是由 B 到 C 的时间。

又: 此题如用非线性方程中的平均法(如 KB 法*), 则振动周期近似为 2π , 振幅 a 的变化方程为

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{a} + \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a^2}, \quad a \geq 1$$

令 $\frac{da}{dt} = 0$, 求得定常振幅的近似值 $a = 2.475$ 。

113. 一弹簧摆如图 113a 所示, 在某一铅垂面内运动, 已知质点质量为 m , 弹簧不计质量, 弹性系数为 k , 设弹簧原长为 l , 变形为 x , 摆角为 θ , 求(1)弹簧摆的运动微分方程; (2)若初始条件为 $x = \delta_{st} = l, \theta = 30^\circ, \dot{x} = 0, \dot{\theta} = 0$, 画出相应的时间历程曲线和相平面图。

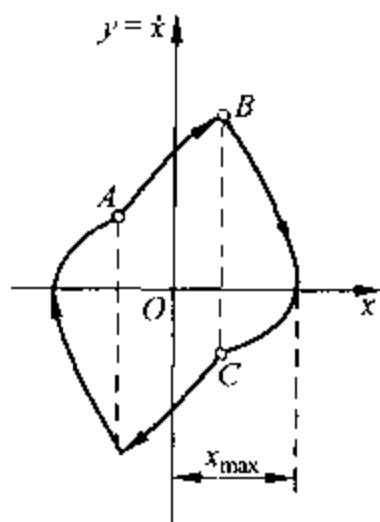


图 112

* KB 法是由 Krylov(Крылов)和 Bogoliubov(Боголюбов)共同提出的, 该方法的基本思想是根据常微分方程中的常数变易法, 认为非线性系统的解仍具有线性方程解的形式, 但是其中的参数不再是常数, 而是时间的函数。

(李银山, 太原理工大学应用力学研究所。原第307题, 1997, No. 6。)

解: (1) 设弹簧原长处为弹性势能零点, 悬挂点为重力势能零点(图113b), 则系统的动能和势能为

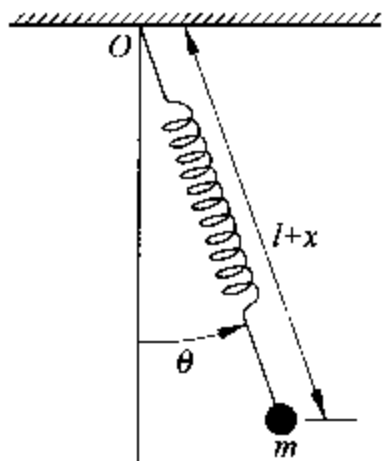


图 113a

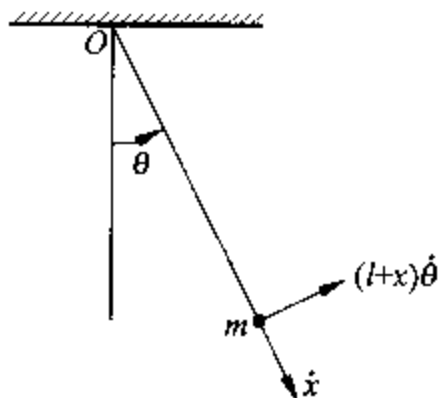


图 113b

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m [\dot{x}^2 + (l+x)^2 \dot{\theta}^2] \\ V &= \frac{1}{2} kx - mg(l+x)\cos\theta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

代入拉氏方程

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned}$$

式中 $L = T - V$, 则得到系统运动微分方程

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \frac{k}{m}x - (l+x)\dot{\theta}^2 - g\cos\theta &= 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{g\sin\theta + 2\dot{x}\dot{\theta}}{l+x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

无量纲化, 令

$$\begin{aligned} p_1 = \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\omega}{\sqrt{\lambda}}, \quad \lambda = \frac{p_1^2}{p_2^2} = \frac{\delta_{s1}}{l} \\ \tau = \frac{2\pi}{\omega}, \quad x = \frac{x - \delta_{s1}}{l}, \quad \Phi = \frac{\theta}{2\pi}, \quad T = \frac{t}{\tau} \end{aligned}$$

则式(2)化为无量纲方程

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= 4\pi^2 \left[-\frac{1}{\lambda}(x+\lambda) + (x+\lambda+1)\dot{\Phi}^2 + \cos(2\pi\Phi) \right] \\ \ddot{\Phi} &= -\frac{2[\pi\sin(2\pi\Phi) + \dot{x}\dot{\Phi}]}{x+\lambda+1} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中

$$\dot{x} = \frac{dx}{dT}, \quad \dot{\Phi} = \frac{d\Phi}{dT}$$

(2) 利用计算机, 可求解方程(3), 把式(3)化为一阶常微分方程组后, 利用初始条件:

$$\lambda=1, \quad x=0, \quad \Phi=0.0833, \quad \dot{\Phi}=0$$

求出的结果如图 113c、113d 所示。有趣而值得深入研究的是: 从 $\Phi-\dot{\Phi}$ 相平面图可见, 有周期性的 3 个环存在。根据李天岩(1975)的著名定理“Period Three Implies Chaos”, 可知弹簧摆动力系统中必存在混沌现象。

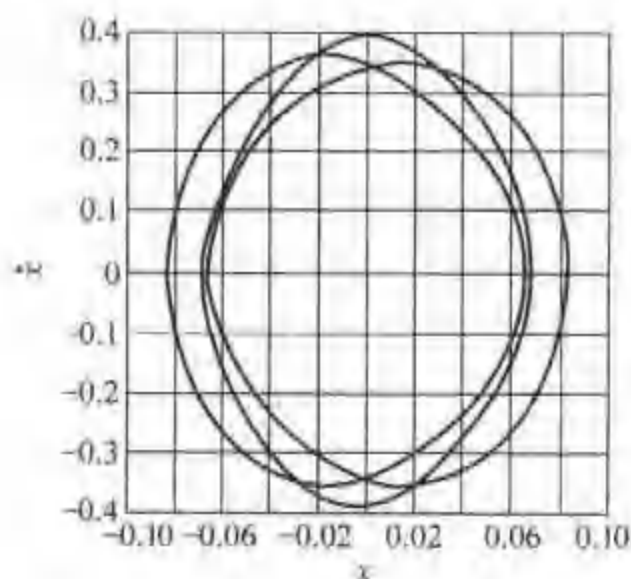


图 113c

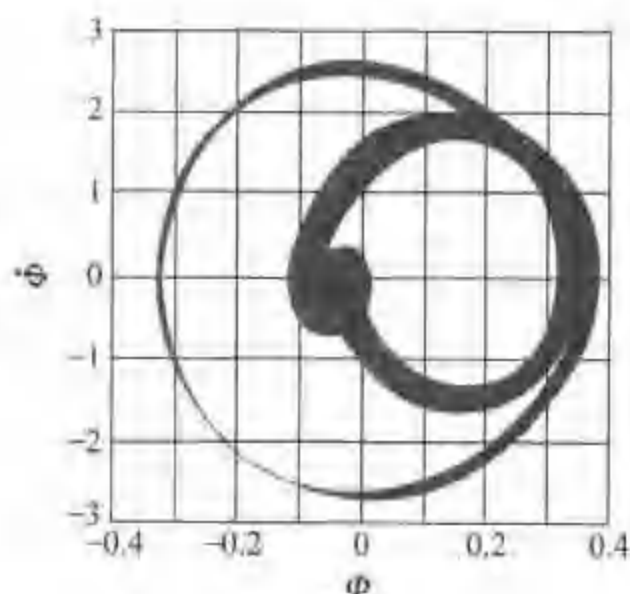


图 113d

114. 摆有两类周期运动: 来回摆动和绕过最高位置的单向转动。有无可能转圈的周期刚好等于微幅摆动的周期? 如有, 它的最小角速度和最大角速度之比是多少? (朱照宣, 北京大学力学系。原第 232 题, 1993, No. 1.)

解: 摆的转动微分方程是

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0$$

其中 ω 是微幅摆动的圆频率, 如单摆 $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, 复摆 $\omega = \sqrt{\frac{mga}{J}}$ (见一般教科书)。对第一类周期运动(摆动), 当摆幅增大, 周期也增长, 最大角速度也增大, 一直到两类周期运动的分界情形, 即所谓同宿(homoclinic)运动, 且时间为正负无穷时摆均在最高位置, 最大角速度为 2ω 。当最大角速度再增加, 运动将成为第二类周期运动即单向转动。显然, 只要转速足够大, 转动的周期可以任意小。因此, 一定存在一种单向转动, 其周期刚好等于微幅摆动周期 $\frac{2\pi}{\omega}$ 。

由能量积分

$$\frac{1}{2}(\dot{\varphi}^2 - \omega_0^2) + \omega^2(1 - \cos\varphi) = 0$$

(式中 ω_0 是最大角速度, 且 $\omega_0 > 2\omega$) 可得转动的半周期是

$$\frac{T}{2} = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\omega^2(1 - \cos\varphi)}} = \frac{2}{\omega_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}}$$

式中的 $\xi = \frac{1}{2}\varphi$, $k = \frac{2\omega}{\omega_0}$, 定积分即椭圆积分 $K(k)$ 。令半周期等于 $\frac{\pi}{\omega}$, 即得确定 k 的超越方程

$$kK(k) = \pi$$

这种转动中

$$\text{最小角速度 : 最大角速度} = \sqrt{1 - \frac{4\omega^2}{\omega_0^2}} = \sqrt{1 - k^2}$$

数值计算得

$$k = 0.98582$$

故所求角速度比是 0.1678。

115. 单摆倒立在振动水平台面上(台面有摩擦, 支点不滑动)。摆长 $l = 20\text{cm}$, 振动台面竖直振动的振幅为 $a = 1\text{cm}$ 。证明当振动频率超过 43Hz 时单摆倒立位置是稳定的。(朱照宣, 北京大学力学系, 选自 Arnol'd《经典力学中的数学方法》。原第 236 题, 1993, No. 3。)

证明: 单摆能倒立在振动台上, 对此 Arnol'd《经典力学中的数学方法》§ 42 有详细解。如取振动为正弦型的, 则可利用 Mathieu 方程的稳定图(例如, Stoker《非线性振动》第六章图 4.1, 图 5.1; 吴福光等《振动理论》图 6.56; 或《力学与实践》1985 年第 2 期第 36~37 页图)。Arnol'd 采用两段抛物线代替一个正弦波, 所得不是 Mathieu 方程而是 Meissner 方程:

$$\ddot{x} = (\omega^2 \pm d^2)x$$

其中 $\omega^2 = \frac{g}{l}$, $d^2 = \frac{8a}{l\tau^2}$, 2τ 是振动周期。使倒立单摆稳定在台面上的最低频率 $\frac{\pi}{\tau}$ 约为

$$\sqrt{\frac{3}{32}}\omega \frac{l}{a} \approx 43\text{Hz}$$

注: Meissner 方程(1918 年提出)的稳定区详细推演可见 Timoshenko,《工程中的振动问题》图 129。

116. 设单自由度保守系统的广义质量为常量, 它的势能函数是广义坐标的四次多项式, 且有两个极小值, 即系统有两个势阱(图 116a 中甲和乙)。证明: 系统在一个势阱(如甲)内振动(有限振幅, 考虑非线性)的周期和它在另一势阱(乙)内振动周期相等的必要充分条件是这两个振动具有的总能量(机械能)相等。(朱照宣, 北京大学力学系。原第 160 题, 1988, No. 2。)

解：这个定理是 Arnol'd 在《突变理论》(1983 年, 俄文二版, 有 1986 年英译本) 第 15 章的一个注记中“顺便提到”的。他的证明用了复数域多项式的拓扑性质, 未用任何计算。实数域的定理结果却用复数域的拓扑性质得到, 这是一个很有意义的例子, 下面给出一种常规的分析证明。欢迎读者给出更简单的证明。

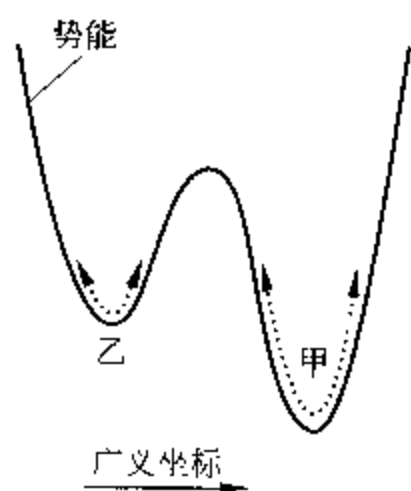


图 116a

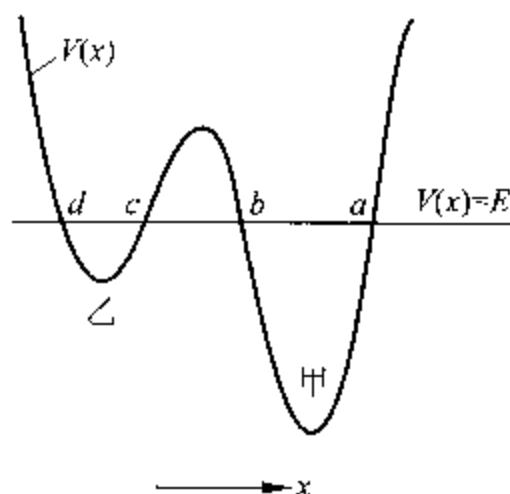


图 116b

设系统广义质量为 m , 广义坐标为 x , 系统的总能量为 E , 势能函数为 $V(x)$ (图 116b)。由能量积分

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E$$

可得振动周期为

$$\oint \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$

设 $E - V(x) = 0$ 的四个根为 $x = a, b, c$ 和 d , 且

$$a > b > c > d$$

于是

$$E - V(x) = -k(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

其中常量 $k > 0$, 在势阱甲的 (b, a) 区间内振动的周期是

$$\sqrt{\frac{2m}{k}} \int_b^a \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)(x-c)(x-d)}}$$

同样, 在势阱乙的 (d, c) 区间内振动的周期是

$$\sqrt{\frac{2m}{k}} \int_d^c \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x)(x-d)}}$$

上面两个定积分都等于

$$\frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} K\left(\sqrt{\frac{(a-b)(c-d)}{(a-c)(b-d)}}\right)$$

K 是第一类完全椭圆积分。推导可利用积分表(例如, Gradshteyn 和 Ryzhik, Tables

of integrals, series, and products, 1980, § 3.147 的公式)。定理的充分性得证。这两个势阱都是软弹簧型的, 假若总能量 E 增长, 周期将单调地增加(当 E 等于 $V(x)$ 的极大值时, 周期变为无穷大)。由此容易证明出必要性。

117. 光滑水平面上有铁珠 A 和马蹄 B , 质量相等, 且 A 能从 B 中穿过。设 A 、 B 间的引力按库仑平方反比律, 在 A 穿过 B 前后则大致按线性律, 如图 117a 所示。初始时 A 有一初速 v_0 指向 B , B 为静止, 问 A 在穿过 B 后能否到达无穷远处? 又 B 会不会倒退到反向的无穷远处? (朱照宣, 北京大学力学系。原第 191 题, 1990, No. 4。)

解: 假若系统的初始能量(动能和势能) E 大于或等于 A 和 B 相离无穷远时的势能值 E^* , 则 A 在穿过 B 后, A 、 B 间的距离将无限增大。质心 C 的速度是 $\frac{1}{2}v_0$, 在质心参考系中速度的极限值大于零但小于 $\frac{1}{2}v_0$ (分析表达式从略, 参见相平面中的相轨线, 图 117b)。假如 $E < E^*$, 则质心 C 以初速度 $\frac{1}{2}v_0$ 向前, A 和 B 在 C 的两侧振动。因此, 不论哪种情况, A 和 B 都能走向正向的无穷远处, 见图 117c、117d。

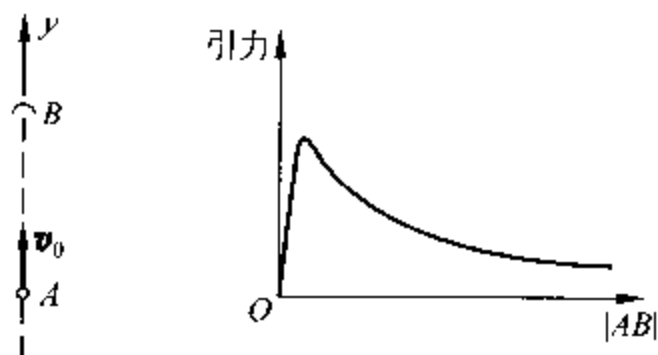


图 117a

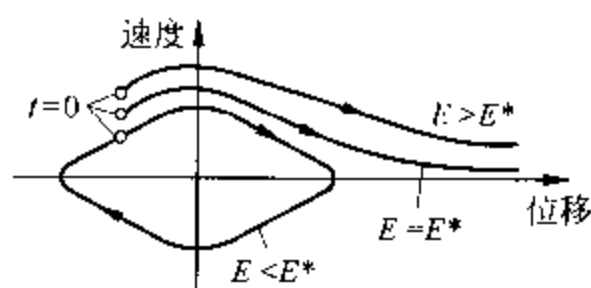


图 117b

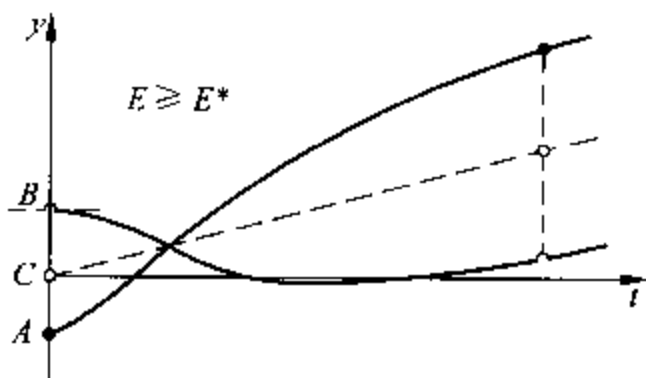


图 117c

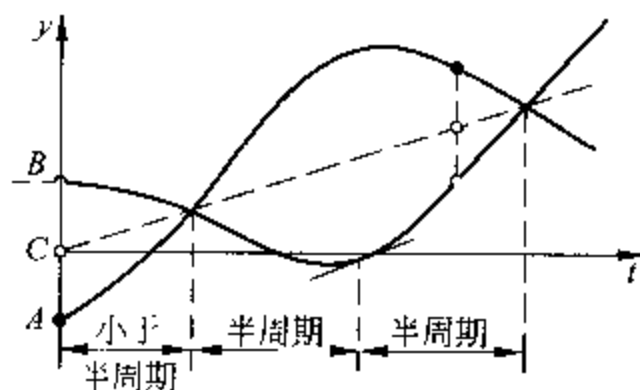


图 117d

118. 将图 118a 所示的图形旋转 $\frac{2\pi}{5}$ 后, 仍与原图形相重合, 试证平面上经过这类图形几何中心 O 点的任一直线, 都是该图形的惯性主轴。(原题缺作者。原第 121 题, 1986, No. 4。)

证明：用惯量转轴公式可以证明，若图形是旋转 $\theta = \frac{2\pi}{n}$ ($n \geq 3$) 后仍与原图形重合的“旋转对称”图形，则经过这类图形几何中心 O 点的任一直线，都是该图形的惯性主轴。



图 118a

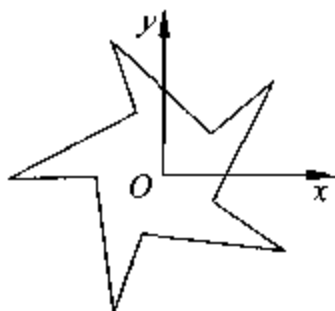


图 118b

设对以几何中心为原点的任一直角坐标系 Oxy (图 118b)，图形的转动惯量和惯性积为 J_x, J_y 和 J_{xy} 。 Oxy 旋转 $\theta = \frac{2\pi}{n}$ 后成为 $Ox'y'$ ，由图形的对称性，显然有

$$J_{x'} = J_x, \quad J_{y'} = J_y$$

设图形在 Oxy 中的惯量矩阵为 \mathbf{J} ，在 $Ox'y'$ 中的惯量矩阵为 \mathbf{J}' ，且 $Ox'y'$ 相对 Oxy 的坐标转换矩阵为 \mathbf{A} ，则由惯量矩阵的变换关系，有

$$\mathbf{J}' = \mathbf{A} \mathbf{J} \mathbf{A}^T$$

即

$$\begin{bmatrix} J'_{xx} & J'_{xy} \\ J'_{xy} & J'_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x & J_{xy} \\ J_{xy} & J_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

展开后，有

$$J_x = J_x \cos^2\theta + J_y \sin^2\theta - 2J_{xy} \sin\theta \cos\theta$$

$$J_{xy} = (J_x - J_y) \sin\theta \cos\theta + J_{xy} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

从而得

$$(J_x - J_y) \sin^2\theta + 2J_{xy} \sin\theta \cos\theta = 0$$

$$(J_x - J_y) \sin\theta \cos\theta - 2J_{xy} \sin^2\theta = 0$$

因为 $n \geq 3$ ，故 $\sin\theta \neq 0$ ，消去 $\sin\theta$ ，上述方程成为以惯量为未知量的线性方程组，系数行列式不为零，最后得，

$$J_x = J_y, \quad J_{xy} = 0$$

因此 Ox 轴为惯性主轴，由坐标选取的任意性知任一过几何中心的直线都是惯性主轴。

上述结论不适合于如图 118c 那样的 $n=2$ 的图形。对于如图 118d 那样的复合图形，由两个均满足 $n \geq 3$ 的“旋转对称”图形组成，上述结论仍然正确。

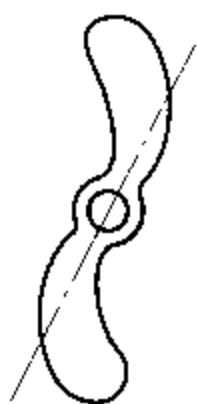


图 118c

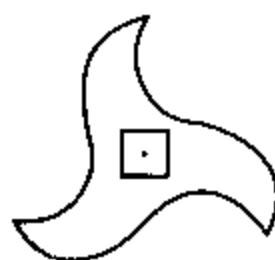


图 118d

119. 如果考虑地球自转, 我们知道有“落体偏东”的结论。现假设一质点以 $v_0 = 9.8 \text{ m/s}$ 的初速竖直上抛, 则其上升、下落阶段会偏向什么方向? 会不会落回原处? (纬度设为北纬 45°) (高云峰, 清华大学工程力学系。改写自北京大学朱照宣等编《理论力学》下册, 第 188 页, 第 8.20 题。原第 323 题, 2000, No. 1。)

解: 在具体求解之前, 有人可能会凭感觉认为质点上抛的轨迹大致如图 119a 所示。

(1) 质点从 O 到 A 为上升阶段, 这一阶段向西偏。

(2) 质点从 A 到 B 为下落阶段, 这一阶段向东偏。有人甚至认为 B 点会与 O 点重合, 即质点会落回原处。

以上结论看似有道理, 但实际上是错误的。正确的轨迹应大致如图 119b 所示; 上升与下落阶段均向西偏! 这与“落体偏东”有无矛盾呢? 下面具体解释。

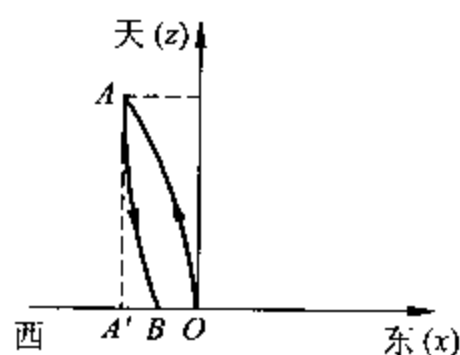


图 119a

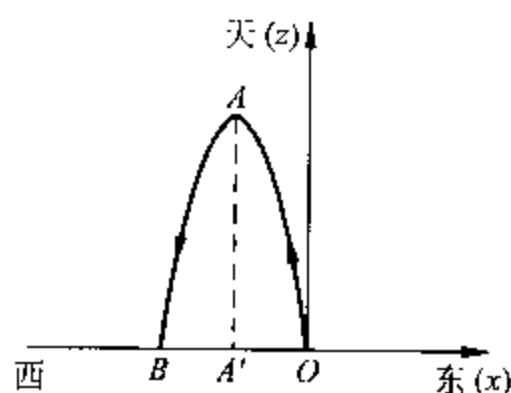


图 119b

以 O 为原点, 当地东北天方向为直角坐标系, 则质点的运动方程式可写为 (详见北京大学朱照宣等编《理论力学》下, 第 177 页)

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega(\dot{y}\sin\lambda - \dot{z}\cos\lambda) \\ \ddot{y} = -2\omega\dot{x}\sin\lambda \\ \ddot{z} = -g + 2\omega\dot{x}\cos\lambda \end{cases}$$

初始条件为

$$x(0)=0, \quad y(0)=0, \quad z(0)=0,$$

$$\dot{x}(0)=0, \quad \dot{y}(0)=0, \quad \dot{z}(0)=v_0$$

其近似解为

$$\begin{cases} x(t) = \left(-v_0 + \frac{1}{3}gt\right)\omega t^2 \cos\lambda \\ y(t) = 0 \\ z(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

因此, $t=t_1=\frac{v_0}{g}$ 时, 质点运动至 A 点, $t=t_2=\frac{2v_0}{g}$ 时, 质点运动至 B 点, 且有 $x(t_2)=2x(t_1)$, 代入数据 ($v_0=9.8\text{m/s}$, $g=9.8\text{m/s}^2$, $\lambda=45^\circ$) 后, 有

$$x(t_1)=-0.336\text{mm}, \quad x(t_2)=-0.672\text{mm}$$

即, 质点上升至最高点时, 向西偏 0.336mm, 下落至原高度时, 向西偏 0.673mm。

那么质点在下落过程中为什么会继续向西偏呢? 原来质点运动到最高点 A 时, 已具有了向西的速度: $\dot{x}(t_1)=-\frac{v_0^2}{g}\omega\cos\lambda$ 。因此质点在下落阶段, 已不再是“自由落体”了。而前面提到的“落体偏东”实际应是“自由落体偏东”, 所以没有矛盾。

最后, 本题如果采用数值方法进行计算, 结果如下:

$t_1=1\text{s}$ 时, 质点向西偏 0.3367mm, 向南偏 $1.302\times 10^{-5}\text{mm}$, 向西的速度为 0.5052mm/s。

$t_2=2\text{s}$ 时, 质点向西偏 0.6735mm, 向南偏 $6.944\times 10^{-5}\text{mm}$ 。

120. 在第一次世界大战期间, 英国炮手在马尔维纳斯群岛海战中发射的炮弹经常落在德国战舰的左边而不能命中。瞄准器的设计者其实已考虑了地球自转的影响, 问题是他们假设海战是在英国本土(北纬 50°) 附近进行, 并作了向左的校正, 但马岛却在南纬 50° 附近。由于炮手们不知地球自转的影响, 不知校正的方法, 结果产生了双倍的向左误差! 现假设炮弹以 300m/s 发射, 质量为 10kg , 发射角为 45° , 空气阻力 $R=\gamma mv^2$, $\gamma=1.157\times 10^{-4}\text{m}^{-1}$, 则这个双倍的误差有多大? (高云峰, 清华大学工程力学系。背景资料见北京大学朱照宣等编《理论力学》下册, 第 183 页; 空气阻力参数引自清华大学官飞等编《理论力学》中册, 第 48 页, 第 12、44 题。原第 324 题, 2000, No. 1。)

解: 以炮口为坐标原点, 当地的东北天方向为直角坐标系, 假设炮弹是由南向北发射, 则炮弹的运动方程可写为

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega(\dot{y}\sin\lambda - \dot{z}\cos\lambda) - \gamma\dot{x}^2 \\ \ddot{y} = -2\omega\dot{x}\sin\lambda - \gamma\dot{y}^2 \\ \ddot{z} = -g + 2\omega\dot{x}\cos\lambda - \gamma\dot{z}^2 \end{cases}$$

初始条件为

$$x(0)=0, \quad y(0)=0, \quad z(0)=0,$$

$$\dot{x}(0)=0, \quad \dot{y}(0)=v_0 \cos \theta_0, \quad \dot{z}(0)=v_0 \sin \theta_0$$

本题也可用近似方法求解,但比较复杂,这里采用数值方法求解。代入数据

$$\theta_0=45^\circ, \quad \lambda=50^\circ, \quad v_0=300\text{m/s},$$

$$\omega=7.29 \times 10^{-5} \text{rad/s}, \quad \gamma=1.157 \times 10^{-4} \text{m}^{-1}$$

可计算出:炮弹飞行时间为 37.41s,向左偏差量为 8.659m,射程为 5.629km(或 3.038 海里)。因此,按北半球的校正方法,到南半球后可能会产生 17.3m 的向左偏差,这个误差还是很可观的吧!

第 2 篇

材料力学部分

第 5 章

拉压及扭转

121. 如图 121a 所示结构两杆的拉压刚度 EA 相同, 试证明: 对于任意的 θ , 当节点 A 的总位移 δ_A 总与外力 P 共线时, $\alpha = \pi/4$ 。(吴国勋, 北京航空航天大学 508 教研室。原第 269 题, 1995, No. 4。)

解法 1: 设 A 点的位移如图 121b 所示, 令 $\overline{AA_1} = \delta_A$, δ_A 与 P 共线, δ_A 的两个分量 $v = \overline{A_2A_1}$, $u = \overline{AA_2}$, 则有

$$\frac{v}{u} = \tan \theta \quad (1)$$

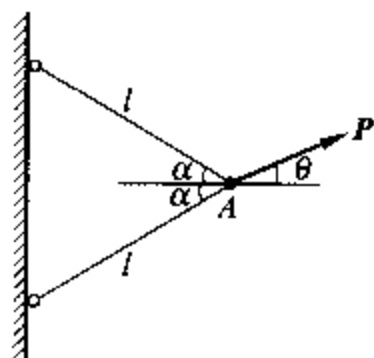


图 121a

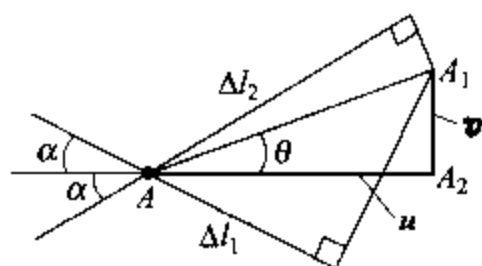


图 121b

由几何关系可知

$$\Delta l_1 = u \cos \alpha - v \sin \alpha$$

$$\Delta l_2 = u \cos \alpha + v \sin \alpha$$

从而, u, v 与两杆伸长 Δl_1 和 Δl_2 的关系如下

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2\cos\alpha}(\Delta l_1 + \Delta l_2) \\ v &= \frac{1}{2\sin\alpha}(\Delta l_2 - \Delta l_1) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

由节点 A 的平衡条件(图 121c)可得

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{P}{2} \left(\frac{\cos\theta}{\cos\alpha} - \frac{\sin\theta}{\sin\alpha} \right) \\ N_2 &= \frac{P}{2} \left(\frac{\cos\theta}{\cos\alpha} + \frac{\sin\theta}{\sin\alpha} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

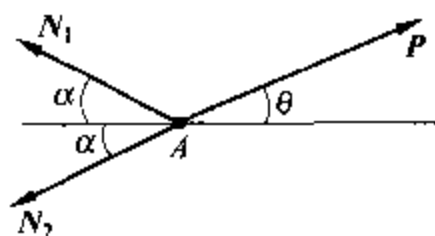


图 121c

根据胡克定律,有

$$\left. \begin{aligned} \Delta l_1 &= \frac{N_1 l}{EA} = \frac{Pl}{2EA} \left(\frac{\cos\theta}{\cos\alpha} - \frac{\sin\theta}{\sin\alpha} \right) \\ \Delta l_2 &= \frac{N_2 l}{EA} = \frac{Pl}{2EA} \left(\frac{\cos\theta}{\cos\alpha} + \frac{\sin\theta}{\sin\alpha} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

将式(4)代入式(2)后,由式(1)得

$$\tan\theta = \cot^2\alpha \tan\theta$$

即

$$\cot^2\alpha = 1$$

注意到 $\alpha < 90^\circ$, 则有

$$\cot\alpha = 1, \quad \text{即} \quad \alpha = \pi/4$$

解法 2: 在 A 点施加一个与力 P 相垂直的单位力 1 (图 121d), 因在单位力方向的位移 $\Delta = 0$, 故有

$$\Delta = \frac{l}{EA} (\bar{N}_1 N_1 + \bar{N}_2 N_2) = 0 \quad (5)$$

其中 \bar{N}_i 可由平衡条件求出

$$\left. \begin{aligned} \bar{N}_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin\theta}{\cos\alpha} + \frac{\cos\theta}{\sin\alpha} \right) \\ \bar{N}_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin\theta}{\cos\alpha} - \frac{\cos\theta}{\sin\alpha} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

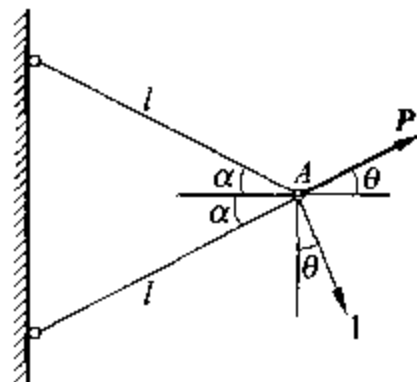


图 121d

将式(6), 式(3)代入式(5)后, 有 $\tan\alpha = 1$, 从而得 $\alpha = \pi/4$, 证毕。

122. 如图 122a, 直径为 d 的细长圆杆 ($d \ll l$), 由两部分胶合而成, 胶合面 mn 的法线与轴线的夹角为 θ , 设胶合面上的许用拉应力为 σ_w , 许用切应力为 $\tau_w = \frac{3}{4}\sigma_w$, 杆件材料的许用拉应力 $[\sigma_0] = \sqrt{3}\sigma_w$, 求杆件所能承受的最大拉力 P_{\max} , 并确定相应的 θ 角范围。(杨瑞林, 成都电讯工程学院 7842 班。原第 27 题, 1982, No. 2.)

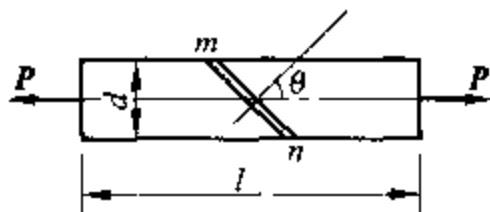


图 122a

解法 1: 设 σ_0 为杆的轴向拉应力, σ_θ 与 τ_θ 分别为胶合面正应力与切应力, 则有

$$\sigma_0 = \frac{4P}{\pi d^2} \leq \sqrt{3}\sigma_w \quad (1)$$

$$\tau_\theta = \sigma_0 \sin\theta \cos\theta \leq \frac{3}{4}\sigma_w \quad (2)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_0 \cos^2\theta \leq \sigma_w \quad (3)$$

如图 122b, 分别作 $\sigma_0/\sigma_w = \sqrt{3}$, $\sigma_0/\sigma_w = 3/(2\sin 2\theta)$ 及 $\sigma_0/\sigma_w = 1/\cos^2\theta$ 三条曲线 (1)、(2)、(3)。显然图上阴影部分是安全区。当 $\theta \geq 60^\circ$ 时, σ_0/σ_w 达到最大值, 最大拉力

$$P_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{4}\pi d^2 \sigma_w$$

解法 2: 用应力圆法解。按许用拉应力 $[\sigma_0]$ 作一单向拉伸应力圆 (图 122c)。再分析 θ 应在什么范围时胶接面满足强度条件。

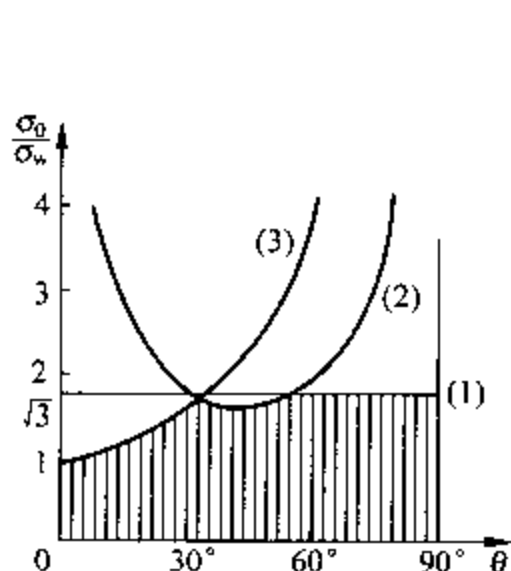


图 122b

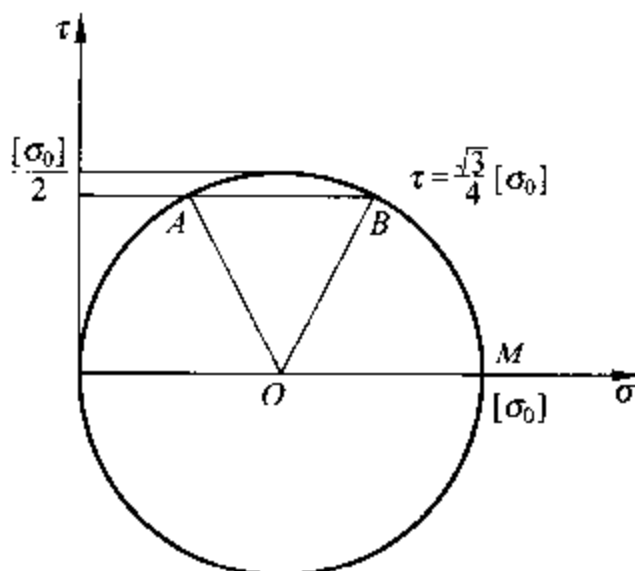


图 122c

引 $\tau = \frac{\sqrt{3}}{4}[\sigma_0]$ 的直线 AB, $\angle MOB = 60^\circ$, $\angle MOA = 120^\circ$, 可见 $\theta \leq 30^\circ$ 或 $\theta \geq 60^\circ$ 时, 胶接面的切应力不超过 τ_w , 但当 $\theta \leq 30^\circ$ 时, 胶接面的正应力大于 $\frac{[\sigma_0]}{\sqrt{3}}$, 故不满足正应力强度条件。只有当 $\theta \geq 60^\circ$ 时, 才能同时满足胶接面的正应力和切应力的强度条件。此时

$$P_{\max} = \frac{1}{4}\pi d^2 [\sigma_0] = \frac{\sqrt{3}}{4}\pi d^2 \sigma_w$$

123. 当外力或外力的合力沿杆件轴线作用时, 杆件截面上是否只存在正应力? 以图 123a 示受力之矩形截面 ($b \times h$) 杆为例加以说明, 其中 q 为单位

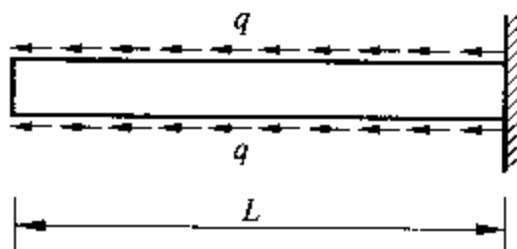


图 123a

长度均布载荷。(吴鹤华,北京航空航天大学。原第273题,1995, No. 5。)

解:图123b所示高 h 宽 b 的矩形截面杆,尽管所受外力的合力沿杆件轴线,但横截面上既有正应力,又有切应力,求解并说明如下:

在离自由端 x 处横截面上轴力为

$$N(x) = 2qx$$

此横截面上有正应力为(假设轴力在横截面上均匀分布)

$$\sigma(x) = \frac{2qx}{bh}$$

由于轴力沿轴线 x 有变化,取出微段如图123c所示,两横截面之间存在轴力差,因此横截面上必存在切应力,当横截面为狭长矩形时,可假设切应力 τ 平行于侧边,沿宽度均匀分布。

从图123c,离杆轴 y 处切下微体,如图123d所示。由微体轴向力平衡可得切应力如下:

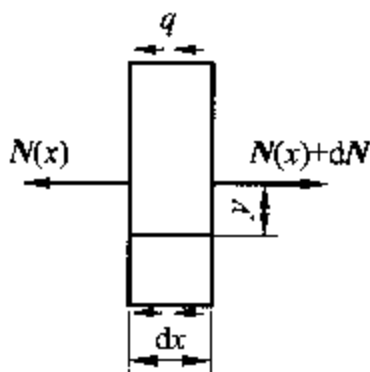


图 123c

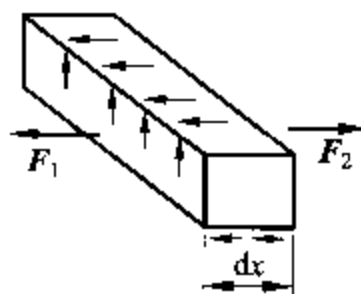


图 123d

$$\tau = \frac{2q}{bh} \left(\frac{h}{2} - y \right) - \frac{q}{b}$$

当 $y = \frac{h}{2}$ 时, $\tau = -\frac{q}{b}$; 当 $y = -\frac{h}{2}$ 时, $\tau = \frac{q}{b}$, 满足上、下边界条件。

讨论:

- (1) 图示拉杆横截面上既有正应力, 又有切应力, 平面假设不严格成立。
- (2) 最大正应力与最大切应力之比为

$$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = \frac{2L}{h}$$

当 $L \geq 10h$ 时, 切应力远小于最大正应力, 切应力可以忽略不计。当 L 较小时, 横截面上的切应力不能忽略。即使这样, 横截面上的切应力通常仍小于正应力。

124. 铸铁试件压缩破坏实验如图124a所示, 如已知破坏面上的摩擦系数 $\mu = 0.36$, 摩擦角 $\varphi \approx 20^\circ$, 试根据铸铁破坏方式为剪断的假说, 证明破坏面的法线与 x 轴

约成 35° 的倾角。(张仲毅, 华中理工大学汉口分校。原第 256 题, 1994, No. 3。)

解: 设 τ_s 为铸铁的极限切应力。考虑试件下部的平衡(图 124b), 当单向压缩应力 $\sigma_0 = P/A$ 由零逐渐增大, 最大切应力发生在 $\alpha = 45^\circ$ 的斜面上, 初始时, $\tau_{\max} = \sigma_0 \cos^2 45^\circ = \sigma_0/2 < \tau_s$, 当 $\sigma_0 = 2\tau_s$ 时, 试件即发生细观破坏, 但由于摩擦力的阻止, 不产生宏观错动。

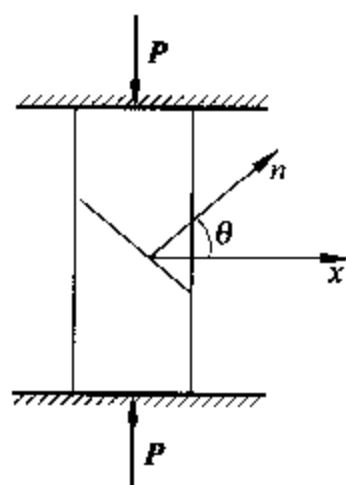


图 124a

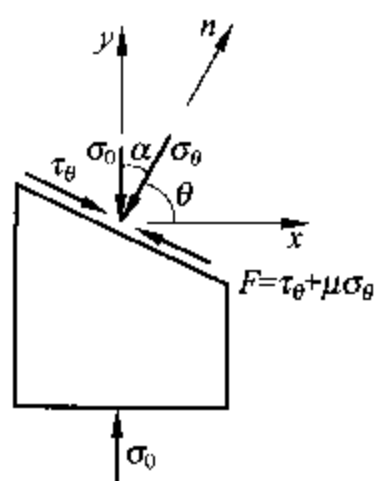


图 124b

当 σ_0 继续增加, $\sigma_\theta = \sigma_0 \sin^2 \theta$, $\tau_\theta = \sigma_0 \sin \theta \cos \theta$ (其中 σ_0 是单向压应力大小的绝对值), 试件各点最大切应力已超过 τ_s , 最终出现错动。这时有 $\tau_\theta \geq \tau_s + \mu \sigma_\theta$, 即 $\sigma_0 \sin \theta \cos \theta \geq \tau_s + \sigma_0 \sin^2 \theta \tan \varphi$, 其中 $\varphi = \operatorname{arccot} \mu$ 为摩擦角。同类项合并后, $\sigma_0 (\sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta \tan \varphi) \geq \tau_s$ 。显然, 最先出现错动的是 $\sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta \tan \varphi$ 取最大值的的方向, 它满足

$$\frac{d}{d\theta} (\sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta \tan \varphi) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} (\sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta \tan \varphi) < 0 \quad (2)$$

