

2005 年研究生期末试题 (120 分钟)

《图论及其应用》

一、填空 (15 分, 每空 1 分)

- 1、 已知图 G 有 10 条边, 4 个度数为 3 的顶点, 其余顶点的度数均小于 2, 则 G 中至少有 8 个顶点 .
- 2、 m 条边的简单图 G 中所有不同的生成子图 (包括 G 和空图) 的个数为 2^m .
- 3、 4 个顶点的非同构的简单图有 11 个.
- 4、 图 G_1 的最小生成树各边权值之和为 28 .

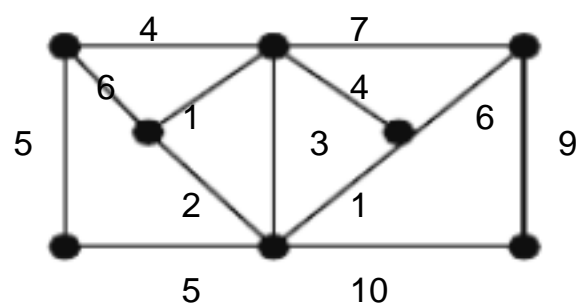


图 G_1

- 5、 若 W 是图 G 中一条包含所有边的闭通道, 则 W 在这样的闭通道中具有最短长度的充要条件是:
 - (1) 每一条边最多重复经过 1 次;
 - (2) 在 G 的每一个圈上, 重复经过的边的数目不超过圈的长度的 一半 .
- 6、 5 阶度极大非哈密尔顿图族有 C_2^5, C_1^5 .
- 7、 在图 G_2 中, 图的度序列为 **(44443322)**, 频序列为 **(422)**, 独立数为 **3**, 团数为 **4**, 点色数为 **4**, 边色数为 **4**, 直径为 **3**.

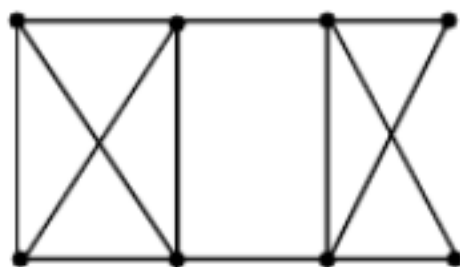
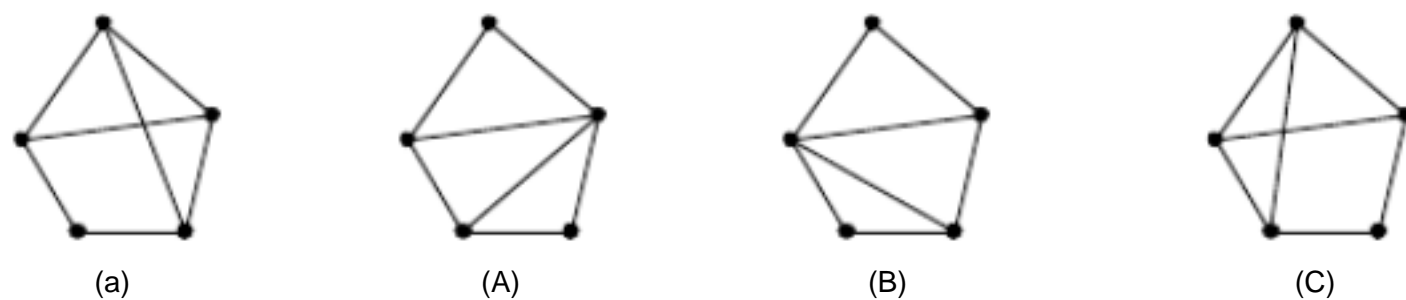


