ID 22031212122

NAME Xiaoning Shu

TEAC Qiulin Huang

DATE 20230601

Matrix Theory

Homework Of Matrix Theory Per Chapter

1. *HOMEWORK 1 P25-26 3, 5, 7, 9*

3 QUE

判别下列集合对所指运算是否构成R上的线性空间:

(1) 次数等于$m(m \geqslant 1)$的实系数多项式的集合,对于多项式的加法和数与多项式的乘法;

(2) 实对称矩阵的集合,对于矩阵的加法和实数与矩阵的乘法;

(3) 平面上全体向量的集合,对于通常的加法和如下定义的数乘运算 $k \circ x = \vec{0}$.

3 ANS

(1) 不构成,在加法和在乘法上,两个系数相加或相乘可能会超过m,因此不封闭.

(2) 构成,因为实矩阵的加法与乘法都是在相应的加法和乘法结果内,实矩阵相加仍然是实矩阵,实矩阵相乘仍然是实矩阵,构成封闭性。

(3) 不构成,对于八大法则来说,当$x \neq 0$时, $1 \circ x = 0$时就不满足了。

5 QUE

求习题3之(2) 中线性空间的维数与基.

5 ANS

假设$\mathbf{A}$的维度为$n \times n$,则实对称矩阵有对角线上的元素和下三角（或上三角）的元素共计$\frac{n(n+1)}{2}$个,由于对角线上的元素对称,只需考虑下三角（或上三角）的元素。因此,实对称矩阵的维度为$\frac{n(n+1)}{2}$。基的选取可以考虑将下三角(或上三角)的某个元素置为1,其余元素为0

7 QUE

求向量P_2中向量$1 + t + t^2$对基: $1, t - 1, (t - 2)(t - 1)$的坐标.

7 ANS

假设坐标(a,b,c) 即有

$a*1+b*(t-1)+c*(t-2)(t-1)=1+t+t^2$

解得

$$\begin{cases} a=3 \\ b=4 \\ c=1 \end{cases}$$

所以在该基下的坐标为$(3,4,1)^T$.

9 QUE

在 R^4 中有两个基

$$x_1=e_1, x_2=e_2, x_3=e_3, x_4=e_4$$

$$y_1=(2,1,-1,1), y_2=(0,3,1,0)$$

$$y_3=(5,3,2,1), y_4=(6,6,1,3)$$

(1)求由前一基改变为后一基的过渡矩阵

(2)求向量$x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$对后一基的坐标

(3)求对两个基有相同坐标的非零向量

9 ANS

(1) 根据$y=XC_2$可知

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C_2$$

解得

$$C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) $x = yC_1, y = XC_2$ 可知：$C_2^{-1}x = C_1$

所以x在后一基中的坐标为$C_2^{-1}x$.

(3) 设 $a = yC, a = XC$

解得 $(y - I)C = 0$

化简为阶梯型后为：

$$(y-I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以最终结果为$a = k(1, 1, 1, -1)^T$ k为不为0的常数

2. *HOMEWORK 2 P25-26 11, 12, 13*

11 QUE

求 R^4 的子空间

$V_1 = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \mid \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4 = 0\}$

$V_2 = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \mid \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0\}$

的交$V_1 \cap V_2$的基。

11 ANS

上面子空间的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可以进行阶梯最简化,所以秩为2, 所以基为 $y = k_1(0, 1, 0, -1) + k_2(1, 0, -1, 0)$

12 QUE

给定$R^{2\times 2} = \{A = (a_{ij})_{2\times 2} | a_{ij} = \in R\}$ (数域R上的 2阶方阵按通常矩阵的加法与数乘矩阵构成的线性空间)的子集

$$V = \{A = (a_{ij})_{2\times 2} | a_{ij} \in R \quad and \quad a_{11} + a_{22} = 0\}$$

