随机过程与排队论

信息与软件工程学院

顾小丰

2019年5月22日星期三

习题一　4

4. 设有 2 个红球、4 个白球，先将它们分放到甲、乙两个盒子中去，各放 3 个. 设 X 为甲盒中的红球数. 然后再在甲、乙两盒各取一个进行交换. 设 Y 为此时甲盒中的红球数.

(1) 求 X 的分布律；

(2) 已知 X 的条件下求 Y 的分布律；

(3) 求 Y 的分布律.

解　(1) X 的取值为 0,1,2,且有

$$P\{X=0\}=\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5},\quad P\{X=1\}=\frac{C_2^1\cdot C_4^2}{C_6^3}=\frac{3}{5},$$

$$P\{X=2\}=\frac{C_2^2\cdot C_4^1}{C_6^3}=\frac{1}{5}$$

则 X 的分布律为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

习题一　4

（2）当 $X=0$ 时，Y 的取值为 0,1，有

$$P\{Y=0 \mid X=0\}=\frac{1}{3}, \quad P\{Y=1 \mid X=0\}=\frac{2}{3}$$

故在 $X=0$ 的条件下，Y 的条件分布律为

Y	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

当 $X=1$ 时，Y 的取值为 0,1,2，有

$$P\{Y=0 \mid X=1\}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$$

$$P\{Y=1 \mid X=1\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{9}$$

$$P\{Y=2 \mid X=1\}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

故在 $X=1$ 的条件下，Y 的条件分布律为

X	0	1	2
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

习题一　4

当 $X=2$ 时，Y 的取值为 1,2，有

$$P\{Y=1 \mid X=2\}=\frac{2}{3},\quad P\{Y=2 \mid X=2\}=\frac{1}{3}$$

故在 $X=2$ 的条件下，Y 的条件分布律为

Y	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

习题一　4

(3) Y 的取值为 0,1,2,有

$$P\{Y=0\}=\sum_{k=0}^{2}P\{Y=0\mid X=k\}\cdot P\{X=k\}$$

$$=P\{Y=0\mid X=0\}\cdot\frac{1}{5}+P\{Y=0\mid X=1\}\cdot\frac{3}{5}+0$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{9}$$

$$=\frac{1}{5}$$

同理有

$$P\{Y=1\}=\frac{3}{5},\quad P\{Y=2\}=\frac{1}{5}$$

故 Y 的分布律为

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

习题一 11

9. 已知 X 和 Y 相互独立都服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布. 设(1) $U=X+Y, V=X-Y$; (2) $U=X+Y, V=X/Y$, 求随机变量 (U,V) 的联合概率密度 $f_{UV}(u,v)$, 并讨论 U 与 V 的独立性.

解 因为 X 和 Y 相互独立都服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布, 故

$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad F_X(x)=\begin{cases} 1-e^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad F_Y(y)=\begin{cases} 1-e^{-y}, & y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 由 $U=X+Y, V=X-Y$, 得

$$X=\frac{1}{2}(U+V), \quad Y=\frac{1}{2}(U-V)$$

$$\boldsymbol{J}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

$$f_{UV}(u,v)=f_{XY}(x(u,v),y(u,v))\cdot|\boldsymbol{J}|$$

$$=\frac{1}{2}e^{-u}(u>0, u+v>0, u-v>0)$$

习题一 11

即

$$f_{UV}(u,v)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-u}, & u>0,-u<v<u\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{UV}(u,v)dv=\begin{cases}ue^{-u}, & u>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_V(v)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{UV}(u,v)du=e^{-|v|},\quad v\in\mathbb{R}$$

因为当 $u>0,-u<v<u$ 时

$$f_U(u)f_V(v)\neq f_{UV}(u,v)$$

所以 U,V 不相互独立.

(2) $X=\dfrac{UV}{1+V}$, $Y=\dfrac{U}{1+V}$; $J=\dfrac{-u}{(1+v)^2}$

$$f_{UV}(u,v)=e^{-\frac{uv}{1+v}}e^{-\frac{u}{1+v}}\cdot\frac{u}{(1+v)^2}=ue^{-u}\cdot\frac{1}{(1+v)^2},\quad u,v>0$$

$$f_U(u)=ue^{-u},\quad u>0$$

$$f_V(v)=\frac{1}{(1+v)^2},\quad v>0$$

因为 $f_U(u)f_V(v)=f_{UV}(u,v)$,所以 U,V 相互独立.

习题一　15

16. 设随机变量 X 和 Y 有 $E(X)=1, E(Y)=3, D(X)=4, D(Y)=25, \rho_{XY}=0.6$，又设

$$\xi = 2X+Y,\quad \eta = 3X-Y$$

试求：$E(\xi), D(\xi); E(\eta), D(\eta); \mathrm{cov}(\xi,\eta)$ 和 $\rho_{\xi\eta}$.

解　$E(\xi)=E(2X+Y)=2+3=5$

$$D(\xi)=4D(X)+D(Y)+4\mathrm{cov}(X,Y)=16+25+4\rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)}$$
$$=16+25+4\times0.6\times2\times5=65$$

$$E(\eta)=3E(X)-E(Y)=0$$

$$D(\eta)=9D(X)+D(Y)-6\mathrm{cov}(X,Y)=9\times4+25-6\times0.6\times2\times5=25$$

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta)=6\mathrm{cov}(X,X)+\mathrm{cov}(X,Y)-\mathrm{cov}(Y,Y)=6\times4+6-25=5$$

$$\rho_{\xi\eta}=\frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D(\xi)D(\eta)}}=\frac{5}{\sqrt{65\times25}}=\frac{\sqrt{65}}{65}$$

习题一　16

17. 已知二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求：(1) $f_X(x), f_Y(y)$；

(2) 讨论 X 与 Y 的独立性和相关性；

(3) 求条件数学期望 $E(X|Y)$和 $E(Y|X)$.