由(1), $\cot 2\theta = \tan \varphi$, 即 $\tan \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta \right) = \tan \varphi$

$$\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \approx 35^\circ$$

显然, θ 值满足(2)式, 证毕。

125. 一刚性梁, 由 n 根等间距杆吊着, 各杆的长度及拉伸压缩刚度 EA 均相等, 梁上作用 k 个铅直向下的集中力, 各力大小及间距可任意确定(图 125a)。不计刚性梁的重量, 试求各杆内力。(张德凤, 河北机电学院材力教研室。原第 192 题, 1990, No. 4。)

解: 将载荷向杆 1 与杆 n 间的梁长 l 的中点 C

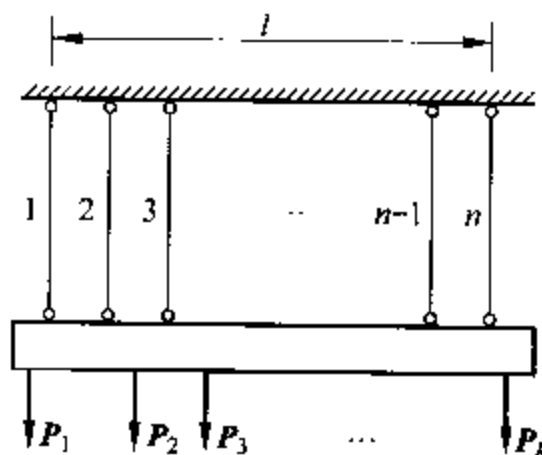


图 125a

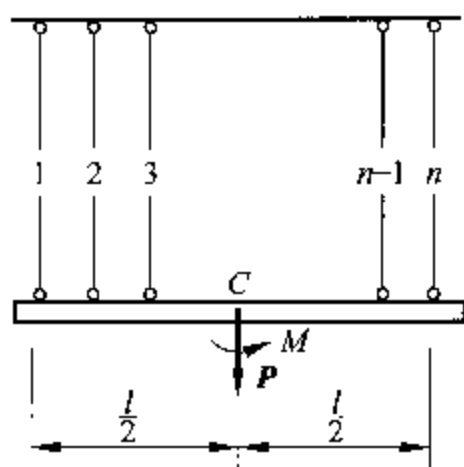


图 125b

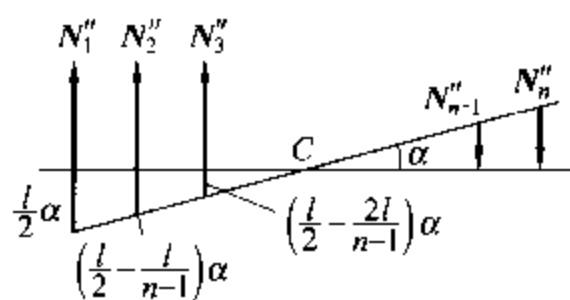


图 125c

简化,得到力 P 和力偶 M (图 125b)。力 P 单独作用时, k 杆内力记为 N'_k 。由对称性知

$$N'_k = P/n \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

力偶 M 单独作用时, k 杆的内力记为 N''_k , 设拉力为正, 压力为负。显然各杆的这部分内力和变形关于 C 点反对称(图 125c)。由静力平衡条件 $\sum M_C = 0$ 得

$$N''_1 \cdot \frac{l}{2} + N''_2 \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{n-1} \right) + \dots + N''_k \left[\frac{l}{2} - \frac{l(k-1)}{n-1} \right] + \dots + N''_n \left(-\frac{l}{2} \right) = M \quad (2)$$

因各杆拉压刚度 EA 相等, 力与变形成正比。设刚性梁转角为 α , 则

$$N''_k = \frac{\left[\frac{l}{2} - \frac{l}{n-1} (k-1) \right] \alpha}{\frac{l}{2} \alpha} \cdot N''_1$$

即

$$N''_k = \left[1 - \frac{2(k-1)}{n-1} \right] \cdot N''_1 \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

代入式(2), 整理后得

$$N''_1 = \frac{2M}{l \sum_{i=1}^n \left[1 - \frac{2(i-1)}{n-1} \right]^2}$$

从而得

$$N''_k = \frac{1 - \frac{2(k-1)}{n-1}}{\sum_{i=1}^n \left[1 - \frac{2(i-1)}{n-1} \right]^2} \cdot \frac{2M}{l} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

最后得第 k 根杆的内力为

$$N_k = \frac{P}{n} + \frac{(n-1)(n-2k+1)}{\sum_{i=1}^n (n-2i+1)^2} \cdot \frac{2M}{l}$$

126. 等截面杆 AB , 未受力时长 L 。将它竖起, 上、下端固接。当上下端距离等于原长 L (图 126) 时, 求在自重作用下, (1) 应力表达式; (2) 受拉区和受压区的位移表达式。设截面面积为 A , 材料比重为 γ , 拉伸与压缩弹性模量分别为 E^+ 和 E^- 。(施明泽, 浙江大学力学系。原第 216 题, 1992, No. 1。)

解: 这是一次超静定问题。设 B 端反力为 R_B , 由 $\sum X = 0$, 得 $N(x) = R_B - \gamma A(L - x)$ 。

x 截面上的应力为 $\sigma(x) = R_B/A - \gamma(L - x)$ 。设 $x = c$ 处有 $\sigma = 0$, 即为拉压分界线。

令 $\sigma(x) = 0$, 求得

$$c = L - R_B/(\gamma A) \quad (c > 0)$$

设受压区位移为 u_1 ,

$$\epsilon_1 = \frac{du_1}{dx} = \frac{1}{E^-} \left[\frac{R_B}{A} - \gamma(L - x) \right]$$

积分且由 $x=0$ 时, $u_1=0$, 得

$$u_1 = \frac{R_B x}{E^- A} - \frac{L \gamma x}{E^-} + \frac{\gamma x^2}{2E^-} \quad (x \leq c)$$

设受拉区位移为 u_2 ,

$$\epsilon_2 = \frac{du_2}{dx} = \frac{1}{E^+} \left[\frac{R_B}{A} - \gamma(L - x) \right]$$

$$u_2 = \frac{R_B x}{E^+ A} - \frac{L \gamma x}{E^+} + \frac{\gamma x^2}{2E^+} + c_2$$

由 $x=c$ 时, $u_1 = u_2$, 定出常数 c_2 为

$$c_2 = -\frac{1}{2} \gamma \left(L - \frac{R_B}{\gamma A} \right)^2 \left(\frac{1}{E^-} - \frac{1}{E^+} \right)$$

将 c_2 代入 u_2 的表达式, 令 $x=L$ 时, $u_2=0$, 得关于 R_B 的方程, 简化为

$$(E^- - E^+) \left(\frac{R_B}{\gamma A} \right)^2 - 2LE^+ \frac{R_B}{\gamma A} + L^2 E^+ = 0$$

方程有两个根。因 $c > 0$, 故 $L > R_B/(\gamma A)$, 由此条件可舍去一根, 得

$$\frac{R_B}{\gamma A} = L \left(1 - \frac{1}{1 + \sqrt{E^+/E^-}} \right)$$

由 $c = L - R_B/(\gamma A)$, 得

$$c = \frac{L}{1 + \sqrt{E^+/E^-}}$$

最后得

$$\sigma(x) = \gamma(x - c)$$

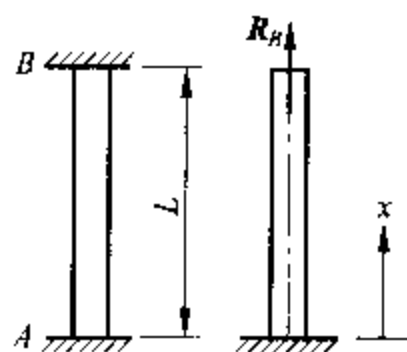


图 126

$$u_1(x) = \frac{\gamma}{E} \left(\frac{x^2}{2} - cx \right) \quad (x \leq c)$$

$$u_2(x) = \frac{\gamma}{E} \left[\frac{x^2 - L^2}{2} - c(x - L) \right] \quad (x > c)$$

127. 图 127a 所示对称桁架, 受载荷 P 作用, 已知各杆材料相同, 横截面面积也相同, 问有何办法可使各杆同时达到材料的许用应力 $[\sigma]$? (吴羽佳, 北京航空学院 508 教研室。原第 55 题, 1983, No. 5。)

办法 1: 利用装配应力改变内力分配。在准确加工、装配的情况下, 桁架中各杆的受力为

$$N_1 = N_2 = \frac{P \cos^2 \theta}{1 + 2 \cos^3 \theta} \quad (1)$$

$$N_3 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \theta} \quad (2)$$

因此 $N_3 > N_1$, 总是杆 3 先达到 $[\sigma]$ 。为使各杆的应力同时达到 $[\sigma]$, 可采用加装配应力的办法, 即预先将杆 3 做长 δ , 在强制装配以后, 杆 3 将具有预压应力, 而杆 1、2 将具有预拉应力。

由图 127b 可知, 设外载增至 $[P]$ 时, 各杆的应力同时到达 $[\sigma]$, 节点 A 到达 A_1 。在小变形假设的前提下, 叠加原理适用, δ 与各杆伸长量之间应满足下列协调方程

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = (\Delta l_3 + \delta) \cos \theta \quad (3)$$

各杆的轴力又满足下列物理方程

$$\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{EA} = \frac{[\sigma] l_i}{E} \quad (i=1, 2, 3) \quad (4)$$

由方程 (3)、(4) 解得杆 3 长度的过盈量 δ ,

$$\delta = \frac{[\sigma] l}{E} \tan^2 \theta \quad (5)$$

该桁架的许用载荷为

$$[P] = [\sigma] A (1 + 2 \cos \theta)$$

由式 (5) 可以看出, 这个解答的适用范围有一定的限制, 即若 θ 接近 $\frac{\pi}{2}$ 时, δ 就变得相当大, 这时, 小变形假设就不适用了, 因此所得 δ 值也就没有意义了。

办法 2: 对于短暂加载情况, 除了上述办法外, 还可以采用加热应力的办法来达到相同的目的。若材料的线膨胀系数为 α , 又假设材料的许用应力 $[\sigma]$ 不随温度的改变而改变, 则杆 3 所需升高的温度为

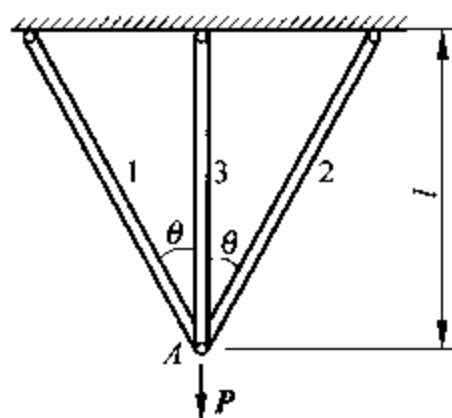


图 127a

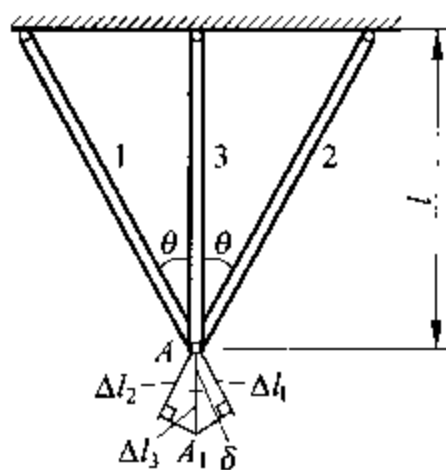


图 127b

$$\Delta t = \frac{\delta}{\alpha l} = \frac{[\sigma]}{E\alpha} \tan^2 \theta$$

128. 六条腿桌子放在水平地面上, 尺寸如图 128a 所示, 桌面是刚性的, 各条腿完全相同。(1) 证明: 在图示菱形区域内任意点 A 处, 施加一铅垂力 P 时, 六条腿都与地面接触。(2) 在上述情况下, 求各条腿的内力。(陈嘉, 南通纺织专科学校。原第 29 题, 1982, No. 3。)

解: 如图 128b 取坐标系 Oxy , 设力 P 作用点 A 的坐标为 (x, y) , 平衡时 P 等效于作用在中心 O 的力 F 和分别沿 x 方向和 y 方向的力偶 M_x 和 M_y , 其大小为

$$F = P$$

$$M_x = -Py$$

$$M_y = Px$$

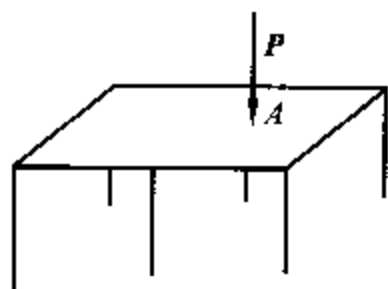


图 128a

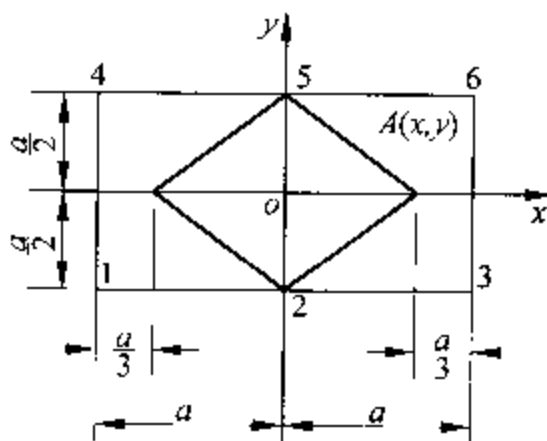


图 128b

可分别求出在力 F 和力偶 M_x 和 M_y 单独作用下各腿的反力, 然后叠加起来, 所得的结果, 就是在力 P 作用下各腿的内力。

由静力平衡条件, 桌腿的对称性及由桌面刚性条件而列出的变形协调条件, 不难分别求出作用在中心 O 的 F, M_x, M_y 引起的各腿的反力。

在力 F 作用下, 各腿受力相同,

$$N_i = \frac{P}{6} \quad (i=1, \dots, 6)$$

在 M_x 作用下,

$$N_1 = N_2 = N_3 = -N_4 = -N_5 = -N_6$$

$$3aN_1 = -Py$$

放得

$$N_1 = N_2 = N_3 = -\frac{Py}{3a}$$

$$N_4 = N_5 = N_6 = \frac{Py}{3a}$$

这里取正值为压力, 并暂时假定有些腿可以承受拉力。在 M_y 作用下,

$$N_2 = N_5 = 0$$

$$N_1 - N_4 = -\frac{Px}{4a}$$

$$N_3 - N_6 = \frac{Px}{4a}$$

以上三者叠加起来得

$$N_1 = \frac{P}{6} - \frac{Py}{3a} - \frac{Px}{4a}$$

$$N_2 = \frac{P}{6} - \frac{Py}{3a}$$

$$N_3 = \frac{P}{6} - \frac{Py}{3a} + \frac{Px}{4a}$$

$$N_4 = \frac{P}{6} + \frac{Py}{3a} - \frac{Px}{4a}$$

$$N_5 = \frac{P}{6} + \frac{Py}{3a}$$

$$N_6 = \frac{P}{6} + \frac{Py}{3a} + \frac{Px}{4a}$$

由于桌腿只承受压力,所以必须保证上述各内力均为非负值的解答才是正确的。即令 $N_i \geq 0 (i=1, \dots, 6)$, 其中如果力 P 作用在桌面内, $N_2 \geq 0, N_5 \geq 0$ 自然满足, 由其他四个不等式可得

$$|3x \pm 4y| \leq 2a$$

这就是图 128b 的菱形区。当力 P 的作用点 A 在这个菱形区域内时, 各腿与地面接触, 此时各腿的内力(压力)已如上述。

129. 六腿桌子同上题, 一铅垂载荷 P 作用在刚性的水平桌面上, 各腿的材料性能和尺寸完全相同。试分别求出使六腿同时受力、五腿受力、四腿受力和三腿受力的载荷作用区。(秦寿珪, 北京大学力学系。原第 100 题, 1985, No. 4。)

解: 取坐标系同上题, 外载荷作用点坐标为 (x, y) , 六腿同时受力的载荷作用区, 已如上题所证。这里提供另一证法。

设六条腿的反力分别是 $N_i (i=1, \dots, 6)$, 有平衡方程

$$\sum_{i=1}^6 N_i = P \quad (1)$$

$$(N_1 + N_4)a + Px = (N_3 + N_6)a \quad (2)$$

$$(N_1 + N_2 + N_3)\frac{a}{2} + Py = (N_4 + N_5 + N_6)\frac{a}{2} \quad (3)$$

由刚性桌面变形协调条件, 可得三个方程, 比如说, 可以列出

$$N_2 + N_6 = N_3 + N_5 \quad (4)$$

$$N_1 + N_5 = N_2 + N_4 \quad (5)$$

$$N_4 + N_6 = 2N_3 \quad (6)$$

解上述六个方程,得到与上题同样的 N_i 值。令 $N_i \geq 0 (i=1, \dots, 6)$, 得到同样的不等式

$$|3x \pm 4y| \leq 2a$$

如图 129 中菱形 $BCHI$, 其中 B 点坐标为 $(\frac{2}{3}a, 0)$ 。

下面限于力 P 位于桌面第一象限讨论其他几种情形。

五腿受力, 设腿 1 不受力, 令 $N_1 = 0$, 舍去方程(5), 求解后得

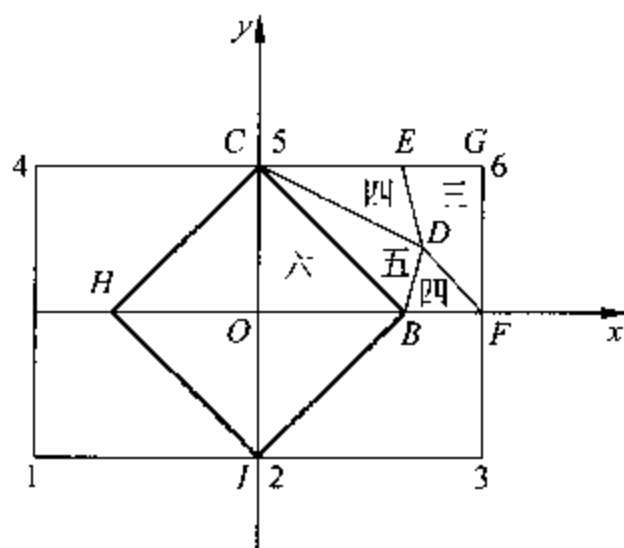


图 129

$$N_2 = \frac{P}{10a}(-2x - 6y + 3a)$$

$$N_3 = \frac{P}{5a}(x - 2y + a)$$

$$N_4 = \frac{2P}{15a}(-3x + y + 2a)$$

$$N_5 = \frac{P}{6a}(2y + a)$$

$$N_6 = \frac{P}{15a}(6x + 8y + a)$$

桌腿不能提供拉力, 所以要求 $N_i \geq 0 (i=2, \dots, 6)$ 。当力 P 位于桌面第一象限, $N_3 \geq 0, N_5 \geq 0, N_6 \geq 0$ 均自然满足, 余下 $N_2 \geq 0, N_4 \geq 0$ 得

$$-3x + y + 2a \geq 0 \quad (7)$$

$$-2x - 6y + 3a \geq 0 \quad (8)$$

这两个不等式, 加上上题所证六腿同时受力的载荷作用区边界 BC , 即得五腿受力区为三角形 BCD , 其中 D 点坐标为 $(\frac{3}{4}a, \frac{1}{4}a)$ 。

四腿受力有两种情况, 第一种情况是 2, 3, 5, 6 腿受力。舍去方程(5), (6), 并令 $N_1 = N_4 = 0$, 求解得

$$N_2 = \frac{P}{2a}(-x - y + a)$$

$$N_3 = \frac{P}{2a}(x - y)$$

$$N_5 = \frac{P}{2a}(-x + y + a)$$

$$N_6 = \frac{P}{2a}(x + y)$$

令 $N_2 \geq 0$ 得

$$-x - y + a \geq 0$$

即知三角形 BDF 为四腿(2,3,5,6)受力区,其中 F 点坐标为 $(a, 0)$ 。

四腿受力的第二种情况是 3,4,5,6 受力。舍去方程(4),(5),且令 $N_1 = N_2 = 0$, 求解后得

$$N_3 = \frac{P}{2a}(-2y + a)$$

$$N_4 = \frac{P}{12a}(-6x - 2y + 5a)$$

$$N_5 = \frac{P}{6a}(2y + a)$$

$$N_6 = \frac{P}{12a}(6x + 10y - a)$$

令 $N_4 \geq 0$ 得

$$-6x - 2y + 5a \geq 0$$

即知三角形 CDE 为四腿(3,4,5,6)受力区,其中 E 点坐标为 $(\frac{2}{3}a, \frac{1}{2}a)$ 。

最后,四边形 DEGF 为三腿(3,5,6)受力区。图 129 是第一象限的图形,各区用相应的数字表示。根据 x 轴和 y 轴的对称性,即可作出整个桌面的受力区域图。

130. 轮轴用均匀分布的若干条相同的弹性钢丝绑在刚性轮圈上(图 130a)。证明轮轴受到轮圈平面内载荷引起的位移与钢丝条数($n \geq 3$)成反比。(朱照宣,北京大学力学系。原第 4 题,1980, No. 3。)

解:先考虑一种特殊情况,设轮子静止,有一根辐条处于铅直位置,作用在轮轴上的载荷 P 铅垂向下(图 130b),由对称性知,轮轴位移 δ 必铅垂向下。

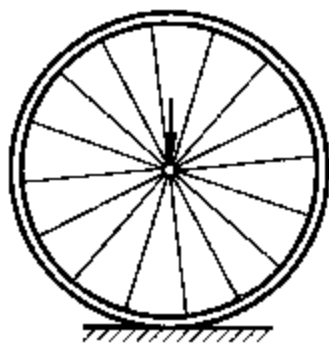


图 130a

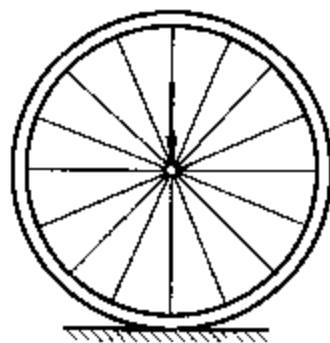


图 130b

设第 k 根杆与铅垂线的夹角为 α_k , 轮轴 O 的位移为 δ , 杆的伸长量为 Δl_k , 于是有变形关系式(略去高阶小量)

$$\Delta l_k = \delta \cos \alpha_k \quad (1)$$

设杆的原长 l , 拉压刚度 EA , 拉力 N_k (负时为压力), 则有

$$\Delta l_k = \frac{N_k l}{EA} \quad (2)$$

轮轴的平衡方程为

$$P = \sum_{k=0}^{n-1} N_k \cos \alpha_k \quad (3)$$

由式(1)、(2)、(3)得

$$P = \frac{EA\delta}{l} \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2 \alpha_k$$

其中 $\alpha_k = 2k\pi/n$ 。由三角公式得

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2 \alpha_k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (1 + \cos 2\alpha_k) = \frac{n}{2}$$

事实上, 上式第二部分 $\sum_{k=0}^{n-1} \cos 2\alpha_k$ 中, 每项都乘上 $\sin \frac{2\pi}{n}$ (当 $n \geq 3$ 时此因子不为 0) 得

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos \left(k \cdot \frac{4\pi}{n} \right) \sin \frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2} \left[\sin \frac{2\pi}{n} + \sin \left(4\pi - \frac{2\pi}{n} \right) \right] = 0$$

故 $\sum_{k=0}^{n-1} \cos 2\alpha_k = 0$, 最后得

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{EA\delta n}{2l} \\ \delta &= \frac{2Pl}{nEA} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

到此, 问题并未完全解决, 因为车轮是滚动而不是静止的。设由于滚动, 轮轴从图 130b 的位置到达图 130c 的位置, 载荷 P 相对于轮轴偏转了任意角 θ , 第 k 根杆与铅垂线(载荷 P)夹角变为 $\alpha_k + \theta$ 。可以证明, 这时 δ 仍然是与 P 方向一致, 而且(4)式仍成立。

不妨假定位移 δ 与 P 的作用线(铅垂轴)成 α 角, 如图 130d, 下面证明 $\alpha = 0$ 。依照第一种情况, 以 δ 所在方向为轴, 列出 δ 方向及与 δ 垂直方向 n 根杆的合力分量。第 k 根杆对轮轴作用力在 δ 方向的投影是 $EA\delta \cos^2(\theta + \alpha + \alpha_k)/l$, n 根杆的合力分量为

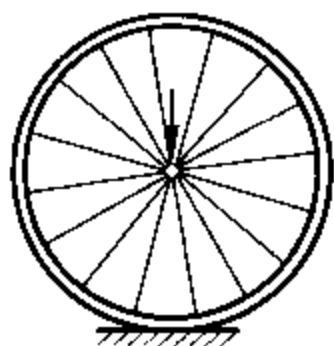


图 130c

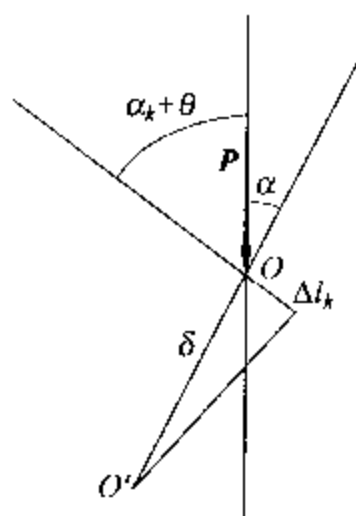


图 130d

$$\frac{EA\delta}{l} \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2(\theta + \alpha + \alpha_k) = \frac{EA\delta}{2l} \sum_{k=0}^{n-1} [1 + \cos 2(\theta + \alpha + \alpha_k)]$$

仿前述

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos 2(\theta + \alpha + \alpha_k) \sin \frac{2\pi}{n} = 0$$

所以 n 根杆 δ 方向合力分量为 $EA\delta n/(2l)$ 。

再看与 δ 垂直的方向上,合力分量为

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n-1} N_k \sin(\theta + \alpha + \alpha_k) \\ &= \frac{EA\delta}{2l} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(2\theta + 2\alpha + 2\alpha_k) \\ &= \frac{EA\delta}{2l} \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(2\theta + 2\alpha + 2\alpha_k) \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \\ &= \frac{EA\delta}{2l} \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\cos\left(2\theta + 2\alpha + k \cdot \frac{2\pi}{n} - \frac{2\pi}{n}\right) \right. \\ & \quad \left. - \cos\left(2\theta + 2\alpha + k \cdot \frac{4\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) \right] \\ &= \frac{EA\delta}{2l} \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{n}} \left[\cos\left(2\theta + 2\alpha - \frac{2\pi}{n}\right) - \cos\left(4\pi + 2\theta + 2\alpha - \frac{2\pi}{n}\right) \right] = 0 \end{aligned}$$

也就是说, n 根杆的合力, 在铅垂于 δ 方向的方向上的分量为零。为保持轮轴的平衡, δ 方向只能与 P 的作用线一致, 即 $\alpha=0$, 而且

$$P = \frac{EA\delta n}{2l}, \quad \delta = \frac{2Pl}{nEA}$$

这个结果与第一种情况一致, 轮轴位移与钢丝辐条的根数成反比, 这个位移在轮子转动过程中保持不变。

131. 自行车轮子(设轮圈为刚性)各辐条均匀绷紧, 现用条扳子将其中一根辐条再拧紧一个螺距 d , 求各辐条内力增量。(原第 128 题, 1986, No. 5。)

解: 当条扳子将其中一根辐条($\alpha_0 = 0$)拧紧 d 时, 相当于给该辐条以拉力 P 。设在该拉力作用下该辐条伸长 δ_1 , 轮轴在此拉力作用下向上位移 δ_2 , 由变形方程知(图 131)

$$d = \delta_1 + \delta_2 \quad (1)$$

其中

$$\delta_1 = \frac{Pl}{EA}, \quad \delta_2 = \frac{2Pl}{(n-2)EA}$$

事实上, 当轮轴位移为 δ_2 时, 第 k 根杆的伸长量的代数值为

$$\Delta l_k = -\delta_2 \cos \alpha_k$$

其中 $\alpha_k = 2k\pi/n$, 内力为

$$N_k = EA\Delta l_k/l = -EA\delta_2 \cos \alpha_k/l$$

由轮轴平衡得

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{EA}{l} \delta_2 \cos^2 \alpha_k = P$$

上式左端

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{EA}{l} \delta_2 \cos^2 \alpha_k &= \frac{EA}{l} \delta_2 \left[\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2 \alpha_k - 1 \right] \\ &= \frac{EA\delta_2}{l} \left[\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (1 + \cos 2\alpha_k) - 1 \right] \\ &= \frac{EA}{l} \delta_2 \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \end{aligned}$$

(上式利用了三角公式 $\sum_{k=0}^{n-1} \cos 2\alpha_k = 0$, 参看本书第 130 题解答), 从而得

$$\delta_2 = \frac{2Pl}{(n-2)EA}$$

由(1)式得

$$d = \frac{Pl}{EA} \left(1 + \frac{2}{n-2} \right) = \frac{Pl}{EA} \left(\frac{n}{n-2} \right)$$

即

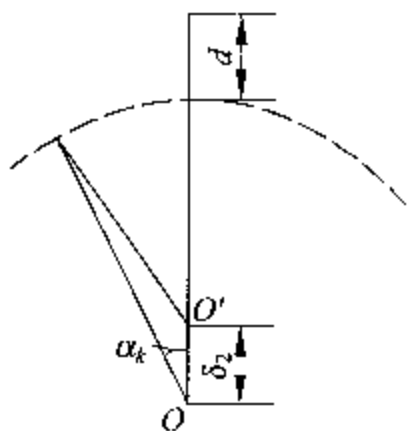


图 131

$$P = \frac{EA}{l} \left(1 - \frac{2}{n}\right) d$$

最后得各辐条的内力增量为

$$N_0 = P = \frac{EA}{l} \left(1 - \frac{2}{n}\right) d$$

$$N_k = -\frac{2EA \cos \alpha_k}{nl} d \quad (k=1, \dots, n-1)$$

132. 设圆轴上有 A, B 两个凸缘, 在扭转力偶矩 M 作用下, 圆轴发生扭转变形, 这时, 把一段长为 L 的圆管与轴的凸缘焊接在一起 (图 132), 然后解除 M 。试分别用内力功和外力功两种方法求储存在该系统内的变形能。

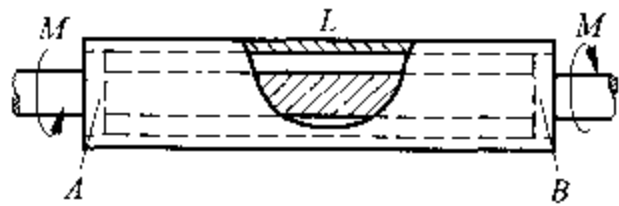


图 132

设圆轴和圆管的扭转刚度分别为 GI_{p1} 和 GI_{p2} 。

(张德凤, 河北机电学院材料力学教研室。原第 152 题, 1987, No. 5。)

解法 1: 由系统的内力功计算变形能。设焊接前圆轴的扭角为 φ , 解除 M 后, 圆轴的扭矩为 T_1 , 扭角为 φ_1 , 圆管的扭矩为 T_2 , 扭角为 φ_2 。

由系统的平衡条件可得

$$T_1 = T_2 \quad (1)$$

解除 M 后, 圆轴减少的扭角应等于圆管产生的扭角 φ_2 , 故得变形协调条件为

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$$

考虑到物理关系, 上式又可写成

$$\frac{T_1 L}{GI_{p1}} + \frac{T_2 L}{GI_{p2}} = \frac{ML}{GI_{p1}} \quad (2)$$

将式(1)代入式(2), 得

$$T_1 = T_2 = \frac{MI_{p2}}{(I_{p1} + I_{p2})}$$

于是, 系统的变形能为

$$U = \frac{T_1^2 L}{2GI_{p1}} + \frac{T_2^2 L}{2GI_{p2}} = \frac{M^2 I_{p2} L}{2GI_{p1} (I_{p1} + I_{p2})}$$

解法 2: 由外力功计算变形能。圆轴由于解除 M 而减少扭角 φ_2 后, 该系统处于平衡状态, 此时, 系统的变形能应等于初始加载时扭转力偶矩 M 在扭角 φ 上作的正功与后来卸载时 M 在 φ_2 上作的负功之和, 即

$$W = \frac{M\varphi}{2} - \frac{M\varphi_2}{2} = \frac{M\varphi_1}{2}$$

考虑到

$$\varphi_1 = \frac{T_1 L}{GI_{p1}}$$

及

$$T_1 = \frac{MI_{p2}}{I_{p1} + I_{p2}}$$

最后得到

$$U = W - \frac{M}{2} \cdot \frac{T_1 L}{GI_{p1}} = \frac{M^2 I_{p2} L}{2GI_{p1}(I_{p1} + I_{p2})}$$

133. 相同材料组合轴如图 133 所示,若芯轴直径为 d ,套管外径为 D ,材料的许用切应力为 $[\tau]$ 。试问:(1)用何方法可提高该组合轴的强度?若 $D=2d$,用此法可使扭力偶矩的许用值 $[m]$ 提高百分之几?(2)若 d 可以调整, d 与 D 的比值为多大时,对强度最有利?(郭明洁,北京航空航天大学 508 教研室。原第 285 题,1996, No. 2。)

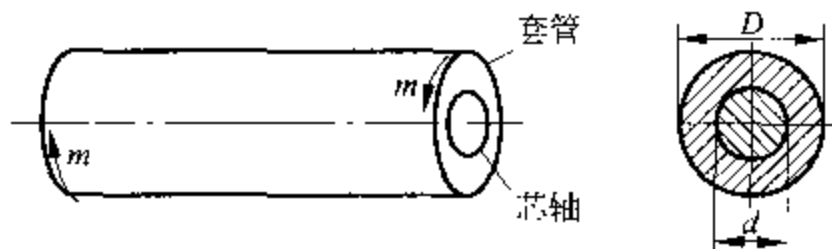


图 133

解:(1)用预扭(产生装配应力)的方法可以提高该组合轴的强度。先给套管加一与 m 反向的预扭力偶矩 m_0 ,使套管产生一个预扭角 φ_0 ,然后将套管与芯轴焊成一体,并去除 m_0 ,造成装配应力。根据芯轴与套管的最大扭转切应力同时达到许用值 $[\tau]$ 的原则和超静定轴解法易得

$$m_0 = \frac{15\pi D^3}{256} [\tau] \quad (1)$$

该组合轴的扭力偶矩的许用值为

$$\begin{aligned} [m] &= [T] = W_{p1} [\tau] + W_{p2} [\tau] \\ &= \left\{ \frac{\pi}{16} \left(\frac{D}{2} \right)^3 + \frac{\pi D^3}{16} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^4 \right] \right\} [\tau] = \frac{17}{16} [T_0] \end{aligned} \quad (2)$$

式中,

$$[T_0] = \frac{\pi D^3}{16} [\tau] \quad (3)$$

为该组合轴在无装配应力时的许用扭矩值。

比较式(2)和式(3)易知,合理利用装配应力,可使扭力偶矩的许用值 $[m]$ 提高 6.25%。

(2) 设 $d = \beta D$, β 为待定系数。与第一问之解的思路相同,预扭,产生装配应力,

受 m 作用后使芯轴与套管的最大扭转切应力同时达到许用值 $[\tau]$, 从而得

$$[m] = [T] = W_{p1}[\tau] + W_{p2}[\tau] = \frac{\pi D^3}{16}[\tau](1 + \beta^3 - \beta^4) \quad (4)$$

由 $d[T]/d\beta = 0$ 得

$$\beta = 3/4 \quad (5)$$

将式(5)代入式(4), 得

$$[m] = \left(\frac{283}{256}\right) \frac{\pi D^3}{16}[\tau] = 1.105[T_0] \quad (6)$$

比较式(6)与式(3)可知, 当 d 与 D 的比值 β 调至 $3/4$ 时, 对轴的强度最有利, 其扭力偶矩的许用值可提高 10.5% 。

134. 一根套接的轴(紧配合或粘结联接)传递一扭矩 T (图 134a)。请分别画出两轴的扭矩图, 并指出扭矩 T 是以何种方式从 I 轴传至 II 轴的。(郑世瀛, 西南交通大学材力室。原第 140 题, 1987, No. 2。)

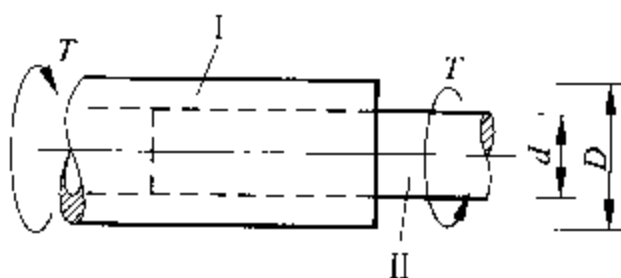


图 134a

解: 初看, 这问题很简单, 总的扭矩图如图 134c 所示。容易误认为其中任一轴, 如实心轴 II, A, B 两截面上的扭矩分别为零和 T , AB 段的扭矩为直线分布, 如图 134d。这种看法是错误的, 因为这是一个超静定问题, 必须考虑变形协调条件, 且每轴的扭矩配额与其扭转刚度有关。

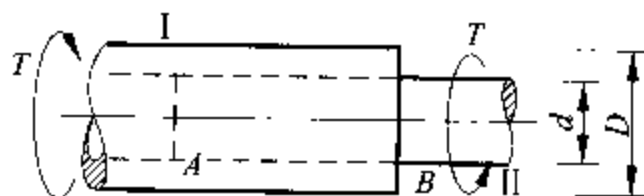


图 134b



图 134c

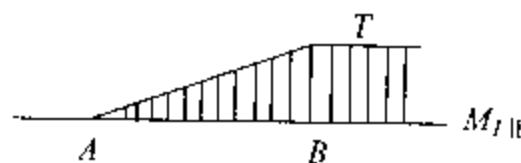


图 134d

只考虑材料在线弹性范围内工作。假设 I, II 两轴之间无滑动, 即在 AB 段内, 以任意两个截面同时截得 I, II 两轴同样长的微段 Δl , 在 I, II 两轴上, 微段两端的相对转角必相等, 可得

$$\frac{M_{T I} \Delta l}{G_I I_{p I}} = \frac{M_{T II} \Delta l}{G_{II} I_{p II}}$$

即

$$M_{T I} = \frac{G_I I_{p I}}{G_{II} I_{p II}} \cdot M_{T II}$$

式中 G_i , I_{pi} 和 M_{Ti} 分别表示两轴的切变模量、极惯性矩和扭矩, 由静力平衡条件

$$T = M_{T I} + M_{T II}$$

于是得

$$M_{I1} = \frac{T}{1 + \frac{G_{II} I_{pII}}{G_I I_{pI}}}, \quad M_{I2} = \frac{T}{1 + \frac{G_I I_{pI}}{G_{II} I_{pII}}}$$

由此可见,在套接段内,每个轴的扭矩值不变,其扭矩如图 134e 所示。两轴间扭矩的传递均在 A, B 两截面实现,如图 134f,即扭矩是通过套接面两端的两个“集中力偶”的形式“跳跃”地传递的,交接面中段并不传力。可见交接面两端的切应力是很大的。因此这种方式联接的传动轴,容易出现两端部松动(或脱胶),也可能出现局部的塑性变形。因此这不是一种牢靠的联接方式。在铆接、焊接接头中也有类似的情形。

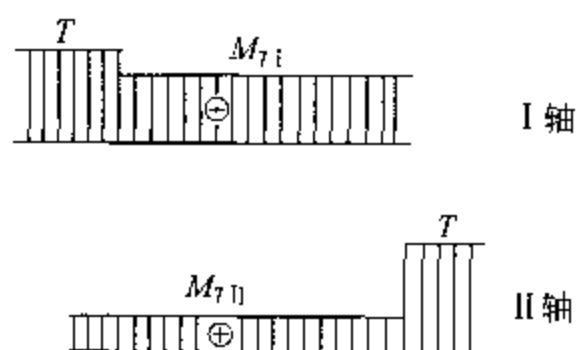


图 134e

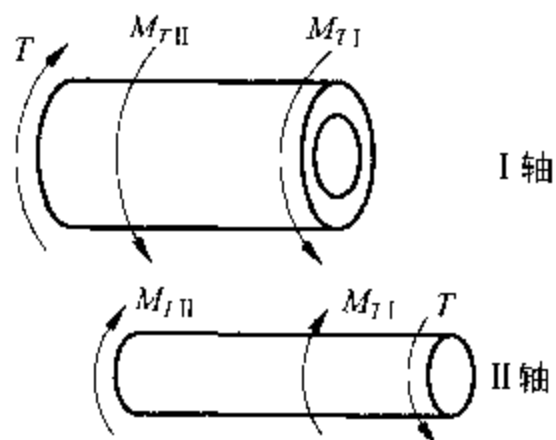


图 134f

第 6 章

弯 曲

135. 等截面工字梁结构如图 135a 所示, 一活动载荷 P 可在全梁 l 上移动。试问, 如何布置中间铰 B 和可动铰支座 C , 才能充分利用材料抗力。(褚宗良, 东北工学院材料力学教研室。原第 104 题, 1985, No. 5。)

