

考试科目：随机过程与排队论**考试时间：2017 年**

1. (18 分) 填空。

(1) 设随机过程 $X(t) = A + Vt, 0 \leq t < +\infty$, 其中 A 和 V 是相互独立的随机变量, 并且 A 和 V 都服从标准正态分布 $N(0, 1)$, 则 $X(t)$ 的均值函数 $m(t)$ 为 0, 方差函数 $D(t)$ 为 $1+t^2$, 协方差函数 $C(s, t)$ 为 $1+st$ 。

(2) 参数为 λ 的泊松过程的点间间距是相互独立的随机变量, 且服从均值为 $1/\lambda$ 的 指数 分布。

(3) 病人以每小时 3 人的泊松流到达医院, 假设该医院只有一个医生服务且容量为无穷, 医生的服务时间服从指数分布, 并且平均服务一个病人为 30 分钟, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时, 医生空闲时间的比例为 0, 平均有 ∞ 个病人在等待看医生, 病人的平均等待时间为 ∞ , 一个病人等待超过一个小时的概率为 1, 在医生服务一个病人的时间内平均有 1.5 个病人到达医院。

2. (15 分) 设某保险公司收到的索赔遵循一个参数为 λ 的泊松过程 $\{N(t), t \geq 0\}$, 假设一个索赔是车险的概率为 p , 以 $X(t)$ 表示时间 $(0, t] (t \geq 0)$ 内保险公司收到的车险索赔的次数。证明 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是一个参数为 $p\lambda$ 的泊松过程。

证明：

(1) 显然 $X(0) = 0$

(2) 任取 $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, 因为 $X(t_i) - X(t_{i-1})$ 只是在 $(t_{i-1}, t_i]$ 内收到的部分索赔, 而 $N(t_1) - N(t_0), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ 相互独立, 所以 $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ 相互独立, 即 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是独立增量过程。

(3) 对任意 $t \geq 0, s \geq 0$, 因为

$$P\{X(t+s) - X(s) = k | N(t+s) - N(s) = n\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n$$

所以

$$\begin{aligned} & P\{X(t+s) - X(s) = k\} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} P\{X(t+s) - X(s) = k, N(t+s) - N(s) = n\} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} P\{X(t+s) - X(s) = k | N(t+s) - N(s) = n\} \cdot P\{N(t+s) - N(s) = n\} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \\ &= \frac{(p\lambda t)^k}{k!} e^{-p\lambda t}, k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

故 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是一个参数为 $p\lambda$ 的泊松过程。

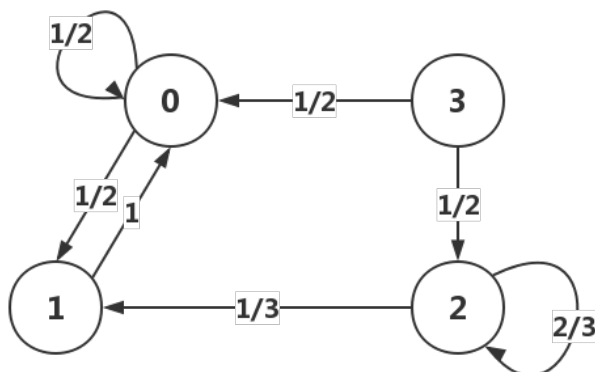
3. (15 分) 设齐次马氏链 $\{X(n), n = 0, 1, 2, \dots\}$ 的状态空间 $E = \{0, 1, 2, 3\}$, 一步状态转移矩阵

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) 画出状态转移图;
- (2) 讨论各状态性质;
- (3) 分解状态空间。

解:

(1) 状态转移图:



(2) 因为对一切 $n \geq 1$, 均有 $f_{33}^{(n)} = 0$, 所以 $f_{33} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{33}^{(n)} = 0 < 1$, 所以状态 3 是非常返的。

因为 $f_{22}^{(1)} = \frac{2}{3}$, 对一切 $n \geq 2$, 均有 $f_{22}^{(n)} = 0$, 所以 $f_{22} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{22}^{(n)} = \frac{2}{3} \leq 1$, 所以状态 2 是非常返的。

因为对一切 $n \geq 3$, 均有 $f_{00}^{(n)} = 0$, 所以 $f_{00} = f_{00}^{(1)} - f_{00}^{(2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, 所以状态 0 是常返的。