解　(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{-x}^{x}\mathrm{d}y, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$$f_Y(y)=\begin{cases}1-|y|, & |y|<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

习题一　16

(2) 设 $G=\{(x,y)\mid |y|<x<1\}$,在 G 中有

$$f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y)$$

所以随机变量 X,Y 不相互独立. 又因为

$$E(X)=\int_0^1 2x^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3};\quad E(X^2)=\int_0^1 2x^3\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2};$$

$$D(X)=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$$

$$E(Y)=\int_{-1}^{1} y(1-|y|)\,\mathrm{d}y=0;$$

$$E(Y^2)=\int_{-1}^{1} y^2(1-|y|)\,\mathrm{d}y=2\int_0^1(y^2-y^3)\,\mathrm{d}y=2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{6}$$

$$D(Y)=\frac{1}{6}$$

$$E(XY)=\iint_G xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=0$$

随机变量 X,Y 不相关.

习题一　16

(3) 当 $0<x<1$ 时，有

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}, & |y|<x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当 $-1<y<1$ 时，有

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-|y|}, & |y|<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当 $|y|<1$ 时，有

$$E(X\mid Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{X|Y}(x\mid y)\mathrm{d}x=\int_{|y|}^{1}\frac{x}{1-|y|}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(1+|y|)$$

当 $0<x<1$ 时，有

$$E(Y\mid X=x)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_{Y|X}(y\mid x)\mathrm{d}y=\int_{-x}^{x}y\cdot\frac{1}{2x}\mathrm{d}y=0$$

习题一　25

36. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，$X\sim P(\lambda_1)$，$Y\sim P(\lambda_2)$.

(1) 利用特征函数证明：$X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$；

(2) 证明：$P\{X=k\mid X+Y=n\}=C_n^k\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$，其中 $k\leqslant n$，且 k,n 为自然数；

(3) 求 $E(X\mid X+Y=n)$.

解　(1) 令 $Z=X+Y$，则

$$\varphi_Z(t)=\varphi_X(t)\cdot\varphi_Y(t)=e^{\lambda_1(e^{it}-1)}\cdot e^{\lambda_2(e^{it}-1)}=e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)}$$

即 $Z\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$.

(2) 由于

$$P\{X=k\mid X+Y=n\}=\frac{P\{X=k,Y=n-k\}}{P\{X+Y=n\}}$$

$$=\frac{\dfrac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\cdot\dfrac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}}{\dfrac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}$$

$$=C_n^k\cdot\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k},\quad 0\leqslant k\leqslant n$$

即在 $X+Y=n$ 条件下，X 的条件分布为二项分布.

习题一　25

(3) 由(2)知，在 $X+Y=n$ 的条件下，X 的条件分布为 $B\left(n,\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$，故

$$E(X\mid X+Y=n)=\sum_{k=0}^{n}k\cdot P\{X=k\mid X+Y=n\}=n\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

习题二 1

1. 设随机过程$\{X(t,\omega),-\infty<t<+\infty\}$只有两条样本函数

$$X(t,\omega_1)=2\cos t, X(t,\omega_2)=-2\cos t,\quad -\infty<t<+\infty$$

且 $P(\omega_1)=\frac{2}{3}, P(\omega_2)=\frac{1}{3}$,分别求:

(1) 一维分布函数 $F(0,x)$和 $F\left(\frac{\pi}{4},x\right)$;

(2) 二维分布函数 $F\left(0,\frac{\pi}{4};x,y\right)$;

(3) 均值函数 $m_X(t)$;

(4) 协方差函数 $C_X(s,t)$.

解 (1) $X(0)$的取值为$-2,2$,分别算得

$$P\{X(0)=-2\}=\frac{1}{3},\quad P\{X(0)=2\}=\frac{2}{3}$$

故 $X(0)$的分布律为

$X(0)$	-2	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

习题二 1

$X(0)$的分布函数为

$$F(0,x)=\begin{cases}0, & -\infty<x\leqslant -2\\ \dfrac{1}{3}, & -2<x\leqslant 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$

同理，$X\left(\frac{\pi}{4}\right)$的分布律为

$X\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$X\left(\frac{\pi}{4}\right)$的分布函数为

$$F\left(\frac{\pi}{4},x\right)=\begin{cases}0, & x\leqslant -\sqrt{2}\\ \dfrac{1}{3}, & -\sqrt{2}<x\leqslant \sqrt{2}\\ 1, & x>\sqrt{2}\end{cases}$$

习题二 1

(2) 因为随机过程$\{X(t,\omega),-\infty<t<+\infty\}$只有两条样本函数，所以

$$P\left\{X\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\mid X(0)=-2\right\}=1,\quad P\left\{X\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\mid X(0)=-2\right\}=0$$

$$P\left\{X\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\mid X(0)=2\right\}=0,\quad P\left\{X\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\mid X(0)=2\right\}=1$$

故

$$P\left\{X(0)=-2,X\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\right\}=P\{X(0)=-2\}\cdot P\left\{X\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\mid X(0)=-2\right\}$$
$$=P\{X(0)=-2\}=\frac{1}{3}$$

同理，有

$$P\left\{X(0)=2,X\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\right\}=\frac{2}{3}$$

$$P\left\{X(0)=-2,X\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\right\}$$
$$=P\{X(0)=-2\}\cdot P\left\{X\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\mid X(0)=-2\right\}=0$$

$$P\left\{X(0)=2,X\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\right\}=0$$

习题二 1

因而$\left(X(0),X\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$的二维分布律为

$X(0)$ \ $X\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
-2	$\frac{1}{3}$	0
2	0	$\frac{2}{3}$