(1)证明V是$R^{2\times 2}$的子空间

(2)求V的维数和一个基

12 ANS

(1) 要证明 V 是 $R^{2\times 2}$ 的子空间,我们需要验证以下三个条件：

(i) 零向量属于 V：

我们可以找到一个属于 V 的零向量,即满足 $a_{11}+a_{22}=0$ 的零矩阵：零矩阵满足条件,属于 V。

(ii) 加法封闭性：

假设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 和 $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ 是 V 中的任意两个矩阵,即 $a_{11}+a_{22}=0$ 和 $b_{11}+b_{22}=0$。

我们需要证明 $A+B$ 也属于 V,即 $(A+B)_{11}+(A+B)_{22}=0$。

计算 $(A+B)_{11}+(A+B)_{22}$：

$$(A+B)_{11}+(A+B)_{22}=(a_{11}+b_{11})+(a_{22}+b_{22})$$

由于 $a_{11}+a_{22}=0$ 和 $b_{11}+b_{22}=0$,我们可以得到：

$$(A+B)_{11}+(A+B)_{22}=0+0=0$$

因此,$A+B$ 也满足条件,属于 V。

(iii) 数乘封闭性：

假设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 是 V 中的矩阵,即 $a_{11}+a_{22}=0$。k 是任意的实数。

我们需要证明 kA 也属于 V,即 $(kA)_{11}+(kA)_{22}=0$。

计算 $(kA)_{11}+(kA)_{22}$：

$$(kA)_{11}+(kA)_{22}=k(a_{11})+k(a_{22})$$

由于 $a_{11}+a_{22}=0$,我们可以得到：

$$(kA)_{11}+(kA)_{22}=k(0)=0$$

因此,kA 也满足条件,属于 V。

由 (i),(ii),(iii) 可知,V 是 $R^{2\times 2}$ 的子空间。

(2) 要求 V 的维数和

一个基,我们可以先找到一个基,然后计算其维数。

我们已知 V 的元素满足 $a_{11}+a_{22}=0$。可以选择以下矩阵作为基：

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

这三个矩阵线性无关,并且任意满足条件 $a_{11} + a_{22} = 0$。因此,$\{B_1, B_2, B_3\}$ 是 V 的基。

接下来,我们计算基的个数,即 V 的维数。

由于 $\{B_1, B_2, B_3\}$ 是 V 的基,所以 $\mathrm{span}(\{B_1, B_2, B_3\}) = V$。我们需要确定基的个数。

观察矩阵 B_1, B_2, B_3,它们都是 2×2 的矩阵,因此,$\mathrm{span}(\{B_1, B_2, B_3\})$ 的维数最多为 $2 \times 2 = 4$。

然而,我们可以注意到 B_1, B_2, B_3 中存在一个线性关系:

$$B_1 + B_2 + B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

由于 $1 + (-1) = 0$,我们可以发现 $B_1 + B_2 + B_3$ 也属于 V。因此,$\mathrm{span}(\{B_1, B_2, B_3\})$ 中存在冗余向量。

通过观察,我们可以发现 $\{B_1, B_2, B_3\}$ 中的向量是线性无关的。因此,$\mathrm{span}(\{B_1, B_2, B_3\})$ 的维数为 3。

综上所述,V 的维数为 3

13 QUE

试证明所有二阶矩阵之集合形成的实线性空间是所有二阶实对称矩阵之集合形成的子空间与所有二阶反对称矩阵之集合形成的子空间的直和

13 ANS

我们需要证明两个条件:

