

**考试科目：随机过程与排队论****考试时间：2017 年**

1. (18 分) 填空。

(1) 设随机过程  $X(t) = A + Vt, 0 \leq t < +\infty$ ，其中  $A$  和  $V$  是相互独立的随机变量，并且  $A$  和  $V$  都服从标准正态分布  $N(0, 1)$ ，则  $X(t)$  的均值函数  $m(t)$  为\_\_\_\_\_，方差函数  $D(t)$  为\_\_\_\_\_，协方差函数  $C(s, t)$  为\_\_\_\_\_。

(2) 参数为  $\lambda$  的泊松过程的点间间距是相互独立的随机变量，且服从均值为\_\_\_\_\_的\_\_\_\_\_分布。

(3) 病人以每小时 3 人的泊松流到达医院，假设该医院只有一个医生服务且容量为无穷，医生的服务时间服从指数分布，并且平均服务一个病人为 30 分钟，则当  $t \rightarrow \infty$  时，医生空闲时间的比例为\_\_\_\_\_，平均有\_\_\_\_\_个病人在等待看医生，病人的平均等待时间为\_\_\_\_\_，一个病人等待超过一个小时的概率为\_\_\_\_\_，在医生服务一个病人的时间内平均有\_\_\_\_\_个病人到达医院。

2. (15 分) 设某保险公司收到的索赔遵循一个参数为  $\lambda$  的泊松过程  $\{N(t), t \geq 0\}$ ，假设一个索赔是车险的概率为  $p$ ，以  $X(t)$  表示时间  $(0, t](t \geq 0)$  内保险公司收到的车险索赔的次数。证明  $\{X(t), t \geq 0\}$  是一个参数为  $\rho\lambda$  的泊松过程。

3. (15 分) 设齐次马氏链  $\{X(n), n = 0, 1, 2, \dots\}$  的状态空间  $E = \{0, 1, 2, 3\}$ , 一步状态转移矩阵

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) 画出状态转移图;
- (2) 讨论各状态性质;
- (3) 分解状态空间。

4. (16 分) 设齐次马氏链  $\{X(n), n = 0, 1, 2, \dots\}$  的状态空间  $E = \{1, 2, 3\}$ , 一步状态转移矩阵

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- (1) 论其遍历性;  
(2) 求平稳分布;  
(3) 求概率  $P\{X(4) = 1 | X(1) = 2, X(2) = 3\}$ ;  
(4) 已知  $X(0)$  的分布律如下表所示:

$X(0)$	1	2	3
$P$	0.2	0.3	0.5

求  $P\{X(1) = 1, X(2) = 2, X(3) = 3\}$  和  $X(2)$  的分布律。

5. (分) (... 缺失) 钟。接待室共有 3 个座位供来访者 (包括正被接待的人) 坐。若来访者看到没有空位立即离去。求
- (1) 2 个校长都空闲的概率;
  - (2) 来访者未被接待即离去的概率;
  - (3) 平均每每小时进入接待室的来访者人数;
  - (4) 平均忙的校长数。

6. (12 分) 2 个工人共同看管 4 台机器, 每台机器平均运转半小时时就会发生故障, 每次修理平均需要 10 分钟。设机器连续运转时间和修理时间相互独立, 均服从指数分布。求: 机器发送故障马上就能修理的概率、平均故障的机器数、平均等待修理的机器数和每台机器平均等待修理的时间。
7. (5 分) 有一排队系统, 顾客到达为参数  $\lambda (\lambda > 0)$  的泊松过程, 顾客到达看到队长为  $k$  时, 进入系统的概率为  $1/(k+1)$ ; 顾客所需的服务时间服从指数分布, 具有两个服务率  $\mu_1, \mu_2 (0 < \mu_1 < \mu_2)$ , 当队长  $< m$  ( $m$  为一个固定的正整数) 时, 服务员用速率  $\mu_1$  工作, 当队长  $\geq m$  时, 服务员用速率  $\mu_2$  工作; 系统中只有一个服务台: 容量为无穷大, 而且到达过程与服务过程彼此独立, 试分析该系统什么情况下存在平稳分布, 并计算其平稳分布 (... 缺失)