且$\left(X(0),X\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$的二维分布函数为

$$F\left(0,\frac{\pi}{4};x,y\right)=\begin{cases}0, & x\leqslant -2 \quad 或 \quad y\leqslant -\sqrt{2}\\ \frac{1}{3}, & x>-2,-\sqrt{2}<y\leqslant\sqrt{2} \quad 或 \quad y>-\sqrt{2},-2<x\leqslant 2\\ 1, & x>2,y>\sqrt{2}\end{cases}$$

习题二 1

(3) $m_X(t)=E(X(t))=\frac{2}{3}\times 2\cos t+\frac{1}{3}(-2\cos t)=\frac{2}{3}\cos t$

(4) $R(s,t)=E(X(s)X(t))=\begin{cases}E(X^2(s)), & s=t\\ E(X(s)X(t)), & s\neq t\end{cases}$

$$=\begin{cases}4\cos^2 s, & s=t\\ 4\cos s\cos t, & s\neq t\end{cases}=4\cos s\cos t$$

$C(s,t)=R(s,t)-E(X(s))E(X(t))$

$$=4\cos s\cos t-\frac{4}{9}\cos s\cos t=\frac{32}{9}\cos s\cos t$$

习题二 9

设$\{X(n), n=1,2,\cdots\}$是独立同分布的随机序列，其中 $X(k)(k=1,2,\cdots)$的分布律为

$X(k)$	1	−1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

又设

$$Y(n)=\sum_{k=1}^{n}X(k),\quad n=1,2,\cdots$$

(1) 求 $Y(2)$的分布律(概率分布)；

(2) 求 $Y(n)$的均值 $E(Y(n))$；

(3) 计算相关函数 $R_Y(m,n)$.

习 题 二 9

解 (1) $Y(2)=X(1)+X(2)$，其可能取值为$-2,0,2$，分别算得

$$P\{Y(2)=-2\}=P\{X(1)=-1\}\cdot P\{X(2)=-1\}=\frac{1}{4}$$

$$P\{Y(2)=2\}=P\{X(1)=1\}\cdot P\{X(2)=1\}=\frac{1}{4}$$

$$P\{Y(2)=0\}=1-P\{Y(2)=2\}-P\{Y(2)=-2\}=\frac{1}{2}$$

故 $Y(2)$的分布律为

$Y(2)$	-2	0	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(2) $E(Y(n))=E\left(\sum_{i=1}^{n}X(i)\right)=\sum_{i=1}^{n}E(X(i))=0$

(3) 由 $R_Y(m,n)=E(Y(m)Y(n))$，故当 $m\leqslant n$ 时，有

$$R_Y(m,n)=E(Y^2(m))+E\left(Y(m)\cdot\sum_{i=m+1}^{n}X(i)\right)=D(Y(m))+E(Y(m))\cdot E\left(\sum_{i=m+1}^{n}X(i)\right)$$

$$=D(Y(m))=D\left(\sum_{i=1}^{m}X(i)\right)=\sum_{i=1}^{m}D(X(i))=m$$

所以

$$R_Y(m,n)=\min\{m,n\}$$

习题二 15

设随机过程$\{X(t)=A\cos(\beta t+\Theta),-\infty<t<+\infty\}$，其中$\beta$为正常数，随机变量$A\sim N(0,1)$，$\Theta\sim U(0,2\pi)$且二者相互独立．试求随机过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$的均值函数$m(t)$，方差函数$D(t)$和相关函数$R(s,t)$．

解 $m(t)=E(A\cos(\beta t+\Theta))=E(A)E(\cos(\beta t+\Theta))=0$

$$
\begin{aligned}
R(s,t)&=E(X(s)X(t))=E(A^2\cos(\beta s+\Theta)\cos(\beta t+\Theta))\\
&=E(A^2)E(\cos(\beta s+\Theta)\cos(\beta t+\Theta))=E(\cos(\beta s+\Theta)\cos(\beta t+\Theta))\\
&=\frac{1}{2}E(\cos(\beta(s-t))+\cos(\beta(s+t)+2\Theta))\\
&=\frac{1}{2}\cos(\beta(s-t))
\end{aligned}
$$

$$D(t)=R(t,t)-m^2(t)=\frac{1}{2}$$

习题二 19

设 $X(t)=A\cos\beta t+B\sin\beta t\ (-\infty<t<+\infty)$，其中 $A\sim N(0,\sigma^2)$，$B\sim N(0,\sigma^2)$ 二者相互独立，β 为常数．求随机过程 $\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$ 的

（1）均值函数，方差函数，协方差函数；

（2）一维概率密度 $f(t,x)$；

（3）二维概率密度 $f(s,t;x,y)$．

解 （1）$m(t)=E(X(t))=E(A\cos\beta t+B\sin\beta t)=0$

$$
\begin{aligned}
R(s,t)&=E(X(s)X(t))=E((A\cos\beta s+B\sin\beta s)(A\cos\beta t+B\sin\beta t))\\
&=E(A^2\cos\beta s\cos\beta t+B^2\sin\beta s\sin\beta t)\\
&\quad+E(AB(\cos\beta s\sin\beta t+\sin\beta s\cos\beta t))\\
&=E(A^2\cos\beta s\cos\beta t+B^2\sin\beta s\sin\beta t)+0\\
&=\sigma^2\cos\beta(t-s)
\end{aligned}
$$

$$C(s,t)=R(s,t)-m(s)m(t)=\sigma^2\cos\beta(t-s)$$

$$D(t)=C(t,t)=\sigma^2$$

（2）$\varphi_{X(t)}(u)=E(e^{iuX(t)})=E(e^{iu(A\cos\beta t+B\sin\beta t)})=e^{-\frac{1}{2}\sigma^2u^2\cos^2\beta t}\cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma^2u^2\sin^2\beta t}=e^{-\frac{1}{2}\sigma^2u^2}$

