考试科目：随机过程与排队论
考试时间：2017 年

1. （18 分） 填空。

   (1) 设随机过程 $X(t)=A+Vt, 0\le t<+\infty$，其中 A 和 V 是相互独立的随机变量，并且 A 和 V 都服从标准正态分布 $N(0,1)$，则 $X(t)$ 的均值函数 $m(t)$ 为 **0**，方差函数 $D(t)$ 为 $1+t^2$，协方差函数 $C(s,t)$ 为 $1+st$。

   (2) 参数为 λ 的泊松过程的点间间距是相互独立的随机变量，且服从均值为 $1/\lambda$ 的 **指数** 分布。

   (3) 病人以每小时 3 人的泊松流到达医院，假设该医院只有一个医生服务且容量为无穷，医生的服务时间服从指数分布，并且平均服务一个病人为 30 分钟，则当 $t\to\infty$ 时，医生空闲时间的比例为 **0**，平均有 ∞ 个病人在等待看医生，病人的平均等待时间为 ∞，一个病人等待超过一个小时的概率为 **1**，在医生服务一个病人的时间内平均有 **1.5** 个病人到达医院。

2. （15 分） 设某保险公司收到的索赔遵循一个参数为 λ 的泊松过程 $\{N(t), t\ge 0\}$，假设一个索赔时车险的概率为 p，以 $X(t)$ 表示时间 $(0,t](t\ge 0)$ 内保险公司收到的车险索赔的次数。证明 $\{X(t), t\ge 0\}$ 是一个参数为 $\rho\lambda$ 的泊松过程。

证明：

(1) 显然 $X(0)=0$

(2) 任取 $0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，因为 $X(t_i)-X(t_{i-1})$ 只是在 $(t_{i-1},t_i]$ 内收到的部分索赔，而 $N(t_1)-N(t_0), N(t_2)-N(t_1),\ldots,N(t_n)-N(t_{n-1})$ 相互独立，所以 $X(t_1)-X(t_0), X(t_2)-X(t_1),\ldots,X(t_n)-X(t_{n-1})$ 相互独立，即 $\{X(t),t\ge 0\}$ 是独立增量过程。

(3) 对任意 $t\ge 0, s\ge 0$，因为

$$P\{X(t+s)-X(s)=k|N(t+s)-N(s)=n\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,2,\ldots,n$$

所以

$$\begin{aligned}
&P\{X(t+s)-X(s)=k\}\\
=&\sum_{n=k}^{\infty}P\{X(t+s)-X(s)=k, N(t+s)-N(s)=n\}\\
=&\sum_{n=k}^{\infty}P\{X(t+s)-X(s)=k|N(t+s)-N(s)=n\}\cdot P\{N(t+s)-N(s)=n\}\\
=&\sum_{n=k}^{\infty}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\\
=&\frac{(p\lambda t)^k}{k!}e^{-p\lambda t}, k=0,1,2,\ldots
\end{aligned}$$

故 $\{X(t),t\ge 0\}$ 是一个参数为 $p\lambda$ 的泊松过程。

3. （15 分） 设齐次马氏链 $\{X(n), n=0,1,2,\dots\}$ 的状态空间 $E=\{0,1,2,3\}$，一步状态转移矩阵

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

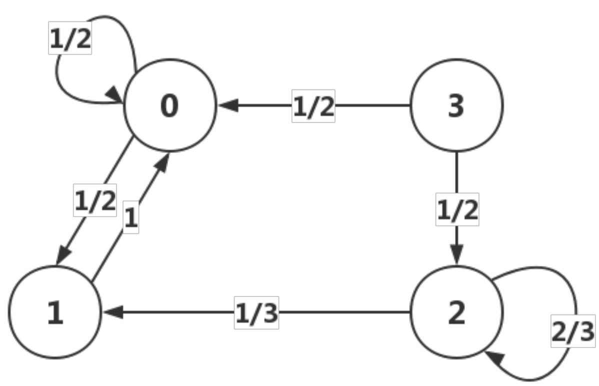
(1) 画出状态转移图；

(2) 讨论各状态性质；

(3) 分解状态空间。

解：

(1) 状态转移图：



(2) 因为对一切 $n\geq 1$，均有 $f_{33}^{(n)}=0$，所以 $f_{33}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{33}^{(n)}=0<1$，所以状态 3 是非常返的。

因为 $f_{22}^{(1)}=\dfrac{2}{3}$，对一切 $n\geq 2$，均有 $f_{22}^{(n)}=0$，所以 $f_{22}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{22}^{(n)}=\dfrac{2}{3}\leq 1$，所以状态 2 是非常返的。

因为对一切 $n\geq 3$，均有 $f_{00}^{(n)}=0$，所以 $f_{00}=f_{00}^{(1)}-f_{00}^{(2)}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$，所以状态 0 是常返的。