解: 设 $AB = x$, $CD = y$, 当力 P 在 AB (I) 段移动时, 最危险状态如图 135b(1) 所示, 最大弯矩发生在 A 截面, $M_{A1} = -Px$ 。当力 P 在 BC (II) 段和 CD (III) 段移动时, 最危险状态分别如图 135b(2) 和 (3) 所示。

$$M_{AII} = -\frac{1}{2}Px, \quad M_{EII} = \frac{1}{4}P(l-x-y)$$

$$M_{AIII} = \frac{Py}{l-x-y}x, \quad M_{CIII} = -Py$$

显然 $|M_{AII}| < |M_{AI}|$ 。为充分发挥 BC 段的抗力, 应令 $|M_{EII}| = |M_{AI}|$, 即

$$\frac{1}{4}P(l-x-y) = Px$$

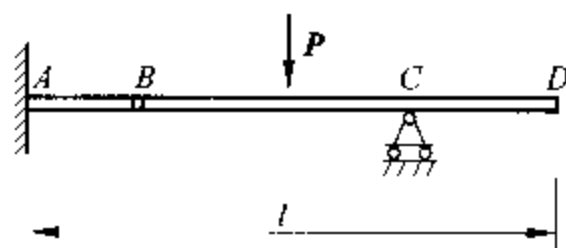


图 135a

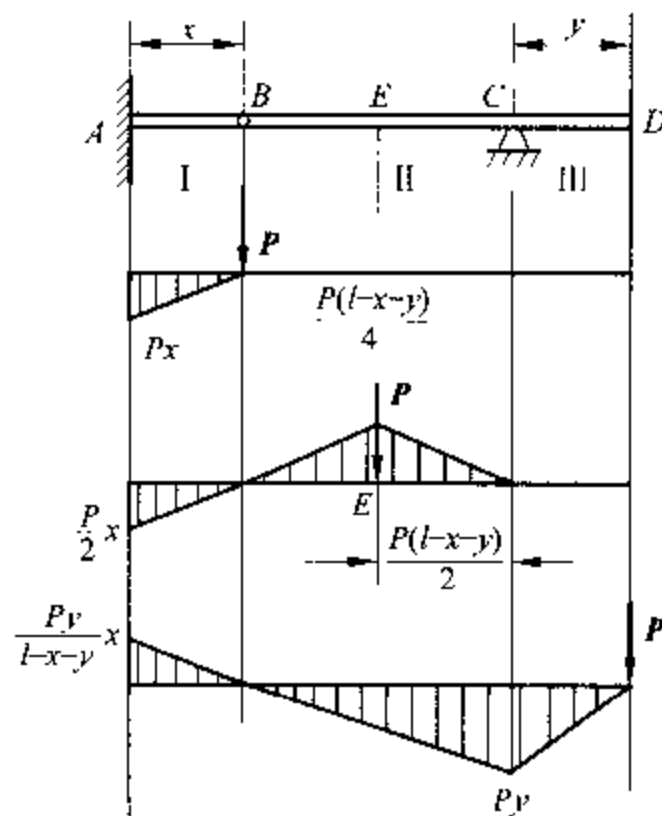


图 135b

得

$$l-y=5x$$

为充分发挥 CD 段的抗力,应令 $|M_{CII}| = |M_{AI}|$, 得 $x=y$, 从而得

$$x=y=\frac{l}{6}$$

这时 $|M_{AII}| = \frac{Pl}{24} < |M_{AI}|$ 。因此取 $x=y=\frac{l}{6}$ 时,才能充分利用材料的抗力。

136. 宽为 4m 的水沟上横跨一长 6m 的窄跳板(如图 136a)。两体重为 $P=800\text{N}$ 的同伴欲过此沟。已知跳板是等截面的,允许的最大弯矩为 $[M]=600\text{N}\cdot\text{m}$ 。试说明两人采取何种办法可以安全过沟。(周道祥,合肥工业大学建筑分校。原第 120 题,1986, No. 3。)

解:若一人单独通过,则行至离沟边 1m 处时,跳板最大弯矩已达 $600\text{N}\cdot\text{m}$,不能再继续前进。

若两人同时上桥,一个在右侧外伸段距右端支座为 x_1 处,另一个在桥上,行至离左端支座 x_2 处,其弯矩如图 136b 所示。这时支座 A 的反力为

$$R_A = P(L - x_1 - x_2)/L$$

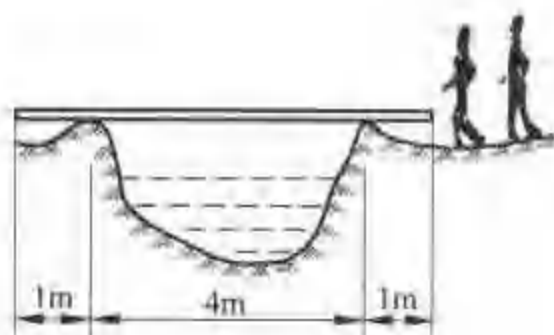


图 136a

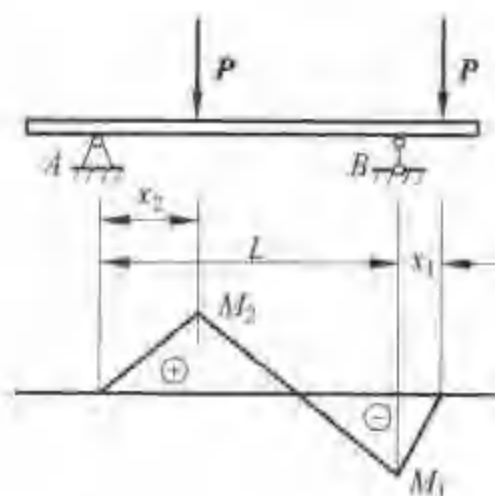


图 136b

弯矩极大值为

$$M_1 = Px_1, \quad M_2 = P(L - x_1 - x_2)x_2/L$$

欲要安全通过,要求 $M_1 \leq [M], M_2 \leq [M]$, 由此得

$$x_2^2 - (4 - x_1)x_2 + 3 \geq 0$$

欲使上式恒成立,则需

$$(4 - x_1)^2 - 12 \leq 0$$

解得 $0.536 \leq x_1 \leq 7.46$ 。考虑到 $M_1 \leq [M]$, 得 $x_1 \leq 0.75\text{m}$ 。所以,当一人立于右侧

外伸段离右支座的距离为 $(0.536 \sim 0.75)\text{m}$ 之间时,另一人可安全通过跳板。通过跳板的人,立于左外伸段离左支座距离为 $(0.536 \sim 0.75)\text{m}$ 之间,另一人亦可安全通过。

137. 下端固定的正六角柱如图 137 所示,其横截面边长 $b=40\text{mm}$,柱的上端有一质量为 1kg 的小球 M ,以 $\omega=100\text{rad/s}$ 的角速度在水平面内旋转, $OM=\rho=200\text{mm}$,柱的高度 $H=1\text{m}$ 。试求柱体内的最大动应力。(林建兴,浙江大学 1983 年硕士研究生考题。原第 70 题,1984, No. 3。)

解: 小球旋转时,惯性力为

$$P_d = m\rho\omega^2 = 2000\text{N}$$

正六角柱相当于悬臂梁,自由端受力 P_d 作用。最大弯矩在根部,为

$$\max M_d = P_d H = 2000\text{N} \cdot \text{m}$$

当小球绕 O 点转到任意方向 OM 时,受弯梁的中性面是梁中过 O 点与 OM 垂直的平面,柱中任意一点的弯曲正应力为

$$\sigma = \frac{M_d \eta}{I_z}$$

其中 η 为该点到中性面的距离。当小球转到 y 轴方向时,正六角柱底面上 A 点的应力最大,为

$$\max \sigma = \sigma_A = \max M_d b / I_z$$

其中 I_z 为正六角形对 z 轴的惯性矩

$$I_z = 1.386 \times 10^{-6} (\text{m}^4)$$

所以

$$\sigma_A = 5.77 \times 10^7 \text{N/m}^2$$

138. 矩形截面简支梁 AB (图 138a(1))在相距 dx 的两个截面上,内力如图 138a(2) 所示。再用相距 dy 的两个纵截面截出单元体 $abcd$ 。由于左、右截面上剪力 Q 相同,所以左、右截面的切应力 τ 也相同。由切应力互等定理,上、下的切应力 τ 也相同。由于左、右截面上弯矩 M 不相同,所以左、右的正应力 σ 也不相同(图 138a(3))。问:为什么单元体水平方向静力不平衡,错误出在什么地方?(陆才善,西安交通大学材力教研室,原第 208 题,1991, No. 3。)

解: 错误出在只考虑了相距 dx 的两个截面上正应力 σ 的不同,而未考虑相距 dy 的两个纵截面上切应力的不相同(图 138b(1),(2))。

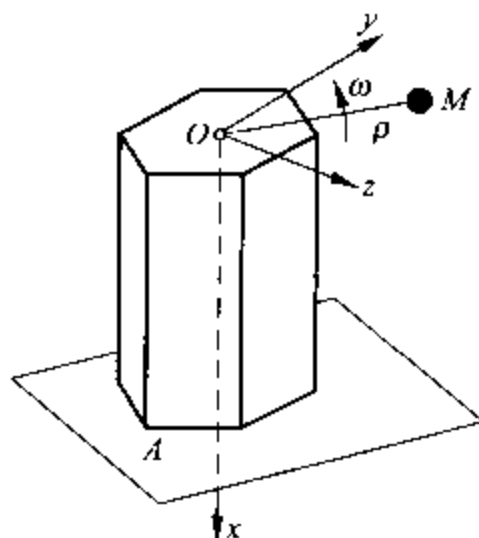


图 137

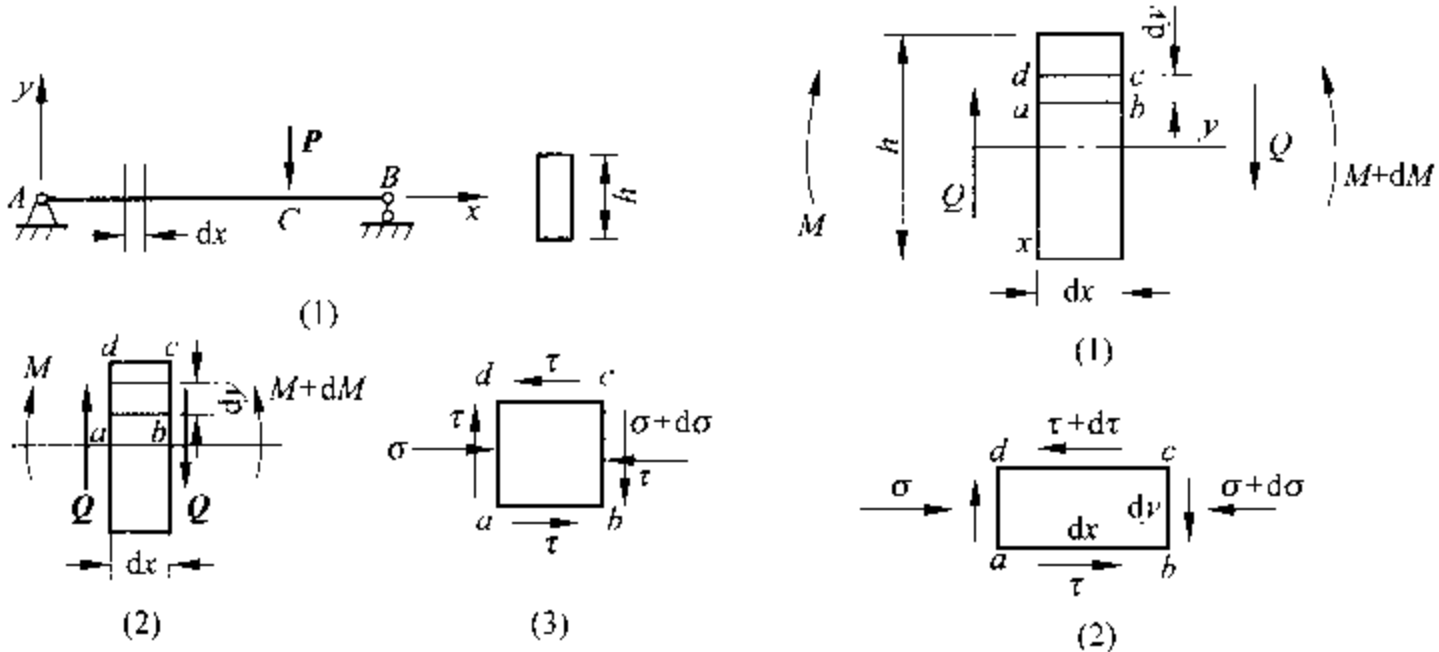


图 138a

图 138b

矩形截面上切应力计算公式为

$$\tau = \frac{Q}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (1)$$

其中 I 是惯性矩。根据切应力互等定理, ab 面上的切应力由式(1)给出, cd 面上的切应力则为

$$\begin{aligned} \tau + d\tau &= \frac{Q}{2I} \left[\frac{h^2}{4} - (y + dy)^2 \right] \\ &\approx \frac{Q}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 - 2ydy \right) \end{aligned}$$

所以 $d\tau = -Qydy/I$, $d\tau dx = -Qydydx/I$ 。小单元 $abcd$ 由正应力产生的水平方向的合力为

$$d\sigma dy = dMydy/I = (dM/dx) dx y dy / I = Qydydx/I$$

所以单元体水平方向上静力也是平衡的。

139. 物块 C 的重量为 G , 置于悬臂梁 AB 上(图 139a), 梁长 L , 弯曲刚度 EI , 物块与梁间的摩擦系数为 μ , 求:

(1) 物块开始滑动时的位置;

(2) 物块滑离 B 端时的速度。(董加林、王桂清, 沈阳电工机械厂。原第 127 题, 1986, No. 5。)

解: (1) 设物块开始滑动时的位置为 s , 如图 139b 所示, 则 AD 段的挠曲线方程为

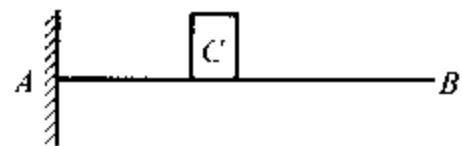


图 139a

$$y = -\frac{Gx^2}{6EI}(3s-x) \quad (0 \leq x \leq s)$$

由此可知

$$\theta_D = y'_D = -Gs^2/(2EI) \quad (1)$$

由静力平衡条件,可求得摩擦力为

$$F = \mu G \cos |\theta_D|$$

而物块开始滑动的条件为

$$G \sin |\theta_D| \geq F$$

由以上二式易得

$$\tan |\theta_D| \approx |\theta_D| \geq \mu$$

将式(1)代入上式,即可得到物块开始滑动时的位置为

$$s \geq \left(\frac{2EI\mu}{G} \right)^{1/2}$$

(2) 物块由 D 处滑至 B 处,在此阶段的始、末两处的挠度分别为

$$f_D = -\frac{Gs^3}{3EI}, \quad f_B = -\frac{GL^3}{3EI}$$

设物块滑离 B 端时的速度为 v , W 为摩擦力 F 在此滑动过程中所作的功,由能量守恒定律可得

$$\frac{Gv^2}{2g} = G \left(\frac{GL^3 - Gs^3}{3EI} \right) - W \quad (2)$$

这里假定物块很小,其转动动能可忽略不计。

由于

$$dW = Fds$$

而

$$F = \mu G \cos |\theta|$$

$$ds = (1 + y'^2)^{1/2} dx$$

$$\cos |\theta| = dx/ds = (1 + y'^2)^{-1/2}$$

故有

$$dW = \mu G \cos |\theta| \cdot (1 + y'^2)^{1/2} dx = \mu G dx$$

积分上式,得

$$W = \mu G(L-s) \quad (3)$$

将式(3)代入式(2),最后得到

$$v = \left\{ 2g(L-s) \left[\frac{G}{3EI}(L^3 + Ls + s^2) - \mu \right] \right\}^{1/2}$$

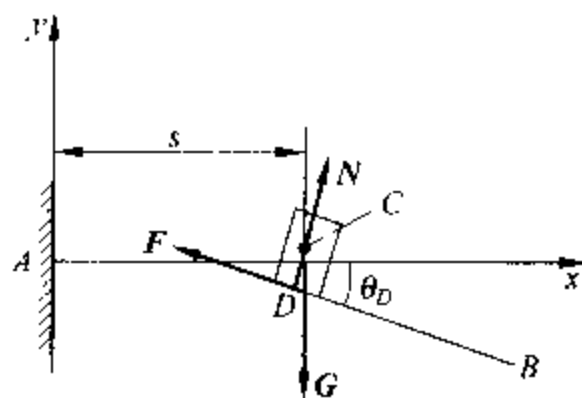


图 139b

140. 等截面悬臂梁 AB 预制成曲线形状 (图 140a), 此形状恰使该梁移动的集中载荷到达任意位置时均能保持相同的高度。另一等直悬臂梁 AC 与 AB 同固支于 A 端 (图 140b)。问: (1) 当 AB 梁上的载荷 P 移动到 x 处时, Ax 段是否与 AC 梁的相应段紧贴且无挤压? 为什么? (2) 若欲使梁 AC 受载变形后恰好与未受载的梁 AB 紧贴且无挤压, 应在梁 AC 上如何加载? 已知两梁长均为 l , 弯曲刚度均为 EI , 且均为小变形。(任贵斌, 辽宁盘锦辽河油田职工大学。原第 176 题, 1989, No. 6。)

解: (1) 当 AB 梁上的载荷 P 移动到 x 处时, Ax 段不可能与 AC 梁的相应段紧贴且无挤压。记水平轴为 ξ , 如图 140c, 按题意, 可求得梁 AB 的方程为

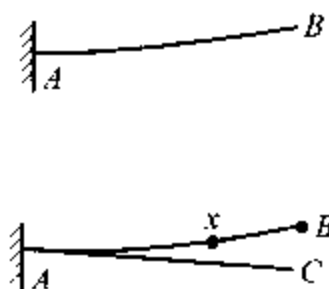


图 140b

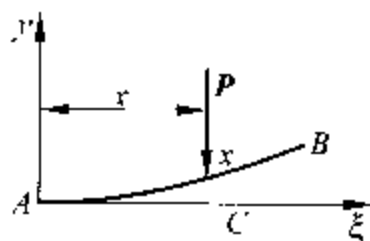


图 140c

$$y = \frac{P\xi^3}{3EI}$$

如无 AC 梁, 当载荷 P 移至 x 时, Ax 段的弯矩为

$$M(\xi) = -Px + P\xi$$

挠度 $f(\xi)$ (以向上为正) 满足

$$EI f''(\xi) = -Px + P\xi$$

解得

$$f(\xi) = \frac{P}{EI} \left(-\frac{x}{2}\xi^2 + \frac{1}{6}\xi^3 \right)$$

梁 AB 的 Ax 段变形后位置为

$$y_1 = \frac{P\xi^3}{3EI} + \frac{P}{EI} \left(-\frac{x}{2}\xi^2 + \frac{1}{6}\xi^3 \right) = \frac{P\xi^2}{2EI} (-x + \xi)$$

当 $\xi = x$ 时, $y_1 = 0$, 当 $\xi < x$ 时, 有 $y_1 < 0$ 。

当有 AC 梁时, 它阻碍 AB 梁的变形。因为 AC 不允许 $y_1 < 0$, 所以必有挤压。

(2) 选坐标系如图 140d 所示, AB 梁的方程为

$$y = \frac{Px^3}{3EI}$$

若欲使梁 AC 受载变形后与 AB 梁紧贴且无挤压, 就需选定一组载荷, 在它的作用下, AC 的挠度恰好为 $f = Px^3/(3EI)$, 这时 $f'' = 2Px/(EI)$ 。

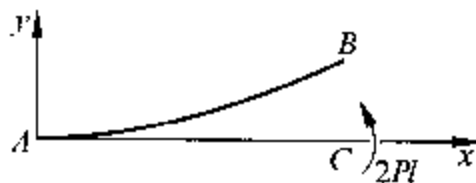


图 140d

列方程

$$M(x) = EI f'' = 2Px$$

$$Q(x) = dM/dx = 2P$$

可见梁内剪力 Q 为常量 $2P$, 弯矩为 $2Px$ 。这只要选取在 C 点作用向下的集中力 $2P$, 同时作用逆时针的力偶 $M=2Pl$ 即满足要求, 见图 140d。

141. 图 141 所示梁为均质材料等截面梁, 具有纵向对称面, 外力在该对称面内。已知梁内无轴力, 并略去剪力对变形的影响。若梁内距中性层等远的任一层纵向纤维的总伸长 $\Delta l=0$, 试证明以下两结论成立:

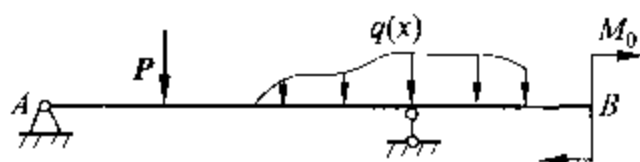


图 141

(1) 该梁弯矩图的总面积 A_M 为零, 即 $A_M=0$;

(2) 梁两端面的转角相等, 即 $\theta_A=\theta_B$ 。

(吴国勋, 北京航空航天大学 508 教研室。原第 264 题, 1995, No. 2。)

解: (1) 距中性层为 Y 的任一层纤维的应变 ϵ 为

$$\epsilon - \frac{Y}{\rho} = Y \frac{M(x)}{EI}$$

$$\Delta l = \int_0^l \epsilon dx = \frac{Y}{EI} \int_0^l M(x) dx = \frac{Y}{EI} A_M = 0$$

因为 EI 为有限量, Y 不为零, 故有

$$A_M = \int_0^l M(x) dx = 0$$

(2) 因为

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M(x)}{EI}$$

故有

$$\int_0^l d\theta = \int_0^l \frac{M(x)}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^l M(x) dx = \frac{1}{EI} A_M$$

由上式和结论(1), 有

$$\int_0^l d\theta = \theta(l) - \theta(0) = \theta_B - \theta_A = \frac{A_M}{EI} = 0$$

从而

$$\theta_A = \theta_B$$

由上述结果可得到以下推论: 对于两端固支的均质等直杆, 当纵向对称面内作用有任何力系时, 其轴力图的总面积 A_N 及弯矩图的总面积 A_M 恒为零。

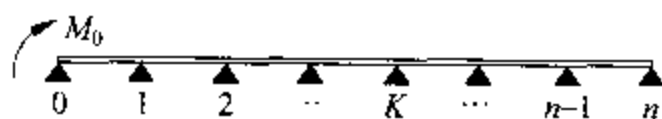


图 142

142. 如图 142 所示连续梁, 各跨跨度相

等,求第 K 个支点处弯矩 M_K 的表达式; $M_0 = M$ 为已知,证明:当跨数 n 充分大时, $M_K/M = (-0.268)^K$ 。(朱照宣,北京大学力学系。原第5题,1980.No.4。)

解法1:由三弯矩方程得线性方程组

$$M_{K-1} + 4M_K + M_{K+1} = 0 \quad (K=1, \dots, n-1) \quad (1)$$

$M_0 = M$ 为外加力偶, M_K 为第 K 个支座处的弯矩。由边界条件知 $M_n = 0$ 。这是 $n-1$ 个未知量, $n-1$ 个方程的方程组。

把第一个方程的 M_0 挪到右边,最后一个方程中 $M_n = 0$,得

$$\left. \begin{aligned} 4M_1 + M_2 &= -M \\ M_{K-1} + 4M_K + M_{K+1} &= 0 \quad (K=2, \dots, n-2) \\ M_{n-2} + 4M_{n-1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

这个非齐次方程的系数行列式是

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

记为 Δ_{n-1} ,下面把这种形式的 K 阶行列式记为 Δ_K ,解方程(2)得

$$M_K = (-1)^K M \frac{\Delta_{n-(K+1)}}{\Delta_{n-1}} \quad (3)$$

算出 Δ_K 的值。可以用数学归纳法证明

$$\Delta_K = \frac{(-1)^K (1 - \lambda^{2(K+1)})}{\lambda^K (1 - \lambda^2)}$$

其中 λ 是方程

$$x^2 + 4x + 1 = 0$$

绝对值小于1的根,即 $\lambda = -2 + \sqrt{3}$,于是由(3)式得

$$M_K = M \frac{\lambda^K - \lambda^{2n-K}}{1 - \lambda^{2n}} \quad (4)$$

由于 Δ_K 均是有理数,所以 M_K 也是有理数。显然,由(4)式,当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{M_K}{M} \rightarrow \lambda^K = (-0.268)^K \quad (5)$$

解法2:从方程(1)出发,把 M_0, M_1, \dots, M_n 先都看成未知量,方程组(1)成为一个 $n+1$ 个未知量, $n-1$ 个方程的方程组。我们要确定它的基础解系。

方程组的特征方程

$$x^2 + 4x + 1 = 0$$

有两个解, $\lambda = -2 + \sqrt{3}$, $\mu = -2 - \sqrt{3} = \frac{1}{\lambda}$, 当取 $M_K = \lambda^K$ (或 μ^K) 时, 有

$$M_{K-1} + 4M_K + M_{K+1} = \lambda^{K-1} + 4\lambda^K + \lambda^{K+1} = \lambda^{K-1}(1 + 4\lambda + \lambda^2) = 0$$

所以 $M'_K = \lambda^K$ 和 $M''_K = \mu^K = 1/\lambda^K$ 是基础解系, 故全部解都可以表示成

$$M_K = c_1 \lambda^K + c_2 \lambda^{-K}$$

由已知条件 $M_0 = M$ 和 $M_n = 0$, 可以解出常数 c_1, c_2 。最后得

$$M_K = M \frac{\lambda^K - \lambda^{2n-K}}{1 - \lambda^{2n}}$$

这就是(4)式。

143. 山坡上下有 A, B 两根木柱, 顶端在同一水平线上, 长度分别为 l_1 和 l_2 , 惯性矩分别为 I_1 和 I_2 (图 143), 弹性模量为 E , 用一不可伸长的绳子以水平力 P 将 A 桩顶端拉紧, 绳的另一端栓在 B 桩顶端, 然后松开, 求绳中张力。若两端距离为 L , 改用拉伸刚度为 $E_c A_c$ 的弹性绳, 结果又如何? (杨贺田, 地质部张家口技工学校。原第 136 题, 1987, No. 1。)

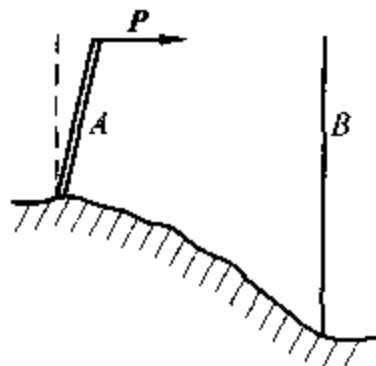


图 143

解: 设绳子右端栓住 B 桩顶端并除去 P 力后绳中的张力为 P_1 , 若绳子不可伸长, 在 P_1 力作用下, 两根悬臂梁顶端的挠度之和应与在 P 力作用下 A 梁顶端的挠度相等。故变形协调条件为

$$\frac{P_1 l_1^3}{3EI_1} + \frac{P_1 l_2^3}{3EI_2} = \frac{Pl_1^3}{3EI_1}$$

由此得

$$P_1 = \frac{I_2 l_1^3}{I_2 l_1^3 + I_1 l_2^3} P$$

对于拉伸刚度为 $E_c A_c$ 的弹性绳, 可设该绳原长为 L_0 (L_0 略小于 L), 用 P 力拉绳的右端至 B 桩顶端时, 有

$$L_0 + \frac{Pl_1^3}{3EI_1} + \frac{PL_0}{E_c A_c} = L \quad (1)$$

当拴住 B 桩顶端并除去 P 力后, 绳中张力变为 P_1 , 此时有

$$L_0 + \frac{P_1 l_1^3}{3EI_1} + \frac{P_1 L_0}{E_c A_c} + \frac{P_1 l_2^3}{3EI_2} = L \quad (2)$$

由(1)、(2)两式易得

$$\frac{Pl_1^3}{3EI_1} + \frac{PL_0}{E_c A_c} = \frac{P_1 l_1^3}{3EI_1} + \frac{P_1 l_2^3}{3EI_2} + \frac{P_1 L_0}{E_c A_c} \quad (3)$$

根据(3)式,并注意到 $L_0 \approx L$,最后得到

$$P_1 = \frac{(E_c A_c l_1^3 + 3EI_1 L) I_2}{E_c A_c (I_2 l_1^3 + I_1 l_2^3) + 3EI_1 I_2 L} P$$

144. A, B, C, D 四根直圆杆,弹性模量均为 E ,杆长均为 L ,惯性矩均为 I ,铅直固定于周长为 a 的正方形 $ABCD$ 的四个角上。现将一周长为 b (略小于 a)、拉伸刚度为 $E_c A_c$ 的弹性柔绳套在四杆顶端(图 144a)。设每段绳的张力相同,试求套绳后各杆顶的挠度和绳子的张力。(杨贺田,地质部张家口技工学校。原第 164 题,1988, No. 3。)

解:分析四杆的俯视图,如图 144b 所示。套圈前,各杆分别固定于正方形 $ABCD$ 各角上。在俯视图中,各杆顶分别与 A, B, C, D 重合。套圈后,各杆顶则对称分布在正方形 $A'B'C'D'$ 各角上。显然,套圈前弹性绳的位置可表示为正方形 $A''B''C''D''$ 。

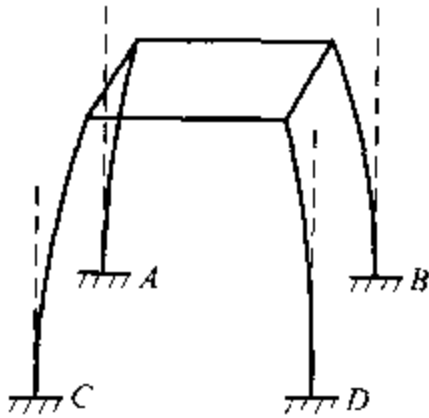


图 144a

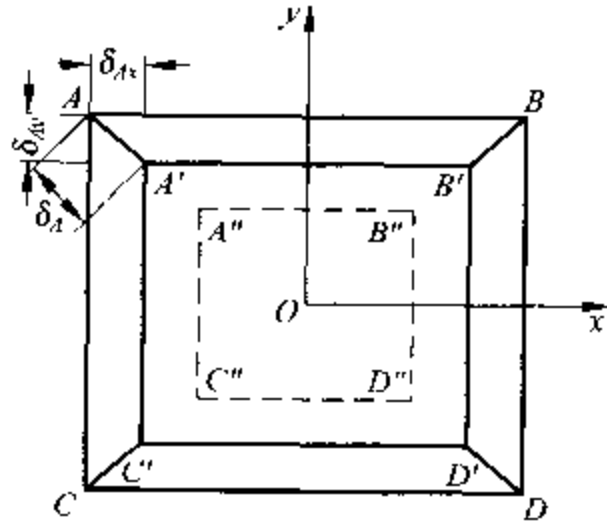


图 144b

为求出套圈后弹性绳圈的受力及变形,可分析绳圈上 $A'B'$ 一段的受力及变形。设绳圈所受拉力为 N , $A''B''$ 段伸长为 Δ ,则

$$\Delta = A'B' - A''B'' = A'B' - \frac{b}{4} = \frac{N}{E_c A_c} \left(\frac{b}{4} \right) \quad (1)$$

由绳圈各段受力均匀可知, $A'C'$ 一段的受力及变形与 $A'B'$ 一段的完全相同。设套圈后 A 杆杆顶的挠度为 δ_A ,在 x, y 坐标轴上的投影分别为 δ_{Ax} 和 δ_{Ay} ,且

$$\delta_{Ax} = \delta_{Ay} = \frac{1}{2} (AB - A'B') = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{4} - A'B' \right) \quad (2)$$

按悬臂梁的挠度公式计算,则

$$\delta_{Ax} = \frac{NL^3}{3EI} \quad (3)$$

将(1),(2),(3)式联立,可解得

$$N = \frac{3(a-b)E_c A_c EI}{3bEI + 8E_c A_c L^3}$$

由图可知

$$\delta_A = AA' = \sqrt{2}\delta_{Ar} = \frac{\sqrt{2}L^3(a+b)E_c A_c}{3bEI + 8E_c A_c L^3}$$

由于对称性,各杆顶的挠度均为 δ_A ,绳圈各截面的拉力均为 N (此即绳子的张力)。

145. 两端固支梁,长为 l ,其上作用有均布载荷 q 。若等间距地设置 n 个中间支座(图 145a 中画出了 4 个),试求各中间支座的约束反力。(蒋持平,北京航空航天大学 508 教研室。原第 263 题,1995, No. 2。)

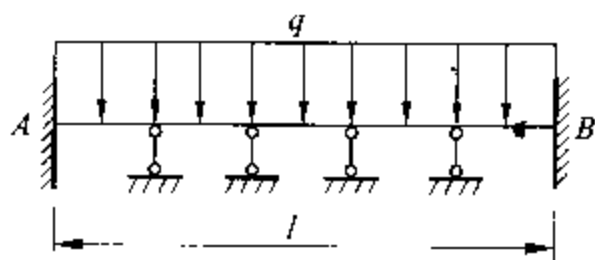


图 145a

解:如图 145b(1)所示,若在梁 AB 中点 C 处有一支座,由对称性易知,梁截面 C 的挠度和转角均为零,即点 C 处支座的约束等价于固定端,如图 145b(2)所示。若在梁 AB 之间有等间距的 3 个支座,见图 145b(3),由对称性易知,支座 C 的约束仍然等价于固定端。

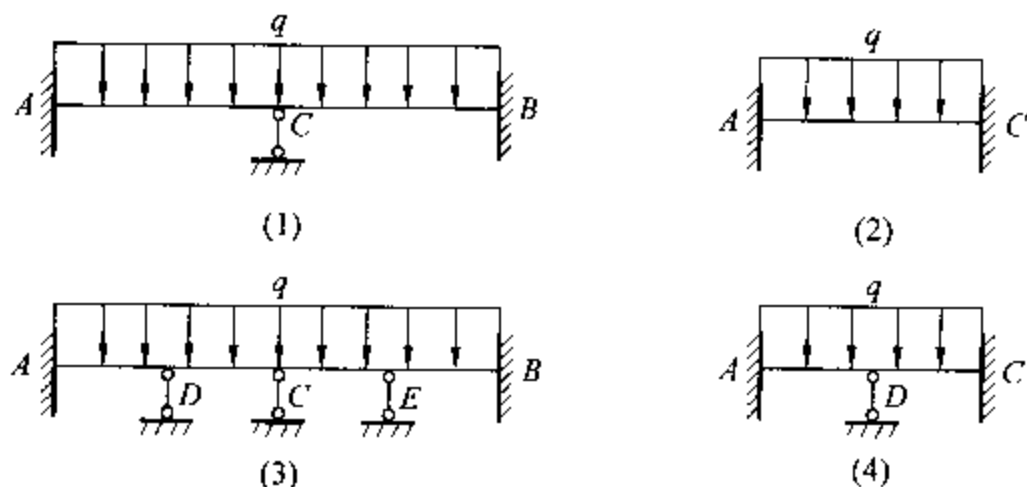


图 145b

将 AC 段单独画出(见图 145b(4)),与图(a)的情况相同,故支座 D 的约束也等价于固定端,同理,支座 E 亦然。依次类推,梁 AB 之间有等间距的 $n = 2^k - 1$ ($k = 1, 2, \dots$) 个中间支座时,各支座均可等价于固定端。此时,在每相邻支座间的梁段都相当于两端固支梁。对于这种均匀受载的等间距多跨梁,在其左边(或右边)去掉一跨或几跨并不会影响其他各跨梁段的受力和变形。于是,对于中间支座为任意正整数的情况,只要是等间距设置的,每个支座均等价于固定端。由此可知,这 n 个支座的约束反力均相等,其值为

$$R = \frac{ql}{n+1}$$

146. 图 146 所示梁受均布载荷 q 作用,已知梁的弯曲刚度 EI 为常值,抗弯截面模量为 W ,梁材料的许用正应力为 $[\sigma]$ 。试求:

(1) 当支座 A 上移的距离 Δ 为何值时对梁的强度最有利 (不计剪切变形的影响)?

(2) 有上述 Δ 时梁的许用载荷 $[q]$ 与支座 A 未上移时梁的许用载荷 $[q_0]$ 相比, 提高了百分之多少? (吴鹤华, 北京航空航天大学, 1982 年本科生试题。原第 265 题, 1995, No. 3。)

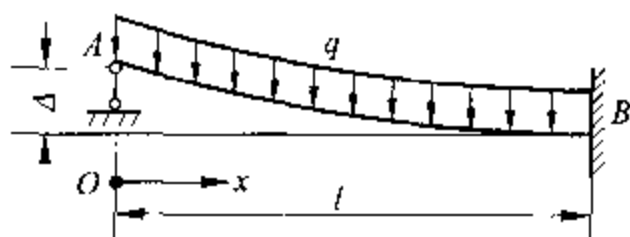


图 146

解: (1) 求最有利的 Δ

设 A 端的支反力为 R_A , 则有

$$\Delta = \frac{R_A l^3}{3EI} - \frac{ql^4}{8EI} \quad (1)$$

或

$$R_A = \frac{3}{8l^3} [8EI\Delta + ql^4]$$

梁内弯矩为

$$M(x) = R_A x - \frac{q}{2} x^2 \quad (2)$$

令

$$\frac{dM(x)}{dx} = 0$$

得 $M(x)$ 取得极值的位置为

$$x_0 = \frac{R_A}{q} \quad (3)$$

将(3)式代入(2)式, 得极值弯矩为

$$M(x_0) = R_A \left(\frac{R_A}{q} \right) - \frac{q}{2} \left(\frac{R_A}{q} \right)^2 = \frac{R_A^2}{2q}$$

该梁固定端 B 的弯矩为

$$M(l) = R_A l - \frac{1}{2} ql^2$$

依据等强度观点, $M(x_0)$ 与 $M(l)$ 的绝对值相等时对梁的强度最为有利, 即

$$\frac{R_A^2}{2q} = \frac{1}{2} ql^2 - R_A l$$

由此解得的有用根为

$$R_A = (\sqrt{2} - 1) ql \quad (4)$$

将(4)式代入(1)式, 得

$$\Delta = \frac{(8\sqrt{2} - 11)ql^4}{24EI}$$

(2) 求有 Δ 时的 $[q]$, 并与 $[q_0]$ 比较

有上述 Δ 时

$$M_{\max} = M(x_0) = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)ql^2$$

由

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma]$$

得

$$[q] = \frac{W[\sigma]}{\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)l^2} = 11.66 \frac{W[\sigma]}{l^2}$$

未上移时

$$R_A = \frac{3ql}{8}$$

$$|M|_{\max} = |M(l)| = \frac{1}{8}ql^2$$

$$[q_0] = \frac{8W[\sigma]}{l^2}$$

二者相比, $[q]$ 比 $[q_0]$ 提高了 45.7%。

147. 平行于地面的十字形刚架, 交点 E 刚接。 E 点处受一铅垂载荷 P 。设材料服从胡克定律, 杆尺寸及弹性系数均为已知(图 147a), 求 E 点位移。(秦寿珪, 北京大学力学系。原第 148 题, 1987, No. 4。)

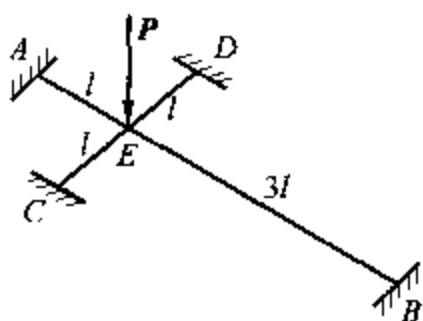


图 147a

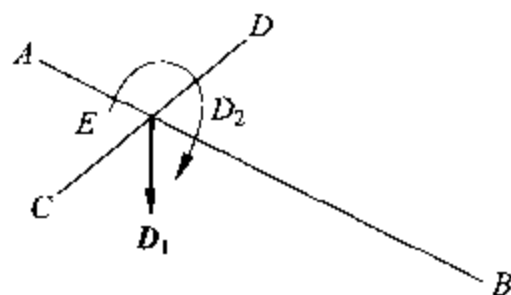


图 147b

解: 由对 AB 的对称性可知, E 点的位移必为铅直向下的位移 D_1 , AB 杆绕直线 CD 的转角 D_2 (图 147b)。刚度系数为

$$s_{11} = 2 \cdot \frac{12EI}{l^3} + \frac{12EI}{l^3} + \frac{12EI}{(3l)^3} = \frac{328EI}{9l^3}$$

$$s_{12} = s_{21} = -\frac{6EI}{l^2} + \frac{6EI}{9l^2} = -\frac{16EI}{3l^2}$$

$$s_{22} = \frac{4EI}{l} + \frac{4EI}{3l} + \frac{2GI_p}{l} = \frac{16EI}{3l} + \frac{2GI_p}{l}$$

有方程

$$\begin{aligned} \frac{328EI}{9l^3}D_1 + \frac{(-16EI)}{3l^2}D_2 &= P \\ -\frac{16EI}{3l^2}D_1 + \left(\frac{16EI}{3l} + \frac{2GI_p}{l}\right)D_2 &= 0 \end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned} D_1 &= \left(1 + \frac{3GI_p}{8EI}\right) \frac{9Pl^3}{280EI + 123GI_p} \\ D_2 &= \frac{9Pl^2}{280EI + 123GI_p} \end{aligned}$$

148. 梁 AB 的 A 端固接在具有抛物线形 $y = ax^2$ 的刚性支面的顶点上 (图 148a), B 端受一集中力 P 作用。在小变形范围内, 随着 P 的不断增大, 讨论 B 端的位移。(秦寿珪, 北京大学力学系。原第 184 题, 1990, No. 2。)

解: 坐标如图 148b 所示, 梁的挠度方程为

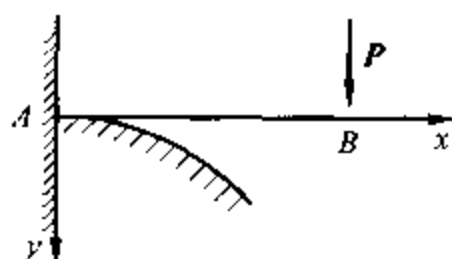


图 148a

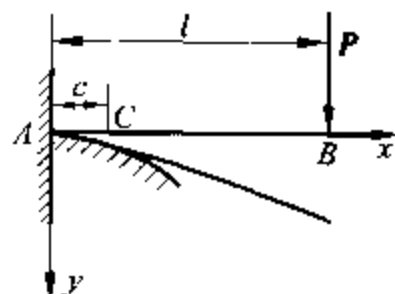


图 148b

$$EIy'' = -M$$

抛物线形刚性支面的曲率为 $y'' = 2a$ 。

(1) 当 $Pl \leq 2aEI$ 时, $y_B = \frac{Pl^3}{3EI}$, $\theta_B = \frac{Pl^2}{2EI}$ 。

(2) 当 $Pl > 2aEI$ 时, 梁上 $x \leq c$ 的 AC 段与抛物线形刚性支面密接 (图 148b)。

$$(l-c)P = 2aEI$$

即

$$c = l - 2aEI/P$$

梁上 C 点的位移为 $y_C = ac^2$, $\theta_C = 2ac$, 从而 B 点的位移为

$$y_B = \frac{P}{3EI}(l-c)^3 + 2ac(l-c) + ac^2$$

$$\theta_B = \frac{P}{2EI}(l-c)^2 + 2ac$$

149. 一根充分长的直钢筋置于刚性地面上, 在距一端为 b 的位置用力往上提, 试问当此端点刚离地面时, 钢筋离地的长度 l 是多少? (图 149a) (张仲毅, 华中理工大学汉口分校力学教研室。原第 289 题, 1996, No. 3。)

解：设钢筋单位长度的重量为 q ，弯曲刚度为 EI ，记上提力为 P ， $l-b=a$ ，取坐标如图 149b 所示。

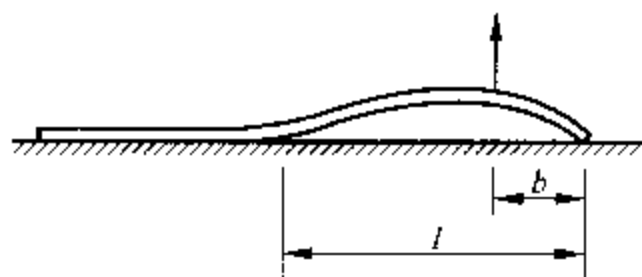


图 149a

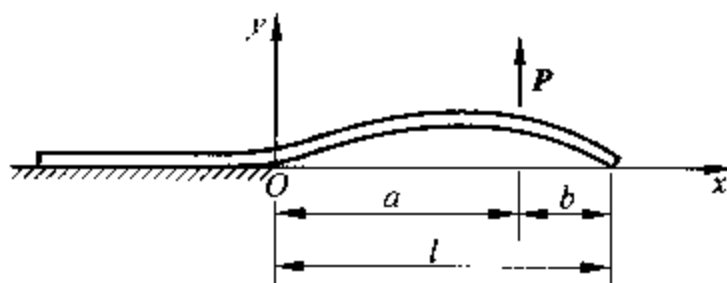


图 149b

由于截面 O 处的曲率半径趋于无限长，故知截面 O 上的弯矩应为 0，即 $M_O=0$ ，由力矩平衡条件可求得

$$P = \frac{ql^2}{2a}$$

再由 y 方向力的平衡条件可求得截面 O 上的剪力

$$Q_O = ql \quad P = \frac{ql(a-b)}{2a}$$

又根据 $y_0=0, \theta_0=0$ 的边界条件，应用初参数法可写出上提钢筋的挠曲线方程为

$$y = \frac{ql(a-b)}{12aEI}x^3 - \frac{q}{24EI}x^4 + \frac{ql^2}{12aEI}\langle x-a \rangle^3$$

其中第三项为奇异函数，其意义可参阅刘鸿文教授主编的《材料力学》(第三版)上册第 266 页。

再根据另一端的边界条件($x=l, y=0$)得

$$2ql^4(a-b) - qal^4 + 2ql^2b^3 = 0$$

化简后求得

$$a = \sqrt{3}b$$

由此得

$$l = a + b = (\sqrt{3} + 1)b$$

150. 悬臂梁 AB 受竖直向下的均布载荷 q 作用，梁长为 l ，弯曲刚度为 EI ，固定端 A 高出水平地面 h ($\ll l$) (图 150a)，假设地面是刚性的。当悬臂梁只是自由端 B 着地时，求均布载荷 q 应满足的条件。(刘柳庚，江西工学院工民建 79 级学生。原第 28 题，1982, No. 2.)

