学院　姓名　学号

……密封线以内答题无效……

电子科技大学研究生试卷

（考试时间： ____至_____，共__2_小时）

课程名称 __图论及其应用__ 教师_______ 学时 60 学分____

教学方式 __讲授_ 考核日期 _2012__年___月____日 成绩______

考核方式： __________（学生填写）

一、填空题 （填表题每空 1 分，其余 每题 **2** 分，共 **30** 分)

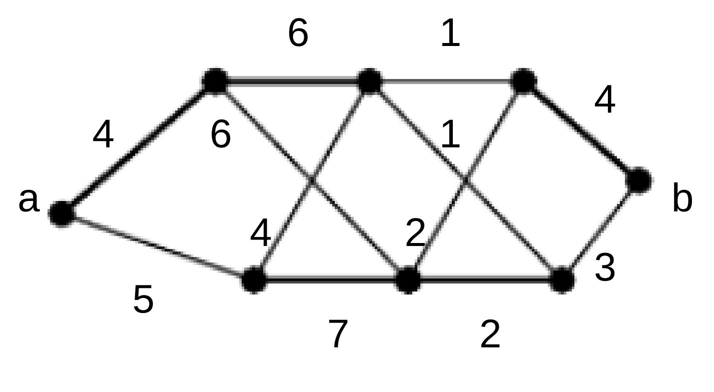
1. n 阶 k 正则图 G 的边数 $m(G)=$ ___ $\frac{nk}{2}$ ___ ；

2. 3 个顶点的不同构的简单图共有 ___ 4___ 个；

3. 边数为 m 的简单图 G 的不同生成子图的个数有 __2^m___ 个；

4. 图 $G_1=(n_1,m_1)$ 与图 $G_2=(n_2,m_2)$ 的积图 $G_1\times G_2$ 的边数为 _$n_1m_2+n_2m_1$_； _

5. 在下图 G_1 中，点 a 到点 b 的最短路长度为 __13__ ；



G_1

6. 设简单图 G 的邻接矩阵为 A，且 $A^2=\begin{pmatrix}3&1&1&2&0\\1&2&1&1&1\\1&1&3&0&2\\2&1&0&2&0\\0&1&2&0&2\end{pmatrix}$，则图 G 的边数为

__6__ ；

7. 设 G 是 n 阶简单图，且不含完全子图 K_3，则其边数一定不会超过

__$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$_ ；

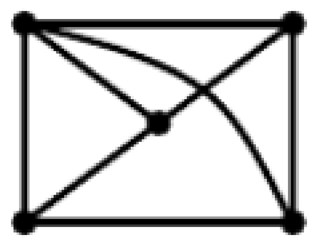
8. K_3的生成树的棵数为 __3__ **；**

9. 任意图 G 的点连通度 k(G)、边连通度 λ(G)、最小度 δ(G) 之间的关系为

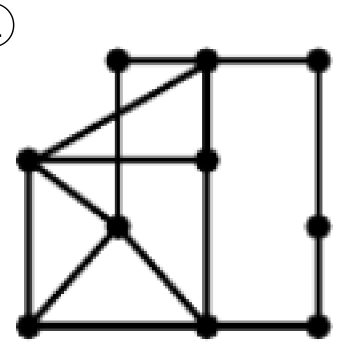
_ _$k(G)\le\lambda(G)\le\delta(G)$ _;_

10. 对下列图，试填下表（是 ××类图的打 " √ "，否则打 " × "）。

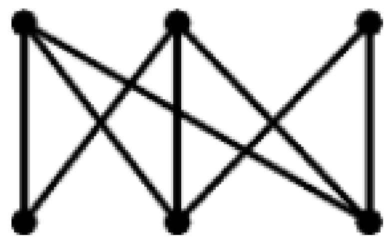
①



②



③



	能一笔画的图	Hamilton 图	偶图	可平面图
①	×	√	×	√
②	×	×	×	√
③	×	√	√	√

二、单项选择 (每题 2 分，共 10 分)

1. 下面命题正确的是 (B)

对于序列 (7,5,4,3,3,2) ，下列说法正确的是：

(A) 是简单图的度序列；
(B) 是非简单图的度序列 ；
(C) 不是任意图的度序列 ；
(D) 是图的唯一度序列 .