又因为 $\mu_0=\sum_{n=1}^{\infty} nf_{00}^{(n)}=f_{00}^{(1)}-2f_{00}^{(2)}=\dfrac{3}{2}<\infty$，所以状态 0 是正常返的。

因为 $p_{00}(1)=\dfrac{1}{2}>0$，所以状态 0 是非周期的。

因为状态 0 与 1 互通，所以状态 1 也是非周期、正常返的。

(3) 状态空间分解为

$E=N+C=\{2,3\}+\{1,0\}$。

4. （16 分） 设齐次马氏链 $\{X(n), n=0,1,2,\dots\}$ 的状态空间 $E=\{1,2,3\}$，一步状态转移矩阵

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

(1) 论其遍历性；

(2) 求平稳分布；

(3) 求概率 $P\{X(4)=1|X(1)=2,X(2)=3\}$；

(4) 已知 $X(0)$ 的分布律如下表所示：

$X(0)$	1	2	3
P	0.2	0.3	0.5

求 $P\{X(1)=1,X(2)=2,X(3)=3\}$ 和 $X(2)$ 的分布律。

解：

(1) 因为 $P^2=\begin{pmatrix}\frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6}\\ \frac{5}{18} & \frac{8}{9} & \frac{5}{18}\\ \frac{1}{6} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12}\end{pmatrix}$ 中的所有元素均大于 0，所以该齐次马氏链是遍历的。

(2) 遍历的齐次马氏链一定存在极限分布，其极限分布就是平稳分布

$$\begin{cases}\prod=\prod P\\ \sum_{i=1}^{3}\pi_i=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\pi_1=\frac{1}{2}\pi_1+\frac{1}{3}\pi_2\\ \pi_2=\frac{1}{2}\pi_1+\frac{1}{3}\pi_2+\frac{1}{2}\pi_3\\ \pi_3=\qquad\quad\ \frac{1}{3}\pi_2+\frac{1}{2}\pi_3\\ \sum_{i=1}^{3}\pi_i=1\end{cases}\Rightarrow\prod=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{2}{7})$$

(3) $P\{X(4)=1|X(1)=2,X(2)=3\}=P\{X(4)=1|X(2)=3\}=p_{31}(2)=\frac{1}{6}$

(4) $X(1)$ 的分布律 $\grave{P}_1=\grave{P}_0P=\begin{pmatrix}0.2 & 0.3 & 0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.2 & 0.45 & 0.35\end{pmatrix}$

$P\{X(1)=1,X(2)=2,X(3)=3\}$

5. （分）（... 缺失）钟。接待室共有 3 个座位供来访者（包括正被接待的人）坐。若来访者看到没有空位立即离去。求

(1) 2 个校长都空闲的概率；

(2) 来访者未被接待即离去的概率；

(3) 平均每每小时进入接待室的来访者人数；

(4) 平均忙的校长数。

解：

由题意，按 $M/M/c/k$ 混合制系统处理，其中 $c=2, k=3, \lambda=4$（人/小时），$\mu=3$（人/小时），$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{4}{3}$，因此

$$p_0=\left[\sum_{j=0}^{c-1}\frac{\rho^j}{j!}+\sum_{j=c}^{K}\frac{\rho^j}{c!c^{j-c}}\right]^{-1} \qquad p_j=\begin{cases}\frac{\rho^j}{j!}p_0, & 1\le j\le c-1\\ \frac{\rho^j}{c^{j-c}\cdot c!}p_0, & c\le j\le K\end{cases}$$

(1) 2 个校长都空闲的概率 $=$

$$p_0=\left[\sum_{j=0}^{c-1}\frac{\rho^j}{j!}+\sum_{j=c}^{K}\frac{\rho^j}{c!c^{j-c}}\right]^{-1}=\left[1+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}(\frac{4}{3})^2+\frac{1}{2\times 2}(\frac{4}{3})^3\right]^{-1}=\frac{27}{103}$$

(2) 来访者未被接待即离去的概率 $=p_K=\frac{\rho^K}{c^{K-c}\cdot c!}p_0=\frac{1}{2\times 2}\times(\frac{4}{3})^3\times\frac{27}{103}=\frac{16}{103}$

(3) 平均每每小时进入接待室的来访者人数 $=\lambda(1-p_K)=4\times(1-\frac{16}{103})=\frac{348}{103}$

(4) 平均忙的校长数 $=\overline{N_c}=\rho(1-p_K)=\frac{4}{3}\times(1-\frac{16}{103})=\frac{348}{309}$