解：当 B 端刚刚着地时，按静定梁处理，可求得(图 150b)

$$q_1 = \frac{8EIh}{l^4}$$

当 $q > q_1$ 时(图 150c),按超静定梁处理。最后,当 q 达到某一 q_2 值时, B 端转角为零(图 150d)。 q 再继续增大,梁的着地部分将不仅是 B 点。

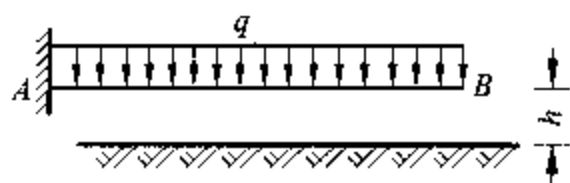


图 150a

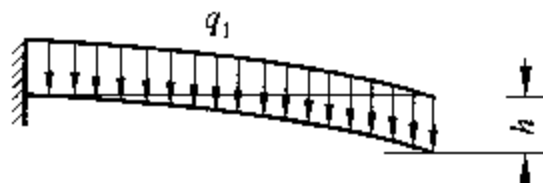


图 150b

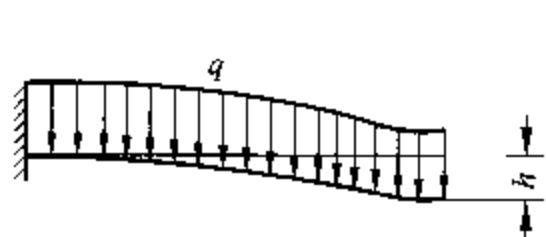


图 150c

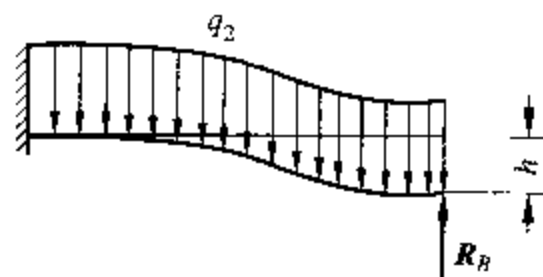


图 150d

选悬臂梁为静定基, R_B 为多余反力,在 q_2 作用下,悬臂梁 B 端的挠度(向下)和转角(顺时针)分别为

$$y_1 = \frac{q_2 l^4}{8EI}, \quad \theta_1 = \frac{q_2 l^3}{6EI}$$

在 R_B 作用下, B 端的挠度和转角分别为

$$y_2 = -\frac{R_B l^3}{3EI}, \quad \theta_2 = -\frac{R_B l^2}{2EI}$$

由变形条件 $y = y_1 + y_2 = h$ 和 $\theta = \theta_1 + \theta_2 = 0$, 得

$$\frac{q_2 l^4}{8EI} - \frac{R_B l^3}{3EI} = h$$

$$\frac{q_2 l^3}{6EI} - \frac{R_B l^2}{2EI} = 0$$

解得

$$q_2 = \frac{72EIh}{l^4}$$

$$R_B = \frac{24EIh}{l^3}$$

挠度曲线如图 150d 所示,拐点在距 B 端 $x = l/3$ 处,所以,只是 B 端着地的条件为

$$\frac{8EIh}{l^4} \leq q \leq \frac{72EIh}{l^4}$$

151. 单位长度重 q 的均质杆 AB 置于刚性水平地面上, 已知在中点 C 处垫一块高 h 的砖时(支承处可简化为一点), 恰使杆的半长离地, 如图 151a(1)。问使端部开始与地面成点接触时(即少垫一块砖就成线接触), 需垫几块同样的砖? 使杆两端离地, 至少需垫同样的砖多少块? (何蕴增, 哈尔滨船舶工程学院材料力学教研室。原第 63 题, 1984, No. 1。)

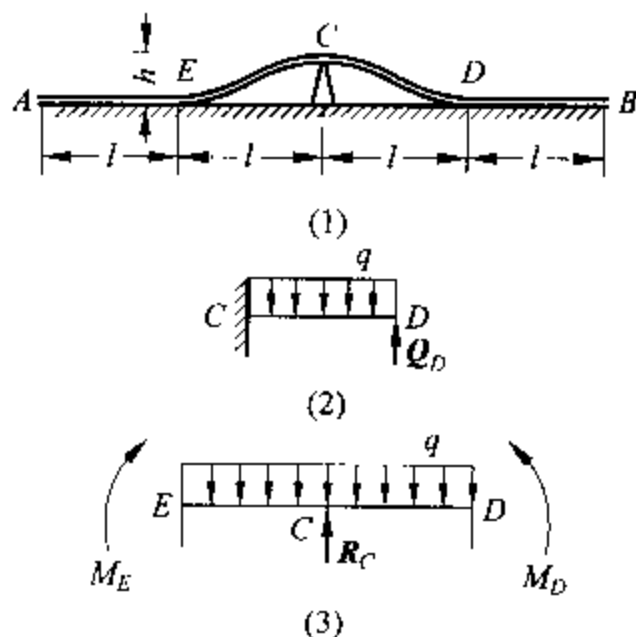


图 151a

解: 由变形连续条件知, 抬起半长时在 D 处杆的曲率为零, 因而弯矩 $M_D = 0$, 同样转角 $\theta_D = 0$ 。因此杆 CD 段可以视同一悬臂梁, 如图 151a(2)。在均布载荷 q 和未知力 Q_D 作用下, 自由端的转角 $\theta_D = 0$ 。据此, 可以求出 Q_D 和 h 。

易知, 在 q 作用下, $\theta'_D = -ql^3/(6EI)$; 在 Q_D 作用下, $\theta''_D = Q_D l^2/(2EI)$, 由 $\theta_D = \theta'_D + \theta''_D = 0$, 得

$$-\frac{ql^3}{6EI} + \frac{Q_D l^2}{2EI} = 0$$

因此

$$Q_D = \frac{ql}{3}$$

从而知砖高

$$h = \frac{ql^4}{8EI} - \frac{Q_D l^3}{3EI} = \frac{ql^4}{72EI} \quad (1)$$

另一种解法: 杆 ED 段可以视同一两端固支的梁, 如图 151a(3)。在均布载荷 q 和未知支承力 R_C 作用下, 使得两固定端的反力矩为 0。据此, 可以求出 h 。

易知, 在 q 作用下, $M'_E = M'_D = ql^2/3$, 在 R_C 作用下, $M''_E = M''_D = R_C l/4$, 由 $M_E = M'_E + M''_E = 0$, 得 $R_C = 4ql/3$ 。在 q 作用下, C 点向下的挠度 $y'_C = ql^4/(24EI)$, 在 R_C 的作用下, C 点向上的挠度 $y''_C = R_C l^3/(24EI) = 4ql^4/(72EI)$ 。

因此

$$h = y''_C - y'_C = \frac{ql^4}{72EI}$$

与 (1) 式相同。

同理, 用 $2l$ 代替 l , 可以求得端部开始与地面成点接触时(这时 $M_A = M_B = 0$, $\theta_A = \theta_B = 0$) C 点的垫高量

$$h_1 = \frac{q(2l)^4}{72EI} = 16h$$

所以需垫 16 块砖。

最后,若要使杆两端离地,其垫高量相当于如图 151b(1)所示悬臂梁自由端的挠度值。或相当于如图 151b(2)所示简支梁在均布载荷 q 和集中力 $R_C = 4ql$ 作用下 C 点的挠度值。

由悬臂梁得

$$y_C = q(2l)^4 / (8EI) = 2ql^4 / (EI)$$

因此

$$h_2 = y_C = 144h$$

可见至少需垫 144 块砖。

152. 如图 152a 所示简支梁 AB , 跨度为 $4a$, 离某刚性水平面的距离为 δ_0 , 当作用于梁上的两个载荷 P 逐渐增加时, 迫使梁的中间段 CD 与平面 $A'B'$ 相接触。已知 δ_0 , EI 及接触段 CD 的长度 a , 求: (1) 载荷 P 的值。(2) 梁 A 端的转角 θ_A 。(黄纪山, 南京化工学院 1983 年硕士研究生试题。原第 57 题, 1983, No. 6。)

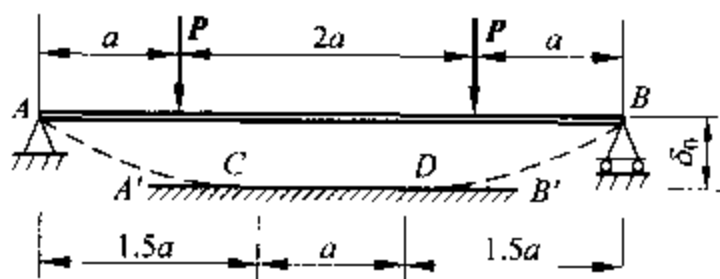


图 152a

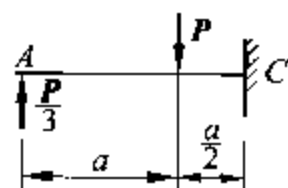


图 152b

解: 根据变形条件, 已知梁在 C 点和 D 点的曲率为零, 曲率半径 $\rho_C = \rho_D$ 为无穷大。由对称性知, 只需考虑 AC 段梁。由弯矩与曲率的关系公式知

$$\frac{1}{\rho_C} = \frac{M_C}{EI} = 0$$

因此截面 C 处的弯矩 $M_C = 0$ 。且截面 C 处的转角 $\theta_C = 0$, 梁的挠度 $y_C = \delta_0$ 。

考虑 AC 段梁的平衡, 由 $M_C = 0$ 的条件, 将 P 与 R_A 对 C 点取矩, 得

$$R_A \times 1.5a - P \times 0.5a = 0$$

所以

$$R_A = \frac{P}{3}$$

方向与 P 相反, 即向上。

这样一来, AC 段梁可以视同图 152b 所示的悬臂梁, 该悬臂梁 C 端固定, A 端向上的挠度为 δ_0 , 需求载荷 P 和 A 端的转角 θ_A 。

利用面矩法或单位载荷法, 得

$$EI\delta_0 = \frac{5}{24}Pa^3$$

$$EI\theta_A = \frac{Pa^2}{4}$$

所以

$$P = \frac{24EI\delta_0}{5a^3} = 4.8EI\delta_0/a^3$$

$$\theta_A = \frac{Pa^2}{4EI} = \frac{1.2\delta_0}{a}$$

153. 图 153 所示高 h , 长 $2l$, 截面弯曲刚度为 EI 的梁, 在刚性压模作用下轴线弯曲成 $w(x) = ax^2$, 试求作用在梁上的模压分布 (设梁为小变形且保持在线弹性范围)。(蒋持平, 北京航空航天大学。原第 329 题, 2001, No. 4。)

解: (1) 按经典梁理论, 梁内弯矩

$$M(x) = EI \frac{d^2}{dx^2} w(x) = 2EIa \quad (1)$$

模压分布

$$q(x) = \frac{d^2}{dx^2} M(x) = 0 \quad (2)$$

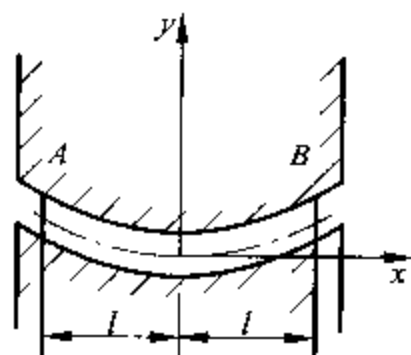


图 153

梁两端边界条件

$$M(\pm l) = 2EIa \quad (3)$$

显然, 经典梁理论求得的模压分布及梁的边界条件都与真实情形不符。

(2) 按剪切变形梁理论

在梁的挠曲微分方程中增加剪切变形效应的附加项, 得

$$\frac{d^2}{dx^2} w(x) = \frac{1}{EI} M(x) - \frac{\alpha}{GA} q(x) \quad (4)$$

式中 G 为切变模量, α 为无量纲系数, 对于矩形截面梁, $\alpha = 1.2$, 圆形截面 $\alpha = 10/9$ 。

注意到

$$\frac{d^2}{dx^2} M(x) = q(x) \quad (5)$$

方程(4)两边微分得

$$\frac{d^2}{dx^2} q(x) - \beta^2 q(x) = 0 \quad (6)$$

式中 $\beta^2 = \frac{GA}{\alpha EI}$, 本问题边界条件为 $M(\pm l) = 0$, 于是方程(6)的解为

$$q(x) = -\frac{2GAa}{\alpha} \cdot \frac{\operatorname{ch}\beta x}{\operatorname{ch}\beta l}$$
$$M(x) = 2EIa \left(1 - \frac{\operatorname{ch}\beta x}{\operatorname{ch}\beta l} \right)$$

在梁的两端压模给予梁的集中反力为

$$F_A = F_B = 2a\sqrt{\frac{GA EI}{\alpha}} \operatorname{th}\beta l$$

(3) 讨论

对于各向同性材料, 取泊松比 $\mu = 0.3, l = 10h$, 对于离梁端点的不同距离 l , 模压与弯矩的数值结果见表 1。

表 1 $q(x)$ 与 $M(x)$ 随至边界距离 d 的变化

d	0	$0.5h$	h	$2h$	$10h$	乘子
$q(x)$	1	0.375	0.141	0.020	6.097×10^{-9}	$-\frac{2GhA}{\alpha}$
$M(x)$	0	0.625	0.859	0.980	$1 - 6.097 \times 10^{-9}$	$2EIa$

根据表 1 可见, 当与梁端点的距离大于梁高的两倍时, 经典理论已有足够的精度。在梁端点附近, 应考虑剪切变形效应。

根据考虑剪切变形的梁的理论, 在梁的端点, 梁受到集中反力, 压模具有铰支端作用。端点近邻, 需要更精确的力学分析。

第 7 章

能 量 法

154. 试用图 154a 所示线弹性 3 杆对称结构证明以下结论:

(1) 若内力满足平衡条件, 则功能原理等价于几何方程;

(2) 若变形满足几何方程, 则功能原理等价于平衡方程。(吴国勋, 北京航空航天大学。原第 266 题, 1995, No. 3。)

证明(1): 设 A 点的铅垂位移为 δ , 由功能原理可知

$$\frac{1}{2} P \delta = \frac{1}{2} (N_1 \Delta l_1 + N_2 \Delta l_2 + N_3 \Delta l_3) \quad (1)$$

由平衡条件和对称条件, 有

$$N_1 = N_2, \quad \Delta l_1 = \Delta l_2 \quad (2)$$

$$2N_1 \cos \alpha + N_3 = P \quad (3)$$

将式(3)代入式(1), 注意到 $\Delta l_3 = \delta$, 可得

$$\delta \cos \alpha = \Delta l_1 \quad (4)$$

由图 154b 可知(4)式正是节点 A 的几何方程。

证明(2): 由对称性可知

$$l_1 = l_2, \quad E_1 A_1 = E_2 A_2, \quad \Delta l_1 = \Delta l_2, \quad N_1 = N_2$$

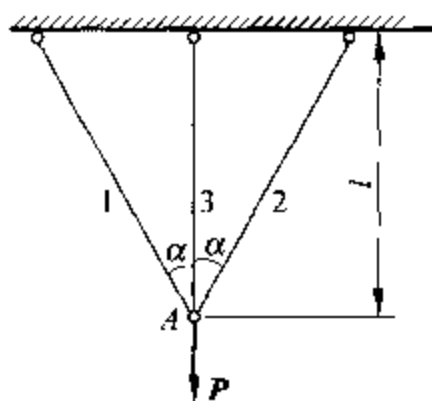


图 154a

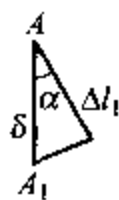


图 154b

注意到 $\Delta l_3 = \delta$, 将式(4)代入式(1), 则有

$$P = 2N_1 \cos \alpha + N_3 \quad (5)$$

上式恰为平衡方程(3)。

由上述证明可知功能原理能求位移的原因。

155. 等截面圆直杆, 已知杆材料弹性常数为 E, μ , 在杆中央截面沿径向作用均布压力 q , 如图 155 所示。求杆沿 x 方向的伸长 Δl 。(陆才善, 西安交大材力教研室。原第 196 题, 1990, No. 5。)

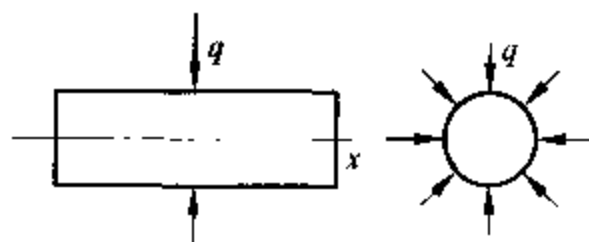


图 155

解: 在杆的两端假想地加轴向拉力 P 。由于 P 引起的径向应变(也就是 q 作用截面直径 d 的应变)为

$$\frac{\Delta d}{d} = \mu \frac{4P}{\pi d^2 E}$$

由功的互等定理, 得

$$P \cdot \Delta l = \int_0^{\pi d} q ds (\Delta d/2) = (q\pi d/2) \Delta d$$

由以上两式求得在 q 作用下杆沿轴向的伸长为

$$\Delta l = 2\mu q/E$$

156. 利用悬臂梁(图 156a)在集中力作用下的挠度方程(挠度以向下为正)

$$y_1(x) = \begin{cases} \frac{Px^2}{6EI}(3a-x) & (0 \leq x \leq a) \\ \frac{Pa^2}{6EI}(3x-a) & (a \leq x \leq l) \end{cases}$$

求超静定梁(图 156b)的挠曲线方程。(杨宗孟, 内蒙古工学院。原第 200 题, 1990, No. 6。)

解: 设所求的超静定梁(图 156 c(2)) ξ 截面处的挠度为 $y_2(\xi)$, 该梁受均布载荷 q 和 B 支座反力 X_B (待定)的作用。为求 $y_2(\xi)$, 在图 156c(1)所示梁相应的 ξ 截面处施加一集中力 P , 梁的挠度为

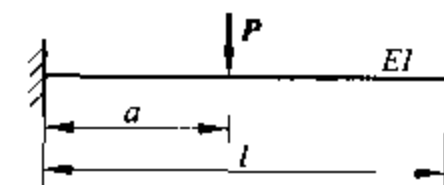


图 156a

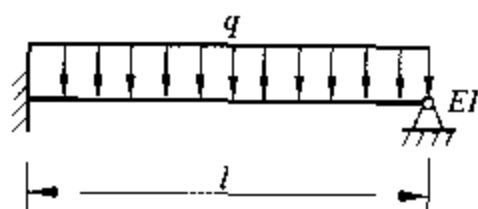
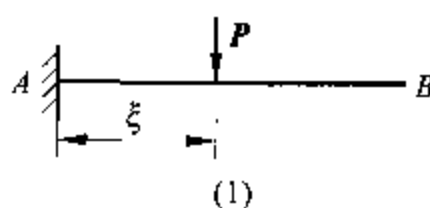
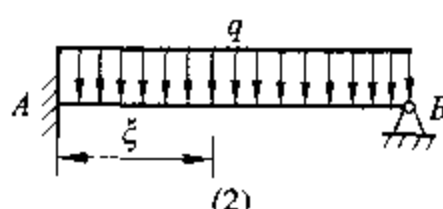


图 156b



(1)



(2)

图 156c

$$y_1(x) = \begin{cases} Px^2(3\xi - x)/(6EI) & (0 \leq x \leq \xi) \\ P\xi^2(3x - \xi)/(6EI) & (\xi \leq x \leq l) \end{cases}$$

根据功的互等定理有

$$\begin{aligned} P \cdot y_2(\xi) &= \int_0^\xi \frac{Px^2}{6EI} (3\xi - x) q dx + \int_\xi^l \frac{P\xi^2}{6EI} (3x - \xi) q dx - \frac{P\xi^2}{6EI} (3l - \xi) X_B \\ &= \frac{Pq}{6EI} \left[\frac{1}{4} \xi^4 - l\xi^3 + \frac{3}{2} l^2 \xi^2 \right] - \frac{P}{6EI} \xi^2 (3l - \xi) X_B \end{aligned}$$

利用梁 B 端的位移条件 $y_2(l) = 0$, 确定 X_B 。令上式中 $\xi = l$, 得 $X_B = 3ql/8$ 。最后得

$$y_2(\xi) = \frac{q}{6EI} \left(\frac{1}{4} \xi^4 - \frac{5}{8} l \xi^3 + \frac{3}{8} l^2 \xi^2 \right)$$

157. 两等截面直杆, 长度相同, 材料、截面尺寸、约束情况各异。试以梁的弯曲变形为例, 证明 $K_2 A_{21} = K_1 A_{12}$ 。其中 K_1 、 K_2 各为第一杆和第二杆的与变形有关的刚度; A_{21} 为第一杆上的载荷在第二杆的相应位移上做的功; A_{12} 为第二杆上的载荷在第一杆的相应位移上做的功 (图 157a)。(杨宗孟, 内蒙古工学院。原第 220 题, 1992, No. 3。)

解: 记第一杆上的载荷在第二杆的位移上做的功为 A_{21} (见图 157b), 则

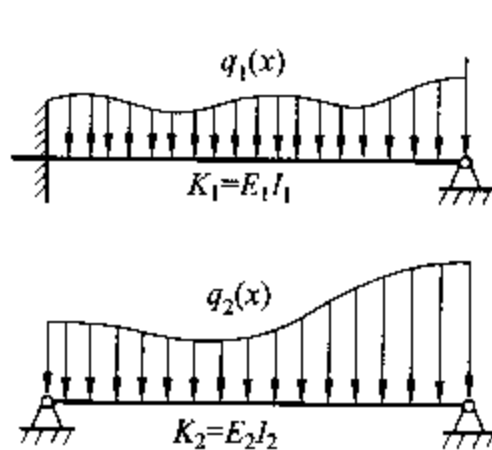


图 157a

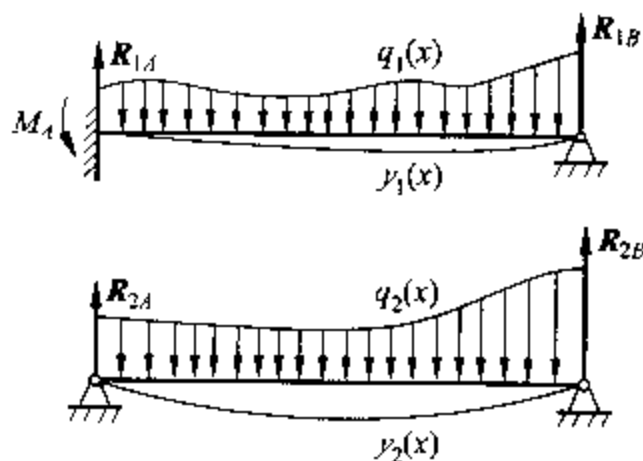


图 157b

$$A_{21} = \int_0^l y_2(x) q_1(x) dx - M_A y_2'(0)$$

因

$$q_1(x) = d^2 M_1(x) / dx^2$$

故

$$\begin{aligned} A_{21} &= \int_0^l y_2(x) (d^2 M_1(x) / dx^2) dx - M_A y_2'(0) \\ &= \int_0^l y_2(x) d(dM_1(x) / dx) - M_A y_2'(0) \\ &= [y_2(x) (dM_1 / dx)]_0^l - \int_0^l (dM_1 / dx) dy_2(x) - M_A y_2'(0) \end{aligned}$$

把 $y_2(0)=0, y_2(l)=0, dy_2(x)=(dy_2/dx)dx$ 代入上式,

$$\begin{aligned} A_{21} &= - \int_0^l (dM_1/dx)(dy_2/dx)dx - M_A y_2'(0) \\ &= - \int_0^l (dy_2/dx)dM_1 - M_A y_2'(0) \\ &= - [(dy_2/dx)M_1]_0^l + \int_0^l M_1 d(dy_2/dx) - M_A y_2'(0) \end{aligned}$$

由于

$$M_1(l)=0, \quad M_1(0)=M_A$$

所以

$$A_{21} = M_A y_2'(0) + \int_0^l M_1 (d^2 y_2 / dx^2) dx - M_A y_2'(0) = \int_0^l M_1 (M_2 / EI_2) dx$$

同理可证

$$A_{12} = \int_0^l M_2 (M_1 / EI_1) dx$$

因为 EI_1, EI_2 均为常数, 所以 $EI_2 A_{21} = EI_1 A_{12}$ 。

类似地, 可以证明等直杆在拉伸、扭转时分别有: $EA_2 A_{21} = EA_1 A_{12}; GI_{2p} A_{21} = GI_{1p} A_{12}$ 。对于集中载荷, 可展成无穷级数形式, 每一项代表一分布载荷。所以, 基于分布载荷的证明亦适用于集中载荷情形。一般地有

$$K_2 A_{21} = K_1 A_{12}$$

158. 一半径为 R 、弯曲刚度为 EI 、质量为 m 的均质半圆环, 如果把它的开口向上, 静止地放在刚性的水平地面上。问它的重心距地面的高度为多少? (高百争, 焦作矿业学院机电系机械化 78-3 班。原第 30 题, 1982, No. 3。)

解: 变形前, 半圆环的重心距地面的高度是 $(\pi-2)R/\pi$, 由于重力作用而引起变形, 重心下降。设重心下降的距离为 e , 圆环放到地面上后, 因重力作用而使其重心逐渐下降, 最后达到平衡位置。在这个过程中, 重力对圆环所作的功为

$$W = \frac{1}{2} mge$$

这个值, 就是圆环势能减少之半。对于线弹性体, 外力所作的功应等于它的变形能。记变形能为 U , 则有

$$U = W = \frac{1}{2} mge$$

$$e = \frac{2U}{mg}$$

所以, 变形后重心距地面的高度为

$$h = \frac{R}{\pi}(\pi-2) - \frac{2U}{mg}$$

现在,我们只要求出 U 就可以了。设环的线密度为 ρ , 根据对称性, 只需研究四分之一圆环即可(如图 158 所示), 它的变形能的两倍, 就是半圆环的变形能。

对应于角度 θ 处的弯矩为

$$\begin{aligned} M(\theta) &= \int_0^\theta R^2 (\cos\alpha - \cos\theta) \rho g d\alpha \\ &= R^2 \rho g (\sin\theta - \theta \cos\theta) \end{aligned}$$

半圆环的变形能为

$$U = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M^2(\theta) R}{2EI} d\theta = \frac{R^5 \rho^2 g^2}{EI} \left(\frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8} \right)$$

把 $m = \rho R \pi$ 代入上式, 然后再代入(1)式中, 即得重心距地面的高度为

$$h = \frac{R}{\pi} (\pi - 2) - \frac{R^4 m g}{EI} \left(\frac{\pi}{24} - \frac{1}{4\pi} \right)$$

本题这种解法是比较简单的, 如果去求半圆环在重力作用下变形后的曲线表达式, 然后再按此表达式去求出重心, 将十分繁琐。

159. 均质薄圆盘半径为 R , 厚度为 h , 材料的弹性模量为 E , 泊松比为 μ , 密度为 ρ , 以匀角速度 ω 绕通过圆盘中心且垂直于圆盘的轴转动。试利用功的互等定理求动应力下半径 R 的改变量。(蒋持平, 北京航空航天大学。原第 292 题, 1996, No. 4)

解: 如图 159a 所示, 由达朗贝尔原理, 圆盘受沿径向的分布惯性力作用, 在微面积为 dA 的小块上的惯性力为

$$dP = dm \cdot a_n = \rho h r d\theta dr \cdot \omega^2 r \quad (1)$$

考察圆盘外缘受另一大小为 q 的均布力系的情形(图 159b)。显然这时圆盘内部受均匀拉伸, 径向应力 $\sigma_r = q$, 环向应力 $\sigma_\theta = q$, 轴向应力 $\sigma_z = 0$ 。根据广义胡克定律, 径向应变为

$$\epsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu(\sigma_\theta + \sigma_z)] = \frac{1}{E} (1 - \mu) q$$

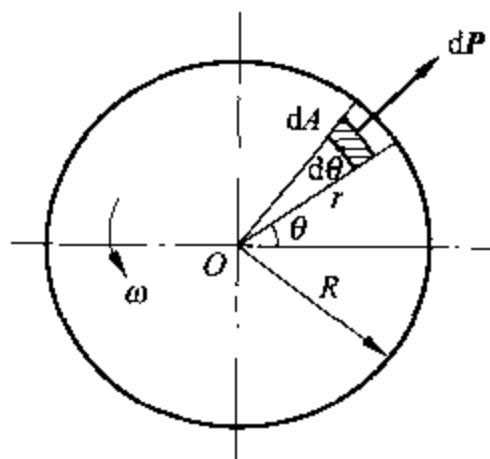


图 159a

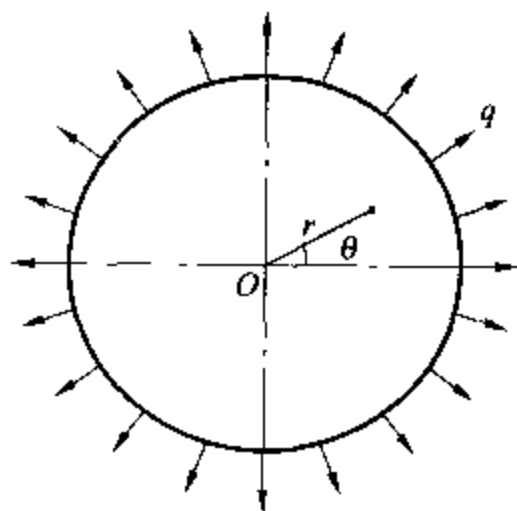


图 159b

任意一点相对于圆心的径向位移为

$$u_r = \varepsilon_r r = \frac{1}{E}(1-\mu)qr \quad (2)$$

设图 159a 所示圆盘半径改变量为 ΔR , 根据功的互等定理, 有

$$2\pi R h q \cdot \Delta R = \int_A dP \cdot u_r \quad (3)$$

将式(1)和式(2)代入式(3), 得

$$2\pi R h q \cdot \Delta R = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{E}(1-\mu)qh\rho\omega^2 r^3 dr d\theta$$

所以

$$\Delta R = \frac{1-\mu}{4E}\rho\omega^2 R^3$$

160. 为消除图 160a 所示结构的装配应力, 拆除铰链支座 A。这时 A, B 两点分别垂直下移 δ_A 和 δ_B 。在结构 A 点的新位置(无装配应力位置)重新安装铰链支座后, 在 B 点作用一向下的载荷 P, 求新装铰链支座 A 处的约束反力。(蒋持平, 第三届周培源全国大学生力学竞赛复试试题。)

解: 解除约束 A 并代以约束反力。图 160b(1)为存在装配应力状态。在 R_A^* 作用下, A, B 两点分别发生向上位移。图(2)为无装配应力状态。在 B 点受外力 P 作用, 在 A 点位移为零, 约束反力为 R_A 。根据功的互等定理

$$R_A^* \cdot 0 = R_A \delta_A - P \delta_B$$

故

$$R_A = P \frac{\delta_B}{\delta_A}$$

161. 设密圈螺旋弹簧的平均半径 R, 圈数 n, 簧丝的直径 d 及材料的弹性模量 E 均为已知。当弹簧的两端在垂直于弹簧轴线的平面内受到一对大小相等、方向相反的力偶 M 的作用时(图 161), 弹簧圈数的增量是多少?(林建兴, 浙江大学 1982 年硕士研究生考题。原第 68 题, 1984, No. 2。)

解: 当密圈螺旋弹簧两端受到一对大小相等、方向相反的力偶 M 的作用而扭转时, 簧丝可看成是受纯弯曲的小曲率曲杆, 弯矩为常数 M, 在微段 $ds = R d\theta$ 上两端相对转角为

$$d\varphi = \frac{M ds}{EI}$$

整个弹簧转角的增量为

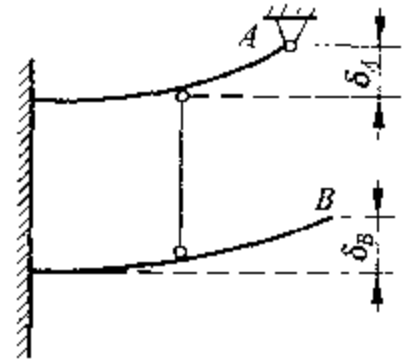
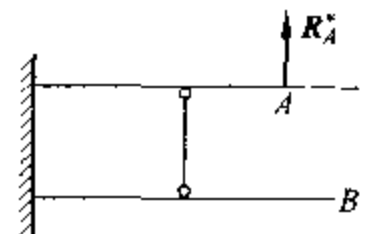
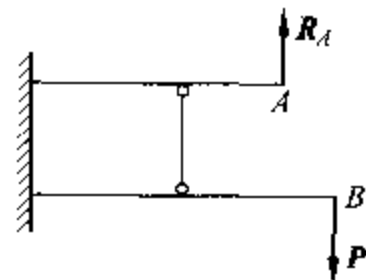


图 160a



(1)



(2)

图 160b

$$\varphi = \int_0^{2n\pi} \frac{MR d\theta}{EI} = \frac{MR}{EI} 2n\pi$$

或用能量方法, 在一对力偶的作用下, 应变能为

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2 ds}{EI} = \frac{1}{2} \int_0^{2n\pi} \frac{M^2 R d\theta}{EI} \\ &= \frac{1}{2} \frac{M^2 R}{EI} 2n\pi \end{aligned}$$

弹簧两端的相对转角为

$$\varphi = \frac{\partial U}{\partial M} = \frac{MR}{EI} 2n\pi$$

圆截面梁的惯性矩 $I = \pi d^4 / 64$, 于是弹簧圈数的增量是

$$\Delta n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{64MRn}{\pi E d^4}$$

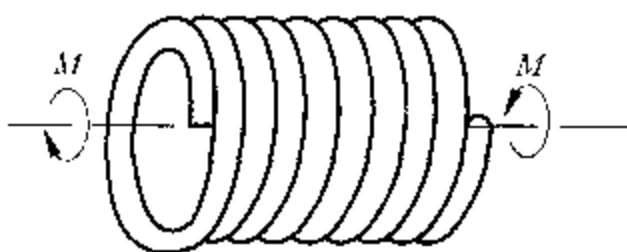


图 161

162. 一长为 l , 弯曲刚度为 EI 的简支梁 AB , 若在其两端作用大小相等、方向相反的力偶 M (见图 162a), 则梁的变形能为 $U = M^2 l / (2EI)$ 。根据卡氏第二定理可得 A 端的转角为 $\theta_A = \partial U / \partial M = Ml / (EI)$, 但这个结论是错误的, 问错在何处? (高百争, 河南省煤矿基本建设公司。原第 89 题, 1985, No. 2。)

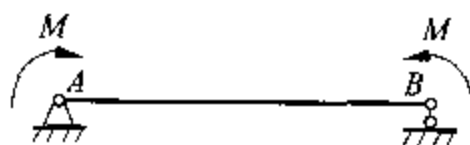


图 162a

解: 这是在卡氏第二定理应用中, 把不同截面作用的相同载荷并项造成的错误。在卡氏第二定理中, 弹性体的变形能被表示成各外力的多元函数, 而作用在不同截面的各种外力 (如集中力、力偶) 是各自独立的自变量, 因此, 不能“合并”。题中简支梁上作用的两个力偶, 作用截面不同, 是互相独立的变量, 不能看到它们数值都是 M 就把它“合并”。正确的解法是设两个力偶分别为 M_A 和 M_B (图 162b), 变形能表为 $U = f(M_A, M_B)$, 再用 $\theta_A = \frac{\partial U}{\partial M_A}$, 令 $M_A = M_B = M$ 就可得出 θ_A 的正确值。



图 162b

由静力平衡条件得

$$R_A = \frac{M_B - M_A}{l}$$

则

$$M(x) = M_A + (M_B - M_A) x / l$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2 dx}{EI}$$

$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial M_A} = \int_0^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_A} dx = \int_0^l \frac{1}{EI} [M_A + (M_B - M_A)x/l](1 - x/l) dx$$

令 $M_A = M_B = M$, 得

$$\theta_A = \frac{M}{EI} \int_0^l (1 - x/l) dx = \frac{Ml}{2EI}$$

163. 相同的三只筷子(限等直杆), 每只筷子的一端搁在桌面上, 另一端搁在另一只筷子的中点处。用手指将一个交叉点向下摁。求证它的位移是其他交叉点的位移的一倍半。(朱照宣, 北京大学力学系。原第2题, 1980, No. 3。)

解法1: 设手指下摁交叉点1的位移为 x , 其余两个交叉点2、3的位移分别为 y, z (图163a), 这三个交叉点处筷子间相互作用力相应地是 X, Y, Z , 设下摁的力为 P 。

由筷子1、2的平衡条件得

$$X = 2Y, \quad Y = -2Z$$

由筷子3的平衡条件得

$$2(P - X) + Z = 0$$

解之, 得

$$X = \frac{8}{7}P, \quad Y = \frac{4}{7}P, \quad Z = \frac{2}{7}P \quad (1)$$

单位力作用在简支筷子中点时, 由弯曲理论得该点的位移为 $\Delta = l^3/(48EI)$, 三个交叉点间的位移协调条件为

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{1}{2}x + Z\Delta \\ y &= \frac{1}{2}z + Y\Delta \\ x &= \frac{1}{2}y + X\Delta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

解方程组(2), 得

$$x = \frac{12}{7}P\Delta = \frac{Pl^3}{28EI}, \quad y = \frac{8}{7}P\Delta = \frac{Pl^3}{42EI}, \quad z = \frac{8}{7}P\Delta = \frac{Pl^3}{42EI}$$

从而 $x : y : z = 3 : 2 : 2$ 。

解法2: 用单位载荷法。由(1)式再考虑各杆平衡(图163b), 知 $N_A = 4P/7$, $N_B = 2P/7$, $N_C = P/7$, 因此A-1段, B-2段, C-3段的弯矩分别是

$$M_1(u) = 4Pu/7, \quad M_2(u) = 2Pu/7, \quad M_3(u) = Pu/7$$

设想在1点作用一向下的单位虚载荷, 引起上述三段的虚弯矩分别是

$$M_{11}^0(u) = 4u/7, \quad M_{12}^0(u) = 2u/7, \quad M_{13}^0(u) = u/7$$

由单位载荷法公式知, 1点的位移为

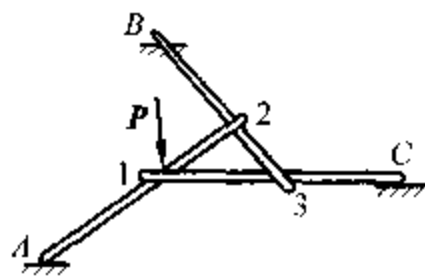


图 163a



图 163b

$$\begin{aligned}
 x &= 2 \left[\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_1(u)M_{11}^0(u)}{EI} du + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_2(u)M_{12}^0(u)}{EI} du + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_3(u)M_{13}^0(u)}{EI} du \right] \\
 &= \frac{Pl^3}{28EI}
 \end{aligned}$$

设想在 2 点作用一向下的单位虚载荷,引起上述三段的虚弯矩分别是

$$M_{21}^0(u) = u/7, \quad M_{22}^0(u) = 4u/7, \quad M_{23}^0(u) = 2u/7$$

2 点的位移为

$$\begin{aligned}
 y &= 2 \left[\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_1(u)M_{21}^0(u)}{EI} du + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_2(u)M_{22}^0(u)}{EI} du + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_3(u)M_{23}^0(u)}{EI} du \right] \\
 &= \frac{Pl^3}{42EI}
 \end{aligned}$$

同样,在 3 点作用一向下的单位虚载荷,可以计算出 3 点的位移 $z = y$ 。从而 $x : y : z = 3 : 2 : 2$ 。

164. 长为 l 的直杆,一端固定,另一端附有质量为 m 的重物(图 164a)。已知杆的弯曲刚度为 EI ,其质量可以忽略,杆连同固定支座以匀角速度 ω 绕杆轴旋转,求系统失稳的临界角速度 ω_{cr} 。(荣起国,北京大学力学系。原第 204 题,1991, No. 1。)

解:选取以角速度 ω 旋转的相对参考系(图 164b),在此参考系中重物所受的水平力有:惯性离心力 $mx\omega^2$,弹性恢复力 $-3xEI/l^3$,所以系统的势能(不计重力势能)为

$$V = - \int_0^x (mx\omega^2 - 3xEI/l^3) dx = \left(\frac{3EI}{ml^3} - \omega^2 \right) \frac{mx^2}{2}$$

求导,有

$$V' = \left(\frac{3EI}{ml^3} - \omega^2 \right) mx。$$

由 $V' = 0$ 得平衡位置为 $x = 0$, 因 $V'' = m \left(\frac{3EI}{ml^3} - \omega^2 \right)$, 所以当 $\omega < \sqrt{3EI/(ml^3)}$ 时, $V'' > 0$, $x = 0$ 是稳定的平衡位置。当 $\omega > \sqrt{3EI/(ml^3)}$ 时, $V'' < 0$, 系统失稳。故临界转速为

$$\omega_{cr} = \sqrt{\frac{3EI}{ml^3}}$$

165. 如图 165a 所示薄圆环,质量为 m , 平均半径为 R , 横截面为矩形 ($t \ll R$), A 处被切开。材料的应力应变关系为 $\sigma = B\sqrt{\epsilon}$, 其中 B 为常数, 此关系式对于拉伸和压

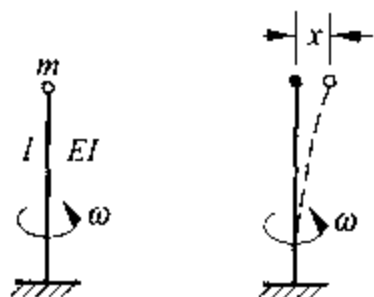


图 164a

图 164b

缩都相同。设变形后平面假设仍然成立。当圆环绕圆心 O 在其平面内以匀角速度 ω 转动时,求切口 A 处的相对位移(不计重力影响)。(季平,安徽蚌埠粮食学校。原第52题,1983, No. 4。)