1. 实对称矩阵子空间与实反对称矩阵子空间的交集只包含零矩阵。 2. 任意二阶矩阵可以表示为一个实对称矩阵和一个实反对称矩阵的和。

首先,我们定义实对称矩阵子空间为集合S,其中包含所有二阶实对称矩阵。实反对称矩阵子空间定义为集合A,其中包含所有二阶实反对称矩阵。

证明第一个条件:实对称矩阵子空间与实反对称矩阵子空间的交集只包含零矩阵。

设矩阵M同时属于S和A,即$M \in S$且$M \in A$。

由实对称矩阵的定义可知,M满足$M^T = M$。而实反对称矩阵的定义为N满足$N^T = -N$。

因此,我们有$M^T = M = -M$,这意味着M必须是零矩阵。

证明第二个条件:任意二阶矩阵可以表示为一个实对称矩阵和一个实反对称矩阵的和。

设任意二阶矩阵P,我们将证明存在一个实对称矩阵Q和一个实反对称矩阵R,使得$P = Q + R$。

令$Q = \frac{1}{2}(P + P^T)$,$R = \frac{1}{2}(P - P^T)$。

首先验证Q是否为实对称矩阵：$(Q^T)^T = \left(\frac{1}{2}(P+P^T)\right)^T = \frac{1}{2}(P^T+(P^T)^T) = \frac{1}{2}(P^T+P) = Q$。因此,$Q$为实对称矩阵。

接下来验证R是否为实反对称矩阵：$(R^T)^T = \left(\frac{1}{2}(P-P^T)\right)^T = \frac{1}{2}((P^T)^T-P^T) = \frac{1}{2}(P-P^T) = -R$。因此,$R$为实反对称矩阵。

最后,我们有：$Q+R = \frac{1}{2}(P+P^T)+\frac{1}{2}(P-P^T) = P$

由此可见,任意二阶矩阵可以表示为一个实对称矩阵和一个实反对称矩阵的和,所有二阶矩阵之集合形成的实线性空间是所有二阶实对称矩阵之集合形成的子空间与所有二阶反对称矩阵之集合形成的子空间的直和

3. *HOMEWORK 3 P77-78 1, 2, 6, 7*

1 QUE

判断下列变换中哪些是线性变换

(a) 在R^3中,设$x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), Tx = ({\xi_1}^2, \xi_1+\xi_2, \xi_3)$

(b) 在矩阵空间中$R^{n\times n}$中,$Tx = BXC$,这里B, C是固定矩阵

(c) 在线性空间中P_n中,$Tf(t) = f(t+1)$

1 ANS

(a) 不是线性变换。

因为$T(2x) = (4\xi_1^2, 2\xi_1+2\xi_2, 2\xi_3)$,但是$2T(x) = (2\xi_1^2, 2\xi_1+2\xi_2, 2\xi_3)$。

(b) 是线性变换。

(c) 是线性变换。

2 QUE

在R^2中,设 $x = (\xi_1, \xi_2)$. 证明$T_1x = (\xi_2. -\xi_1)$与$T_2x = (\xi_1, -\xi_2)$是 R^2的两个线性变换,并求T_1+T_2, T_1T_2及T_2T_1

2 ANS

设$k, l \in R, y = (\alpha_1, \alpha_2) \in R^2$,$kx+ly = (k\xi_1+l\alpha_1, k\xi_2+l\alpha_2)$

$T_1(kx+ly) = (k\xi_2+l\alpha_2, -k\xi_1-l\alpha_1) = kT_1(x)+lT_1(y)$

所以T_1是线性变换,同理T_2也是线性变换.

所以$(T_1+T_2)x = T_1(x)+T_2(x) = (\xi_2+\xi_1, -\xi_1-\xi_2)$

$(T_1T_2)x = T_1T_2(x) = (xi_2, -\xi_1)$

$(T_2T_1)x = T_2T_1(x) = (\xi_2, \xi_1)$.