又因为 $\mu_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}^{(n)} = f_{00}^{(1)} - 2f_{00}^{(2)} = \frac{3}{2} < \infty$, 所以状态 0 是正常返的。

因为 $p_{00}(1) = \frac{1}{2} > 0$, 所以状态 0 是非周期的。

因为状态 0 与 1 互通, 所以状态 1 也是非周期、正常返的。

(3) 状态空间分解为

$$E = N + C = \{2, 3\} + \{1, 0\}.$$

4. (16 分) 设齐次马氏链 $\{X(n), n = 0, 1, 2, \dots\}$ 的状态空间 $E = \{1, 2, 3\}$, 一步状态转移矩阵

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- (1) 论其遍历性;
- (2) 求平稳分布;
- (3) 求概率 $P\{X(4) = 1 | X(1) = 2, X(2) = 3\}$;
- (4) 已知 $X(0)$ 的分布律如下表所示:

$X(0)$	1	2	3
P	0.2	0.3	0.5

求 $P\{X(1) = 1, X(2) = 2, X(3) = 3\}$ 和 $X(2)$ 的分布律。

解:

(1) 因为 $P^2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{18} & \frac{8}{9} & \frac{5}{18} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$ 中的所有元素均大于 0, 所以该齐次马氏链是遍历的。

(2) 遍历的齐次马氏链一定存在极限分布, 其极限分布就是平稳分布

$$\begin{cases} \Pi = \Pi P \\ \sum_{i=1}^3 \pi_i = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 \\ \pi_2 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 \\ \pi_3 = \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 \\ \sum_{i=1}^3 \pi_i = 1 \end{cases} \Rightarrow \Pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}\right)$$

(3) $P\{X(4) = 1 | X(1) = 2, X(2) = 3\} = P\{X(4) = 1 | X(2) = 3\} = p_{31}(2) = \frac{1}{6}$

(4) $X(1)$ 的分布律 $\dot{P}_1 = \dot{P}_0 P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.45 & 0.35 \end{pmatrix}$

$P\{X(1) = 1, X(2) = 2, X(3) = 3\}$

5. (分) (... 缺失) 钟。接待室共有 3 个座位供来访者 (包括正被接待的人) 坐。若来访者看到没有空位立即离去。求

- (1) 2 个校长都空闲的概率;
- (2) 来访者未被接待即离去的概率;
- (3) 平均每每小时进入接待室的来访者人数;
- (4) 平均忙的校长数。

解:

由题意, 按 $M/M/c/k$ 混合制系统处理, 其中 $c = 2, k = 3, \lambda = 4$ (人/小时), $\mu = 3$ (人/小时), $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{3}$, 因此

$$p_0 = \left[\sum_{j=0}^{c-1} \frac{\rho^j}{j!} + \sum_{j=c}^K \frac{\rho^j}{c!c^{j-c}} \right]^{-1} \quad p_j = \begin{cases} \frac{\rho^j}{j!} p_0, & 1 \leq j \leq c-1 \\ \frac{\rho^j}{c^{j-c} \cdot c!} p_0, & c \leq j \leq K \end{cases}$$

(1) 2 个校长都空闲的概率 =

$$p_0 = \left[\sum_{j=0}^{c-1} \frac{\rho^j}{j!} + \sum_{j=c}^K \frac{\rho^j}{c!c^{j-c}} \right]^{-1} = \left[1 + \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \right)^2 + \frac{1}{2 \times 2} \left(\frac{4}{3} \right)^3 \right]^{-1} = \frac{27}{103}$$

(2) 来访者未被接待即离去的概率 $= p_K = \frac{\rho^K}{c^{K-c} \cdot c!} p_0 = \frac{1}{2 \times 2} \times \left(\frac{4}{3} \right)^3 \times \frac{27}{103} = \frac{16}{103}$

(3) 平均每每小时进入接待室的来访者人数 $= \lambda(1 - p_K) = 4 \times \left(1 - \frac{16}{103} \right) = \frac{348}{103}$

(4) 平均忙的校长数 $= \overline{N_c} = \rho(1 - p_K) = \frac{4}{3} \times \left(1 - \frac{16}{103} \right) = \frac{348}{309}$

6. (12 分) 2 个工人共同看管 4 台机器, 每台机器平均运转半小时时就会发生故障, 每次修理平均需要 10 分钟。设机器连续运转时间和修理时间相互独立, 均服从指数分布。求: 机器发生故障马上就能修理的概率、平均故障的机器数、平均等待修理的机器数和每台机器平均等待修理的时间。