解法1:应用单位载荷法。由对称性,可只考虑半个圆环(图165b)。由惯性离心力引起的圆环内截面 φ 的弯矩为

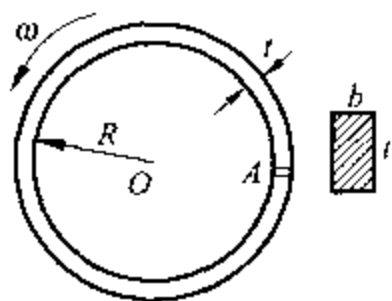


图 165a

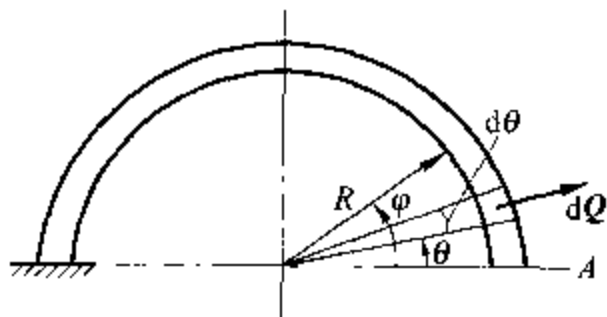


图 165b

$$M = \int_0^\varphi R \sin(\varphi - \theta) dQ = \int_0^\varphi R \sin(\varphi - \theta) \frac{m}{2\pi R} R^2 \omega^2 d\theta = \frac{m\omega^2}{2\pi} R^3 (1 - \cos\varphi)$$

因为是薄圆环,且平面假设仍然成立,故可以应用直梁的分析方法,有

$$\epsilon = \frac{y}{\rho}$$

中性轴 Oz 通过横截面形心, ϵ 为横截面上至中性轴距离为 y 的点的正应变, $1/\rho$ 为薄圆环曲率增量。设

$$y = \frac{t}{2} \text{ 时, } \epsilon = \epsilon_1$$

于是

$$M = \int_A \sigma y dA = 2 \int_0^{\frac{t}{2}} \sigma y b dy = 2bB\rho^2 \int_0^{\epsilon_1} \epsilon^{3/2} d\epsilon$$

将 $\epsilon_1 = t/(2\rho)$ 代入,得

$$M = bBt^{\frac{5}{2}} / 5 \sqrt{2\rho}$$

所以

$$\frac{1}{\rho} = \frac{50M^2}{b^2 B^2 t^5} = \frac{50}{b^2 B^2 t^5} \left(\frac{m\omega^2 R^2}{2\pi} \right)^2 (1 - \cos\varphi)^2$$

由单位载荷法 $\delta_1 = \int M_u d\theta$, 其中 M_u 是由相应于位移 δ_1 的单位载荷使结构产生的虚弯矩

$$M_u = R(1 - \cos\varphi)$$

又

$$d\theta = ds/\rho = R d\varphi/\rho$$

所以 A 处的相对位移

$$\delta = 2 \int_0^\pi \frac{50R^6 m^2 \omega^4}{b^2 B^2 t^5 (2\pi)^2} (1 - \cos\varphi)^3 d\varphi = \frac{125R^6 m^2 \omega^4}{2\pi b^2 B^2 t^5}$$

解法 2: 应用 Grotti-Engesser 定理, 即余能原理。

$$\delta_1 = \frac{\partial U_c}{\partial P_1}$$

考虑半圆环如图 165c, 为求半圆环 A 处的竖直向上的位移 δ_A , 可在 A 点加一力 P , 于是, 圆环截面 φ 的弯矩为

$$\begin{aligned} M &= PR(1 - \cos\varphi) + \int_0^\varphi R \sin(\varphi - \theta) \frac{m\omega^2}{2\pi} R d\theta \\ &= R \left(P + \frac{m\omega^2}{2\pi} R \right) (1 - \cos\varphi) \end{aligned} \quad (1)$$



图 165c

由解法 1 中求得 $\frac{1}{\rho} = \frac{50M^2}{b^2 B^2 t^5}$, 以 M 表达式(1)代入后得

$$\frac{1}{\rho} = \frac{50R^2}{b^2 B^2 t^5} \left(P + \frac{m\omega^2}{2\pi} R \right)^2 (1 - \cos\varphi)^2 \quad (2)$$

由已知条件, 可以略去轴力和剪力的影响, 得

$$\sigma = R \sqrt{\epsilon} = B \sqrt{\frac{y}{\rho}} \quad (3)$$

将 $\frac{1}{\rho}$ 的表达式(2)代入(3), 得

$$\sigma = \frac{5\sqrt{2}R}{bt^{5/2}} \left(P + \frac{m\omega^2}{2\pi} R \right) (1 - \cos\varphi) y^{1/2}$$

单位体积内的余能为

$$u_c = \int_0^\sigma \epsilon d\sigma = \int_0^\sigma \frac{\sigma^2}{B^2} d\sigma = \frac{\sigma^3}{3B^2} = \frac{250\sqrt{2}R^3}{3B^2 b^4 t^{15/2}} \left(P + \frac{m\omega^2}{2\pi} R \right)^3 (1 - \cos\varphi)^3 y^{3/2} \quad (4)$$

半个圆环的余能为

$$U_c = \iiint_V u_c dV = \int_0^\pi \left[2 \int_0^{t/2} u_c b dy \right] R d\varphi$$

将(4)式代入并求出积分值, 得

$$U_c = \frac{125\pi R^4}{3B^2 b^2 t^5} \left(P + \frac{m\omega^2}{2\pi} R \right)^4$$

因此

$$\delta_A = \frac{\partial U_c}{\partial P} \bigg|_{P=0} = \frac{125\pi R^4}{B^2 b^2 t^5} \left(\frac{m\omega''}{2\pi} R \right)^2$$

由对称性可知,整个圆环在 A 处的相对位移为 δ_A 的二倍,即得与解法 1 同样的结果:

$$\delta = \frac{125R^6 m^2 \omega^4}{2\pi b^2 B^2 t^5}$$

第 8 章

超 静 定

166. 有一存货架,总长为 $11a$,用两块相同的长为 $6a$ 的等截面矩形板放置在 A 、 B 、 C 、 D 四个支架上构成,如图 166a(1)所示。货重视为均布载荷。为提高承载能力,提出如图 166a(2)、(3)所示的结构(螺栓变形不计,且与板材接触牢固)。试比较三种结构正应力强度的高低。(张德凤,河北机电学院材料力学教研室。原第 168 题,1989, No. 4。)

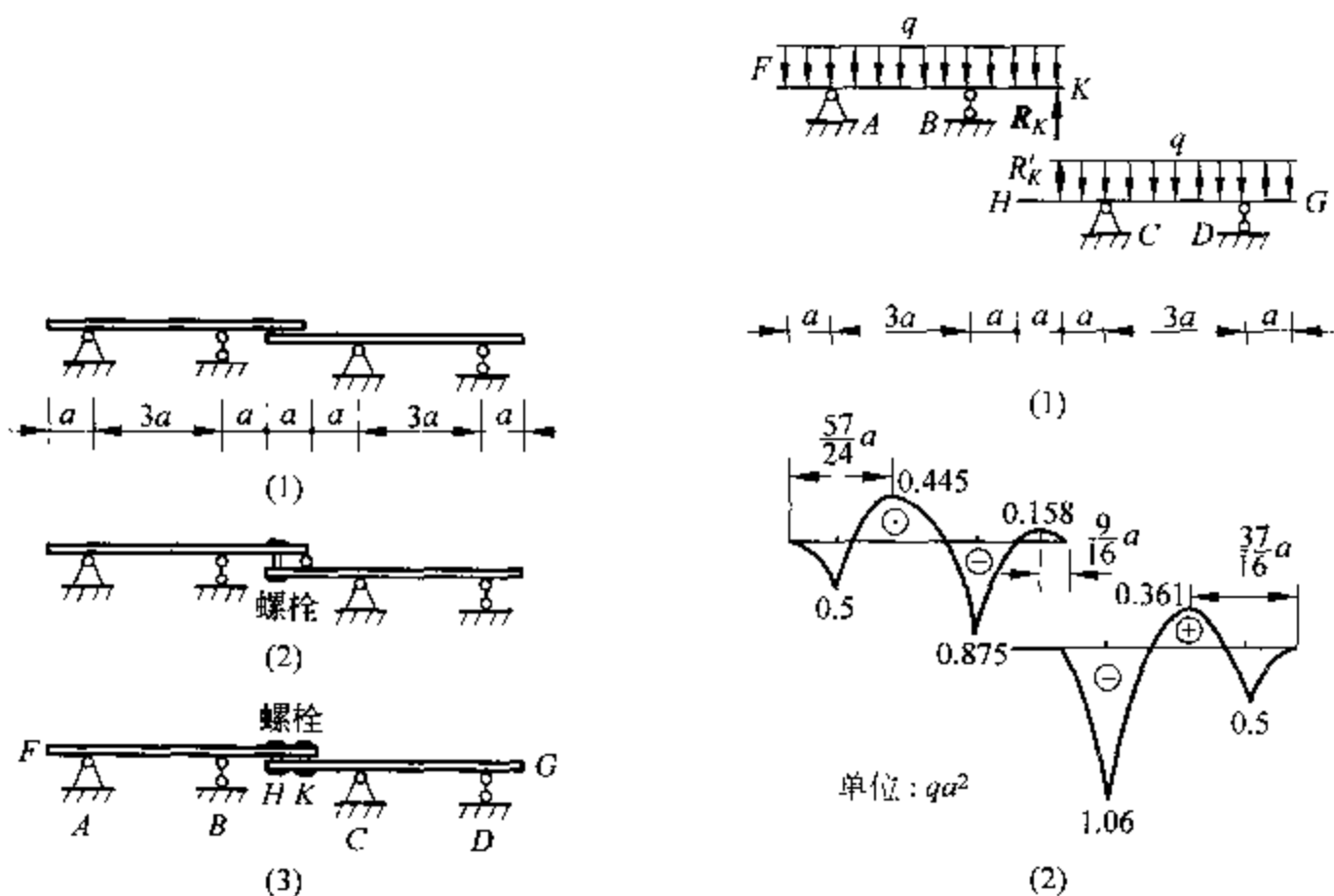


图 166a

图 166b

解：设均布载荷为 q ，每块板的弯曲刚度为 EI 。

(1) 第一种结构，取相当系统如图 166b(1) 所示。由 FK 梁计算 K 点挠度

$$f'_K = -\frac{17qa^4}{4EI} + \frac{20R_Ka^3}{3EI}$$

由 HG 梁计算 K 点挠度

$$f''_K = \frac{qa^4}{4EI} - \frac{4R_Ka^3}{3EI}$$

连接后，必须满足 $f'_K = f''_K$ ，从而解得

$$R_K = \frac{9}{16}qa$$

弯矩图如图 166b(2) 所示。

(2) 第二种结构取图 166c(1) 所示相当系统，则力法方程为

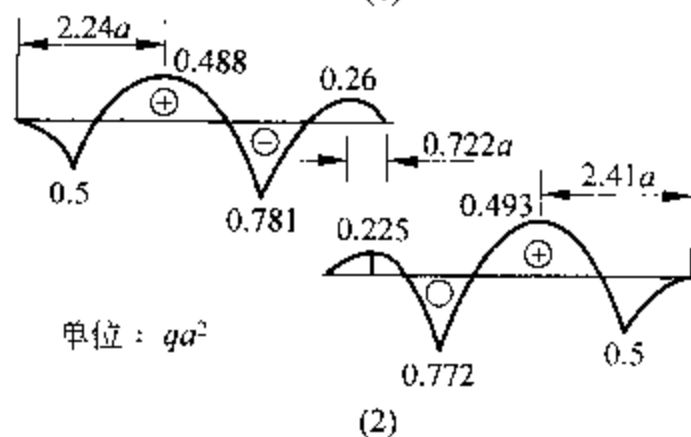
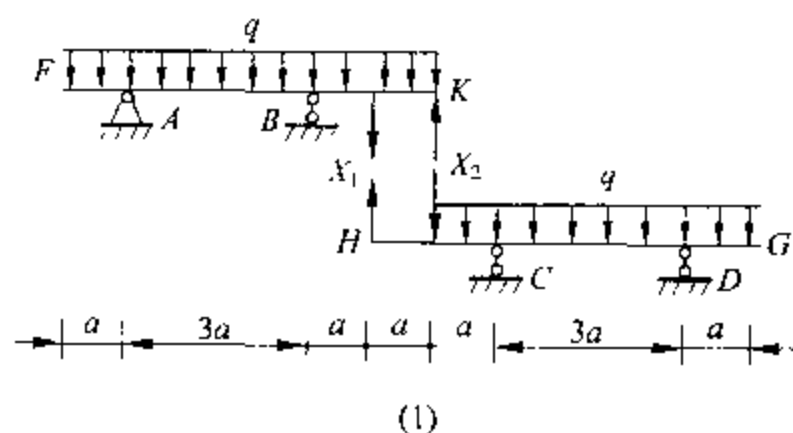


图 166c

$$\frac{8a^3}{EI}X_1 - \frac{17a^3}{3EI}X_2 + \frac{55qa^4}{24EI} = 0$$

$$-\frac{17a^4}{3EI}X_1 + \frac{8a^3}{EI}X_2 - \frac{9qa^4}{2EI} = 0$$

解得 $X_1 = 0.225qa$, $X_2 = 0.722qa$ 。弯矩图如图 166c(2) 所示。

(3) 第三种结构的 HK 段应视为整体，其惯性矩

$$I_1 \approx 8I$$

由对称性可知,由中点截开只有弯矩 X_1 ,相当系统如图 166d(1)所示。力法方程为

$$\frac{33a}{16EI}X_1 - \frac{305}{384EI}qa^4 = 0$$

解得 $X_1 = 0.385qa^2$ 。弯矩图如图 166d(2)所示。

结论:三种结构最大弯矩的比值为

$$1.06 : 0.781 : 0.74 = 1 : 0.74 : 0.7$$

即第三种结构强度最好。

167. 在等截面薄圆环的竖向直径 CD 两端作用一对拉力 P (图 167a), 求证横向直径 AB 的缩短 Δ_{AB} 与竖向直径 CD 的伸长 Δ_{CD} 之比 $|\Delta_{AB}/\Delta_{CD}| = 0.918$ 。(黄纪山, 南京化工学院。原第 13 题, 1981, No. 2。)

解: 第一步求弯矩, 由于对称性, 只需考虑四分之一圆环 (图 167b), 且知 B 处轴向力为 $P/2$, 剪力为零。设半径为 R , 用力法求解。以 B 处的弯矩 X 作为未知量, 根据 B 处的转角为零的条件可求出 X 。

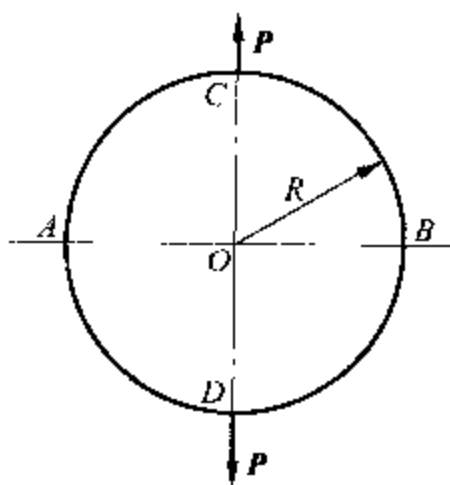


图 167a

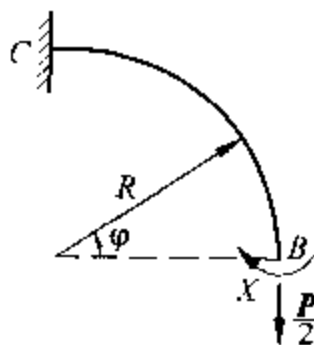


图 167b

静定基在外载荷 $P/2$ 作用下的弯矩 $M_L = \frac{1}{2}PR(1 - \cos\varphi)$, 这里约定外层受拉时弯矩为正。在 B 处, 假想作用一个单位虚力偶, 利用单位载荷法, 求得在 $P/2$ 作用下, B 处转角为

$$\theta_P = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} PR^2 (1 - \cos\varphi) d\varphi \right] = \frac{1}{2EI} PR^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

在 B 处单位虚力偶 $M_v = 1$ 作用下, B 截面的转角 (即柔度) 为

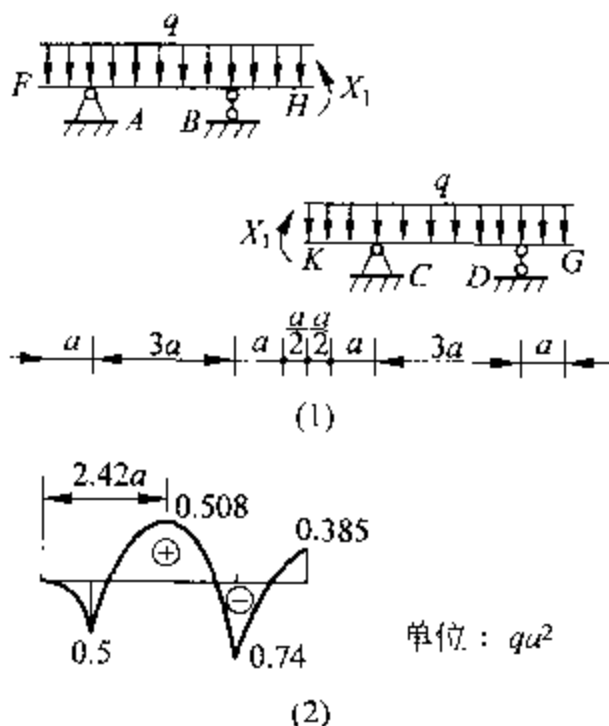


图 166d

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R d\varphi = \frac{1}{2EI} \pi R$$

由 B 处转角为零的条件得

$$X\delta_{11} + \theta_p = 0$$

$$X = -\frac{\theta_p}{\delta_{11}} = -PR \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right)$$

任一截面上的弯矩

$$M(\varphi) = \frac{1}{2} PR(1 - \cos\varphi) - PR \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right) - PR \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \cos\varphi \right) \quad (1)$$

为确定 Δ_{AB} 和 Δ_{CD} , 可用两种方法。

其一: 从图 167b 的静定基出发, 用单位载荷法求解。在 B 处作用一个向下的单位力, 得

$$\Delta_{CD} = 2 \cdot \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} PR^3 \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \cos\varphi \right) (1 - \cos\varphi) d\varphi = \frac{PR^3}{EI} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) = 0.149 \frac{PR^3}{EI}$$

在 B 处作用一个向左的单位力, 得

$$\Delta_{AB} = 2 \cdot \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} PR^3 \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \cos\varphi \right) \sin\varphi d\varphi = \frac{2PR^3}{EI} \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{4} \right) = 0.137 \frac{PR^3}{EI}$$

因此得

$$|\Delta_{AB}/\Delta_{CD}| = 0.918$$

另一种方法: 从整个圆环出发, 用单位载荷法求解。在 CD 两端作用一对单位力, 这时 $M_0 = R \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \cos\varphi \right)$, $(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$, 这是 CB 的虚弯矩, 其他三段可由对称性得到。于是

$$\Delta_{CD} = \frac{4}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} PR^3 \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \cos\varphi \right)^2 d\varphi = \frac{PR^3}{EI} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) = 0.149 \frac{PR^3}{EI}$$

在 AB 两端作用一对单位压力, 则在 CB 段有

$$M_0 = -R \left[\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right] = -R \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \sin\varphi \right), \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$$

$$\Delta_{AB} = \frac{4}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} PR^3 \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \cos\varphi \right) \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \sin\varphi \right) d\varphi = \frac{PR^3}{EI} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) = 0.137 \frac{PR^3}{EI}$$

于是得到同样的结果。

168. 图 168a 所示圆内接正 n 边形刚架, 在各角点作用等值径向拉力 P , 求刚架的内力。(彭克俭, 沈阳航空工业学院力学教研室。

原第 123 题, 1986, No. 4。)

解: 对于正 n 边形(无论 n 为奇数还是偶数), 过中心和任一节点的直线, 都是它的对称轴。以这样的对称轴截得的 A_1 截面上, 剪力应为零, 只有垂直于截面的合力和弯矩(如图 168b(1))。将 n 个节点沿半径方向都截开, 由于对称性, 各杆受力情况均如图 168b(2)所示。再考虑该段杆的静力平衡, 知合力沿杆轴如图 168b(3)。由两相邻杆的变形对称性和交接处的连续性, 知杆端截面转角应为零。

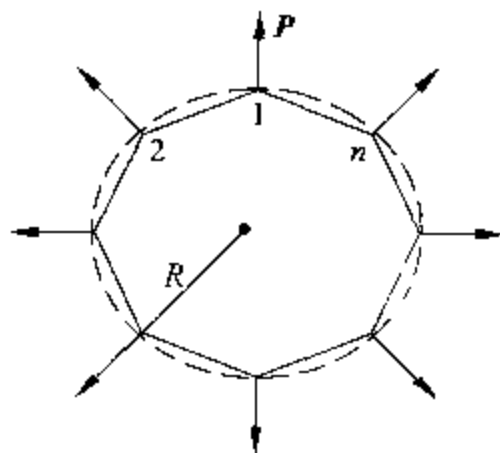


图 168a

如图 168b(3) 直杆受轴力 N 和弯矩 X_1 作用, 要求两端转角为零, 则必有 $X_1 = 0$ 。

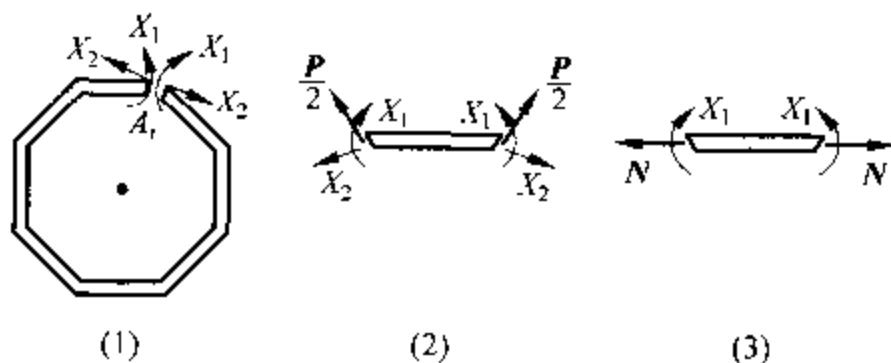


图 168b

由节点平衡得

$$N = \frac{P}{2} / \sin \frac{\pi}{n}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 正 n 边形转化成圆, 节点处的集中力转化为均布力, 令

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nP}{2\pi R}$$

则上式化为

$$N = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nP}{2\pi R} \cdot \frac{R}{\frac{n}{\pi} \sin \frac{\pi}{n}} = qR$$

其中 R 为圆半径。

结论: 正 n 边形刚架, 在节点处受等值径向拉(压)力时, 各边直杆内只产生轴力。

169. 边长为 l , 弯曲刚度为 EI 的刚接方框 $ABCD$, 在 B 、 D 两点分别作用有大小相等, 方向相反的力偶 $4M$ (图 169a), 试绘制该方框的弯矩图。(邓成光, 北京大学力学系。原题第 172 题, 1989, No. 5。)

解：题设刚架，关于 AC 对称（见图 169a），故 A、C 节点无转角和水平位移；关于 BD 反对称，故 B、D 两节点间无相对位移，且 $M_{BA} = M_{DC} = 2M$ ，同为顺时针方向。因此可简化成图 169b 杆 AB，为一次超静定问题，取静定基如图 169c， M_{AB} 为多余反力。对简支梁 AB 的 A 端，有位移条件 $\theta_A = \theta'_A + \theta''_A = 0$ 。其中 θ'_A 为载荷 $2M$ 引起的 A 截面的转角， θ''_A 为 M_{AB} 引起的 A 截面的转角。

$$\theta'_A = -2Ml/(6EI)$$

$$\theta''_A = M_{AB}l/(3EI)$$

代入上式，得 $M_{AB} = M$ 。由此得该方框的弯矩图如图 169d 所示。

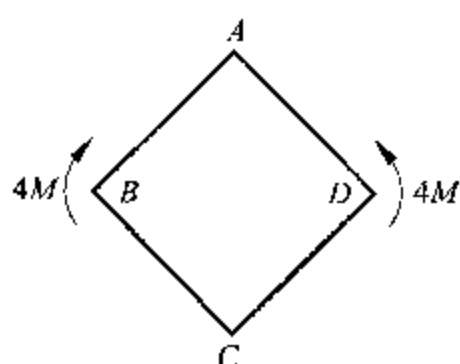


图 169a

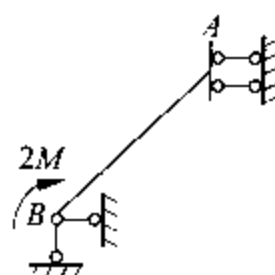


图 169b

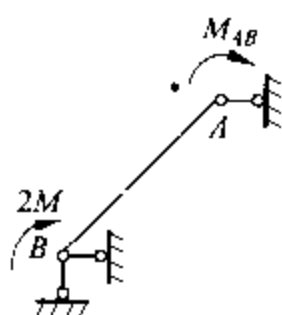


图 169c

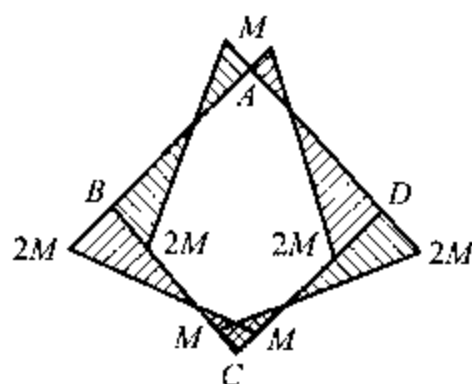


图 169d

170. 图 170a 所示正三角形刚架，由三根相同的等直杆刚接而成。设各边中点作用有矩为 m 的力偶，试求此刚架的内力。（蒋持平，北京航空航天大学 508 教研室。原第 276 题，1995，No. 6。）

解：刚架绕中心每转 120° 后，与原题受力相同，故 A、B、C 三点处的内力偶矩矢必定分别沿此刚架的 3 个对称轴方向。如图 170b(1) 取 AB 段研究，则截面 A、B 上的内力偶矩矢 M_A 与 M_B 均与 AB 成 30° 的角。

由图 170b(2) 所示的力偶矩矢三角形得

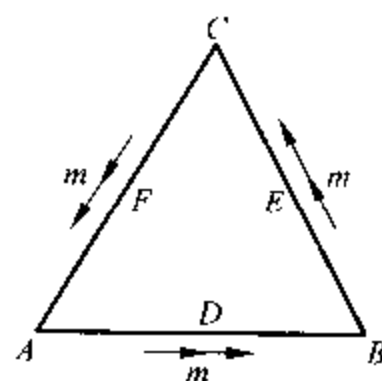


图 170a

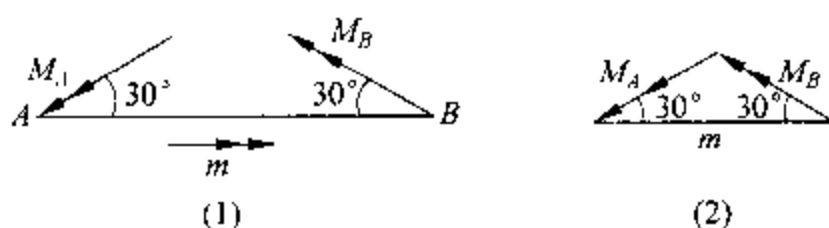


图 170b

$$M_A = M_B = \frac{\sqrt{3}}{3}m$$

将这两个内力偶矩矢分别沿平行和垂直于杆轴的方向分解,可知杆 AB 内作用有大小为 $\frac{\sqrt{3}}{6}m$ 的弯矩和大小为 $m/2$ 的扭矩,且 D 截面两边扭矩的符号相反。

171. 如图 171a 所示正方形刚架由材料相同的等截面杆构成,试计算其内力。(蒋持平,北京航空航天大学 508 教研室。原第 268 题,1995, No. 4。)

解:如图 171b 所示,将刚架沿 AC 连线截开,因为 AC 是反对称轴,故 A、C 两处截面弯矩为零,合内力沿 AC 方向,且 EF 和 GH 两杆轴力为零。又因为 BD 连线也是反对称轴,故 A、C 两处内力数值相等,指向相同。根据平衡条件立即可得出其值为 $\sqrt{2}ql/2$ 。

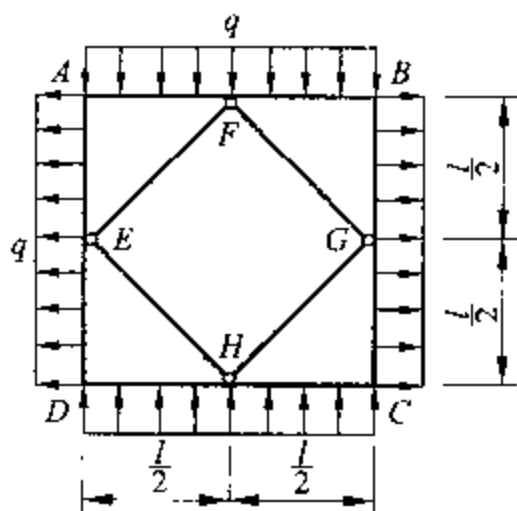


图 171a

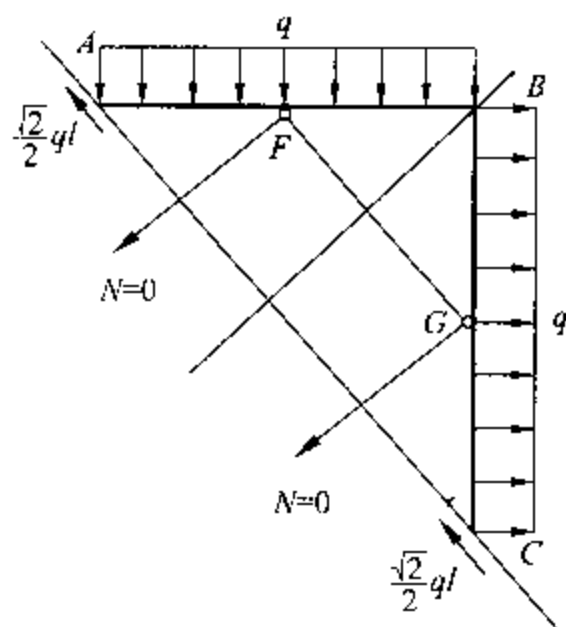


图 171b

在此基础上,各杆段的内力就很容易求了。例如 AB 段,其轴力为

$$N_{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}ql \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{ql}{2} \quad (\text{拉})$$

自 A 向右取坐标 x , 则剪力为

$$Q_{AB} = \frac{ql}{2} - qx$$

弯矩为

$$M_{AB} = \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2$$

又如 BC 段, 自 C 向上取坐标 x_1 , 则有

$$N_{CB} = -\frac{ql}{2} \quad (\text{压})$$

$$Q_{CB} = \frac{ql}{2} - qx_1$$

$$M_{CB} = -\frac{ql}{2}x_1 + \frac{q}{2}x_1^2$$

其余类推。利用结构的反对称性质, 能够将一类复杂的多度超静定问题大为简化。例如如图 171c 所示圆环和图 171d 所示正八边形刚架, 虽然都属于三度超静定问题, 然而只要注意到他们的 AC 和 BD 连线均为反对称轴, 就很容易仅由平衡条件求得内力。

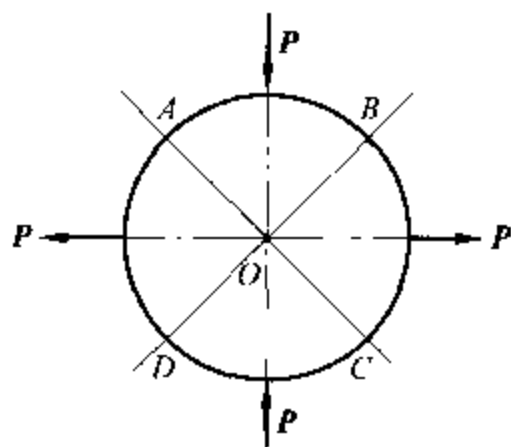


图 171c

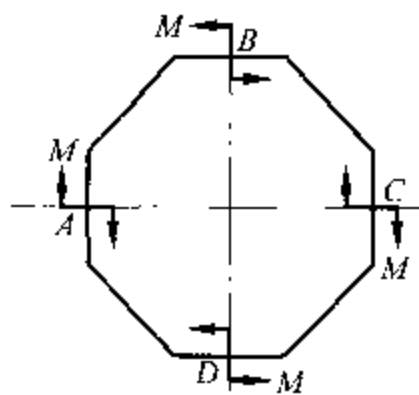


图 171d

172. 结构如图 172a 所示, 各杆的弯曲刚度 EI 均相同, AB 杆中点 C 受集中载荷 P 作用, 求 C 点的位移。(秦寿珪, 北京大学力学系。原第 188 题, 1990, No. 3。)

解: 将 FG 杆和 ST 杆视为梁 AB 的弹性铰支承, 化简如图 172b。M 为 A, B 两端的弹性支承力偶。这是一个以 M 为多余反力的一次超静定问题。

(1) 先求弹性铰支座 A、B 的刚度系数 k , 若 A、B 处的转角为 θ (设 A 端转角顺时针为负, B 端转角逆时针为正), 则 $M = -k\theta$ 。由图 172c, 不难求出 $k = 6EI/l$ 。

(2) 梁 AB 在载荷 P 作用下 A 端转角为 $\theta_{AP} = -Pl^2/(16EI)$ 。当 A、B 端各作用 M 时, A 端转角为

$$\theta_{AM} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)\frac{Ml}{EI} = \frac{Ml}{2EI}$$

(3) A 端的位移协调条件为 $\theta = \theta_{AP} + \theta_{AM}$,

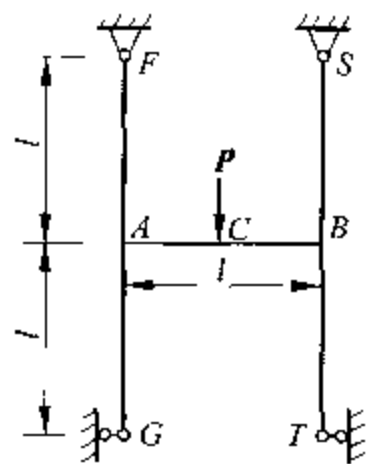


图 172a

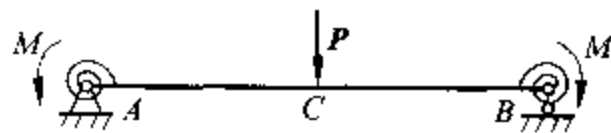


图 172b

由 $\theta = -M/k$ 代入得 $\theta_{AM} + M/k = -\theta_{AP}$, 即

$$M\left(\frac{l}{2EI} + \frac{l}{6EI}\right) = \frac{Pl^2}{16EI}$$

$$M = \frac{3Pl}{32}$$

(4) C点向下的位移可由P与A、B两端的M产生的位移叠加而得, 即

$$\Delta_C = \Delta_{CP} + \Delta_{CM} = \frac{Pl^3}{48EI} - 2\left(\frac{3Pl}{32}\right)\left(\frac{l^2}{16EI}\right) = \frac{7Pl^3}{768EI}$$

173. $n(n \geq 3)$ 根圆杆固支在相距L的两刚性夹支板上, 其支点沿半径为R的圆周均匀分布, 各杆的材料和尺寸相同, 两夹支板上分别作用着大小相等方向相反的扭力偶M(图173a(1)), 试求两夹支板的相对角位移。(李贤兴, 上海铁道学院土木工程系材料力学教研室。原第96题, 1985, No. 3。)

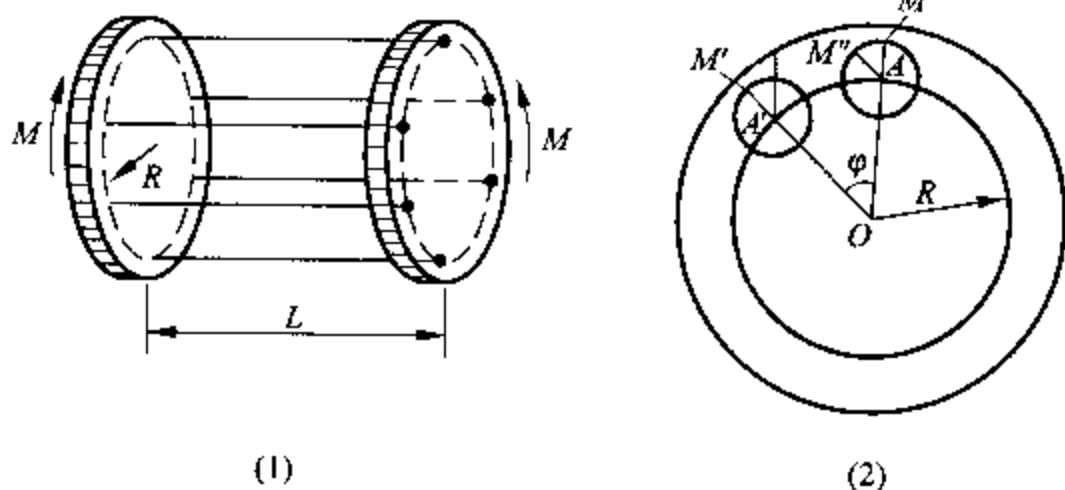


图 173a

解: 设圆杆的半径为 r , 弹性模量为 E , 切变模量为 G 。若两夹支板相对角位移为 φ 时, 把一端看作不动, 另一端的半径 OA 转了 φ 角, 到达 OA' (图173a(2)), A杆端发生两种位移: 固定端梁的A端平动 $f = AA' = R\varphi$ (略去高阶小量), 圆截面杆的A端扭转角 $\theta = \angle MAM'' = \varphi$ (M点位移到 M' 点, 引 $AM'' \parallel A'M'$)。因此每根杆都同时发生了弯曲和扭转, 可以分别计算, 然后叠加(图173b)。要产生 f 必须有固定端反力 P_1 和反力偶 M_1 , 其中 P_1 满足固定端反力关系式

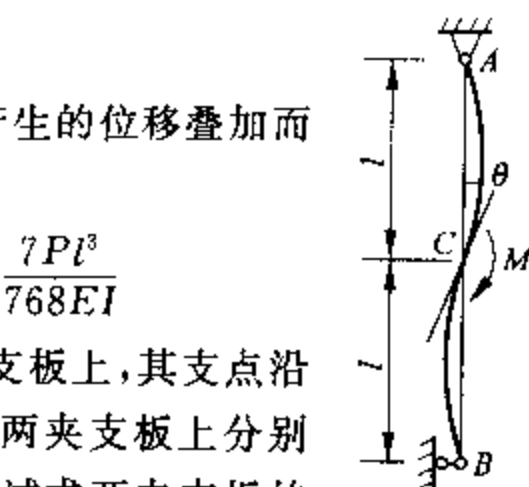


图 172c

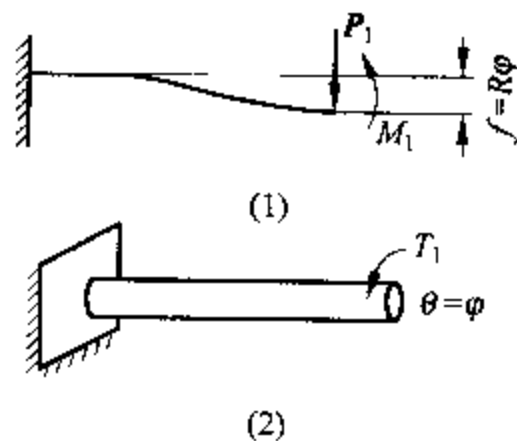


图 173b

$$f = R\varphi = \frac{P_1 L^3}{12EI} \quad (1)$$

$$P_1 = \frac{12EI}{L^3} f = \frac{12EI}{L^3} R\varphi \quad (2)$$

要产生 θ , 必须有扭力偶 T_1 , 它满足

$$\theta = \varphi = \frac{T_1 L}{GI_p} \quad (3)$$

$$T_1 = \frac{GI_p}{L} \theta = \frac{GI_p}{L} \varphi \quad (4)$$

(1)、(2) 式中 $I = \frac{1}{4}\pi r^4$, $I_p = \frac{1}{2}\pi r^4$, r 是圆杆半径。上述 P_1, M_1, T_1 是夹支板给杆 A 的力, 杆 A 给夹支板大小相等方向相反的力, 考虑夹支板的轴向力矩平衡得

$$n(P_1 R + T_1) = M \quad (5)$$

将(2)、(4)式代入(5)式得

$$\varphi = \frac{ML^3}{n(12EIR^2 + GI_p L^2)} = \frac{2ML^3}{n\pi r^4 (6ER^2 + GL^2)}$$

此题也可以用应变能方法解。当列出了对应于角位移 φ 的固定端反力(2)式和(4)式后, 就可以求出 n 根杆储存的总应变能

$$U = \frac{n}{2} \left[\left(\frac{12EI}{L^3} R\varphi \right) R\varphi + \left(\frac{GI_p}{L} \varphi \right) \varphi \right] = \frac{n}{2} \left(\frac{12EI}{L^3} R^2 \varphi^2 + \frac{GI_p}{L} \varphi^2 \right)$$

由卡氏第一定理得

$$M = \frac{\partial U}{\partial \varphi} = n \left(\frac{12EIR^2}{L^3} + \frac{GI_p}{L} \right) \varphi$$

同样得到

$$\varphi = \frac{2ML^3}{n\pi r^4 (6ER^2 + GL^2)}$$

174. 一半径为 R 的圆环受载如图 174a 所示, 圆环直径为 d , 材料的弹性常数为 E, G 。求 B, C 两点在垂直于圆环变形前所在平面的相对位移。(张仲毅, 华工汉口分院力学教研室。原第 212 题, 1991, No. 5。)

解法 1: 用单位载荷法求解。取圆环的四分之一 BC 作为研究对象。由结构的对称性, 载荷相对于直径 AB, CD 的对称性, 以及载荷相对于与 AB 夹角为 45° 的直径的反对称性, 知 BC 所受的外力及内力如图 174b 所示, 这样一来, 可当成静定问题来解。

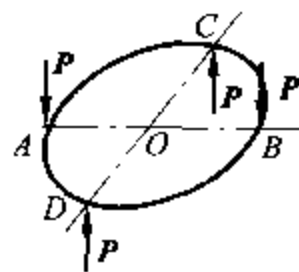


图 174a

由 BC 的平衡可求出 $M = PR/2, M' = 0$ 。与 OB 夹角为 φ 的截面上的弯矩和扭矩分别为

$$M(\varphi) = PR(\cos\varphi - \sin\varphi)/2$$

$$T(\varphi) = PR(1 - \cos\varphi - \sin\varphi)/2$$

由单位载荷法, 在圆环上作用力 P 的位置上作用同样方向的单位集中力, 同理可求出

$$\bar{M}(\varphi) = R(\cos\varphi - \sin\varphi)/2$$

$$\bar{T}(\varphi) = R(1 - \cos\varphi - \sin\varphi)/2$$

所以

$$\begin{aligned}\Delta_{BC} &= 2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M(\varphi) \bar{M}(\varphi)}{EI} R d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T(\varphi) \bar{T}(\varphi)}{GI_p} R d\varphi \right] \\ &= 2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{PR^3}{4EI} (\cos\varphi - \sin\varphi)^2 d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{PR^3}{4GI_p} (1 - \cos\varphi - \sin\varphi)^2 d\varphi \right] \\ &= \frac{PR^3}{2EI} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + \frac{PR^3}{2GI_p} (\pi - 3) \\ &= \frac{16PR^3}{\pi d^4} \left(\frac{\pi - 2}{E} + \frac{\pi - 3}{G} \right)\end{aligned}$$