6 QUE

六个函数

$x_1 = e^{at}\cos bt, \quad x_2 = e_{at}\sin bt, \quad x_3 = te^{at}\cos bt$

$x_4 = te^{at}\sin bt, \quad x_5 = \frac{1}{2}t^2e^{at}\cos bt, \quad x_6 = \frac{1}{2}t^2e^{at}\sin bt$

的所有实系数线性组合构成实数域R上的一个六维线性空间$V^6 = L(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$,求微分变换D在基$x_1, x_2, \cdots, x_6$下的矩阵

6 ANS

$D_{x_1} = ae^{at}\cos bt - e^{at}b\sin bt = ax_1 - bx_2$

$D_{x_2} = ae^{at}\sin bt + e^{at}b\cos bt = bx_1 + ax_2$

$D_{x_3} = e^{at}\cos bt + tae^{at}b\cos bt - te^{at}b\sin bt = x_1 + ax_3 - bx_4$

$D_{x_4} = e^{at}\sin bt - tae^{at}b\cos bt + te^{at}b\cos bt = x_2 + bx_3 + ax_4$

$D_{x_5} = te^{at}\cos bt + \frac{1}{2}t^2ae^{at}b\sin bt - \frac{1}{2}t^2e^{at}b\sin bt = x_3 + ax_5 - bx_6$

$D_{x_6} = te^{at}\sin bt + \frac{1}{2}t^2ae^{at}\sin bt + +\frac{1}{2}t^2e^{at}b\cos bt = x_4 + bx_5 + ax_6$

所以

$$D = \begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & a \end{bmatrix}$$

7 QUE

已知R^3的线性变换T在基$x_1 = (-1, 1, 1), x_2 = (1, 0, -1), x_3 = (0, 1, 1)$下的矩阵是

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

求T在基$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$下的矩阵。

7 ANS

由题意得： $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

所以在新基下的矩阵为 $C^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}C=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -2\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 2\end{bmatrix}$

4. *HOMEWORK 4 P106-107 1(1) (2), 2, 4, 5, 10, 11*

1(1)(2) QUE

设$x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)$是$R^n$的任意两个向量, $A=(a_{ij})_{n*n}$

是正定矩阵,令$(x,y)=xAy^T$,则

(1)证明在该定义下R^n形成欧式空间

(2)求R^n对于单位向量$e_1=(1,0,0,\ldots,0),e_2=(0,1,0,\ldots,0),\ldots,e_n=(0,0,0,\ldots,0,1)$的度量矩阵

1(1)(2) ANS

(1) 要证明R^n形成欧式空间,需要满足以下条件：

(i) 零向量的存在：由于$x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$是$R^n$的任意向量,令$x=0$,则有$(0,y)=0Ay^T=0$,因此零向量存在。

(ii) 向量的加法：满足定义要求。

(iii) 数乘：数乘满足定义要求。

(iv) 内积的存在：定义内积为$(x,y)=xAy^T$,根据矩阵的性质,内积满足交换律和线性性质：内积满足定义要求。

综上所述,R^n在给定的内积定义下满足欧式空间的所有条件。

(2)要求R^n对于单位向量$e_1=(1,0,0,\ldots,0),e_2=(0,1,0,\ldots,0),\ldots,e_n=(0,0,0,\ldots,0,1)$的度量矩阵, 即求出矩阵$G$,其中$G_{ij}=(e_i,e_j)$

根据内积的定义,有：

$$\begin{aligned}(e_i,e_j)&=e_iAe_j^T\\ &=(e_i)_1a_{11}(e_j)_1+(e_i)_1a_{12}(e_j)_2+\cdots+(e_i)_1a_{1n}(e_j)_n\\ &\quad+(e_i)_2a_{21}(e_j)_1+(e_i)_2a_{22}(e_j)_2+\cdots+(e_i)_2a_{2n}(e_j)_n\\ &\quad+\ldots\\ &\quad+(e_i)_na_{n1}(e_j)_1+(e_i)_na_{n2}(e_j)_2+\cdots+(e_i)_na_{nn}(e_j)_n\\ &=a_{ii}\end{aligned}$$