6. （12 分） 2 个工人共同看管 4 台机器，每台机器平均运转半小时时就会发送故障，每次修理平均需要 10 分钟。设机器连续运转时间和修理时间相互独立，均服从指数分布。求：机器发送故障马上就能修理的概率、平均故障的机器数、平均等待修理的机器数和每台机器平均等待修理的时间。

解：

由题意，按 $M/M/c/m/m$ 系统处理，其中 $c=2, m=4, \lambda=2$(台/小时)$,\mu=6$(台/小时)，$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{1}{3}$，因此

$$p_0=\left[\sum_{i=0}^{c-1}C_m^i\rho^i-\sum_{i=c}^{m}C_m^i\frac{i!}{c!c^{i-c}}\rho^i\right]^{-1} \qquad p_j=\begin{cases}C_m^j\rho^jp_0, & j=0,1,2,\dots,c-1\\ C_m^j\frac{j!}{c!c^{j-c}}\rho^jp_0, & j=c,c+1,\dots,m\end{cases}$$

$$p_0=\left[1+4\times\frac{1}{3}+6\times\frac{2}{2}\times(\frac{1}{3})^2+4\times\frac{6}{2\times 2}\times(\frac{1}{3})^3+(\frac{1}{3})^4\right]^{-1}=\frac{27}{88}$$

$$p_1 = 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{27}{88} = \frac{36}{88}$$
$$p_2 = 6 \times \frac{2}{2} \times (\frac{1}{3})^2 \times \frac{27}{88} = \frac{18}{88}$$
$$p_3 = 4 \times \frac{6}{2 \times 2} \times (\frac{1}{3})^3 \times \frac{27}{88} = \frac{6}{88}$$
$$p_4 = 1 \times \frac{24}{2 \times 4} \times (\frac{1}{3})^4 \times \frac{27}{88} = \frac{1}{88}$$

机器发生故障马上就能修理的概率 $= p_0 + p_1 = \frac{63}{88}$

平均故障的机器数 $\overline{N} = \sum_{j=0}^{m} jp_j = \frac{47}{44}$

平均等待修理的机器数 $\overline{N}_q = \sum_{j=q}^{m} (j-c)p_j = \frac{1}{11}$

每台机器平均等待修理的时间 $\overline{W}_q = \frac{\overline{N}_q}{\lambda(m-\overline{N})} = \frac{2}{129}$（小时）

7. （5 分） 有一排队系统，顾客到达为参数 $\lambda(\lambda > 0)$ 的泊松过程，顾客到达看到队长为 k 时，进入系统的概率为 $1/(k+1)$；顾客所需的服务时间服从指数分布，具有两个服务率 $\mu_1, \mu_2 (0 < \mu_1 < \mu_2)$，当队长 $< m$（m 时一个固定的正整数）时，服务员用速率 μ_1 工作，当队长 $\geq m$ 时，服务员用速率 μ_2 工作；系统中只有一个服务台：容量为无穷大，而且到达过程与服务过程彼此独立，试分析该系统什么情况下存在平稳分布，并计算其平稳分布（... 缺失）

解：

（... 缺失）

(1)

$$\begin{aligned} p_{i,i+1}(\Delta t) &= P\{\text{在 } \Delta t \text{ 内到达且进入 } 1 \text{ 个而服务未完成}\} \\ &\quad + \sum_{i=2}^{\infty} P\{\text{在 } \Delta t \text{ 内到达且进入 } j \text{ 个而服务完 } j-1 \text{ 个}\} \\ &= \frac{1}{i+1}(\lambda\Delta t + o(\Delta t))(1 - \mu\Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t) = \frac{\lambda}{i+1}\Delta t + o(\Delta t), i = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} p_{i,i-1}(\Delta t) &= P\{\text{在 } \Delta t \text{ 内到达且进入 } 0 \text{ 个而服务完成 } 1 \text{ 个}\} \\ &\quad + \sum_{j=2}^{\infty} P\{\text{在 } \Delta t \text{ 内到达且进入 } j-1 \text{ 个而服务完 } j \text{ 个}\} \\ &= \begin{cases} (1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t))(\mu_1\Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t) = \mu_1\Delta t + o(\Delta t), & i < m \\ (1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t))(\mu_2\Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t) = \mu_2\Delta t + o(\Delta t), & i \geq m \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

于是，$\{N(t), t \geq 0\}$ 是 $E = \{0, 1, 2, \ldots\}$ 上的生灭过程，其参数为

$$\begin{cases} \lambda_i = \dfrac{\lambda}{i+1}, & i \geq 0 \\ \mu_i = \mu_1, & i = 1, 2, \ldots, m-1 \\ \mu_i = \mu_2, & i \geq m \end{cases}$$

令 $\rho_1 = \dfrac{\lambda}{\mu_1}, \rho_2 = \dfrac{\lambda}{\mu_2}$，（... 缺失）