解法 2: 据功能原理求解。由图 174a 所示圆环的对称性可知, 其全部外力功为

$$W = 2 \times \left(\frac{1}{2} P \Delta_{BC} \right) = P \Delta_{BC}$$

由图 174b 所示 1/4 圆环的内力可知, 其应变能为

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} U &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M^2(\varphi)}{2EI} R d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T^2(\varphi)}{2GI_p} R d\varphi \\ &= \frac{P^2 R^3}{8EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi - \sin\varphi)^2 d\varphi + \frac{P^2 R^3}{8GI_p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos\varphi - \sin\varphi)^2 d\varphi \\ &= \frac{P^2 R^3}{8EI} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + \frac{P^2 R^3}{8GI_p} (\pi - 3)\end{aligned}$$

整个圆环的全部应变能为

$$U = \frac{P^2 R^3}{2EI} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + \frac{P^2 R^3}{2GI_p} (\pi - 3)$$

最后, 根据功能原理 ($U = W$), 得

$$\begin{aligned}\Delta_{BC} &= \frac{PR^3}{2EI} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + \frac{PR^3}{2GI_p} (\pi - 3) \\ &= \frac{16PR^3}{\pi d^4} \left(\frac{\pi - 2}{E} + \frac{\pi - 3}{G} \right)\end{aligned}$$

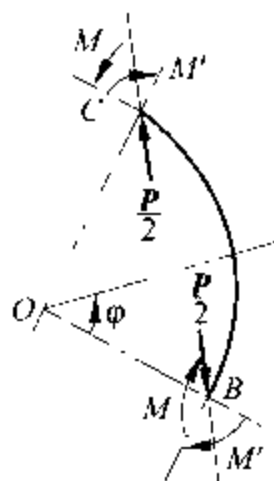


图 174b

解法 3: 用卡氏第二定理求解。由图 174a 所示圆环的对称性可知

$$\Delta_{BC} = \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial P}$$

据解法 2 所得到的应变能 U 很容易求到

$$\begin{aligned} \Delta_{BC} &= \frac{PR^3}{2EI} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + \frac{PR^3}{2GI_p} (\pi - 3) \\ &= \frac{16PR^3}{\pi d^4} \left(\frac{\pi - 2}{E} + \frac{\pi - 3}{G} \right) \end{aligned}$$

或者用解法 1 中的 $M(\varphi)$ 、 $T(\varphi)$ 及由它们求出的 $\frac{\partial M}{\partial P}$ 、 $\frac{\partial T}{\partial P}$, 再代入卡氏第二定理求位移的下列公式

$$\Delta_{BC} = 2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M(\varphi)}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} R d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T(\varphi)}{GI_p} \frac{\partial T}{\partial P} R d\varphi \right]$$

通过与解法 1 相同的积分运算, 即可得到与以上两种解法完全相同的结果。

第 9 章

其 他

175. 确定 Z 字形截面的剪心。(蒋持平, 北京航空航天大学 508 教研室。原第 235 题, 1993, No. 3。)

解: Z 字形截面如图 175a 所示, 设 O 为截面形心, 剪心在 O 外任一点 E' 。将图形在其所在平面内旋转 180° 后重合。这时剪心到了新位置 E'' , 但一个平面图形的剪心只能有一个, 故剪心只可能在形心 O 点。

推论: 一切中心对称截面的剪心与形心重合。

注: 在铁摩辛柯所著《材料力学》教材(韩耀新译, 科学出版社, 1990)中, 利用了问题的对称性, 但没有利用反证法, 推理稍复杂一些, 并且没有得出上述推论。

如图 175b 所示, 设 y 和 z 轴为过形心 O 的主轴。先假定剪力 Q_y 平行于 y 轴作用且不产生扭转切应力, 那么翼缘与腹板内的切应力将沿图 175b 所示方向。由对称性考虑可知, 两翼缘中的合力必定彼此相等, 它们的总合力将平行于翼缘且通过形心。显然腹板内切应力的合力通过形心。故可推知剪力 Q_y 通过形心 O 。类似地可以推证, 假定剪力 Q_z 平行于 z 轴作用且不产生扭转剪应力, 它必通过形心 O 。最后可以得出结论, Z 字形截面的剪心与形心相重合。

如果使用过形心 O 且平行于腹板和翼缘的非主轴 y 和 z 来研究 Z 字形截面的切应力, 则有如下广义切应力公式(仍参阅铁摩辛柯《材料力学》):

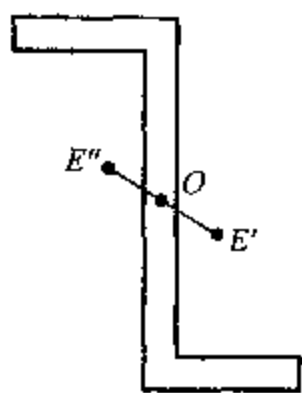


图 175a

$$\tau = \frac{Q_y}{t(I_y I_z - I_{yz}^2)} \left[I_{yz} \int_0^s z dA - I_y \int_0^s y dA \right]$$

$$\tau = \frac{Q_z}{t(I_y I_z - I_{yz}^2)} \left[I_{yz} \int_0^s y dA - I_z \int_0^s z dA \right]$$

其中 I_y 、 I_z 和 I_{yz} 分别为截面对 y 轴和 z 轴的轴惯性矩和惯性积, t 为壁厚, s 为沿截面中心线的曲线坐标。通过求 Q_y 和 Q_z 的作用线的交点就可以确定截面的剪心。从确定 Z 字形截面的剪心的角度看, 这种方法显然是较为繁琐的。但是从定量计算 Z 字形截面的切应力的方面看, 这是相对简单的一种方法。

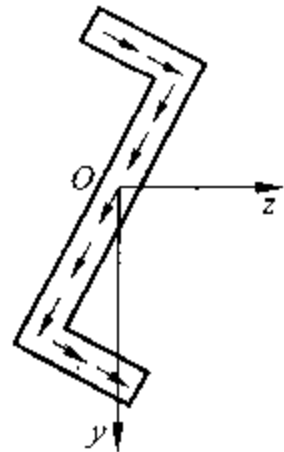


图 175b

176. 下列结构均为等直杆, 各相应载荷为任意分布。证明图 176 中 (a) 杆的轴力图、(b) 圆轴的扭矩图、(c) 梁的剪力图、(d) 梁的弯矩图, 其图形面积代数和均为零 ((c) 梁剪力图在受分布和集中力偶矩时例外)。(蒋持平, 北京航空航天大学 508 教研室。原第 248 题, 1994, No. 1。)

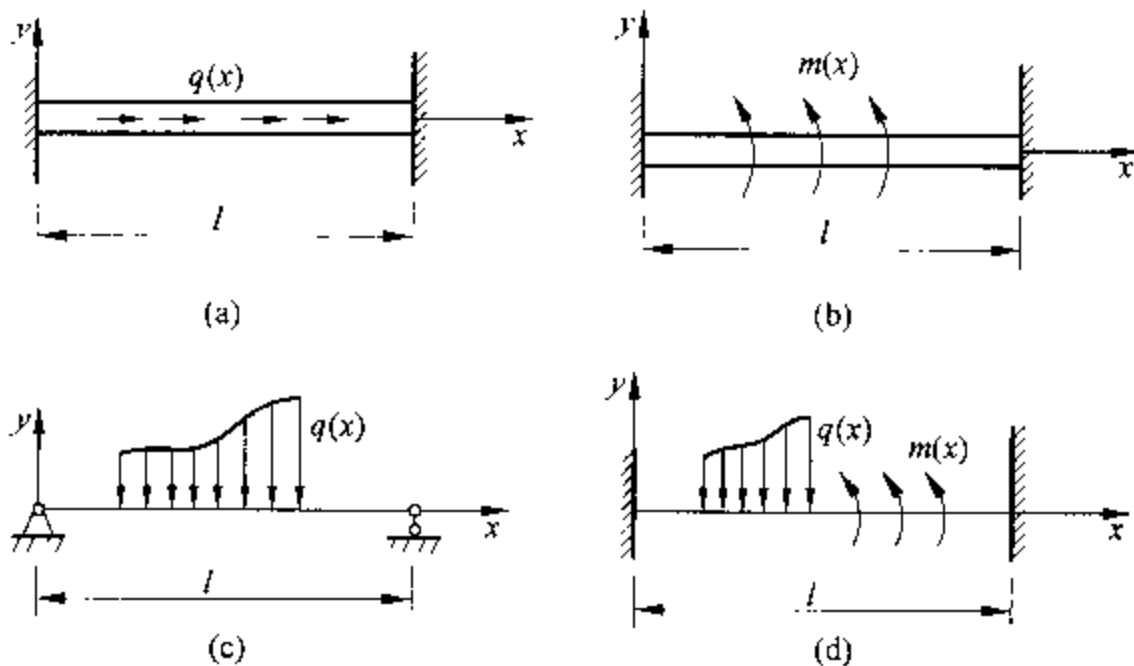


图 176

证明: 设轴力为 $N(x)$, 扭矩为 $T(x)$, 弯矩为 $M(x)$, 剪力为 $Q(x)$, E 为弹性模量, G 为切变性模量, I 和 I_p 分别为轴惯性矩和极惯性矩, A 为杆的截面面积。

(a) 图, 受任意分布和集中的轴向力作用。杆的总伸长为 $\Delta l = 0$ 。由胡克定律, 正应变 $\epsilon(x) = \frac{N(x)}{EA}$, 故轴力图面积的代数和为

$$\Omega(N) = \int_0^l N(x) dx = EA \int_0^l \epsilon(x) dx = EA \cdot \Delta l = 0$$

(b) 图, 受任意分布和集中的扭力偶作用。圆轴扭转角 φ 的边界条件为 $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, 根据圆轴扭转变形基本公式 $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T(x)}{GI_p}$, 故扭矩图面积的代数和为

$$\Omega(T) = \int_0^l T(x) dx = GI_p \int_0^l \frac{d\varphi}{dx} dx = GI_p \varphi \Big|_0^l = 0$$

(c)图,受任意分布和集中的横向载荷作用。对于简支梁, $M(0) = M(l) = 0$, 且
在无分布力偶矩的情况下,剪力与弯矩的微分关系为 $\frac{dM}{dx} = Q$, 故有

$$\Omega(Q) = \int_0^l \frac{dM}{dx} dx = M \Big|_0^l = 0$$

受到分布和集中力偶矩作用时,此值一般不为零,因为关系式 $\frac{dM}{dx} = Q$ 中,未考虑
分布力偶矩的作用。这种情况下,应修正为

$$\Omega(Q) = \int_0^l m(x) dx + \sum_i M_i$$

其中 $m(x)$ 与 M_i 为分布力偶矩和集中力偶矩,逆时针为正。

(d)图,受任意分布和集中的横向载荷及力偶矩作用。两端固支梁,转角边界条
件为 $\theta(0) = \theta(l) = 0$, 有微分关系为 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$

$$\Omega(M) = \int_0^l M(x) dx = EI \int_0^l \frac{d\theta}{dx} dx = EI \theta(x) \Big|_0^l = 0$$

能够得出以上结论是因为,被积函数是有界且只有有限个间断点,因而总是可积
的。在(a)、(b)、(d)三种情况下以及(c)只受横向载荷的情况下,原函数 $(\Delta l, \varphi, \theta)$ 总
是连续的,积分值仅与该原函数在两端的函数值有关,而不必求出原函数。

177. 用应变花测得平而上互成 120° 的三个方向 1、2、3 的应变值(如图 177a)。
设其中两个相等,求证第三个应变值是一个主应变,并求另一个主应变。(原第 124
题,1986, No. 4)

解: 互成 120° 的三个方向的应变,可用应变圆上均匀分布的三个点 A_1, A_2, A_3
表示(如图 177b)。若 $e_1 = e_3$, 则显然 e_2 是个主应变,另一主应变(对应于 B 点)将
是 $(4e_1 - e_2)/3$ 。

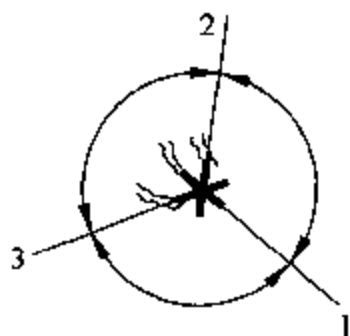


图 177a

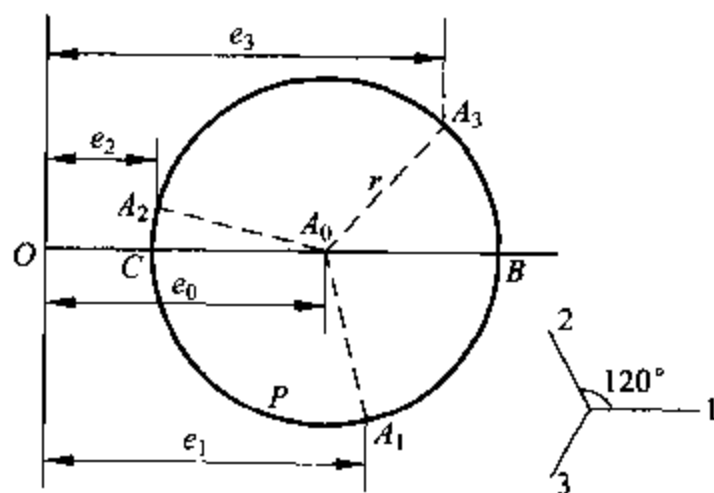


图 177b

178. 结构如图 178a 所示, A 和 C 点固支, B 处为刚性连接, D 点铰支, AB、BC 及 BD 杆的长度及弯曲刚度均分别为 l 和 EI , 求集中载荷 P 作用在 B 点时, 使 BD 杆在平面内失稳的临界值。(秦寿珪, 北京大学力学系, 原第 156 题, 1987, No. 6.)

解: 考虑 BD 杆在 ABCD 平面内的稳定性。设在力 P 作用下, BD 杆的轴向力为 N , 当它失稳时, 受到 AC 杆的约束力偶矩 M_B 的作用, 因而在 B 点和 D 点受有横向反力 $Q_B = Q_D = M_B/l$ 。

建立坐标系如图 178b, 挠曲线微分方程为

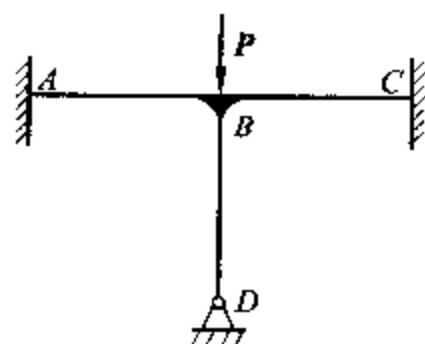


图 178a

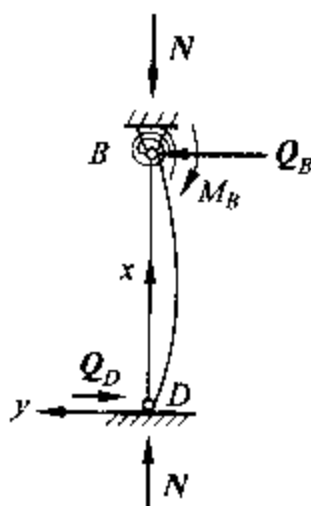


图 178b

$$EIy'' + Ny = -M_B x/l$$

边界条件为 $x=0$ 时, $y=0$; $x=l$ 时 $y=0$, $y' = M_B/\alpha$ 。其中 α 为比例常数。因为 AC 杆施加给 BD 杆的力偶矩 M_B 与 B 截面的转角成比例。由 AC 杆的刚度知

$$8EI\theta/l = M_B$$

其中 $\theta = y'$, 所以 $\alpha = 8EI/l$ (图 178c)。

考虑 B 截面的挠度亦可确定 N 值。事实上

$$\frac{(P-N)l^3}{24EI} = \frac{Nl}{EA}$$

其中 A 为 BD 杆的截面面积, 由此得

$$N = \frac{Al^2}{24I + Al^2} \cdot P$$

微分方程的通解为

$$y = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx - \frac{M_B}{Nl} x$$

其中 $k = \sqrt{\frac{N}{EI}}$, 或 $N = k^2 EI$, 由边界条件得

$$c_1 = 0, \quad c_2 = M_B / (N \sin kl)$$

$$\sin kl \left(\frac{1}{Nl} + \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{1}{N} k \cos kl$$

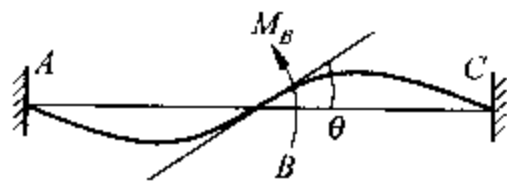


图 178c

令 $kl=u$, 得

$$\tan u = \frac{alu}{al + u^2 EI} = \frac{8u}{8 + u^2}$$

由此求得近似解:

$$u = 4.066$$

于是得 N 的临界值

$$N_{cr} = \frac{16.532EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0.773l)^2}$$

从而可求得 P 的临界值。

$$P_{cr} = \frac{24I + Al^2}{Al^2} \left[\frac{\pi^2 EI}{(0.773l)^2} \right]$$

在 $Al^2 = 10I$ 的特殊情况下, 有

$$P_{cr} = 3.4N = 3.4 \left[\frac{\pi^2 EI}{(0.773l)^2} \right]$$

179. 如图 179a, 某均质实心圆柱高 l , 下端固定, 为保持在自重作用下不失稳, 直径不能小于某一值。如改成内外径之比为 α 的空心柱, 且保持高度和稳定安全系数不变, 从稳定安全考虑, 可节省材料多少? (蒋持平, 北京航空航天大学。原第 330 题, 2001, No. 4。)

解: 如图 179b, 设柱为弯时轴线偏离平衡位置为 $w(x)$, 则它引起的轴向位移为

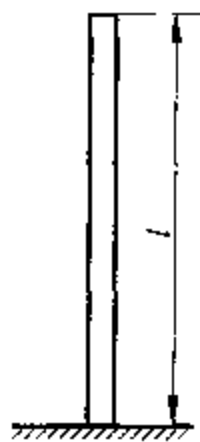


图 179a

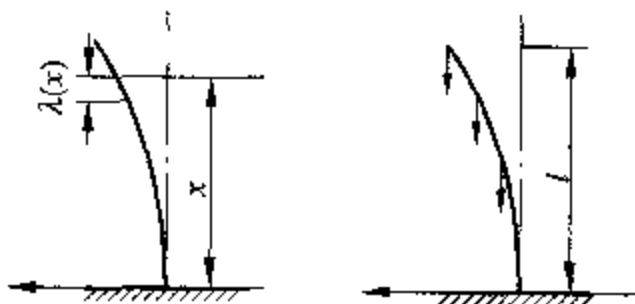


图 179b

$$\lambda(x) = \frac{1}{2} \int_0^x w'^2(x) dx \quad (1)$$

又柱的自重引起的线载荷

$$q(x) = A\gamma = \frac{1}{4} \pi D^2 \gamma \quad (2)$$

其中 A 为柱的截面积, D 为横截面直径, γ 为单位体积重量, $q(x)$ 作的功为

$$\Delta W = \int_0^l \lambda(x) A \gamma dx = \frac{1}{4} \pi D^2 \gamma \int_0^l \lambda(x) dx \quad (3)$$

又柱微弯增加的应变能为

$$\Delta V_e = \frac{1}{2} \int_0^l EI w''^2(x) dx = \frac{1}{128} \pi E D^4 \int_0^l w''^4(x) dx \quad (4)$$

其中 E 为柱的弹性模量, I 为轴惯性矩, 由功能原理

$$\Delta W = \Delta V_e \quad (5)$$

将式(3)和式(4)代入方程(5)可以求得柱失稳临界直径 D_{cr}

$$D_{cr}^2 = \frac{32\gamma}{E} \frac{\int_0^l \lambda(x) dx}{\int_0^l w''^2(x) dx} \quad (6)$$

对于内外径比为 α , 高为 l 的空心柱, 按相同的方式, 可求得其临界失稳外径 D_{cr}^*

$$D_{cr}^{*2} = \frac{1}{1+\alpha^2} \frac{32\gamma}{E} \frac{\int_0^l \lambda(x) dx}{\int_0^l w''^2(x) dx} \quad (7)$$

于是, 在相同的稳定安全系数下, 空心圆柱节省材料的百分比为

$$\frac{D_{cr}^2 - D_{cr}^{*2}(1-\alpha^2)}{D_{cr}^2} \times 100\% = \frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2} \times 100\% \quad (8)$$

在另一方面, 空心圆管也不能太薄, 否则管壁易皱折失稳。

180. 图 180a 所示等截面细圆环, 横截面为圆形, 承受均布力偶矩 (其矢量均沿圆环切线方向) 作用。实验告诉我们: 力偶矩集度 m 增大时, 圆环横截面转角 φ 也随之增大; 当 m 增大到某一临界值时, 圆环会突然翻转。试确定此翻转力偶矩集度之值。(吴鹤华, 北京航空航天大学。原第 341 题, 2002, No. 5。)

解: 设圆环横截面上点 (ρ, φ_0) 沿圆环半径方向的位移 (图 180b) 为

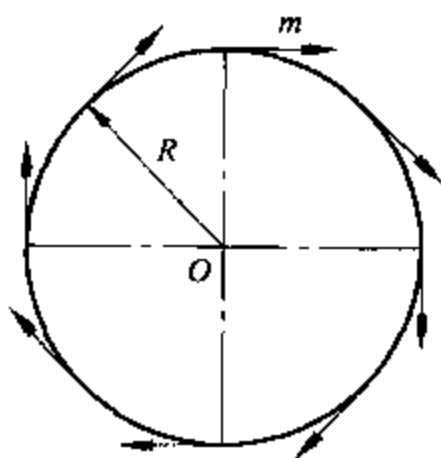


图 180a

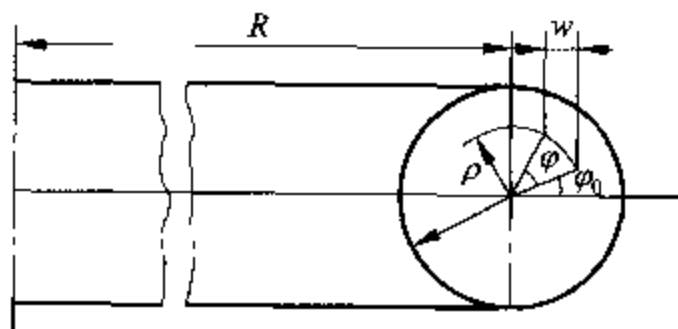


图 180b

$$w = \rho [\cos \varphi_0 - \cos(\varphi_0 + \varphi)] \quad (1)$$

该点所在的环向纤维的正应变 (以缩短为正) 为

$$\epsilon = w / (R + \rho \cos \varphi_0) \approx w / R \quad (2)$$

将式(1)代入式(2), 得

$$\varepsilon = \frac{\rho}{R} [\cos \varphi_0 - \cos(\varphi_0 + \varphi)] \quad (3)$$

根据胡克定律,横截面上点 (ρ, φ_0) 的正应力为

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E\rho}{R} [\cos \varphi_0 - \cos(\varphi_0 + \varphi)] \quad (4)$$

由左右反对称及半个圆环的平衡条件可知,横截面上的弯矩(图 180c)为

$$M = mR \quad (5)$$

由横截面上 M 的构成关系可得

$$M = \int_A \rho \sin(\varphi_0 + \varphi) \sigma dA \quad (6)$$

将式(4)代入式(6)并完成积分,得

$$M = \frac{Er^4}{4R} \pi \sin \varphi$$

将式(5)代入上式,得

$$\sin \varphi = \frac{4mR^2}{\pi Er^4} \quad (0 \leq \varphi \leq \pi/2) \quad (7)$$

这就是 φ 随 m 增大而增大的函数关系。

由式(7)可知,当 $\varphi = \pi/2$ 时, m 达到最大值。若继续增大 φ 角,所需 m 反面会减小,故这里的最大值正是力偶矩集度的临界值,当 m 达到此值后,圆环会发生突然翻转(或称“跳跃”)。由式(7)易得,此翻转力偶矩集度为

$$m_{cr} = \frac{\pi Er^4}{4R^2}$$

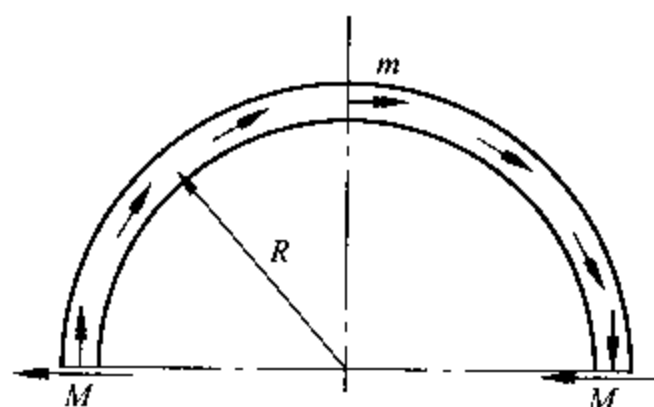


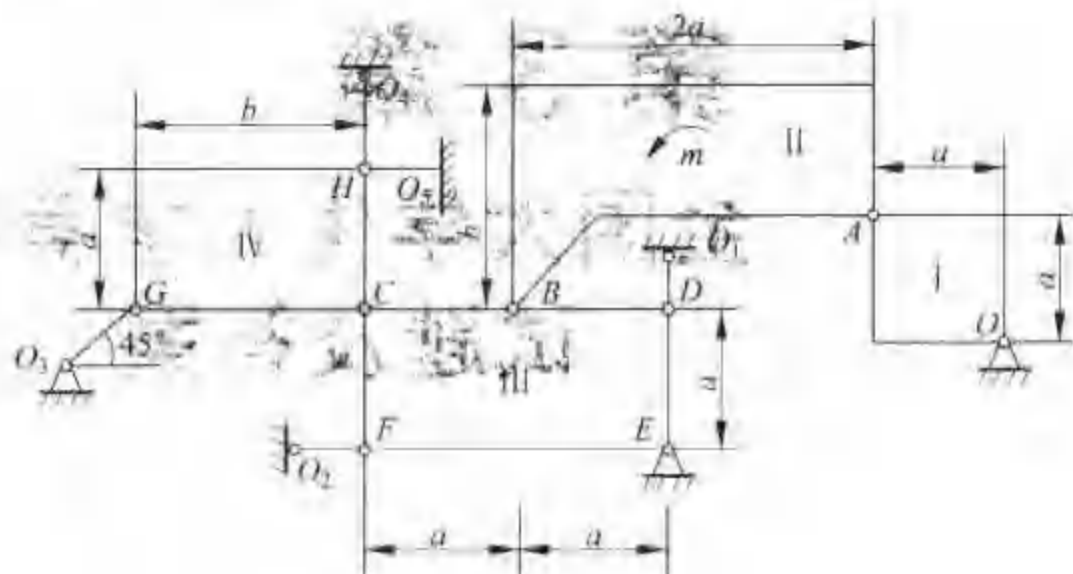
图 180c

第 3 篇

全国大学生力学竞赛 试题及答案

1988 年第一届全国青年力学竞赛理论力学试题

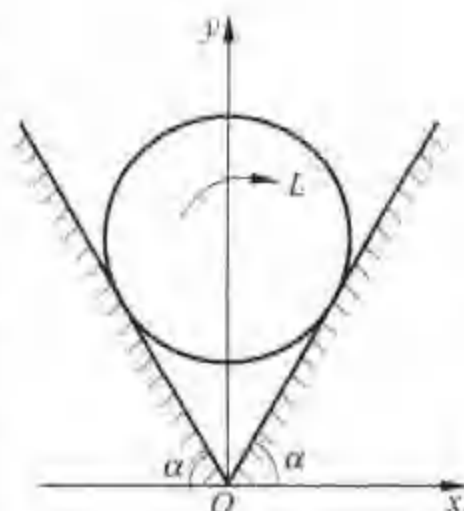
1. 图示平衡系统中, 物体 I, II, III, IV 之间分别通过光滑铰链 A, B, C 连接。O, E 为固定支座, D, F, G, H 处为杆约束。尺寸如图, $b/a=1.5$ 。物体 II 受大小为 m 的力偶作用。假定全部力均在图示平面内, 且不计所有构件的自重, 杆 O_3G 的内力不为零, 则杆 O_1H 与杆 O_2H 所受内力之比为_____。



题 1

2. V 形槽中放置一个半径为 r 的匀质圆柱, 槽边与水平夹角为 α , 接触处的摩擦系数 $\mu = \tan \varphi_m$, 圆柱重 G 。设转动圆柱所需的最小力偶矩为 L_{\min} , 则当 $\varphi_m < \alpha$ 时, $L_{\min} =$ _____; 当 $\varphi_m \geq \alpha$ 时, $L_{\min} =$ _____。

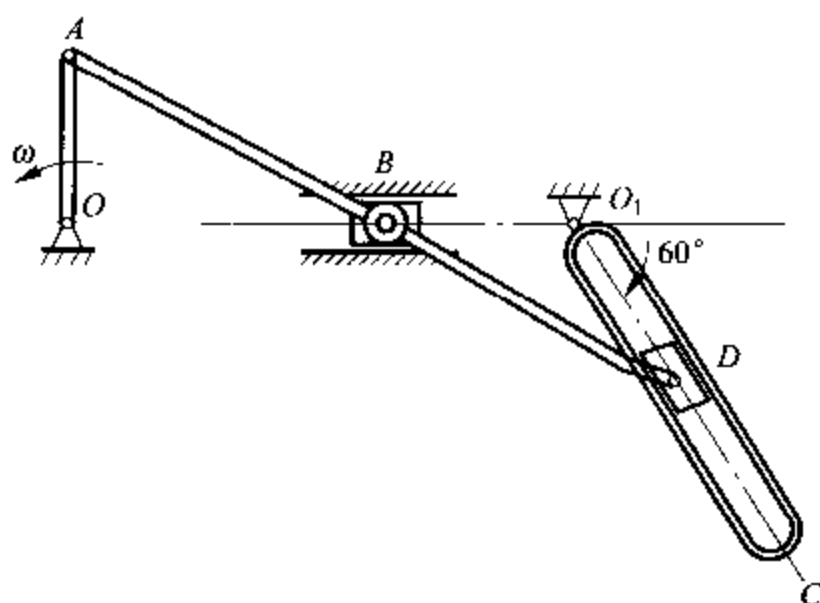
3. 曲柄摇杆机构中, 曲柄 OA 长 5cm, 以匀角速度 $\omega = 10 \text{ rad/s}$ 转动, 带动连杆 AD 及摇杆 O_1C 运动, $\overline{AD} = 20 \text{ cm}$, B 为 AD 的中点。在图示位置时, OA 与水平线垂直, O_1C 与水平线成 60° 角。则在此瞬时摇杆 O_1C 的角速度为_____, 角加速度为_____; 滑块 D 的速度大小为_____, 加速度大小为_____。



题 2

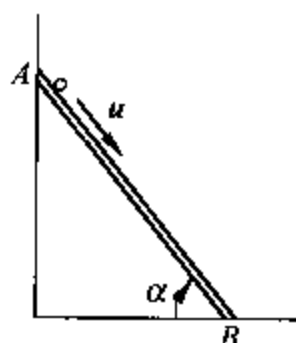
4. 设一动点在平面内运动, 其切向和法向加速度都是非零的常量, 求动点的运动轨迹。

5. 质量为 m 的杆 AB 斜靠在竖直墙上, A 端有一小虫, 其质量也为 m 。墙和地面都是光滑的。原系统静止, 今小虫突然以相对速度 u (常量) 沿杆向 B 爬动。试写出杆与地面夹角 α 所满足的微分方程及初始条件。

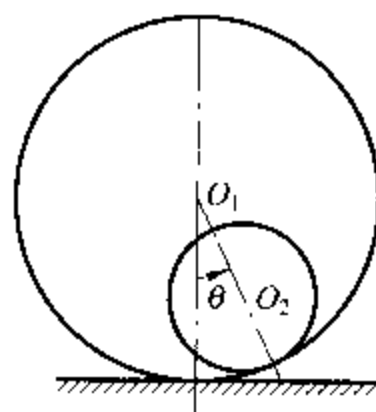


题 3

6. 质量为 M , 半径为 b 的空心薄圆柱 O_1 在光滑水平面上运动。另一质量为 m , 半径为 $a (< b)$ 的空心薄圆柱 O_2 在圆柱 O_1 的内表面作纯滚动。令 θ 角为 O_1O_2 与向下竖直线的夹角。设初始时静止, 且 $\theta = \theta_0$ 。试写出运动过程中 $\dot{\theta}$ 与 θ 的关系式。

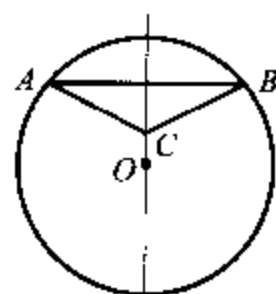


题 5



题 6

7. 若在地球表面上 A 、 B 两点间打通一条光滑隧道, 质点 m 从 A 点由静止开始, 借地心引力落入隧道。在地球内部地心引力取 $F = -\frac{mg}{R}r$, g 为地球表面的重力加速度, R 为地球半径, 不计地球自转的影响。

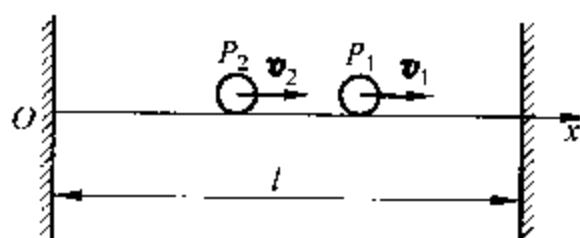


题 7

(a) 当 A 、 B 间隧道为直线时, 求质点从 A 到 B 的时间。
(b) 当隧道为 ACB 折线时, 求 A 到 B 的最短时间及最优折线。

(c) 求 A 到 B 的最短时间及最优隧道的形状。

8. 质量均为 m 的两质点 P_1 、 P_2 , 沿一光

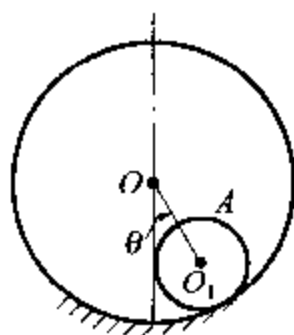


题 8

滑直线 Ox 运动,其位置在距离为 l 的两壁之间。设质点之间、质点和墙壁之间的碰撞都是完全弹性的。问在什么条件下,经过一段时间后,两质点的位置和速度同时回到初始状态?若发生两质点同时与一侧壁碰撞的三体碰撞时,则视为无限短时间内相继发生的两体碰撞。

9. 半径为 a , 质量为 m 的均匀圆球在半径为 b 的完全粗糙的另一固定圆球的外表面上滚动,试建立动球的运动微分方程。当动球转速超过多少时,动球可以在定球的最高点处稳定地转动。

10. 内半径 $R=30\text{cm}$ 的空心圆柱 O , 水平固定放置。质量为 M , 半径为 $r=10\text{cm}$ 的均匀圆环 O_1 , 可以在圆柱内作纯滚动。质量为 m 的质点 A 固联在圆环 O_1 的边缘上。当圆环 O_1 处于圆柱 O 的最低位置时,质点 A 处于圆环的最高位置。设 OO_1 与向下竖直直线的夹角为 θ 。则,当 $M=2m$ 时,圆环的稳定的平衡位置为 $\theta=$ _____ 弧度,圆环在此平衡位置附近微振动的周期为 _____ 秒;当 $m=2M$ 时,圆环的稳定的平衡位置为 $\theta=$ _____ 弧度,圆环在此平衡位置附近微振动的周期为 _____ 秒(取重力加速度 $g=9.8\text{m/s}^2$)。



题 10

第一届全国青年力学竞赛理论力学试题答案

1. 杆 O_1H 与杆 O_2H 所受内力之比为 0.5。

$$2. L_{mn} = \begin{cases} \frac{Gr \sin 2\varphi_m}{2 \cos \alpha}, & \varphi_m < \alpha \\ Gr \sin \alpha, & \varphi_m \geq \alpha \end{cases}$$

3. 此瞬时摇杆 O_1C 的角速度为 $\omega_2 = 7.50 \text{ rad/s}$, 角加速度为 $\varepsilon_2 = 65.0 \text{ rad/s}^2$; 滑块 D 的速度大小为 $v_D = 50 \text{ cm/s}$, 加速度大小为 $a_D = 764 \text{ cm/s}^2$ 。

4. 动点的轨迹为对数螺线: $r = Ae^{2k\varphi}$, 其中 A, k 为与初始条件有关的常数。

5. 若初始时 $\alpha \leq \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$, 运动微分方程为

$$\left[u^2 t^2 - 2utl \cos^2 \alpha + \left(\frac{1}{3} + \cos^2 \alpha \right) l^2 \right] \ddot{\alpha} \\ + (2ut - l) l \dot{\alpha}^2 \sin \alpha \cos \alpha + 2(ut - l \cos^2 \alpha) u \dot{\alpha} + \left(ut - \frac{3}{2}l \right) g \cos \alpha = 0$$

初始条件为: $\alpha(0) = \alpha_0 \leq \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\dot{\alpha}(0) = \frac{3u \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{l(1 + 3 \cos^2 \alpha_0)}$

若初始时 $\alpha > \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$, 运动微分方程为

$$\left[u^2 t^2 (1 + \sin^2 \alpha) - utl \cos^2 \alpha + \frac{l^2}{12} (5 + 3 \sin^2 \alpha) \right] \ddot{\alpha} \\ + \frac{1}{4} (2ut + l) \dot{\alpha}^2 \sin \alpha \cos \alpha + [2ut(1 + \sin^2 \alpha) - l \cos^2 \alpha] u \dot{\alpha} = 0$$

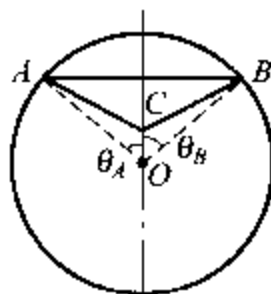
初始条件为: $\alpha(0) = \alpha_0 > \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\dot{\alpha}(0) = \frac{6u \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{l(8 - 3 \cos^2 \alpha_0)}$

6. 运动过程中 $\dot{\theta}$ 与 θ 的关系式为 $\dot{\theta}^2 = \frac{2g(m+M)(\cos \theta - \cos \theta_0)}{(b-a)(2M + m \sin^2 \theta)}$

7. (a) 当 A, B 间隧道为直线时, 质点从 A 到 B 的时间约为 42.2 分钟。

(b) 当隧道为 ACB 折线时, A 到 B 的最短时间为 $t_{\min} = 2\sqrt{\frac{R}{g}} \arccos \frac{1 - \sin \theta_A}{1 + \sin \theta_A}$, 最优折线之夹角 $\angle BAC$ 为 $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta_A}{2}$ 。

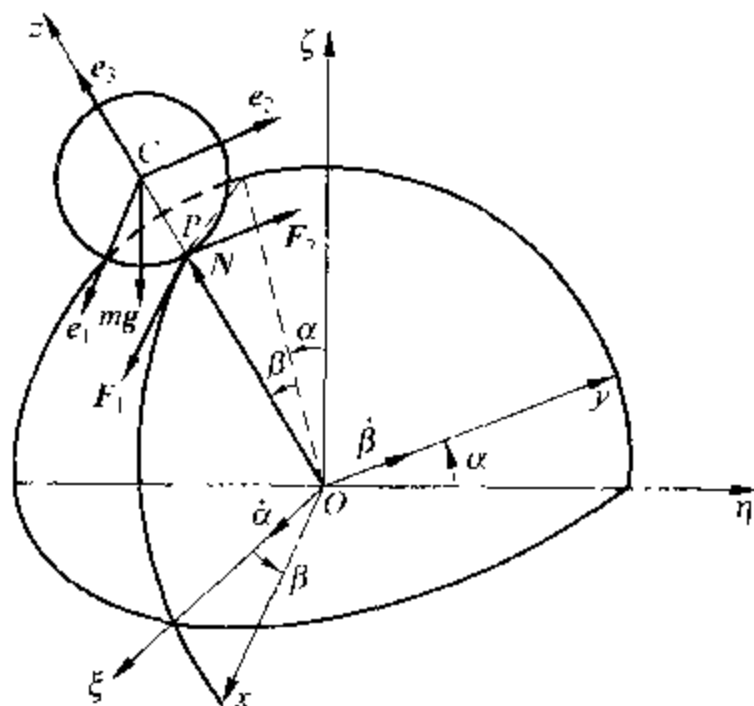
(c) A 到 B 的最短时间为 $t_{\min} = 2\sqrt{\theta_B(\pi - \theta_B)R/g}$



最优隧道的形状为 $\theta = \arctan \frac{R \sqrt{r'^2 - \rho^2}}{\rho \sqrt{R^2 - r^2}} - \frac{\rho}{R} \arctan \sqrt{\frac{r'^2 - \rho^2}{R^2 - r^2}}$, 其中 $\rho = \left(1 - \frac{2\theta_B}{\pi}\right)R$.