因此,度量矩阵G的元素$G_{ij}=(e_i,e_j)$等于正定矩阵A的对角线元素a_{ii}。换言之,度量矩阵G即为正定矩阵A的对角线元素构成的矩阵。

2 QUE

设$x_1, x_2, \ldots, x_n$是湿陷性空间v^n的基,向量$x=\xi_1 x_1+\xi_2 x_2+\cdots+\xi_n x_n, y=\eta_1 x_1+\eta_2 x_2+\cdots+\xi_n x_n$对应于实数$(x, y)=\sum_{i=1}^n i \xi_i \eta_i$,试问$V^n$是否是欧式空间。

2 ANS

要确定V^n是否是欧式空间,我们需要验证欧式空间的定义条件:

(i) 零向量的存在:零向量表示为$x=0 x_1+0 x_2+\cdots+0 x_n$,对应的实数为$(x, y)=\sum_{i=1}^n i(0)(0)=0$。因此,零向量存在。

(ii) 向量的加法:向量的加法满足定义要求。

(iii) 数乘:数乘满足定义要求。

(iv) 内积的存在:定义内积为$(x, y)=\sum_{i=1}^n i \xi_i \eta_i$,根据内积的定义,内积满足交换律和线性性质:

$$
\begin{aligned}
(x, y) & =\sum_{i=1}^n i \xi_i \eta_i \\
& =\sum_{i=1}^n i \eta_i \xi_i \\
& =(y, x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x, a y) & =\sum_{i=1}^n i \xi_i\left(a \eta_i\right) \\
& =a \sum_{i=1}^n i \xi_i \eta_i \\
& =a(x, y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x, y+z) & =\sum_{i=1}^n i \xi_i\left(\eta_i+\zeta_i\right) \\
& =\sum_{i=1}^n i \xi_i \eta_i+\sum_{i=1}^n i \xi_i \zeta_i \\
& =(x, y)+(x, z)
\end{aligned}
$$

因此,内积满足定义要求。

综上所述,V^n在给定的内积定义下满足欧式空间的所有条件。

4 QUE 在R^4中,求一单位向量与$(1,1,-1,1),(1,-1,-1,1)$及$(2,1,1,13)$均正交

4 ANS

在 $\mathbb{R}^4$ 中找到一个与向量 $(1,1,-1,1)$、$(1,-1,-1,1)$ 和 $(2,1,1,13)$ 正交的单位向量。

首先,我们需要找到一个与这些向量正交的向量。我们可以通过求解线性方程组来获得这个向量。

设该向量为 (x, y, z, w)，我们可以得到以下方程组：

$$(1, 1, -1, 1) \cdot (x, y, z, w) = 0$$
$$(1, -1, -1, 1) \cdot (x, y, z, w) = 0$$
$$(2, 1, 1, 13) \cdot (x, y, z, w) = 0$$

该齐次线性方程组的非零解为 $x = (4, 0, 1, -3)$, 然后进行单位化。

因此，单位向量为：$(\frac{4}{\sqrt{26}}, 0, \frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{-3}{\sqrt{26}})$。

5 QUE

设x_1, x_2, x_3, x_4, x_5是欧式空间V^5的一个标准正交基。$V_1 = L(y_1, y_2, y_3)$,其中$y_1 = x_1 + x_5, y_2 = x_1 - x_2 + x_4, y_3 = 2x_1 + x_2 + x_3$,求 V_1的一个标准正交基

5 ANS

因为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，所以$y_1, y_2, y_3$线性无关。

因此,y_1, y_2, y_3就是V_1的一个基,我们只需要对它们进行单位化即可得到一个标准正交基。

向量y_1的长度为：

$$\|y_1\| = \sqrt{y_1 \cdot y_1} = \sqrt{(x_1 + x_5) \cdot (x_1 + x_5)}$$

向量y_2的长度为：

$$\|y_2\| = \sqrt{y_2 \cdot y_2} = \sqrt{(x_1 - x_2 + x_4) \cdot (x_1 - x_2 + x_4)}$$