所以 $X(t)\sim N(0,\sigma^2)$，其概率密度函数为

$$f(t,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\quad x\in\mathbb{R}$$

习 题 二 19

(3) $\varphi(s,t;u,v)=E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}uX(s)+\mathrm{i}vX(t)})=E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(uA\cos\beta s+uB\sin\beta s+vA\cos\beta t+vB\sin\beta t)})$

$$=E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}A(u\cos\beta s+v\cos\beta t)+\mathrm{i}B(u\sin\beta s+v\sin\beta t)})$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2}{2}((u\cos\beta s+v\cos\beta t)^2+(u\sin\beta s+v\sin\beta t)^2)}$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2}{2}(u^2+v^2+2uv\cos\beta(s-t))}$$

$$f(s,t;x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\cos^2\beta(s-t)}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\cos^2\beta(s-t))}\left(\frac{x^2}{\sigma^2}-2\cos\beta(s-t)\frac{xy}{\sigma^2}+\frac{y^2}{\sigma^2}\right)}$$

习 题 三 4

4. 设$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$和$\{Y(t),-\infty<t<+\infty\}$都为正态过程且相互独立，令

$$Z(t)=X(t)+Y(t),\quad -\infty<t<+\infty$$

证明$\{Z(t),-\infty<t<+\infty\}$为正态过程.

证明 设非零向量$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，考虑随机过程$\{Z(t),-\infty<t<+\infty\}$的任意$n$维分布的非零线性组合

$$\boldsymbol{\lambda}\begin{pmatrix}Z(t_1)\\Z(t_2)\\\vdots\\Z(t_n)\end{pmatrix}=\boldsymbol{\lambda}\begin{pmatrix}X(t_1)+Y(t_1)\\X(t_2)+Y(t_2)\\\vdots\\X(t_n)+Y(t_n)\end{pmatrix}=\boldsymbol{\lambda}\begin{pmatrix}X(t_1)\\X(t_2)\\\vdots\\X(t_n)\end{pmatrix}+\boldsymbol{\lambda}\begin{pmatrix}Y(t_1)\\Y(t_2)\\\vdots\\Y(t_n)\end{pmatrix}$$

由于$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$为正态过程，因而$(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))$为$n$维正态分布，故$\boldsymbol{\lambda}(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))^{\mathrm{T}}$为一维正态分布. 同理$\boldsymbol{\lambda}(Y(t_1),Y(t_2),\cdots,Y(t_n))^{\mathrm{T}}$也为一维正态分布.

又由$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$和$\{Y(t),-\infty<t<+\infty\}$相互独立，从而$\boldsymbol{\lambda}(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))^{\mathrm{T}}$与$\boldsymbol{\lambda}(Y(t_1),Y(t_2),\cdots,Y(t_n))^{\mathrm{T}}$也相互独立. 由正态分布的可加性得

$$\boldsymbol{\lambda}\begin{pmatrix}Z(t_1)\\Z(t_2)\\\vdots\\Z(t_n)\end{pmatrix}$$

为正态分布，从而$\{Z(t),-\infty<t<+\infty\}$为正态过程.

注 此题说明正态过程具有可加性.

习 题 三 12

32. 已知寻呼台在时间区间$[0,t)$内收到的呼唤次数$\{N(t),t\geqslant 0\}$是 Poisson 过程，平均每分钟收到 2 次呼唤.

(1) 求 2 分钟内收到 3 次呼唤的概率；

(2) 已知时间区间$[0,3)$内收到 5 次呼唤，求时间区间$[0,2)$内收到 3 次呼唤的概率.

解 (1) $$P\{N(t+2)-N(t)=3\}=P\{N(2)=3\}=\frac{4^3}{3!}e^{-4}=\frac{32}{3}e^{-4}$$

(2) $$P\{N(2)-N(0)=3\mid N(3)-N(0)=5\}=P\{N(2)=3\mid N(3)=5\}$$

$$=\frac{P\{N(2)=3,N(3)=5\}}{P\{N(3)=5\}}=\frac{P\{N(2)=3,N(3)-N(2)=2\}}{P\{N(3)=5\}}$$

$$=\frac{P\{N(2)=3\}\cdot P\{N(3)-N(2)=2\}}{P\{N(3)=5\}}=\frac{\frac{4^3}{3!}e^{-4}\cdot\frac{2^2}{2!}e^{-2}}{\frac{6^5}{5!}e^{-6}}$$

$$=C_5^2\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^2=\frac{80}{243}$$

习 题 三 15

11. 设$\{N_1(t),t\geqslant0\}$是参数为λ_1的 Poisson 过程，$\{N_2(t),t\geqslant0\}$是参数为λ_2的 Poisson 过程，二者相互独立，设

$$X(t)=N_1(t)+N_2(t),\quad Y(t)=N_1(t)-N_2(t)$$

证明：(1) $\{X(t),t\geqslant0\}$是参数为$\lambda=\lambda_1+\lambda_2$的 Poisson 过程；

(2) $\{Y(t),t\geqslant0\}$不是 Poisson 过程.

证明 (1) ① $X(0)=N_1(0)+N_2(0)=0$.