解:

由题意, 按 $M/M/c/m/m$ 系统处理, 其中 $c = 2, m = 4, \lambda = 2$ (台/小时), $\mu = 6$ (台/小时), $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{3}$, 因此

$$p_0 = \left[\sum_{i=0}^{c-1} C_m^i \rho^i + \sum_{i=c}^m C_m^i \frac{i!}{c! c^{i-c}} \rho^i \right]^{-1} \quad p_j = \begin{cases} C_m^j \rho^j p_0, & j = 0, 1, 2, \dots, c-1 \\ C_m^j \frac{j!}{c! c^{j-c}} \rho^j p_0, & j = c, c+1, \dots, m \end{cases}$$

$$p_0 = \left[1 + 4 \times \frac{1}{3} + 6 \times \frac{2}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4 \times \frac{6}{2 \times 2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 \right]^{-1} = \frac{27}{88}$$

$$p_1 = 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{27}{88} = \frac{36}{88}$$

$$p_2 = 6 \times \frac{2}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{27}{88} = \frac{18}{88}$$

$$p_3 = 4 \times \frac{6}{2 \times 2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{27}{88} = \frac{6}{88}$$

$$p_4 = 1 \times \frac{24}{2 \times 4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \frac{27}{88} = \frac{1}{88}$$

$$\text{机器发生故障马上就能修理的概率} = p_0 + p_1 = \frac{63}{88}$$

$$\text{平均故障的机器数 } \bar{N} = \sum_{j=0}^m j p_j = \frac{47}{44}$$

$$\text{平均等待修理的机器数 } \bar{N}_q = \sum_{j=q}^m (j - c) p_j = \frac{1}{11}$$

$$\text{每台机器平均等待修理的时间 } \bar{W}_q = \frac{\bar{N}_q}{\lambda(m - \bar{N})} = \frac{2}{129} \text{ (小时)}$$

7. (5 分) 有一排队系统, 顾客到达为参数 $\lambda (\lambda > 0)$ 的泊松过程, 顾客到达看到队长为 k 时, 进入系统的概率为 $1/(k+1)$; 顾客所需的服务时间服从指数分布, 具有两个服务率 $\mu_1, \mu_2 (0 < \mu_1 < \mu_2)$, 当队长 $< m$ (m 为一个固定的正整数) 时, 服务员用速率 μ_1 工作, 当队长 $\geq m$ 时, 服务员用速率 μ_2 工作; 系统中只有一个服务台: 容量为无穷大, 而且到达过程与服务过程彼此独立, 试分析该系统什么情况下存在平稳分布, 并计算其平稳分布 (... 缺失)

解:

(... 缺失)

(1)

$$\begin{aligned}
 p_{i,i+1}(\Delta t) &= P\{\text{在 } \Delta t \text{ 内到达且进入 1 个而服务未完成}\} \\
 &+ \sum_{j=2}^{\infty} P\{\text{在 } \Delta t \text{ 内到达且进入 } j \text{ 个而服务完 } j-1 \text{ 个}\} \\
 &= \frac{1}{i+1}(\lambda\Delta t + o(\Delta t))(1 - \mu\Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t) = \frac{\lambda}{i+1}\Delta t + o(\Delta t), i = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 p_{i,i-1}(\Delta t) &= P\{\text{在 } \Delta t \text{ 内到达且进入 0 个而服务完成 1 个}\} \\
 &+ \sum_{j=2}^{\infty} P\{\text{在 } \Delta t \text{ 内到达且进入 } j-1 \text{ 个而服务完 } j \text{ 个}\} \\
 &= \begin{cases} (1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t))(\mu_1\Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t) = \mu_1\Delta t + o(\Delta t), & i < m \\ (1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t))(\mu_2\Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t) = \mu_2\Delta t + o(\Delta t), & i \geq m \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

于是, $\{N(t), t \geq 0\}$ 是 $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ 上的生灭过程, 其参数为

$$\begin{cases} \lambda_i = \frac{\lambda}{i+1}, & i \geq 0 \\ \mu_i = \mu_1, & i = 1, 2, \dots, m-1 \\ \mu_i = \mu_2, & i \geq m \end{cases}$$

$$\text{令 } \rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}, \rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2}, (\dots \text{ 缺失})$$