向量y_3的长度为：

$$\|y_3\| = \sqrt{y_3 \cdot y_3} = \sqrt{(2x_1 + x_2 + x_3) \cdot (2x_1 + x_2 + x_3)}$$

现在,我们可以计算标准正交基：

$$u_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}, \quad u_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}, \quad u_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|}$$

其中,u_1, u_2, u_3是V_1的标准正交基。请注意,上述计算中使用了向量的点乘和长度的定义。另外,由于给出的是x_1, x_2, x_3, x_4, x_5是欧式空间V^5的一个标准正交基,我们假设这五个向量是单位向量。

10 QUE

设T是欧式空间V中的线性变换,且对$x, y \in V$,有

$$(Tx, y) = -(x, Ty)$$

则称T为反对称变换,证明T为反对称变换的冲要条件是,T在V的标准正交基下的矩阵A为反对称矩阵,即有$A^T = -A$

10 ANS

我们需要证明两个方向：

证明必要性：

假设T是反对称变换,我们需要证明T在V的标准正交基下的矩阵A满足$A^T = -A$。

由于我们考虑的是V的标准正交基,设该基为$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$,则对于任意的$i$和$j$,有$(v_i, v_j) = \delta_{ij}$,其中$\delta_{ij}$是Kronecker delta符号,当$i = j$时为1,否则为0。

设向量v在基$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$下的坐标表示为$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$,其中$\mathcal{B}$是基$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$。

考虑(Tv, v)的内积,根据反对称变换的定义有：

$$(Tv, v) = -(v, Tv)$$

将v的坐标表示和T的矩阵表示相结合,可以得到：

$$(Tv, v) = ([Tv]_{\mathcal{B}})^T [v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T A \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

同样地,我们可以得到：

$$(v, Tv) = [v]_{\mathcal{B}}^T A^T [v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T A^T \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

由于$(Tv, v) = -(v, Tv)$,我们有：

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T A \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T A^T \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

对于任意的向量v,上式成立,因此我们可以得到：

$$A = -A^T$$

即矩阵A为反对称矩阵,证明了必要性。

充分性：

设向量v在基$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$下的坐标表示为$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$,其中$\mathcal{B}$是基$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$。

根据T的矩阵表示,我们有$[Tv]_{\mathcal{B}} = A[v]_{\mathcal{B}}$。

考虑(Tv, v)的内积,根据矩阵乘法的定义有：

$$(Tv, v) = ([Tv]_{\mathcal{B}})^T [v]_{\mathcal{B}} = (A[v]_{\mathcal{B}})^T [v]_{\mathcal{B}}$$

展开上式,我们可以得到：

$$(Tv, v) = (A[v]_{\mathcal{B}})^T [v]_{\mathcal{B}} = ([v]_{\mathcal{B}})^T A^T [v]_{\mathcal{B}}$$

由于A为反对称矩阵,即$A^T = -A$,上式可以继续化简为：

$$(Tv, v) = ([v]_{\mathcal{B}})^T A^T [v]_{\mathcal{B}} = -([v]_{\mathcal{B}})^T A[v]_{\mathcal{B}}$$

而根据内积的定义,我们有$(v, Tv) = -([v]_{\mathcal{B}})^T A[v]_{\mathcal{B}}$。

由于$(Tv, v) = -(v, Tv)$,我们得到了反对称变换的定义。因此,T是反对称变换。

综上所述,T为反对称变换的必要条件是T在V的标准正交基下的矩阵A为反对称矩阵,即$A^T = -A$。

11 QUE

对于下列矩阵A,求正交（酉）矩阵P,使$P^{-1}AP$为对角矩阵：

(a) $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & j & 1 \\ -j & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