8. 质点组作周期运动的必要条件是它们的速度比为有理数(m, n 为整数), 包括比值为 ∞ ($v_1 = 0$) 和 0 ($v_2 = 0$), 与质点组的初始位置无关。

9. 本题中动球受非完整约束, 故不能应用拉氏二类方程; 又因要求动球在最高点处转动的稳定条件, 所以也不能用球坐标描述球心的位置。如图所示, 用卡尔丹角 α, β 描述动球质心 C 的位置; 建立动坐标系 $Oxyz$, 它相对定坐标系的方位由 α, β 确定, 其角速度为 Ω 。坐标系 $[C, e_1, e_2, e_3]$ 过动球质心 C , 且与坐标系 $Oxyz$ 相平行。动球质心 C 的速度为 v_C , 动球绝对角速度为 ω 。动球所受之力为 mg, N, F_1, F_2 。



则运动微分方程为

$$7(a+b)(\ddot{\alpha} \cos \beta - 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta) + 2a\omega_3 \dot{\beta} - 5g \sin \alpha = 0$$

$$7(a+b)(\ddot{\beta} + \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta) - 2a\omega_3 \dot{\alpha} \cos \beta - 5g \cos \alpha \sin \beta = 0$$

其中 ω_3 是动球角速度沿动系 z 方向的分量, 经分析为常量。动球在最高点自转运动的稳定条件为 $\omega_3^2 \geq 35g(a+b)/a^2$ 。

10. (a) 当 $M=2m$ 时, 圆环的稳定的平衡位置为 $\theta=0$ 弧度。微振动周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{16r}{g}} = 2.54s$$

(b) 当 $m=2M$ 时, 圆环的稳定的平衡位置为 $\theta = \arccos \frac{3}{4} = 0.723\text{rad}$ 。微振动周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{16 \left(1 + 4 \cos^2 \frac{3}{2}\theta\right) r}{7g}} = 1.32s$$

1992 年第二届全国青年力学竞赛理论力学试题

一、填空题(每题 3 分)

(1) 对牛顿万有引力定律和开普勒行星运动定律有两种说法。第一种说法是: 牛顿从开普勒行星运动定律导出万有引力定律; 第二种说法是: 开普勒从牛顿的万有引力定律和运动定律导出行星运动定律。根据历史事实, 第()种说法是正确的;

(2) 中国科学院力学研究所是我国规模最大的综合性力学研究单位。它是于 1956 年由著名科学家()创建的, 他于 1991 年 10 月被授予“国家杰出贡献科学家”荣誉称号。

(3) 图 1 所示曲线为一旋轮线, 其参数 R 为已知。图中 M 点处的曲率半径为()。

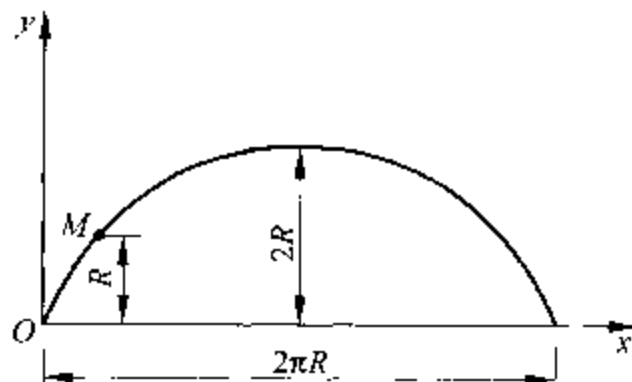


图 1

(4) 图 2 所示匀质细杆 AB , A 端借助无重滑轮可沿倾角为 θ 的轨道滑动。如不计摩擦, 杆在自重作用下, 从静止进入运动。为使杆的运动为平动, 则初瞬时杆与铅垂线的夹角 α 必须等于()。

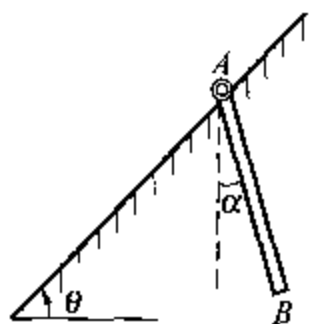


图 2

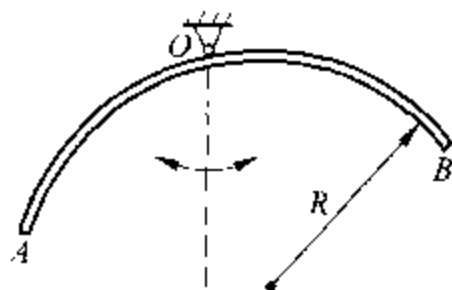


图 3

(5) 如图 3 所示, AB 是半径为 R 的一段匀质细圆弧, 可绕其中点的水平轴 O 转动。此圆弧绕转轴微幅摆动的周期为()。

二、是非判断题(每题 3 分)

(6) 一匀质球在重力作用下沿粗糙斜面纯滚动, 则质心的轨迹或为直线或为抛物线。()

(7) 一个非平衡的空间力系总可简化为一个合力或者两个不相交的力。()

(8) 图 4 所示细直杆 AB , 重为 P , 其一端 A 靠在光滑的铅直墙上, 同时又被一光滑棱 C 支承于图示位置(OA 与墙面垂直, $OC \perp AB$, 且它们同时与重力 P 的作用线交于 O 点)。则此时杆处于稳定平衡位置。()

(9) 六棱四面体受空间任意力系作用而平衡, 则该力系分别对其六个棱边之主矩为零必是六个独立的平衡方程。()

(10) 如点的切向加速度和法向加速度的大小均为常值, 则该点的运动方向在时间 t 内转过的角度为 $A \ln(1+Bt^2)$, 其中 A, B 为常数。()

(11) 半径为 R 的圆轮在铅直面内沿水平直线轨道纯滚动。若轮心速度为 v , 则圆轮边缘上一点运动到与水平面接触时的法向加速度的大小为 v^2/R 。()

(12) 任意三角形 ABC 在自身平面内作平面运动, 则在任意瞬时, 三角形的形心 E 点和三角形三顶点 A, B, C 的速度必须满足 $v_E = \sqrt{3}(v_A + v_B + v_C)$ 。()

(13) 匀质正五边形薄板挖去一正方形, 正方形中心与五边形中心重合。不论正方形的边是沿什么方向, 被挖去后的薄板对板上过中心的任意轴之转动惯量均相等。()

(14) 一质点只在一平行于 x 轴的力作用下在 Oxy 平面内运动, 且运动轨迹曲线为

$$f(x, y) = xy + x + y = 0$$

则此力的大小与 $(1+x)(1+y)^{-2}$ 成比例。()

(15) 如图 5 所示, 矩形薄板以匀角速度 ω 绕图示铅垂轴 z 转动, 其对转轴 z 的转动惯量为 J 。另一质量为 m 的质点可沿平板上的直槽运动。直槽与转轴 z 相交于 O 点, 且夹角为 α , ($0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$)。设质点距 O 点的距离为 r , 若忽略各处摩擦时, 由机械能守恒定律有积分

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2 \sin^2 \alpha) + \frac{1}{2}J\omega^2 + mgr \cos \alpha = \text{const.} \quad ()$$

(16) 一质点在平面上运动, 所受约束为 $\dot{y} = \dot{x}t$, 则其实位移不是虚位移中的一个。()

三、综合分析题(A)

在图 6 所示平行四边形机构中, $\overline{O_1A} = \overline{O_2B} = \frac{1}{2}\overline{O_1O_2} = \frac{1}{2}\overline{AB} = l$, 已知 O_1A 以匀角速度 ω 转动, 并通过 AB 上套筒 C 带动 CD 杆在铅直槽内平动。如以 O_1A 杆为动参考系, 在图示位置时 O_1A, O_2B 为铅直, AB 为水平, C 在 AB 之中点, 试分析此瞬时套筒上销钉 C 点的运动(每题 4 分)。

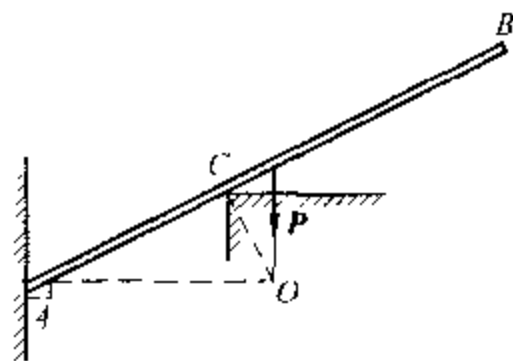


图 4

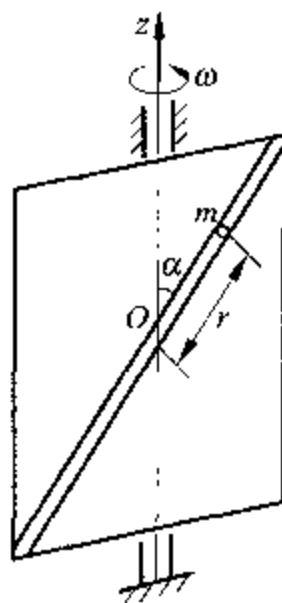


图 5

- (17) C 点的牵连速度的大小为()。
- (18) C 点的相对速度的大小为()。
- (19) C 点的牵连加速度的大小为()。
- (20) C 点的相对加速度的大小为()。
- (21) C 点的科氏(Coriolis)加速度的大小为()。

四、综合分析题(B)

如图 7 所示,质量为 m 长为 l 的匀质细杆 AB 静止于光滑的水平桌面上,其中点 C 恰好位于桌之边缘。另一质量亦为 m 的质点 D 从高为 h 处自由落下。正好与 AB 杆的端点 B 相碰撞,设恢复系数 $e=0$ 。试分析碰撞结束时的运动(每栏 4 分)。

- (22) AB 杆端点 A 的速度大小为()。
- (23) 系统的总动能为()。
- (24) 系统的总动量之大小为()。
- (25) 系统对 B 点之动量矩的大小为()。
- 在碰撞结束后, AB 杆将继续运动。试分析它在继续运动的初瞬时下列各有关物理量。

- (26) AB 杆的角加速度 ϵ 的大小为()。
- (27) AB 杆中点 C 的加速度 a_C 的大小为()。
- (28) 桌面对 AB 杆的约束反力 N 的大小为()。
- (29) 质点 D 的加速度 a_D 的大小为()。

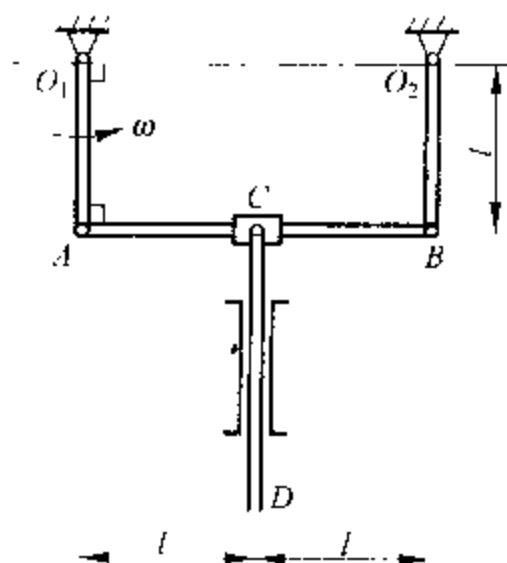


图 6

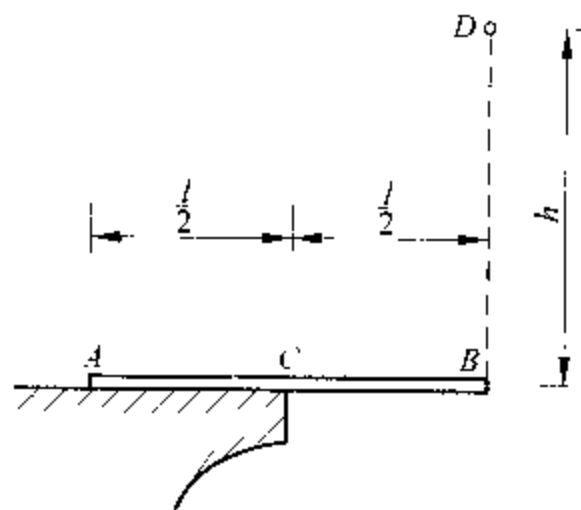


图 7

第二届全国青年力学竞赛理论力学试题答案

一、填空题

(1) 第一种说法 (2) 钱学森 (3) $2\sqrt{2}R$ (4) θ (5) $2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$

二、是非判断题

(6) 是 (7) 是 (8) 非 (9) 是 (10) 非 (11) 非 (12) 非 (13) 是
(14) 是 (15) 非 (16) 非

三、综合分析题

(17) $\sqrt{2}l\omega$ (18) $\sqrt{2}l\omega$ (19) $\sqrt{2}l\omega^2$ (20) $\sqrt{5}l\omega^2$ (21) $\sqrt{2}l\omega^2$

四、综合分析题

(22) $\frac{3}{4}\sqrt{2gh}$ (23) $\frac{3}{4}mgh$ (24) $\frac{3}{4}m\sqrt{2gh}$ (25) $\frac{1}{8}ml\sqrt{2gh}$

(26) $\frac{3g}{2l}$ (27) $\frac{9gh}{8l}$ (28) $\frac{5}{4}mg$ (29) $\frac{3}{4}g\sqrt{1+\left(\frac{3h}{2l}\right)^2}$

1996 年第三届全国周培源大学生 力学竞赛理论力学试题

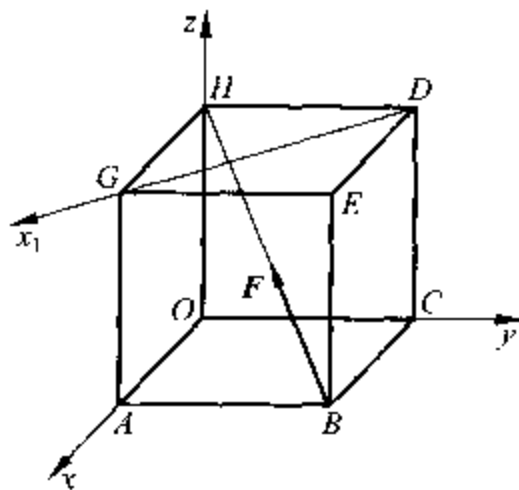
一、是非题(共 5 题,每题 3 分,请在答案纸的相应题号括弧内填“是”或“非”)

- (1) 一空间力系,若各力作用线与某一固定直线相平行,则其独立的平衡方程只有 5 个。()
- (2) 牵连运动为定轴转动时,不一定有科氏加速度。()
- (3) 平动刚体各点的动量对一轴的动量矩之和可以用作用于质心的刚体动量对该轴的动量矩表示。()
- (4) 平面运动刚体上惯性力系的合力必作用在刚体的质心上。()
- (5) 拉氏二类方程的适用范围是完整,理想约束,而动力学普遍方程则没有这些限制。()

二、选择题(共 5 题,每题 5 分,请将答案的序号填入答案纸的相应题号括弧内)

(6) 已知一正方体,各边长 a ,沿对角线 BH 作用一个力 F ,则该力在 x_1 轴上的投影为()。

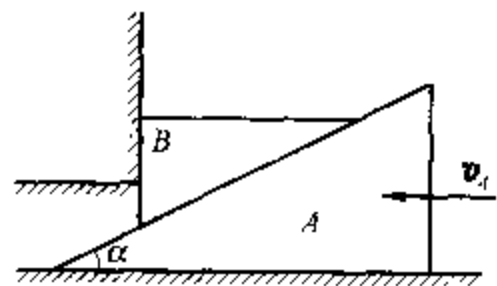
- ① 0;
- ② $F/\sqrt{2}$
- ③ $F/\sqrt{6}$
- ④ $-F/\sqrt{3}$



题 (6)

(7) 三角形楔块 B 置于楔块 A 的斜面上,若 A 块以 $v_A = 3\text{m/s}$ 的速度向左运动, $\alpha = 30^\circ$,则 B 块的速度 $v_B = ()\text{m/s}$ 。

- ① $\sqrt{3}$
- ② $2/3$
- ③ 3
- ④ $\sqrt{3}/3$



题 (7)

(8) 在图示系统中,滑块 A 以匀速度 $v_A = 1\text{m/s}$ 向下运动,杆 CD 长 1m ,当 $\alpha = 45^\circ$ 且杆 CD 水平时, AB 杆的角速度 $\omega_{AB} = ()\text{rad/s}$, CD 杆的角速度 $\omega_{CD} = ()\text{rad/s}$ 。

- ① 0
② 0.5
③ 1.0
④ $\sqrt{2}$

(9) 一弹性系数为 k 的弹簧下挂一质量为 m 的物体, 若物体从静平衡位置 (设静伸长为 δ) 下降 Δ 距离, 则弹性力所作的功为()。

- ① $\frac{1}{2}k\Delta^2$
② $\frac{1}{2}k(\delta+\Delta)^2$
③ $\frac{1}{2}k[(\delta+\Delta)^2 - \delta^2]$
④ $\frac{1}{2}k[\delta^2 - (\delta+\Delta)^2]$

(10) 图示系统中主动力作用点 C 、 D 、 B 的虚位移大小的比值为()。

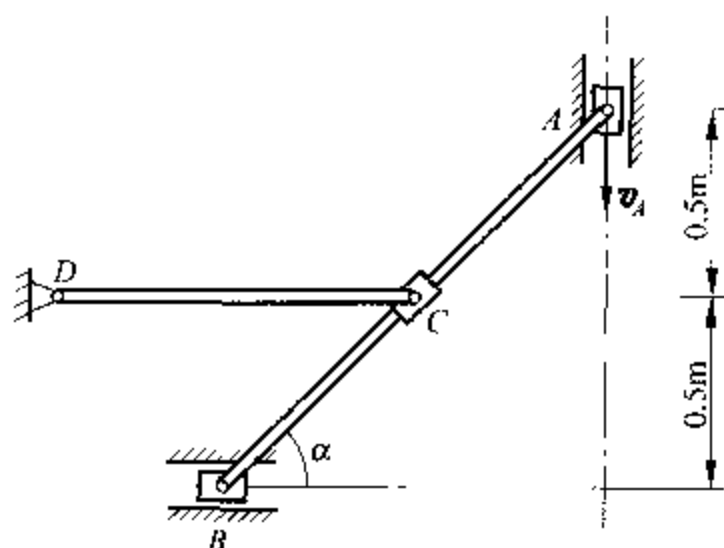
- ① 1 : 1 : 1
② 1 : 1 : 2
③ 1 : 2 : 2
④ 1 : 2 : 1

三、填空题(共6题, 第11~14题每题5分, 第15、16题每题10分。请将答案填入答案纸的相应题号括弧内)

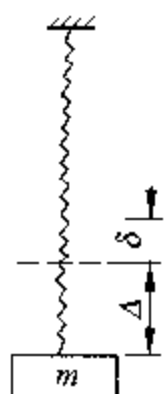
(11) 半径为 r , 重为 W 的均质圆柱体置于半径为 R 的圆槽底部, 接触面间的摩擦系数为 μ 。在圆柱体边缘缠绕一不计重量的柔绳, 端部悬挂重量 P , 则平衡时圆柱体的中心可以升高, OC 连线的最大偏角 θ 可达()。

(12) 重物 A 的质量为 m , 悬挂在弹性系数为 K 的铅垂弹簧上。若将弹簧截去一半, 则系统的固有频率为()。

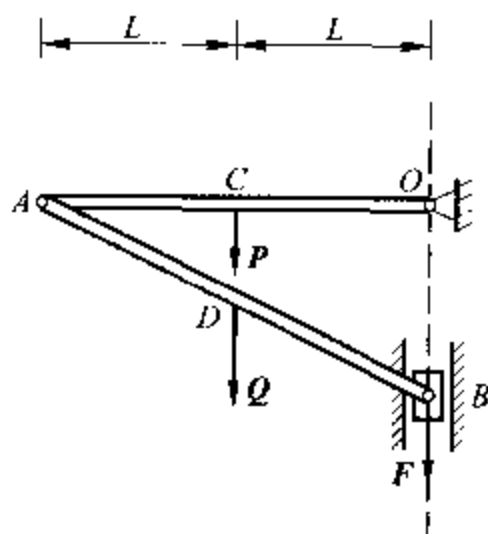
(13) 质量为 m_1 的物体上刻有半径为 r 的半圆槽, 放在光滑水平面上, 原处于静止状态, 有一质量为 m_2 的小球自 A 处无初速地沿光滑半圆槽下滑, 若



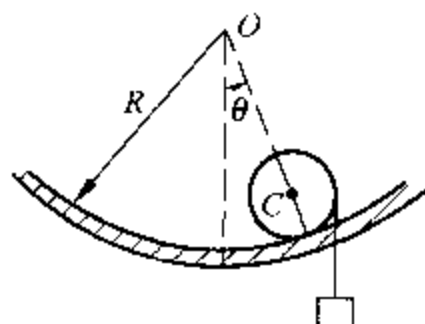
题 (8)



题 (9)

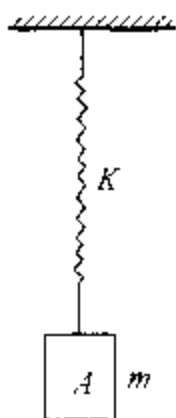


题 (10)

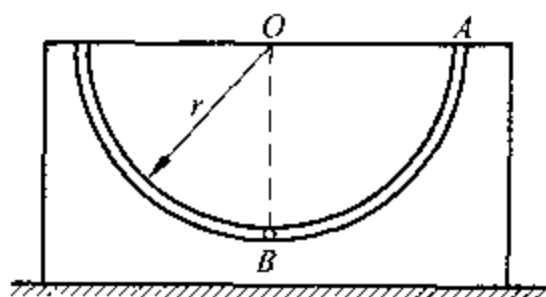


题 (11)

$m_1 = 3m_2$, 则小球滑至 B 处时, 小球相对于物体的速度为()。



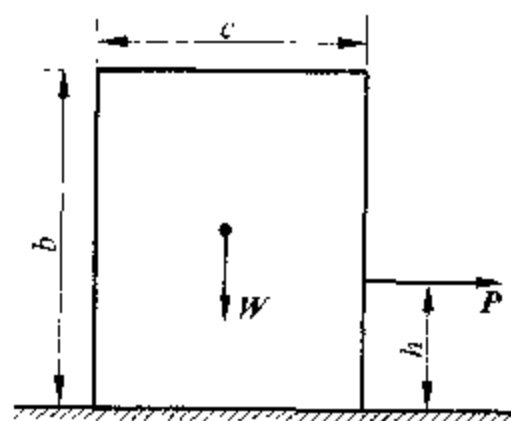
题 (12)



题 (13)

(14) 质量为 m 的方块沿倾斜的光滑斜面滑下, 质量为 m , 半径为 r 的薄圆环沿倾角相同的粗糙斜面无滑动地滚下。若二者从同一高度由静止同时出发, 则当下降同样距离时, 圆环所用时间是方块所用时间的()倍。

(15) 均质矩形块置于粗糙的地板上, 摩擦系数为 μ , 初始时静止。为使矩形块在水平力 P 作用下沿地板滑动而不倾倒, 作用点不能太高, 即 h 应比较小。 h 的极小值 h_{\min} 为()。



题 (15)

(16) 从载人飞船上观察到地球海洋某处有一作逆时针旋转的稳定的海洋环流, 旋转周期是 16 小时。可以确定, 这个海洋环流处于()半球, 纬度为()度。

四、综合分析题(A)(每题 5 分, 答案请写在答案纸上相应题号的括弧内)

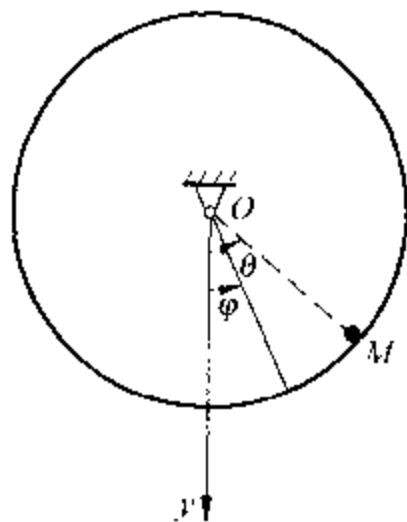
均质圆盘的半径为 r , 可绕其中心 O 在铅垂平面内自由转动, 转动惯量为 J 。一质量为 m 的甲虫 M , 以不变的相对速度 u 沿此圆盘的边缘运动。初瞬时, 圆盘静止不动, 甲虫 M 位于圆盘的最底部, 且已有相对速度 u 。

(17) 圆盘的转动微分方程式(以转角 φ 表示)是()。

(18) 甲虫 M 的绝对运动微分方程式(以 OM 连线的转角 θ 表示)是()。

(19) 圆盘沿切线方向给甲虫的作用力是()。

(20) 甲虫能升高到与 O 点相同高度的条件是()。



题 (17)~(20)

五、综合分析题(B)(每题6分,答案请写在答案纸上相应的括弧内)

质量为 M 的薄方盘上有一半径为 R 的光滑圆槽,方盘的质心在圆心 O 点,方盘对 O 的回转半径为 ρ 。在圆槽内有一质量为 m 的小球 B 。将该系统静止地放置在光滑的水平面上。现给小球 B 一沿圆周切线方向的冲击,使小球突然有一沿圆周切线方向的初速度 v_0 ,试求此后系统的运动。

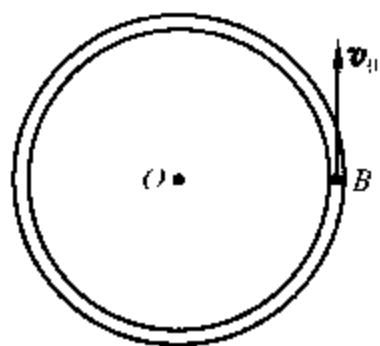
(21) 系统的自由度数是()。

(22) 系统质心作()运动,其速度大小为()。

(23) 在随系统质心运动的平动坐标系中观察,方盘作()运动,其质心 O 的轨迹是(),速度大小为()。

(24) 在上述平动坐标系中观察,小球 B 作()运动,速度大小为()。

(25) 方盘对小球的作用力大小为(),方向()。



题 (21)~(25)

第三届全国周培源大学生力学竞赛 理论力学试题答案

一、是非题

(1) 非 (2) 是 (3) 是 (4) 非 (5) 非

二、选择题

(6) ① (7) ① (8) ③, ① (9) ④ (10) ③

三、填空题

(11) $\arctan \mu$ (12) $\sqrt{2k/m}$ (13) $v_r = \frac{2\sqrt{6}}{3}\sqrt{gr}$ (14) $\sqrt{2}$ 倍

(15) 当 $P > \left(\mu + \frac{c}{b}\right)W$ 时, $h_{\min} = \frac{b}{2} - \frac{W}{2P}(\mu b + c)$

当 $\mu W < h_{\min} \leq \left(\mu + \frac{c}{b}\right)W$ 时, $h_{\min} = 0$ 。

(16) 在南半球, $\varphi = \arcsin \frac{\pi}{T\Omega} = \arcsin \frac{3}{4} = 48.6^\circ$

四、综合分析题(A)

(17) $(J + mr^2)\ddot{\varphi} + mgr \sin\left(\varphi + \frac{u}{r}t\right) = 0$ (18) $(J + mr^2)\ddot{\theta} + mgr \sin\theta = 0$

(19) $F = \frac{J}{J + mr^2} mg \sin\theta$ (20) 条件为 $u \geq \sqrt{2mgr^3/(J + mr^2)}$

五、综合分析题(B)

(21) 系统自由度数 $3 + 1 = 4$ 。

(22) 系统动量守恒, 质心 C 作等速直线运动, 速度大小为 $v_c = \frac{M \cdot 0 + mv_0}{M + m} = \frac{m}{M + m}v_0$ 。

(23) 方盘作平动, 在随质心运动平动坐标系中观察, O 作圆周运动。

方盘质心 O 的速度为 $\frac{mv_0}{M + m}$ 。

(24) 小球相对平动坐标系的运动为圆周运动, 速度为 $\frac{mv_0}{M + m}$ 。

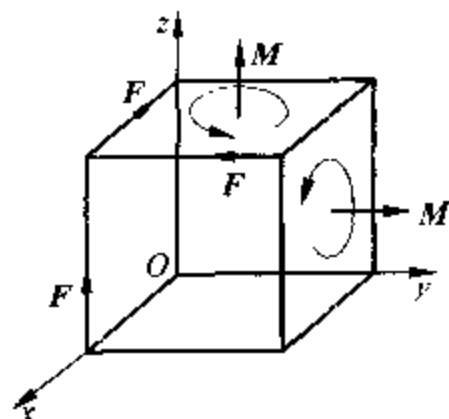
(25) 小球作等速圆周运动, 所受向心力大小为 $\frac{Mm}{M + m} \cdot \frac{v_0}{R}$, 方向始终指向 C 点或 O 点。

2000 年第四届全国周培源大学生 力学竞赛理论力学试题

题一(10 分)

立方体的边长为 a , 作用有力系如图。其中三个力的大小均为 F , 两个力偶的力偶矩大小均为 $M = Fa$, 方向如图。若欲使该立方体平衡, 只需在某处加一个力即可, 则在 $Oxyz$ 坐标系中,

- (1) 所加的力为_____。
- (2) 在图中画出该力的示意图。

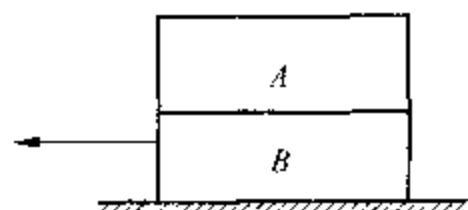


题 一

题二(10 分)

A、B 两物块质量均为 m , 静止如图叠放, 设各接触处的摩擦系数均为 μ 。

- (3) 若用手慢慢地去拉 B 块, 其运动现象为_____。
- (4) 若用手突然快速拉 B 块, 其运动现象为_____。
- (5) 在上述两种情况下, A 所能获得的最大水平加速度为_____。

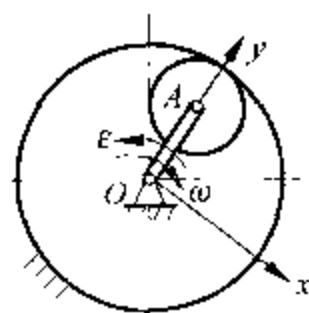


题 二

题三(10 分)

设均质圆盘齿轮 A 与一大齿轮内接, 齿轮 A 的质量为 m , 半径为 r , OA 杆长为 L , 坐标系 $Oxyz$ 与杆 OA 固结。若 OA 杆以角速度 ω 、角加速度 ϵ 转动, 方向如图。在图示位置, 将齿轮 A 的惯性力系向 O 点简化, 则在坐标系 $Oxyz$ 中,

- (6) 力系的主矢为_____。
- (7) 主矩为_____。

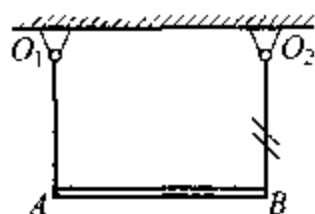


题 三

题四(10 分)

均质细杆 AB, 长为 L , 重量为 P , 由绳索水平静止悬挂如图。在突然剪断右端绳索的瞬间,

- (8) 若忽略绳索的变形, 则 A 端绳索的约束力大小为_____, AB 杆的角加速度大小为_____。
- (9) 若考虑绳索的弹性变形, 则 A 端绳索的约束

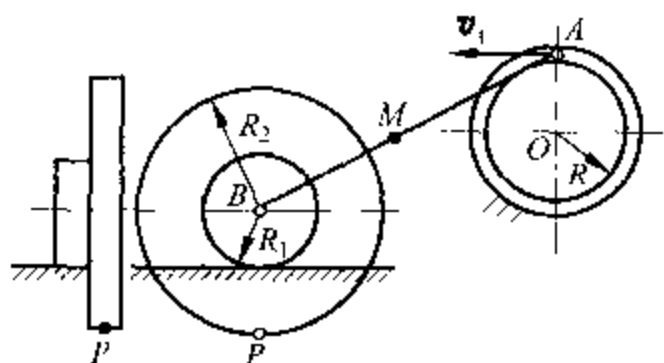


题 四

力大小为_____, AB 杆的角加速度大小为_____。

题五(10 分)

AB 杆的 A 端沿圆槽 O 运动, B 端与轮轴铰接。轮轴沿直线轨道只滚不滑。圆槽 O 半径为 R , 轮轴内外半径分别为 R_1 、 R_2 , AB 长为 L 。图示瞬时, 已知 A 点速度 v_A , AB 杆中点 M 的切向加速度为零。则此瞬时



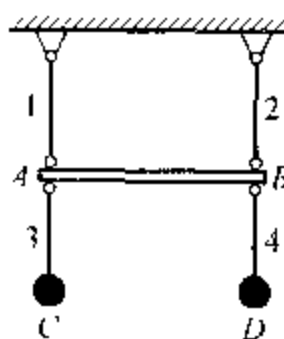
题 五

(10) P 点的速度 v_P 大小为_____。

(11) M 点的加速度大小为_____。

题六(15 分)

图示系统在铅垂面内运动, 刚性杆 1、2、3、4 长度均为 a , 质量不计。均质刚杆 AB 质量为 M , 长为 L 。C、D 两质点的质量均为 m , $M=2m$ 。



题 六

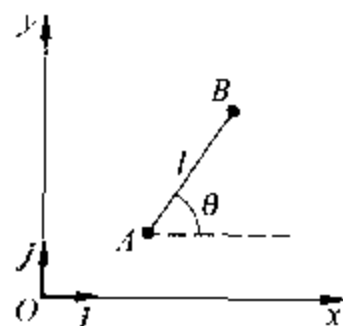
(12) 系统的自由度为_____。

(13) 当系统作微小运动时, 其运动微分方程为_____。

(14) 当系统作微小运动时, 3 杆与 4 杆的相对运动规律为_____。

题七(10 分)

在光滑水平桌面上, 质点 A、B 的质量均为 m , 由一不计质量的刚性直杆连接, 杆长为 l 。运动开始时 $\theta=0$, A 点在坐标原点, 速度为零, B 点速度为 $v\mathbf{j}$ 。则系统在运动过程中,



题 七

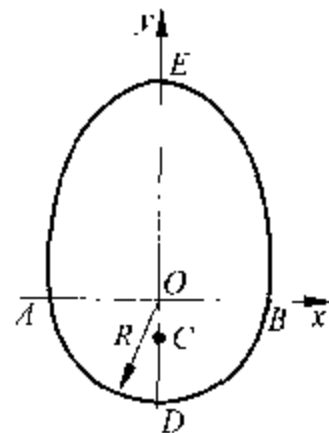
(15) 直杆转动的角速度 $\dot{\theta} =$ _____。

(16) A 点的运动轨迹是_____, B 点的运动轨迹是_____。

(17) 直杆的内力 $T =$ _____。

题八(15 分)

图示为一个简单的“不倒翁”模型, 由空壳 ADBE 和配重 C 组成。不计空壳质量, 其底部轮廓线 ADB 是半径为 R 的圆弧, 且充分粗糙。配重 C 在空壳内的 y 轴上, 质量为 M 。若要求“不倒翁”直立时平衡且稳定, 则



题 八

(18) 配重 C 的质量 M _____。

(a) 越大越好; (b) 越小越好; (c) 可为任意值; (d) 条件不够不能确定。

(19) 配重 C 的位置范围_____。

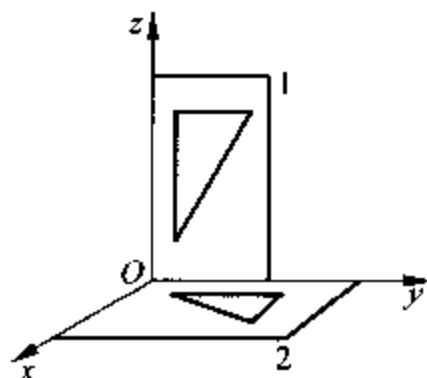
(20) 若已知 $M, R, \overline{OC} = d$, 则模型微摆动的周期为_____。

题九(10分)

设 $Oxyz$ 为参考坐标系, 矩形板(三角形为其上的标志)可绕 O 点作定点运动。为了使矩形板从状态 1 (yz 平面内) 运动到状态 2 (xy 平面内), 根据欧拉转动定理, 该转动可绕某根轴的一次转动实现, 则在 $Oxyz$ 坐标系中,

(21) 该转轴的单位矢量_____。

(22) 转角为_____。



题 九

第四届全国周培源大学生力学竞赛 理论力学试题答案

题一

- (1) $\mathbf{R} = F(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$ 。
 (2) 力的作用线沿 db' 连线, 方向由 d 指向 b' 。

题二

- (3) A, B 块同时向左运动, 无相对运动。
 (4) B 块向左运动, A 块跟不上 B 的运动而落下。
 (5) $a_{\max} = \mu g$ 。

题三

- (6) $\mathbf{R} = mL(\epsilon \mathbf{i} + \omega^2 \mathbf{j})$ 。
 (7) $\mathbf{M}_O = mL\epsilon \left(\frac{1}{2}r - L \right) \mathbf{k}$ (顺时针向)。

题四

- (8) $T = \frac{1}{4}P, \epsilon = \frac{3g}{2L}$
 (9) $T = \frac{1}{2}P, \epsilon = \frac{3g}{L}$

题五

- (10) $v_P = \frac{v_1(R_2 - R_1)}{R_1}$
 (11) $a_M = \frac{v_1'}{2R}$

题六

- (12) 3
 (13)
$$\begin{cases} (4\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_4) + 4g\theta_1/a = 0 \\ (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_3) + g\theta_1/a = 0 \\ (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_4) + g\theta_1/a = 0 \end{cases}$$
 , 其中 θ_i 表示第 i 根杆的转角。
 (14) $\theta_r = \theta_3 - \theta_4 = A \sin \left(\sqrt{\frac{g}{a}} t + \varphi \right)$, A, φ 为常数 (或简谐运动)。

题七

- (15) $\frac{v}{l}$ (16) A, B 的运动轨迹均为圆滚线 (或旋轮线、摆线)。

$$(17) \frac{mv^2}{2I}$$

题八

(18) (c)

(19) C 在 OD 之间, 含 D 不含 O 。

$$(20) 2\pi\sqrt{\frac{(R-d)^2}{gd}}$$

题九

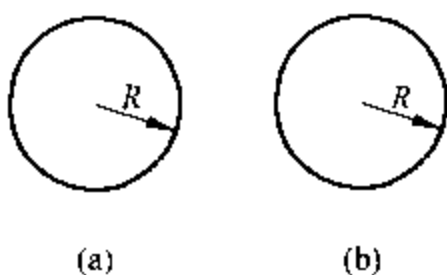
(21) 转轴为 $\boldsymbol{n} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$ 。(如果把矩形换为正方形, 不影响结果, 但容易计算。此时转轴就是立方体的对角线)

(22) 120° , 转向与 \boldsymbol{n} 相反(在立方体中易看出该转角相当于等边三角形的一个顶点绕中心转到另一个顶点)。

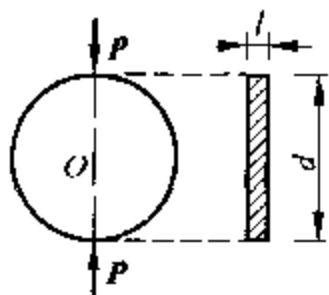
1988 年第一届全国青年力学竞赛材料力学试题

1. 试证明图(a)所示等截面均质薄圆环在其平面内承受任意自相平衡力系时, 其弯矩图的总面积必为零。此结论对于图(b)所示的带铰圆环是否正确?

2. 直径为 d 的均质圆盘, 沿直径两端承受一对大小相等方向相反的集中力 P 作用, 材料的弹性系数为 E 和 ν , 试求圆盘变形后的面积改变率 $\Delta A/A$ 。(其中 $A = \frac{\pi}{4}d^2$)

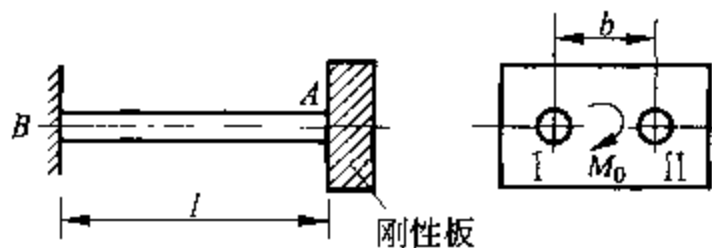


题 1



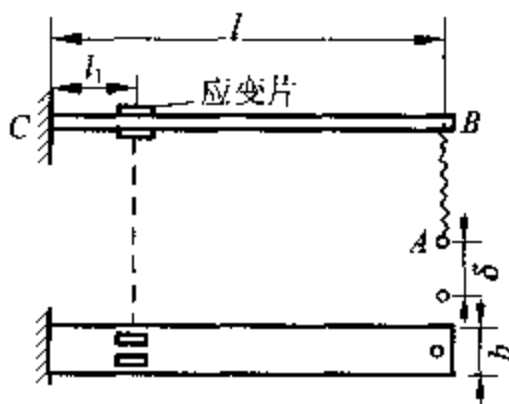
题 2

3. 相互平行的 I 及 II 两轴长度均为 l , B 端固定, A 端刚性固结于刚性平板上, 今在刚性平板上施加一力偶, 其力偶矩为 M_0 , 投影如图所示, 已知两轴的扭转刚度分别为 GI_{p1} 及 GI_{p2} , 弯曲刚度分别为 EI_1 及 EI_2 , 在小变形条件下刚性板位移保持在铅垂面内, 自重可以略去, 试求刚性板的扭转角 φ 的表达式。



题 3

4. 已知某位移传感器其测量原理如图所示, 试绘出应变片全桥接线图, 并建立输出应变与位移的关系(即 $\epsilon_{\text{仪}} - \delta$ 关系)式。已知线性受拉弹簧 AB 的端点 A 处位移为待测位移 δ , 弹簧刚度为 k ; 悬臂梁 BC(弹性元件)长度为 l , 宽度为 b , 厚度为 t , 材料的杨氏模量为 E , 泊桑比为 ν ; 应变片标距中心距固定端 C 端的距离为 l_1 。(应变片标距与 l, l_1 比较很小, 可忽略不计。)



题 4

5. 矩形截面混凝土简支梁(不加钢筋)如图(a)所示, 截面高为 h 宽为 b 。设材料的简化拉伸曲线如图(b)所示, 已知 $\alpha = \epsilon_u/\epsilon_j = 3.5$ 。试求:

(1) 当此梁最大弯矩截面的最大拉应变 ε_t 超过 ε_f 时, 弯矩的表达式(即求 $M=f(\sigma_f, \eta, \theta)$)。其中

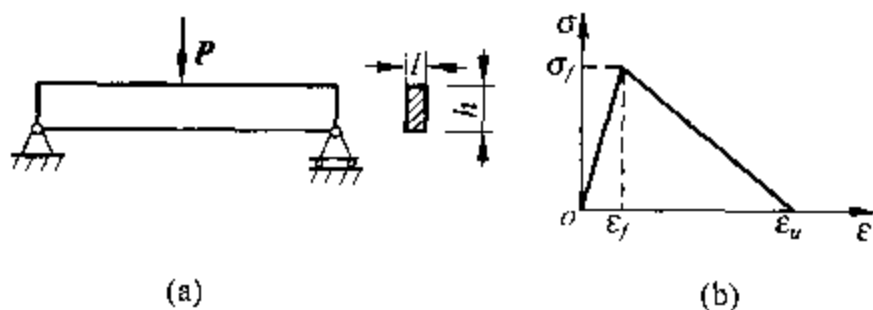
$$\eta = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_f}, \quad \theta = \frac{1-\sqrt{\beta}}{1-\beta}, \quad \beta = \frac{1+\lambda}{\eta} - \frac{\lambda}{\eta^2}, \quad \lambda = \frac{\alpha-\eta}{\alpha-1}$$

(2) 当 η 为多大时, 截面弯矩将达到极限值? 此时极限弯矩比按材料力学线弹性公式所得数值增大多少倍?