② 设$X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)(t_1<t_2<\cdots<t_n)$为$\{X(t),t\geqslant0\}$的任意$n$个随机变量，则其增量为$X(t_2)-X(t_1),X(t_3)-X(t_2),\cdots,X(t_n)-X(t_{n-1})$. 增量的联合分布为

$$\begin{aligned}
&P\{X(t_2)-X(t_1)=i_1,X(t_3)-X(t_2)=i_2,\cdots,X(t_n)-X(t_{n-1})=i_{n-1}\}\\
=&P\{N_1(t_2)-N_1(t_1)+N_2(t_2)-N_2(t_1)=i_1,\\
&N_1(t_3)-N_1(t_2)+N_2(t_3)-N_2(t_1)=i_2,\\
&\cdots,N_1(t_n)-N_1(t_{n-1})+N_2(t_n)-N_2(t_{n-1})=i_{n-1}\}\\
=&\sum_{j_1=0}^{i_1}P\{N_1(t_2)-N_1(t_1)=j_1,N_2(t_2)-N_2(t_1)=i_1-j_1,\\
&N_1(t_3)-N_1(t_2)+N_2(t_3)-N_2(t_2)=i_2,\\
&\cdots,N_1(t_n)-N_1(t_{n-1})+N_2(t_n)-N_2(t_{n-1})=i_{n-1}\}
\end{aligned}$$

习 题 三 15

$$= \sum_{j_1=0}^{i_1}\sum_{j_2=0}^{i_2}\cdots\sum_{j_{n-1}=0}^{i_{n-1}} P\{N_1(t_2)-N_1(t_1)=j_1, N_2(t_2)-N_2(t_1)=i_1-j_1,$$

$$\cdots, N_1(t_n)-N_1(t_{n-1})=j_{n-1}, N_2(t_n)-N_2(t_{n-1})=i_{n-1}-j_{n-1}\}$$

$$= \sum_{j_1=0}^{i_1}\cdots\sum_{j_{n-1}=0}^{i_{n-1}} P\{N_1(t_2)-N_1(t_1)=j_1\}\cdot P\{N_2(t_2)-N_2(t_1)=i_1-j_1\}$$

$$\cdot\cdots\cdot P\{N_1(t_n)-N_1(t_{n-1})=j_{n-1}\}\cdot P\{N_2(t_n)-N_2(t_{n-1})=i_{n-1}-j_{n-1}\}$$

而

$$P\{X(t_2)-X(t_1)=i_1\}\cdot\cdots\cdot P\{X(t_n)-X(t_{n-1})=i_{n-1}\}$$

$$= \sum_{j_1=0}^{i_1} P\{N_1(t_2)-N_1(t_1)=j_1\}\cdot P\{N_2(t_2)-N_2(t_1)=i_1-j_1\}$$

$$\cdot P\{X(t_3)-X(t_2)=i_2\}$$

$$\cdot\cdots\cdot P\{X(t_n)-X(t_{n-1})=i_{n-1}\}$$

$$= \sum_{j_1=0}^{i_1}\cdots\sum_{j_{n-1}=0}^{i_{n-1}} P\{N_1(t_2)-N_1(t_1)=j_1\}\cdot P\{N_2(t_2)-N_2(t_1)=i_1-j_1\}$$

$$\cdot\cdots\cdot P\{N_1(t_n)-N_1(t_{n-1})=j_{n-1}\}\cdot P\{N_2(t_n)-N_2(t_{n-1})=i_{n-1}-j_{n-1}\}$$

习 题 三 15

从而有

$$P\{X(t_2)-X(t_1)=i_1,\cdots,X(t_n)-X(t_{n-1})=i_{n-1}\}$$
$$=P\{X(t_2)-X(t_1)=i_1\}\cdot P\{X(t_3)-X(t_2)=i_2\}\cdot\cdots\cdot P\{X(t_n)-X(t_{n-1})=i_{n-1}\}$$

故 $X(t_2)-X(t_1),\cdots,X(t_n)-X(t_{n-1})$相互独立. 即$\{X(t),t\geqslant 0\}$为独立增量过程.

③ 当 $s<t$ 时,有

$$P\{X(t)-X(s)=k\}=P\{N_1(t)-N_1(s)+N_2(t)-N_2(s)=k\}$$
$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{[\lambda_1(t-s)]^i}{i!}\cdot e^{-\lambda_1(t-s)}\cdot\frac{[\lambda_2(t-s)]^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2(t-s)}$$
$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}(t-s)^k}{i!(k-i)!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)(t-s)}$$
$$=\frac{(t-s)^k\cdot e^{-(\lambda_1+\lambda_2)(t-s)}}{k!}\cdot\sum_{i=0}^{k}C_k^i\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}$$
$$=\frac{[(\lambda_1+\lambda_2)(t-s)]^k\cdot e^{-(\lambda_1+\lambda_2)(t-s)}}{k!}$$

即 $X(t)-X(s)$服从参数为$(\lambda_1+\lambda_2)(t-s)$的 Poisson 分布.

由①～③可得$\{X(t),t\geqslant 0\}$是参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的 Poisson 过程.

习 题 三 15

(2) $P\{Y(t)=-1\}=P\{N_1(t)-N_2(t)=-1\}=P\{N_2(t)-N_1(t)=1\}$

$$=\sum_{i=0}^{+\infty}P\{N_1(t)=i\}\cdot P\{N_2(t)=i+1\}>P\{N_1(t)=0\}$$

$$\cdot P\{N_2(t)=1\}>0$$

从而$\{Y(t),t\geqslant 0\}$不是 Poisson 过程.

注 (1) 此题说明 Poisson 过程具有可加性；

(2) 证明$\{Y(t),t\geqslant 0\}$不是 Poisson 过程有很多种方法，例如计算特征函数等.

习 题 三 19

19. 设 $N(t)$表示某发射源在$[0,t)$内发射的粒子数,$\{N(t),t\geq 0\}$是平均率为 λ 的泊松过程. 若每一个发射的粒子都以概率 p 的可能被记录. 且一粒子的记录不仅独立于其他粒子的记录,也独立于 $N(t)$. 若以 $M(t)$表示在$[0,t)$内被记录的粒子数. 证明$\{M(t),t\geq 0\}$是一平均率为 λp 的泊松过程.