11 ANS

使得$P^{-1}AP$为对角矩阵,我们可以通过特征值分解来解决这个问题。

(1) 对于矩阵$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$,我们可以计算其特征值和特征向量。

首先,我们计算特征值。解方程$|A - \lambda I| = 0$,其中λ为特征值,I为单位矩阵。

得到特征值方程$(2-\lambda)((5-\lambda)^2-16)+2(4(5-\lambda)+8)=0$。

解这个方程,我们可以得到三个特征值：$\lambda_1=9$,$\lambda_2=3$,$\lambda_3=0$。

接下来,我们计算每个特征值对应的特征向量。解方程组$(A-\lambda_i I)X=0$,其中X为特征向量。

对于特征值$\lambda_1=9$,解方程组得到特征向量$X_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}$。

对于特征值$\lambda_2=3$,解方程组得到特征向量$X_2=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$。

对于特征值$\lambda_3=0$,解方程组得到特征向量$X_3=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$。

接下来,我们将特征向量标准化得到单位特征向量。

单位特征向量$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$

最后,我们计算$P^{-1}AP$,得到对角矩阵。

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

因此,对于矩阵A,正交矩阵P为$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$,$P^{-1}AP$为对角矩阵$\begin{bmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$。

(2) 对于矩阵A $=\begin{bmatrix}0 & j & 1\\ -j & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$,我们同样可以按照上述步骤进行求解。

首先,计算特征值。解方程$|A-\lambda I|=0$,得到特征值方程$\lambda^3+1=0$。

解这个方程,我们得到三个特征值：$\lambda_1=-1$,$\lambda_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j$,$\lambda_3=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j$。

接下来,计算每个特征值对应的特征向量。解方程组$(A-\lambda_i I)X=0$,得到特征向量。

对于特征值$\lambda_1=-1$,解方程组得到特征向量$X_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$。

对于特

征值$\lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$,解方程组得到特征向量$X_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j \\ 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j \end{bmatrix}$。

对于特征值$\lambda_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j$,解方程组得到特征向量$X_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j \\ 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j \end{bmatrix}$。

标准化特征向量得到单位特征向量。

单位特征向量$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

计算$P^{-1}AP$得到对角矩阵。

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & j & 1 \\ -j & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j \end{bmatrix}$$

因此,对于矩阵A,正交矩阵P为$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$,$P^{-1}AP$为对角矩阵$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j \end{bmatrix}$.

5. *HOMEWORK 5 P79 19(1)(3) P106 1(1)(2), 2, 4, 5, 10*

19(1)(3) QUE

求下列各矩阵的Jordan标准型。

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -7 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

19(1)(3) ANS

(1) $det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1)$, A有三个不同的特征值，从而A的Jordan标准型为$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$

(3) $det(\lambda I - A) = (\lambda - i)(\lambda + i)(\lambda - 1)$, A有三个不同的特征值，从而A的Jordan标准型为$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & i & \\ & & -i \end{bmatrix}$

106(1)(2) QUE

2 ANS

11 QUE

11 ANS

11 QUE

11 ANS

11 QUE

11 ANS

11 QUE

11 ANS

11 QUE

11 ANS

6. *HOMEWORK 6 P107 11*
7. *HOMEWORK 7 P163 3, 4, 5, 6*
8. *HOMEWORK 8 P170-171 5, 9 P177 3, 4*
9. *HOMEWORK 9 P195 2, 3*
10. *HOMEWORK 10 P219-220 1, 7, 8*
11. *HOMEWORK 11 P225 1(2), 2, 5 P233 1*
12. *HOMEWORK 12 P306 3, 4, 5*
13. *HOMEWORK 13 P306-307 6, 8, 11, 12*
14. *HOMEWORK 14 P295 1, 4*
15. *HOMEWORK 15 P332 2 3(1)(2)*
16. *HOMEWORK 16 P343-344 1, 2, 5*
17. *HOMEWORK 17 P275 1, 2*
18. *HOMEWORK 18 P261 2, 3, 4*