图 G_2

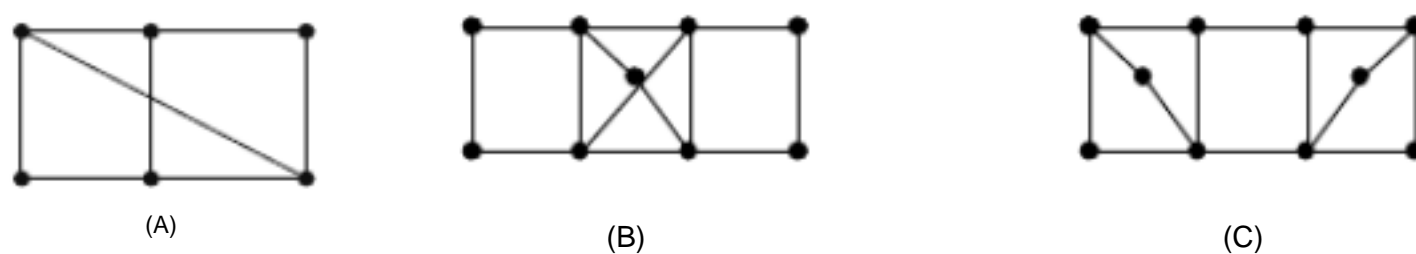
二、选择 (15 分)

- (1) 下列序列中, 能成为某简单图的度序列的是 **(C)**
 - (A) (54221)
 - (B) (6654332)
 - (C) (332222)
- (2) 已知图 G 有 13 条边, 2 个 5 度顶点, 4 个 3 度顶点, 其余顶点的度数为 2, 则图 G 有 **(A)** 个 2 度点。

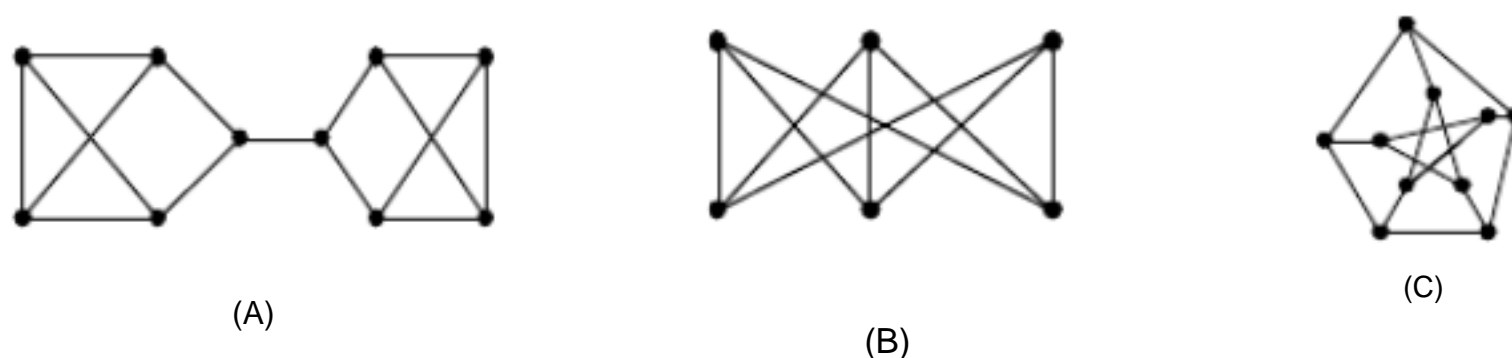
(A) 2 (B) 4 (C) 8
 (3) 图 G 如(a)所示, 与 G 同构的图是 (C)



(4) 下列图中为欧拉图的是 (B), 为 H 图的是 (AB), 为偶图的是 (BC).



5. 下列图中可 1-因子分解的是 (B)



三、设 Δ 和 δ 分别是 (n, m) 图 G 的最大度与最小度, 求证: $\delta \leq \frac{2m}{n} \leq \Delta$ (10 分).

证明: $n\delta \leq 2m = \sum_{v \in V(G)} d(v) \leq n\Delta \Rightarrow \delta \leq \frac{2m}{n} \leq \Delta$.

四、正整数序列 (d_1, d_2, \dots, d_n) 是一棵树的度序列的充分必要条件是 $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$

(10 分).

证明: " \Rightarrow " 结论显然

" \Leftarrow " 设正整数序列 (d_1, d_2, \dots, d_n) 满足 $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$, 易知它是度序列。

设 G 是这个度序列的图族中连通分支最少的一个图, 知 $m = |E(G)| = n-1$.