证明 ① $M(0)=0$.

② 令 X_i 表示第 i 个粒子被记录的情况,则其分布律为

$$X_i=\begin{cases}1, & p\\ 0, & q\end{cases}$$

其中 X_i 相互独立同分布. $\{M(t),t\geq 0\}$的一组增量为

$$M(t_2)-M(t_1),M(t_3)-M(t_2),\cdots,M(t_n)-M(t_{n-1})$$

$$M(t_2)-M(t_1)=\sum_{i=N(t_1)+1}^{N(t_2)}X_i$$

$$\vdots$$

$$M(t_n)-M(t_{n-1})=\sum_{i=N(t_{n-1})+1}^{N(t_n)}X_i$$

由 X_i 相互独立同分布,可知 $M(t)$的增量相互独立. 即$\{M(t),t\geq 0\}$为独立增量过程.

习 题 三 19

③ $P\{M(t)-M(s)=k\}=\sum_{n=k}^{+\infty}P\{N(t)-N(s)=n\}$

$\cdot P\{M(t)-M(s)=k \mid N(t)-N(s)=n\}$

$$=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{[\lambda(t-s)]^n}{n!}e^{-\lambda(t-s)}\cdot C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$=e^{-\lambda p(t-s)}\cdot\frac{[\lambda p(t-s)]^k}{k!}$$

即 $M(t)-M(s)$服从参数为 $\lambda p(t-s)$的 Poisson 分布.

由①～③得$\{M(t),t\geqslant 0\}$是平均率为 λp 的齐次 Poisson 过程.

习 题 四 4

5. 设$\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$为 Markov 链，证明：

$$P\{X(1)=x_1 \mid X(2)=x_2,X(3)=x_3,\cdots,X(n)=x_n\}=P\{X(1)=x_1 \mid X(2)=x_2\}$$

即 Markov 链的逆序也构成一个 Markov 链.

证明 由$\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$为 Markov 链，故有

$$P\{X(n)=x_n \mid X(1)=x_1,X(2)=x_2,X(3)=x_3,\cdots,X(n-1)=x_{n-1}\}$$

$$=P\{X(n)=x_n \mid X(2)=x_2,\cdots,X(n-1)=x_{n-1}\}$$

从而

$$\frac{P\{X(1)=x_1,\cdots,X(n-1)=x_{n-1},X(n)=x_n\}}{P\{X(1)=x_1,\cdots,X(n-1)=x_{n-1}\}}$$

$$=\frac{P\{X(2)=x_2,\cdots,X(n)=x_n\}}{P\{X(2)=x_2,\cdots,X(n-1)=x_{n-1}\}}$$

所以

$$\frac{P\{X(1)=x_1,\cdots,X(n)=x_n\}}{P\{X(2)=x_2,\cdots,X(n)=x_n\}}=\frac{P\{X(1)=x_1,\cdots,X(n-1)=x_{n-1}\}}{P\{X(2)=x_2,\cdots,X(n-1)=x_{n-1}\}}$$

习 题 四 4

$$= \frac{P\{X(1)=x_1,\cdots,X(n-2)=x_{n-2}\}}{P\{X(2)=x_2,\cdots,X(n-2)=x_{n-2}\}}$$

$$\vdots$$

$$= \frac{P\{X(1)=x_1,X(2)=x_2\}}{P\{X(2)=x_2\}}$$

从而

$$\begin{aligned} &P\{X(1)=x_1 \mid X(2)=x_2,\cdots,X(n)=x_n\} \\ &= P\{X(1)=x_1 \mid X(2)=x_2,\cdots,X(n-1)=x_{n-1}\} \\ &= \cdots \\ &= P\{X(1)=x_1 \mid X(2)=x_2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &P\{X(1)=x_1 \mid X(2)=x_2,\cdots,X(n)=x_n\} \\ &= P\{X(1)=x_1 \mid X(2)=x_2,\cdots,X(n-1)=x_{n-1}\} \\ &= \cdots \\ &= P\{X(1)=x_1 \mid X(2)=x_2\} \end{aligned}$$

习 题 四 10

22. A,B,C 三家公司决定在某一时间推销一种新产品. 当时,它们各拥有$\frac{1}{3}$的市场,然而一年后,情况发生了如下的变化:

(1) A 保住 40%的顾客,而失去 30%给 B,失去 30%给 C;

(2) B 保住 30%的顾客,而失去 60%给 A,失去 10%给 C;

(3) C 保住 30%的顾客,而失去 60%给 A,失去 10%给 B.

如果这种趋势继续下去,试问第 2 年底各公司拥有多少份额的市场?(从长远来看,情况又如何?)

解 设$\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$表示第 n 年从市场中抽取一件该新产品为某公司的产品. $\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$为齐次 Markov 链. 其状态空间为 $E=\{A,B,C\}$. 一步转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0.4 & 0.3 & 0.3\\ 0.6 & 0.3 & 0.1\\ 0.6 & 0.1 & 0.3\end{pmatrix}$$

二步状态转移矩阵为

$$\boldsymbol{P}^2=\begin{pmatrix}0.52 & 0.24 & 0.24\\ 0.48 & 0.28 & 0.24\\ 0.48 & 0.24 & 0.28\end{pmatrix}$$

习 题 四 10

设 $\boldsymbol{V}_0=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$表示初始份额，照此种趋势，有

$$\boldsymbol{V}_2=\boldsymbol{V}_0\boldsymbol{P}(2)=\frac{1}{3}(1.48,0.76,0.76)$$

即第 2 年底 A,B,C 三家公司的市场份额为$\frac{1}{3}(1.48,0.76,0.76)$.