说明: 1. 变形的平面假定仍然适用;

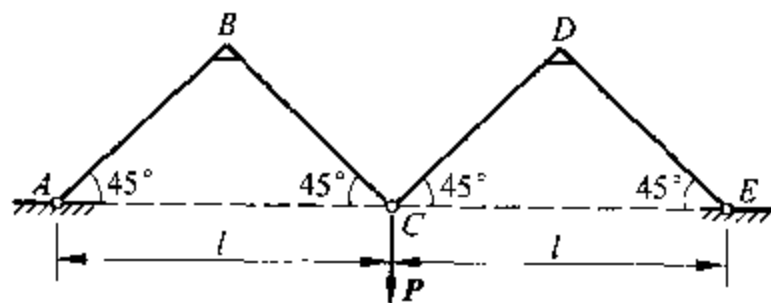
2. 材料受压区为线弹性, 不考虑可能出现的塑性状态;

3. 不考虑剪力的影响。



题 5

6. 如图所示结构为两完全相同的等边直角刚架所组成, A、C、E 为位于同一水平上的三个铰链, B、D 为刚结点。现于中间铰链 C 处作用一铅垂力 P, 若已知材料为线弹性, 各杆弯曲刚度均相同, 其值为 $EI = \text{常数}$ 。试计算:



题 6

(1) C 点的铅垂位移;

(2) 结构的应变能表达式。

说明: 计算刚架的应变能时, 略去轴力及剪切的影响。

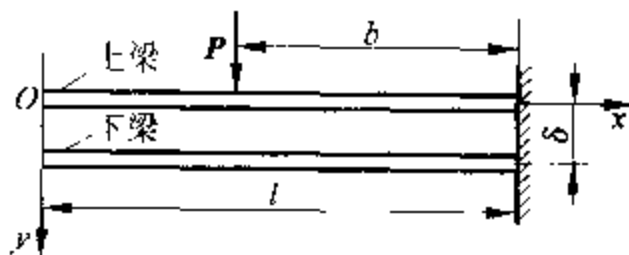
7. 图示的两根悬臂梁, 长均为 l , 初始间隙为 $\delta = dl$ 。上梁的弯曲刚度为 $D_1 = E_1 I_1$; 下梁的弯曲刚度为 $D_2 = E_2 I_2 = k D_1$ 。在离上梁固定端 $b = tl$ 处作用一集中力 P , 当 P 从零开始增加后, 开始两梁只在一点接触, 随后两梁将在一段区域内接触。

设将 P 表成无量纲形式 $P = \bar{P} \frac{D_1}{l^2}$, 试求下列问

题(以上 d, k, t 均为比例系数):

(1) 求 \bar{P}_1 及 \bar{P}_2 , 当 $\bar{P}_1 \leq \bar{P} \leq \bar{P}_2$ 时, 两梁只在一点接触;

(2) 当 $\bar{P} > \bar{P}_2$ 后两梁将有一段长为 ξl 的

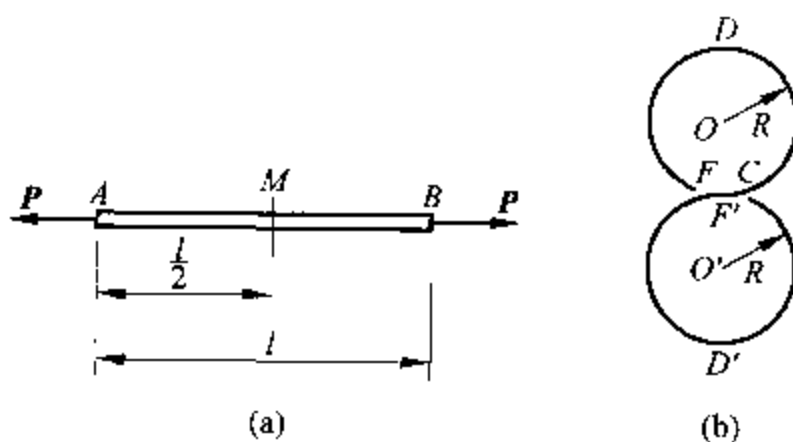


题 7

接触区, 求出 $\bar{\epsilon}$ 与 \bar{P} 的关系;

(3) 证明接触区内无分布反力, 而只在接触区与非接触区交界处有一集中反力 $Q = \bar{Q} \frac{D_1}{l^2}$, 试给出 \bar{Q} 的表达式。

8. 等截面直杆 AB , 长为 l , 两端自由, 截面为开口 8 字形薄壁截面, 其中线如下图(b)中 $FDCD'F'$ 所示, 缺口处 F 与 F' 相距为无限小, 因而截面中线可视为由两个开口整圆周(半径为 R)在 C 处相接而成, 壁厚为 t , ($t \ll R \ll l$)。在杆的两端截面上 C 点处各作用有轴向集中力 P , 试求杆中间截面 $M(x = \frac{l}{2})$ 上 C 点处的应力表达式。

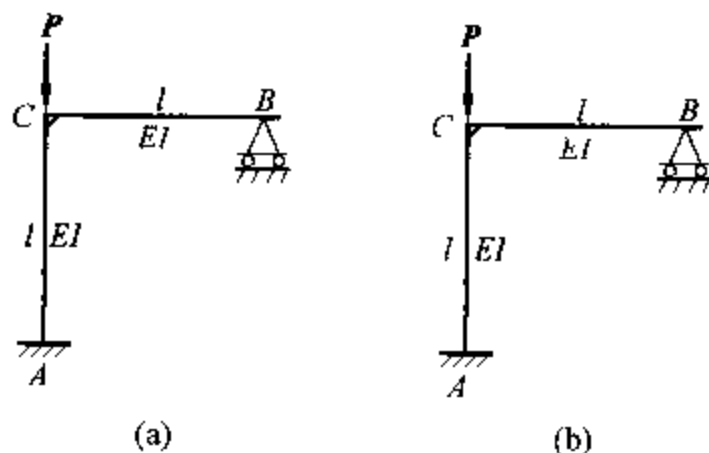


题 8

9. 已知图(a)所示的平面刚架, A 端固定, B 端为辊轴支座, C 为刚结点, 当 C 点受垂直力 P 作用时,

(1) 试求失稳时特征方程的形式及临界载荷值;

(2) 若 B 端改为固定铰支座时(如图(b)所示), 其失稳模式与情况(a)有何不同? 其临界载荷值可增加多少?



题 9

第一届全国青年力学竞赛材料力学试题答案

1. (a) 证明略。

(b) 此结论对于带铰圆环不成立。

$$2. \frac{\Delta A}{A} = \frac{4(1-\nu)}{\pi E d} P$$

$$3. \varphi = \frac{M_0}{\frac{GI_{p1}}{l} + \frac{GI_{p2}}{l} + \frac{12EI_1}{l^3} b_1^2 + \frac{12EI_2}{l^3} b_2^2},$$

$$b_1 = \frac{b}{1 + I_1/I_2}, \quad b_2 = \frac{bI_1/I_2}{1 + I_1/I_2}$$

$$4. \epsilon_{\text{max}} = \frac{24(l-l_1)kt}{Ebt^3 + 4l^3k} \delta$$

$$5. (1) M_f = \frac{1}{6} h^2 \sigma_f \left[2 \frac{\eta}{\theta} (1-\theta)^3 + 2 \frac{\eta^2}{\theta^2} + 3\lambda\theta^2 \left(1 - \frac{1}{\eta} \right) + \theta^2 (1-\lambda) \left(1 - \frac{1}{\eta} \right) \left(1 + \frac{2}{\eta} \right) \right]$$

$$(2) \eta = \frac{\epsilon_t}{\epsilon_f} = 2, \quad \beta = 0.65, \quad \theta = 0.5536, \quad r = \frac{M_f}{M_0} = 1.332$$

$$6. (1) \delta_1 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}PL^5}{12EI}}$$

$$(2) U = \frac{3\sqrt{2}EI}{2l^5} \delta_1^4$$

$$7. (1) \bar{P} = \bar{P}_1 = \frac{6d}{t^2(3-t)}, \quad \bar{P} = \bar{P}_2 = \frac{3-t}{1-t} \bar{P}_1$$

$$(2) \xi = (1-t) \left[1 - \frac{\bar{P}_2}{\bar{P}} \right]$$

$$(3) \bar{Q} = \bar{P} \left(\frac{t}{1-\xi} \right)^2 \frac{k}{1+k}$$

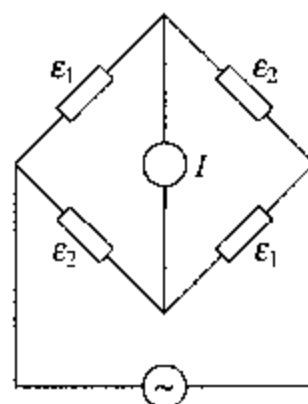
$$8. \sigma_c = \frac{P}{tR} \left[\frac{1}{4\pi} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\pi^2 + 5 \right)} \cdot \frac{1}{\text{ch} \frac{\alpha l}{2}} \right]$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{(2\pi^2 + 15)(1+\mu)}} \cdot \frac{t}{R^2} (\mu \text{ 为泊松比})$$

$$9. (1) \text{特征方程形式为 } kl \cos kl + 3 \sin kl = 0, \text{ 所以, } P_{cr1} = \frac{(kl)^2 EI}{l^2} = 6.032 \frac{EI}{l^2}$$

(2) 特征方程形式为 $6 - (6 + k^2 l^2) \cos kl - 2kl \sin kl = 0$, 所以,

$$P_{cr2} = \frac{(kl)^2 EI}{l^2} = 26.96 \frac{EI}{l^2}$$



1992 年第二届全国青年力学竞赛材料力学试题

一、图 1 表示一等截面直梁,其左端固支,而右端铰支并在跨度中点承受集中载荷 P ,力 P 作用于梁的对称面内,材料服从胡克定律,且弹性模量 E ,许用应力 $[\sigma]$ 、梁的跨长 L 、截面惯矩 I 与抗弯模量 W 均为已知。试

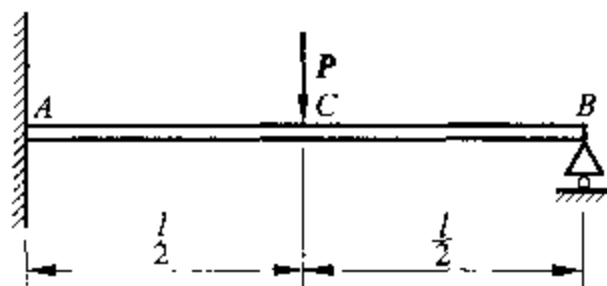


图 1

1. 确定铰支端反力 R_B 。(2 分)
2. 确定梁危险截面的弯矩 M 。(3 分)
3. 确定许用载荷 $[P]$ 。(3 分)

4. 移动铰支座在铅垂方向的位置,使许用载荷 $[P]$ 为最大。试求此时铰支座 B 在铅垂方向的位移 Δ_B (4 分) 与最大许用载荷 $[P]_{\max}$ 。(4 分)

二、图 2 表示一副双杠,它的每一根横梁系由两根立柱支撑,设两柱之间的跨长为 l ;每一横梁具有两个外伸段,设每一外伸段长度均为 a 。假定运动员在双杠上做动作时,在每一根横梁上只有一个力的作用点,力的作用线垂直于横梁,而且力的大小与作用点的位置无关。试决定在双杠设计中, l 与 a 的最佳比值,该比值使横梁重量为最轻,横梁与立柱的连接为铰接。 l/a 的最佳比值为多少? (8 分)

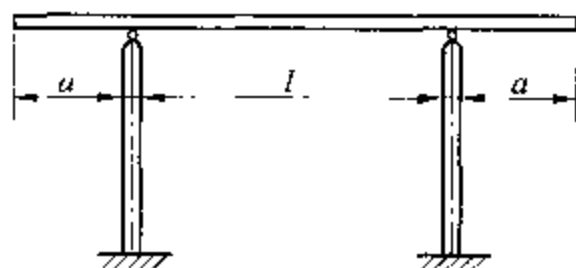


图 2

三、图 3 表示一等截面直梁的横截面,它是 Z 字形的。该梁受纯弯,材料服从胡克定律,且截面的惯性矩 I_x 与 I_y 以及惯性积 I_{xy} 均为已知。假定中性轴垂直于截面的腹板,即与 x 轴相重合,试确定弯矩矢量与 x 轴之夹角 θ 。(8 分)

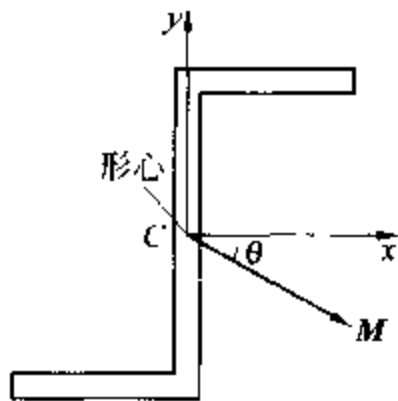


图 3

四、图 4 表示一匀质、等厚矩形板,承受一对集中载荷 P ,材料服从胡克定律,弹性模量 E 与泊松系数 ν 均为已知。设板具有单位厚度,试求板的面积 A 的改变量

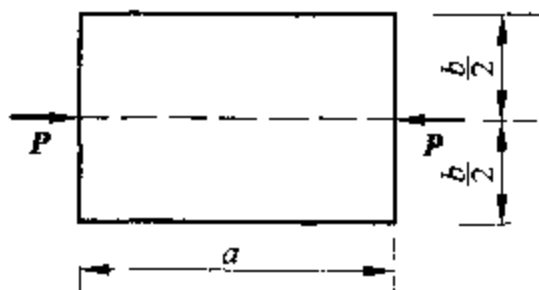


图 4

ΔA 。(8分)

五、为了在图5所示A与B两个固定点之间产生张力,人们常在这两点之间绷上两根绳子,然后从中点C绞紧。现设绳子的横截面为圆形,其半径为 r ,绳子材料的弹性模量为 E 。假定在绞紧过程中,A与B两点间的距离 $2l$ 保持不变,绳子的横截面形状与大小保持不变,同时在绞紧前,绳子的初始张力为零。试求为了使A与B之间的张力达到 P 所必需的绞紧圈数 n 。设 $2\pi rn \ll l$ 。(8分)

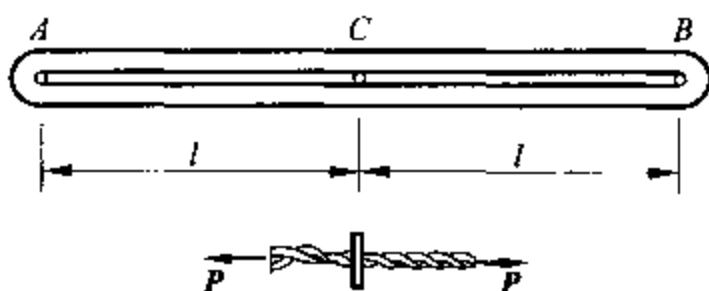


图 5

六、图6表示一等直杆,承受单轴均匀拉伸。变形前杆长为 L_0 ,横截面面积为 A_0 。在拉力为 P 时,杆长为 L ,横截面面积为 A 。材料进入塑性,可以略去弹性变形并假定杆件体积不变。这时轴向应变 ϵ 与横截面应力 σ 的关系具有如下的幂函数形式

$$\epsilon = k\sigma^n$$

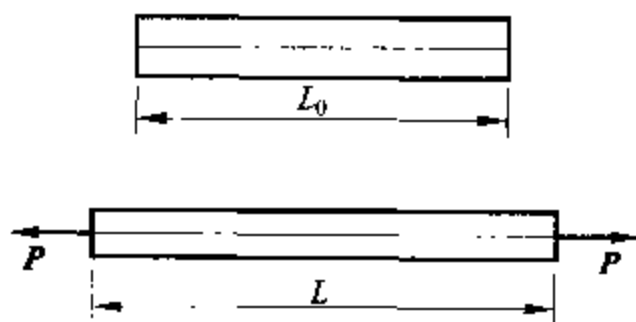


图 6

式中, k 与 n 均为材料已知常数且 $n > 1$ 。

1. 试求当拉力 P 达到极大值时杆的长度 L^* 。(8分)
2. 试求该拉力 P 的极大值 P_{\max} 。(4分)

七、图7表示两端固定的圆截面杆,其AB段为实心杆,BC段为空心杆,即圆管。两段杆材料相同。在杆的截面B处作用力偶矩 M ,在线弹性条件下,当许用力偶矩 $[M]$ 达到最大值时,两段长度比 $l_1/l_2 = ?$ (8分)

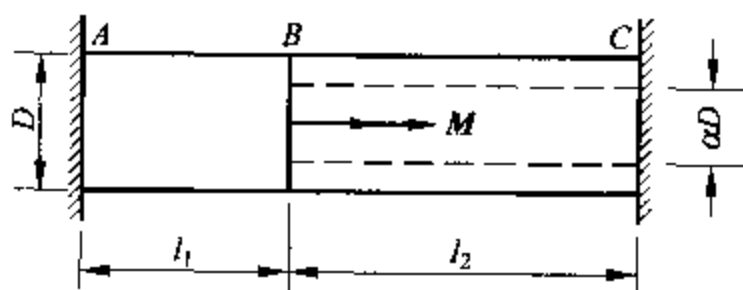


图 7

八、图8表示一根悬臂矩形截面等直弹性梁,在自由端固定一集中质量 M 。在梁的上表面撒了一些细沙粒,静平衡位置梁的挠度忽略不计。首先,给该梁自由端以初始向下的铅垂位移 δ 。然后,突然放松使梁产生振动。已知梁的截面惯性矩为 I ,长度为 l ,弹性模量为 E ,不计梁和沙粒质量对振动的影响。集中质量 M 的转动惯量亦略去不计。重力沿 y 轴的负方向,重力加速度为 g ,试求:

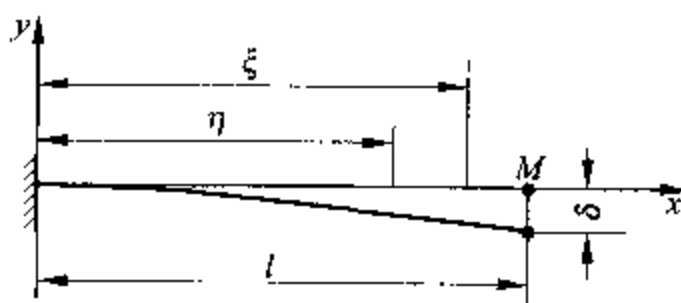


图 8

1. 梁的固有频率 ω 。(3 分)
2. 在梁振动任意时间 t 时 x 截面的弯矩 $M(x, t)$ 。(3 分)
3. 在梁振动时, 如果有一个位置 η (见图 8), 当沙粒坐标 $\xi > \eta$ 时, 沙粒将跳离该梁, 试写出确定 η 的条件(如由方程确定, 可不解方程, 只作说明)(3 分)
4. 梁上总有沙粒跳离该梁的条件是 $\delta > \delta^*$, $\delta^* = ?$ (3 分)

九、图 9 表示由铅垂刚性杆和两根钢丝绳组成的结构, 刚性杆上端受铅垂压力 P 、钢丝绳的横截面面积为 A 、弹性模量为 E , 钢丝绳的初拉力为零。设结构不能在垂直于图面方向运动。试求该结构的临界载荷 P_{cr} 。(8 分)

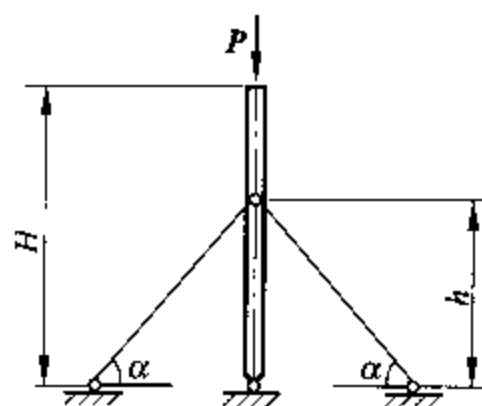


图 9

十、图 10 表示由五根等直杆与刚性梁 AB 组成的平面结构。各杆的弹性模量 E 、横截面面积 A 、长度 l 与间距 b 均相同且已知。在刚性梁上距杆 1 为 a ($a < 2b$) 处作用一铅垂载荷 P , 今欲通过电测方法测定 P 和 a 的值。试

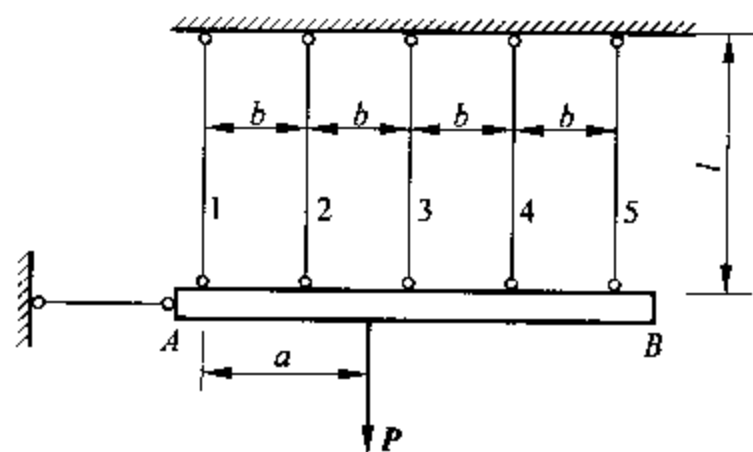


图 10

1. 给出最佳贴片方案:
应变片的片数。(2 分)
应变片各贴在何处。(2 分)
2. 给出 P 和 a 与测得的应变值 ϵ_i (i 为杆的编号) 的关系式。
 $P = ?$ (4 分) $a = ?$ (4 分)

第二届全国青年力学竞赛材料力学试题答案

一、 $R_B = \frac{5}{16}P$, $M = \pm \frac{3}{16}Pl$, $[P] = \frac{16}{3l}W[\sigma]$

$$\Delta_B = \frac{Pl^3}{144EI}, \quad [P]_{\max} = \frac{6}{l}W[\sigma]$$

二、 $\frac{l}{a} = 4$

三、 $\theta = \arctan\left(\frac{I_{xy}}{I_y}\right)$

四、 $\Delta A = -\frac{P}{E}(1-\nu)a$

五、 $n = \frac{l}{2\pi r^2} \sqrt{\frac{P}{\pi E}}$

六、 $L^* = \frac{nL_0}{n-1}$, $P_{\max} = \frac{A_0}{k^{1/n}} \cdot \frac{(n-1)^{\frac{n-1}{n}}}{n}$

七、 $\frac{l_1}{l_2} = 1$

八、 $\omega = \sqrt{\frac{3EI}{Ml^3}}$, $M(x, t) = -\frac{3EI\delta}{l^3}(l-x)\cos\omega t$

η 的条件: $x^2(3l-x) = \frac{2gl^3}{\delta\omega^2} = \frac{2gl^6M}{3\delta EI}$, $\delta^* = \frac{Mgl^3}{3EI}$

九、 $P_{cr} = \frac{hEA\sin\alpha\cos^2\alpha}{H}$

十、应变片的片数为 2; 贴片位置: 杆 1、杆 5; $P = \frac{5EA}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2)$,

$$a = b\left(2 - \frac{\epsilon_1 - \epsilon_5}{\epsilon_1 + \epsilon_5}\right)$$

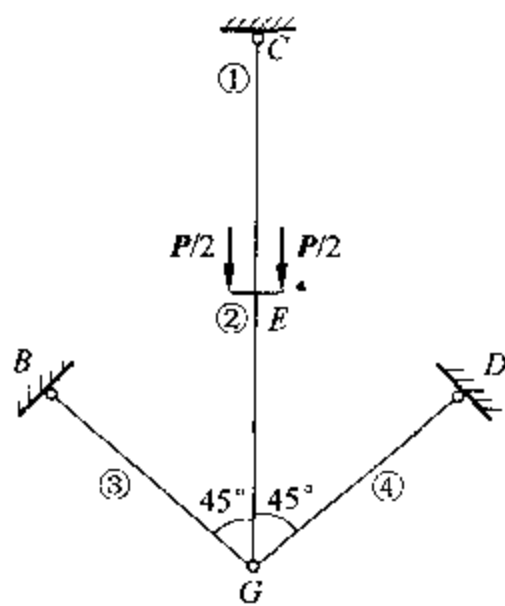
1996 年第三届全国周培源大学生力学 竞赛材料力学试题

一、(10 分)

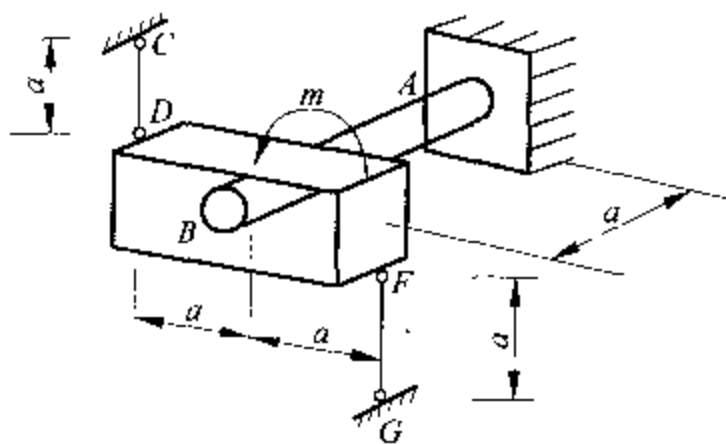
图示结构,各杆的抗拉(压)刚度均为 EA ,杆 BG, DG, GE, CE 长度均为 l ,在 E 处作用力 P 。求各杆的轴力 $N_i (i=1, 2, 3, 4)$ 。

二、(10 分)

一结构如图所示, AB 轴的抗扭刚度 GI_p 、杆 CD 和 FG 的抗拉刚度 EA 、尺寸 a 及外力偶 m 皆已知。圆轴与横梁牢固结合,垂直相交,立杆与横梁铰接,也垂直相交,横梁可视为刚体。试求杆的轴力 N 及圆轴所受的扭矩 T 。



题 一



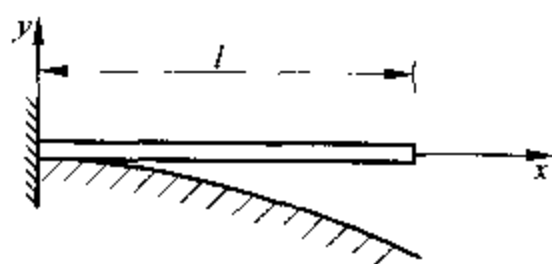
题 二

三、(10 分)

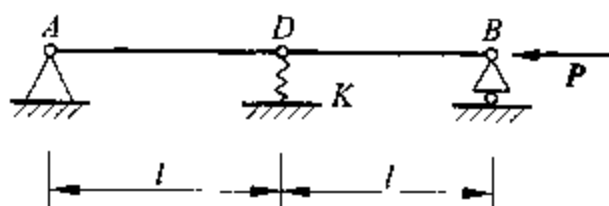
等截面悬臂梁抗弯刚度 EI 已知,梁下有一曲面,方程为 $y = -Ax^3$ 。欲使梁变形后与该曲面密合(曲面不受力),问梁的自由端应施加什么载荷,即力 P 与力矩 M 的值。

四、(10 分)

图示刚性杆,由弹簧支持,弹簧刚度为 K ,试导出它的临界载荷 P_{cr} 。



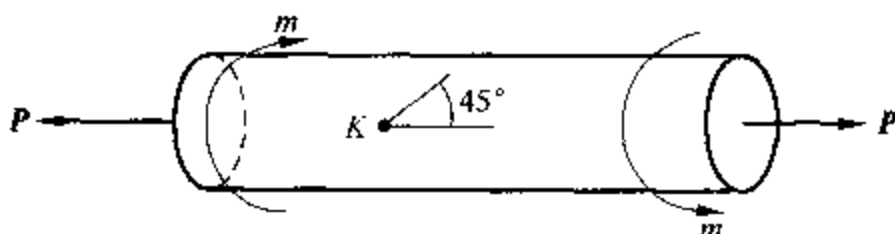
题 三



题 四

五、(10分)

图示圆杆, $d=200\text{mm}$, $P=200\pi\text{kN}$, $E=200\times 10^3\text{MPa}$, $\nu=0.3$, $[\sigma]=170\text{MPa}$, 在杆表面上 K 点处的 $\epsilon_{45^\circ}=-3\times 10^{-4}$ 。用第四强度理论校核强度。



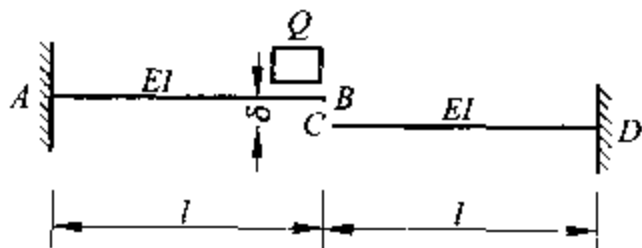
题 五

六、(10分)

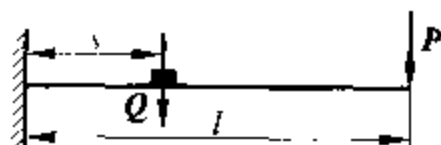
图示两相同梁 AB 、 CD , 自由端间距 $\delta=\frac{Ql^3}{3EI}$ 。当重为 Q 的物体突然加于 AB 梁的 B 点时, 求 CD 梁 C 点的挠度 f 。

七、(10分)

长为 l 的悬臂梁, 在距固定端 s 处放一重量为 Q 的重物, 重物与梁之间有摩擦系数 μ 。在自由端处作用力 P 。



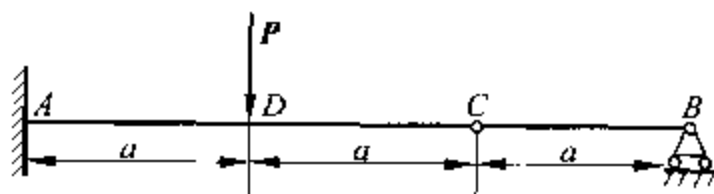
题 六



题 七

(1) 什么条件下不加力 P , 重物就能滑动。(5分)

(2) 需加 P 才能滑动时求 P 的值。(5分)



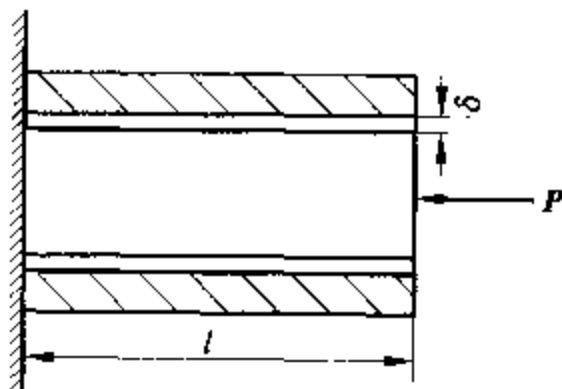
题 八

八、(10分)

图示带铰的梁, 在铰 C 处允许梁的转角不连续, 试求转角间断值 $\Delta\theta$ 。梁的抗弯刚度为 EI 。

九、(10分)

一半径为 a , 长 l 的弹性圆轴(弹性系数为 E 、 ν), 套在一刚性厚管内, 轴和管之间有初始间隙 δ , 设轴受集中轴力 P 作用, 当 $P=P_1$ 时轴和刚性壁接触, 求 P_1 值。(4分)



题 九

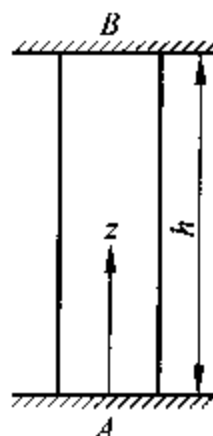
当 $P > P_1$ 后, 壁和轴之间有压力, 记 μ 为摩擦系数, 这时轴能靠摩擦力来承受扭矩, 当扭矩规定为 M 时, 求对应的 P 值。(6 分)

十、(10 分)

相隔为 120° 的三片应变花, 应变片 1、2、3 按反时针编号, 今测出 ϵ_1 、 ϵ_2 、 ϵ_3 并发现 $\epsilon_2 = \epsilon_3$, 试给出主应变 ϵ_I 、 ϵ_{II} 。

十一、(10 分)

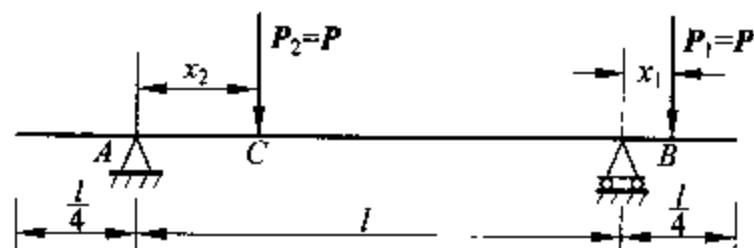
高为 h 的直立圆柱只受容重为 γ 的自重作用, 若将其上、下端固定且保持柱的原长 h 不变, 若柱材料抗拉弹性模量 E_1 不等于抗压弹性模量 E_2 , 试确定当 $\sigma = 0$ 时, $z = c$ 中的 c 值。



题 十一

十二、(10 分)

图示的梁受两个集中力 $P_1 = P$ 及 $P_2 = P$ 作用。 P_1 只允许作用在延伸段, ($0 \leq x_1 \leq l/4$), 而 P_2 允许在支座间移动 ($0 \leq x_2 \leq l$)。现在求 P_1 作用点的最佳位置 x_1 , 使 P_2 在支座间任意位置时, 梁的弯矩都不超过许用弯矩 $[M]$, 并使 P 取最大值, 求 x_1 及对应的最大 P 值。



题 十二

第三届全国周培源大学生力学竞赛 材料力学试题答案

一、 $N_1 = \frac{2}{3}P$, $N_2 = -\frac{1}{3}P$, $N_3 = N_4 = \frac{\sqrt{2}}{6}P$

二、 $N = \frac{maEA}{GI_p + 2a^2EA}$, $T = \frac{GI_p N}{aEA}$

三、 $P = 6AEI$ (向上), $M = 6EAIL$ (顺时针)

四、 $P_{cr} = Kl/2$

五、 $\sigma = \frac{4P}{\pi d^2} = 20\text{MPa}$;

$$\tau = \frac{(1-\nu)\sigma - 2E\epsilon_{45^\circ}}{2(1+\nu)} = 51.5\text{MPa};$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = 91.5\text{MPa} < [\sigma].$$

六、 $f = \frac{\delta}{\sqrt{2}}$

七、当 $2EI f \leq Qs^2$, 不需加力; 否则就加力 $P = \frac{2EI\mu - Qs^2}{s(2l - s)}$ 。

八、 $\Delta\theta = \frac{4Pa^2}{3EI}$

九、1. $P = P_1 = \frac{\pi a E \delta}{\nu}$

2. $P > P_1$ 后, $P = P_1 + \Delta P = P_1 + \frac{(1-\nu)M}{2l\mu\nu}$

十、两种答案:

当 $\epsilon_2 = \epsilon_3 < \epsilon_1$ 时, $\epsilon_I = \epsilon_1$, $\epsilon_{II} = \frac{1}{3}(4\epsilon_2 - \epsilon_1)$

或当 $\epsilon_2 = \epsilon_3 > \epsilon_1$ 时, $\epsilon_I = \frac{1}{3}(4\epsilon_2 - \epsilon_1)$, $\epsilon_{II} = \epsilon_1$

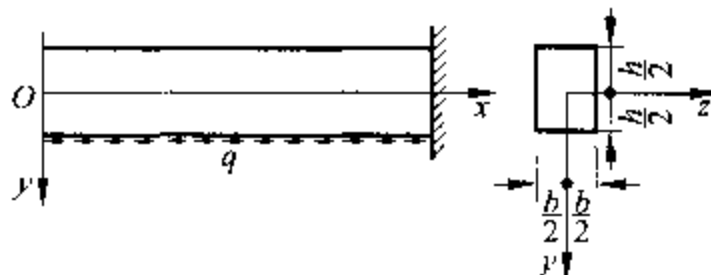
十一、 $c = \frac{\sqrt{E_1 E_2} - E_2}{E_1 - E_2} h$; 如 $E_1 = E_2$, 则 $c = \frac{h}{2}$ 。

十二、 $x_1 = (3 - 2\sqrt{2})l = 0.172l < l/4$, $P = [M]/x_1$

2000 年第四届全国周培源大学生力学 竞赛材料力学试题

题一(25 分)

如图所示,狭长矩形截面直杆单侧作用有轴向均布剪切载荷,其单位长度上的大小为 q 。

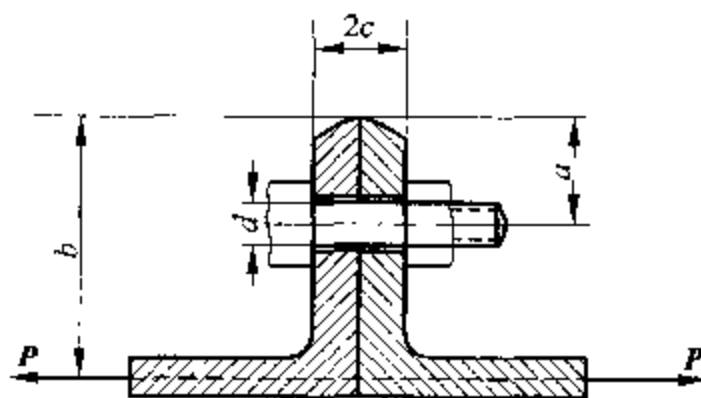


1. (5 分)任意截面上的轴力 $N(x) =$ _____ 与弯矩 $M(x) =$ _____。
2. (5 分)如果平面假设与胡克定律成立,任意横截面上正应力 $\sigma(x, y) =$ _____。
3. (5 分) q 、 N 与 M 之间的平衡微分关系为 _____。
4. (10 分)任意横截面上剪应力 $\tau(x, y)$ _____。

题 一

题二(20 分)

今有两个相同的 L 型元件,用螺栓连接,以传递拉力 P 。几何尺寸如图所示。L 型元件是刚体,螺栓是线性弹性体,其拉压弹性模量为 E ,许用正应力为 $[\sigma]$ 。设两 L 型元件间无初始间隙,也无预紧力,并设在变形过程中两个螺母与 L 型元件始终贴合,螺栓与 L 型元件在孔壁间无相互作用力,则



题 二

1. (5 分)在 L 型元件孔内一段螺栓的轴力 $N =$ _____。
2. (5 分)在 L 型元件孔内一段螺栓的弯矩 $M =$ _____。
3. (5 分)两个 L 型元件相对转角 $\Delta\theta =$ _____。
4. (5 分)许用拉力 $[P]$ _____。

题三(20 分)

矩形等截面悬臂梁高 h ,宽 b ,长 l 。重 Q 的重物从高 $H = \frac{60Ql^3}{EI}$ 处落到自由端并附着于它。梁的质量不计, E 为材料的弹性模量, I 为截面轴惯性矩。

1. (5 分)梁内最大冲击正应力 $\sigma_{d\max} =$ _____。

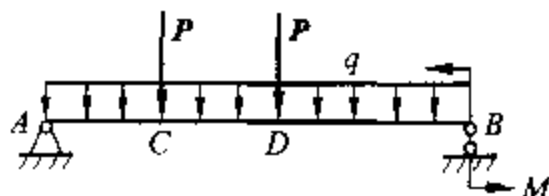
将梁设计成两段等长的阶梯梁(两段各长 $l/2$),梁高 h 保持不变,各段梁宽度可按要求设计。在梁内最大冲击正应力不变的条件下,按最省材料原则,阶梯梁在靠自

由端一段宽 b_1 , 靠固定端一段宽 b_2 , 则

2. (5 分) $b_1/b_2 =$ _____。
3. (10 分) 阶梯梁比等截面梁节省材料(分数或百分数表示) _____。

题四(15 分)

如图所示, 简支梁 AB 承受均布载荷 q , 在 C 、 D 两点作用有两个相等的集中力 P , 在 B 点作用有集中力偶 M 。 U 是梁的应变余能(线弹性情形下等于应变能)。

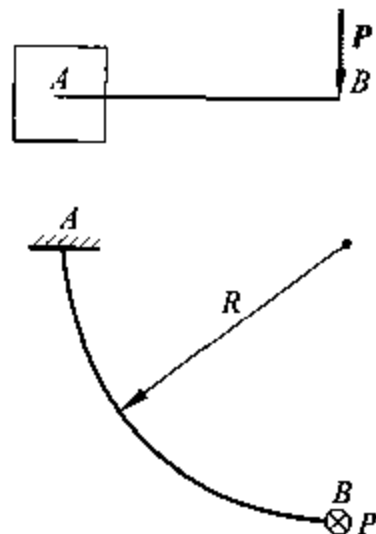


题 四

1. (5 分) $\frac{\partial U}{\partial M}$ 的几何意义为 _____。
2. (5 分) $\frac{\partial U}{\partial P}$ 的几何意义为 _____。
3. (5 分) $\frac{\partial U}{\partial q}$ 的几何意义为 _____。

题五(20 分)

曲杆 AB 的轴线是半径为 R 的四分之一圆弧, 杆的横截面是直径为 d 的实心圆, $d \ll R$, 杆的 A 端固定, B 端自由, 并在 B 端作用有垂直于杆轴线所在平面的集中力 P 。已知材料的拉压弹性模量 E 、剪切弹性模量 G 与许用拉应力 $[\sigma]$ 。

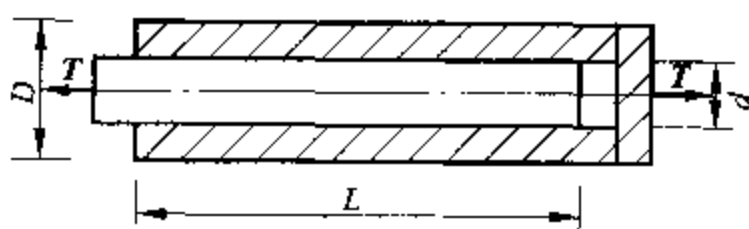


题 五

1. (10 分) 按第三强度理论, 许用载荷 $[P] =$ _____。
2. (10 分) 在载荷 P 的作用下, 自由端绕杆轴线的转角 $\theta_B =$ _____。

题六(20 分)

如图所示, 为传递扭矩 T , 将一实心圆轴与一空心圆轴以紧配合的方式连接在一起。设两轴间均匀分布的配合压强 p 、摩擦系数 μ 、实心轴直径 d 、空心轴外径 D 、连接段长度 L 均为已知。两轴材料相同。



题 六

1. (5 分) 二轴在连接段全部发生相对滑动时的临界扭矩值 $T_{cr} =$ _____。
2. (15 分) 设初始内外轴扭矩均为零, 当传递的扭矩从 0 增加到 $T = \frac{2}{3} T_{cr}$ 时(无卸载过程), 绘制实心内轴在连接段 L 的扭矩图(假定材料力学关于圆轴扭转的公式全部成立)。

第四届全国周培源大学生力学竞赛 材料力学试题答案

题一

1. $N(x) = qx, \quad M(x) = \frac{1}{2}qhx$
2. $\sigma(x, y) = \frac{qx}{bh} + \frac{6qxy}{bh^2}$
3. $\frac{dN}{dx} = q, \quad \frac{dM}{dx} = \frac{1}{2}qh$
4. $\tau(x, y) = \frac{1}{4bh^2}(h^2 - 4hy - 12y^2)q$

题二

1. $N = \frac{16Pab}{16a^2 + d^2}$
2. $M = \frac{Pbd^2}{16a^2 + d^2}$
3. $\Delta\theta = \frac{128Pbc}{\pi Ed^3(16a^2 + d^2)}$
4. $[P] = \frac{\pi d^3(16a^2 + d^2)[\sigma]}{32b(2a + d)}$

题三

1. $\sigma_{d\max} = \frac{120Ql}{bh^2}$
2. $b_1/b_2 = 0.5$
3. $\frac{13}{40} = 32.5\%$

题四

1. 截面 B 的转角 θ_B
2. C, D 两点挠度之和 $w_C + w_D$
3. 由梁弯形前后两轴线所围成的面积

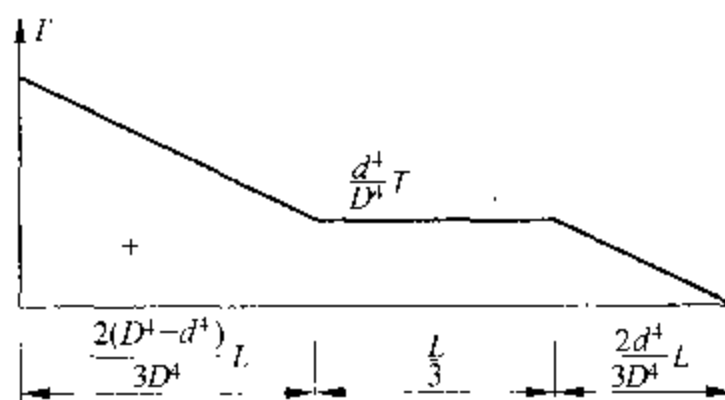
题五

1. $[P] = \frac{\sqrt{2}\pi d^3}{64R}[\sigma]$
2. $\theta_B = \frac{16PR^2}{Ed^4} + \frac{32PR^2}{Gd^4} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \right)$

题六

$$1. T_{cr} = \frac{1}{2} \pi d^2 \mu p L$$

2.



[G e n e r a l I n f o r m a t i o n]

书名 = 力学小问题及全国大学生力学竞赛试题

作者 =

页数 = 2 3 4

S S 号 = 0

出版日期 =

V s s 号 = 6 5 0 4 4 9 8 7