假设 G 不连通, 则 $\omega(G) \geq 2$, 且至少有一个分支 G_1 含有圈 C , 否则, G 是森林,

有 $m = |E(G)| = n - \omega < n - 1$ 矛盾！从 C 中任意取出一条边 $e_1 = u_1v_1$ 。并在另一分支

G_2 中任意取出一条边 $e_2 = u_2v_2$ ，作图

$$G' = G - \{u_1v_1, u_2v_2\} + \{u_1v_2, u_2v_1\}$$

则 G' 的度序列仍然为 (d_1, d_2, \dots, d_n) 且 $\omega(G') = \omega(G) - 1$ ，这与 G 的选取矛盾！所以

G 是连通的， G 是树。即 (d_1, d_2, \dots, d_n) 一棵树的度序列。

五、求证：在简单连通平面图 G 中，至少存在一个度数小于或等于 5 的顶点 (10 分)。

证明：若不然， $2m = \sum_{v \in V(G)} d(v) \geq 6n > 6n - 12 \Rightarrow m > 3n - 6$ ，这与 G 是简单连通平面图矛盾。

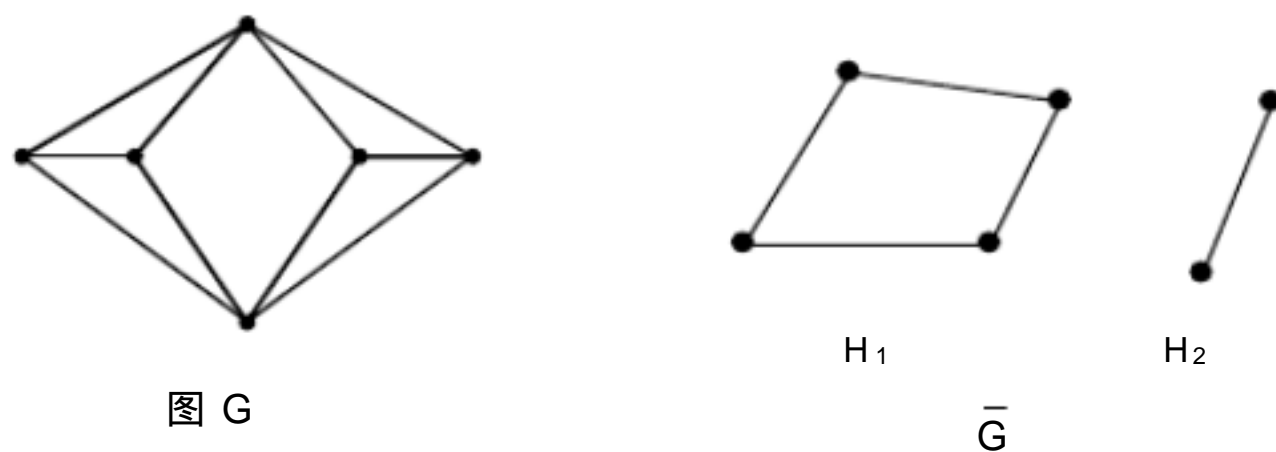
六、证明：(1) 若 G 恰有两个奇度点 u 与 v ，则 u 与 v 必连通；

(2) 一棵树至多只有一个完美匹配 (10 分)。

证明：(1) 因为任意一个图的奇度点个数必然为偶数个，若 G 恰有两个奇度点 u 与 v ，且它们不连通，那么就会得出一个连通图只有一个奇度点的矛盾结论。所以若 G 恰有两个奇度点 u 与 v ，则 u 与 v 必连通。

(2) 若树 T 有两个相异的完美匹配 M_1, M_2 ，则 $M_1 \Delta M_2 \neq \emptyset$ 且 $T[M_1 \Delta M_2]$ 中的每个顶点的度数为 2，则 T 中包含圈，这与 T 是数矛盾！

七、求图 G 的色多项式 $P_k(G)$ (15 分)。



解：图 G 的补图如图 \bar{G} ，则

$$h(H_1, x) = r_1x + r_2x^2 + r_3x^3 + r_4x^4, \text{ 其中, } r_1 = N_1(H_1) = 0, r_2 = N_2(H_1) = 2$$

$$r_3 = N_3(H_1) = 4, r_4 = N_4(H_1) = 1;$$

$$h(H_2, x) = r_1x + r_2x^2, \text{ 其中, } r_1 = N_1(H_2) = 1, r_2 = N_2(H_2) = 1$$

$$P_k(G) = (x + x^2)(2x^2 + 4x^3 + x^4) = [k]_6 + 5[k]_5 + 6[k]_4 + 2[k]_3。$$

八、求图 G 中 a 到 b 的最短路 (15 分).