根据Markov 过程概念的性质 5，此 Markov 链存在极限分布. 由

$$\begin{cases}\boldsymbol{\Pi}=\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{P}\\ \sum_{i=1}^{3}\pi_i=1\end{cases}$$

得

$$\boldsymbol{\pi}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$$

即从长远来看，A,B,C 三家公司的市场份额为$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

习 题 四 19

36. 设齐次 Markov 链 $\{X(n), n=0,1,2,\cdots\}$ 的状态空间为 $E=\{1,2,3\}$，状态转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(1) 讨论其遍历性；

(2) 求平稳分布；

(3) 计算下列概率：

① $P\{X(4)=3 \mid X(1)=1, X(2)=1\}$；

② $P\{X(2)=1, X(3)=2 \mid X(1)=1\}$.

习 题 四 19

解 (1) 因为

$$P^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8}\\ \frac{3}{8} & \frac{19}{48} & \frac{11}{48}\\ \frac{1}{6} & \frac{11}{36} & \frac{19}{36}\end{pmatrix}$$

故此 Markov 链是遍历的.

(2) 由

$$\begin{cases}V=VP\\ \sum v_i=1\end{cases}$$

得平稳分布

$$V=\left(\frac{4}{11},\frac{4}{11},\frac{3}{11}\right)$$

(3) ① $P\{X(4)=3\mid X(1)=1,X(2)=1\}=P\{X(4)=3\mid X(2)=1\}=p_{13}(2)=\frac{1}{8}$

② $P\{X(2)=1,X(3)=2\mid X(1)=1\}$

$=P\{X(2)=1\mid X(1)=1\}\cdot P\{X(3)=2\mid X(1)=1,X(2)=1\}$

$=p_{11}^{(1)}p_{12}^{(1)}=\frac{1}{4}$

习　题　四　23

42. 设齐次 Markov 链$\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$的状态空间为 $E=\{1,2,3,4\}$，状态转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

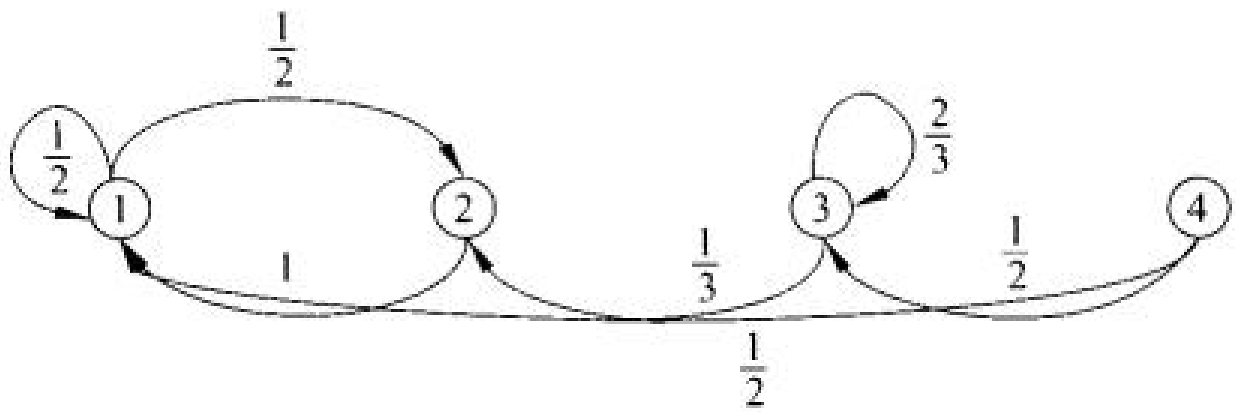
（1）画出状态转移概率图；

（2）讨论各状态性质；

（3）分解状态空间.

习 题 四 23

解 （1）状态转移概率图为



（2）由图知$\{1,2\}$构成一个闭集，且有

$$f_{33}=\sum_{n=1}^{+\infty} f_{33}(n)=\frac{2}{3}<1$$

$$f_{44}=0<1$$

因此 3，4 为非常返状态，1，2 为常返状态.

（3）$E=N+C=\{3,4\}+\{1,2\}$.

习 题 四　28

50. 某电话总机有 2 条中继段. 设电话呼叫按平均率为 λ 的 Poisson 过程到达，平均每分钟有两次呼叫. 通话时间服从参数为 μ 的指数分布，每次平均通话 3 min，呼叫和通话相互独立. 若顾客发觉线路占满就不再等待而选择离去. 设 $X(t)$ 表示 t 时刻的通话线路数，$\{X(t), t\geq 0\}$ 是一个生灭过程.

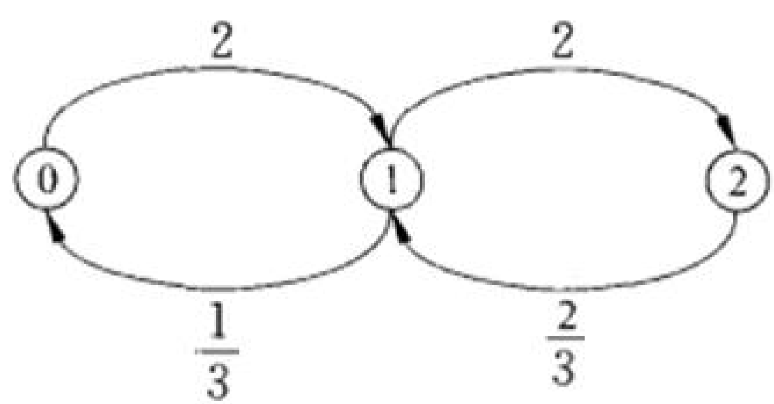
(1) 画出状态转移速度图；

(2) 写出状态转移速度矩阵；

(3) 求平稳分布.