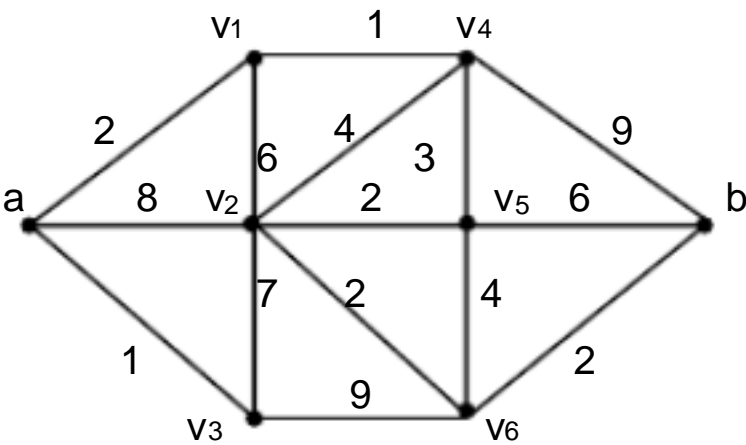


图 G

- 解 1. $A_1 = \{ a \}$, $t(a) = 0$, $T_1 =$
2. $b_1^{(1)} = v_3$
3. $m_1 = 1$, $a_2 = v_3$, $t(v_3) = t(a) + l(av_3) = 1$ (最小) ,
 $T_2 = \{ av_3 \}$
2. $A_2 = \{ a, v_3 \}$, $b_1^{(2)} = v_1$, $b_2^{(2)} = v_2$
3. $m_2 = 1$, $a_3 = v_1$, $t(v_1) = t(a) + l(av_1) = 2$ (最小) ,
 $T_3 = \{ av_3, av_1 \}$
2. $A_3 = \{ a, v_3, v_1 \}$, $b_1^{(3)} = v_2$, $b_2^{(3)} = v_2$, $b_3^{(3)} = v_4$
3. $m_3 = 3$, $a_4 = v_4$, $t(v_4) = t(v_1) + l(v_1v_4) = 3$ (最小) ,
 $T_4 = \{ av_3, av_1, v_1v_4 \}$
2. $A_4 = \{ a, v_3, v_1, v_4 \}$, $b_1^{(4)} = v_2$, $b_2^{(4)} = v_2$, $b_3^{(4)} = v_2$, $b_4^{(4)} = v_5$
3. $m_4 = 4$, $a_5 = v_5$, $t(v_5) = t(v_4) + l(v_4v_5) = 6$ (最小) ,
 $T_5 = \{ av_3, av_1, v_1v_4, v_4v_5 \}$
2. $A_5 = \{ a, v_3, v_1, v_4, v_5 \}$, $b_1^{(5)} = v_2$, $b_2^{(5)} = v_2$, $b_3^{(5)} = v_2$, $b_4^{(5)} = v_2$, $b_5^{(5)} = v_2$
3. $m_5 = 4$, $t(v_2) = t(v_4) + l(v_4v_2) = 7$ (最小) ,
 $T_6 = \{ av_3, av_1, v_1v_4, v_4v_5, v_4v_2 \}$
2. $A_6 = \{ a, v_3, v_1, v_4, v_5, v_2 \}$, $b_2^{(6)} = v_6$, $b_4^{(6)} = b$, $b_5^{(6)} = v_6$, $b_6^{(6)} = v_6$
3. $m_6 = 6$, $a_7 = v_6$, $t(v_6) = t(v_2) + l(v_2v_6) = 9$ (最小) ,
 $T_7 = \{ av_3, av_1, v_1v_4, v_4v_5, v_4v_2, v_2v_6 \}$
2. $A_7 = \{ a, v_3, v_1, v_4, v_5, v_2, v_6 \}$, $b_4^{(7)} = b$, $b_5^{(7)} = b$, $b_7^{(7)} = b$
3. $m_7 = 7$, $a_8 = b$, $t(b) = t(v_6) + l(v_6b) = 11$ (最小) ,
 $T_8 = \{ av_3, av_1, v_1v_4, v_4v_5, v_4v_2, v_2v_6, v_6b \}$

于是知 a 与 b 的距离

$$d(a, b) = t(b) = 11$$

由 T_8 导出的树中 a 到 b 路 $av_1v_4v_2v_6b$ 就是最短路。