解　此系统为 $M/M/2$ 损失制系统，$E=\{0,1,2\}$.

(1) 状态转移速度图为



习 题 四　28

(2) 状态转移速度矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda & 0\\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda\\ 0 & 2\mu & -2\mu\end{pmatrix}$$

(3) 由方程 $\boldsymbol{\Pi Q}=\mathbf{0}$ 得平稳分布为

$$\begin{cases}\pi_0=\left(1+\dfrac{3\lambda}{\mu}+\dfrac{3\lambda^2}{\mu^2}+\dfrac{\lambda^3}{\mu^3}\right)^{-1}\\ \pi_1=\dfrac{3\lambda}{\mu}\pi_0\\ \pi_2=\dfrac{3\lambda^2}{\mu^2}\pi_0\\ \pi_3=\dfrac{\lambda^3}{\mu^3}\pi_0\end{cases}$$

$$\pi_0=\left(1+\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda^2}{2\mu^2}\right)^{-1}=\frac{1}{25},\quad \pi_1=\frac{6}{25},\quad \pi_2=\frac{18}{25}$$

$$\boldsymbol{\pi}=\left(\frac{1}{25},\frac{6}{25},\frac{18}{25}\right)$$

习 题 四 31

52. 假定有 3 台机器由一个工人修理，每台机器出故障的可能性是独立的，故障时间服从平均值为 $\frac{1}{\lambda}$ 的指数分布. 只要一台机器出故障，修理工就应开始修理它，除非他正忙于修理另外的机器. 修理时间服从平均值为 $\frac{1}{\mu}$ 的指数分布. 设 $X(t)$ 表示时刻 t 出故障的机器数. $\{X(t), t \geq 0\}$ 是一个生灭过程.

(1) 画出状态转移速度图；

(2) 写出状态转移速度矩阵；

(3) 求平稳分布.

解 此系统为 $M/M/1$ 顾客为有限源系统. 状态空间为 $E=\{0,1,2,3\}$.

(1) 状态转移速度图为

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, "3\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "2\lambda"] & 2 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 3 \arrow[l, bend left, "\mu"]
\end{tikzcd}
$$

习 题 四 31

(2) 状态转移速度矩阵为

$$Q=\begin{pmatrix}-3\lambda & 3\lambda & 0 & 0\\ \mu & -(2\lambda+\mu) & 2\lambda & 0\\ 0 & \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda\\ 0 & 0 & \mu & -\mu\end{pmatrix}$$

(3) 由$\boldsymbol{\Pi Q}=\mathbf{0}$得平稳分布为

$$\begin{cases}\pi_0=\left(1+\dfrac{3\lambda}{\mu}+\dfrac{6\lambda^2}{\mu^2}+\dfrac{6\lambda^3}{\mu^3}\right)^{-1}\\ \pi_1=\dfrac{3\lambda}{\mu}\pi_0\\ \pi_2=\dfrac{6\lambda^2}{\mu^2}\pi_0\\ \pi_3=\dfrac{6\lambda^3}{\mu^3}\pi_0\end{cases}$$

习 题 四 33

54. 某校长接待室由正副校长 2 人接待来访师生. 来访者以 Poisson 过程到达,平均每 15 min 来 1 人,接待时间服从指数分布. 每人平均接待 20 min. 接待室共有 3 个座位供来访者(包括正被接待的人)坐. 若来访者看到没有空位即离去. 设 $X(t)$表示 t 时刻在接待室的来访者人数. $\{X(t),t\geq 0\}$是一个生灭过程.

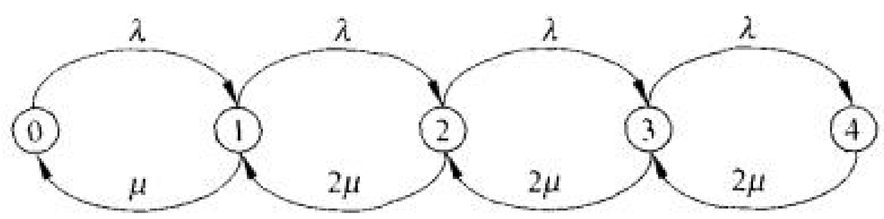
(1) 画出状态转移速度图;

(2) 写出状态转移速度矩阵;

(3) 求平稳分布.

解 此系统为 $M/M/2$ 混合制系统. 由已知得来访者服从 4 人/h 的 Poisson 过程,离去服从 3 人/h 的 Poisson 过程. 状态空间为 $E=\{0,1,2,3,4\}$.

(1) 状态转移速度图为



其中 $\lambda=4,\mu=3$.

习 题 四 33

（2）状态转移速度矩阵为

$$
Q=\begin{pmatrix}-4 & 4 & 0 & 0\\ 3 & -7 & 4 & 0\\ 0 & 6 & -10 & 4\\ 0 & 0 & 6 & -6\end{pmatrix}
$$

（3）由 $\boldsymbol{\Pi Q}=\mathbf{0}$ 得平稳分布为

$$
\begin{cases}
\pi_0=\left(1+\dfrac{4}{3}+\dfrac{4^2}{2\times 9}+\dfrac{4^3}{4-3^3}\right)^{-1}=\dfrac{27}{103}\\
\pi_1=\dfrac{27}{103}\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{36}{103}\\
\pi_2=\dfrac{27}{103}\times\dfrac{8}{9}=\dfrac{24}{103}\\
\pi_3=\dfrac{16}{103}
\end{cases}
$$

平稳分布为

$$
\boldsymbol{\pi}=\left(\frac{27}{103},\frac{36}{103},\frac{24}{103},\frac{16}{103}\right)
$$