2. 对于有向图，下列说法 不正确 的是 (D)
(A) 有向图 D 中任意一顶点 v 只能处于 D 的某一个强连通分支中；
(B) 有向图 D 中顶点 v 可能处于 D 的不同的单向分支中 ；
(C) 强连通图中的所有顶点必然处于强连通图的某一有向回路中 ；
(D) 有向连通图中顶点间的单向连通关系是等价关系。

3.下列无向图可能不是偶图的是 (D)

(A) 非平凡的树；

(B) 无奇圈的非平凡图；

(C) n $(n \geq 1)$ 方体；

(D) 平面图。

4.下列说法中正确的是 (C)

(A) 连通 3 正则图必存在完美匹配；

(B) 有割边的连通 3 正则图一定不存在完美匹配；

(C) 存在哈密尔顿圈的 3 正则图必能 1 因子分解；

(D) 所有完全图都能作 2 因子分解。

5. 关于平面图，下列说法错误的是 (B)

(A) 简单连通平面图中至少有一个度数不超过 5 的顶点；

(B) 极大外平面图的内部面是三角形，外部面也是三角形；

(C) 存在一种方法，总可以把平面图的任意一个内部面转化为外部面；

(D) 平面图的对偶图也是平面图。

三、(10 分) 设 G 与其补图 $\bar{G}$ 的边数分别为 m_1, m_2，求 G 的阶数。

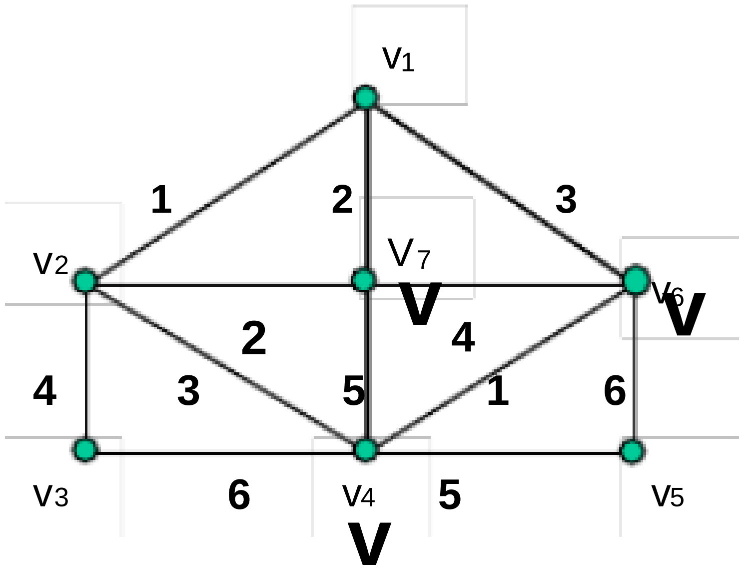
解：设 G 的阶数为 n。

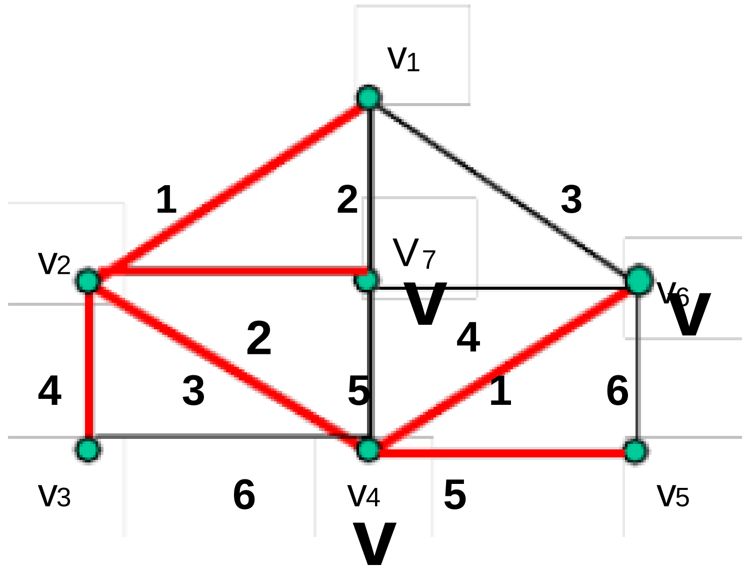
因 $m_1 + m_2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ …………………………………… 4 分

所以：$n^2 - n - 2m_1 - 2m_2 = 0$ ……………………… **..2** 分

得：$n = \dfrac{1+\sqrt{1+8(m_1+m_2)}}{2}$ ………………………… **..4** 分

四、(10 分) 求下图的最小生成树（不要求中间过程，只要求画出最小生成树，并给出 T 的权和）。

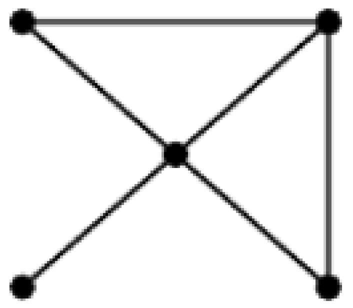




w(T)=16

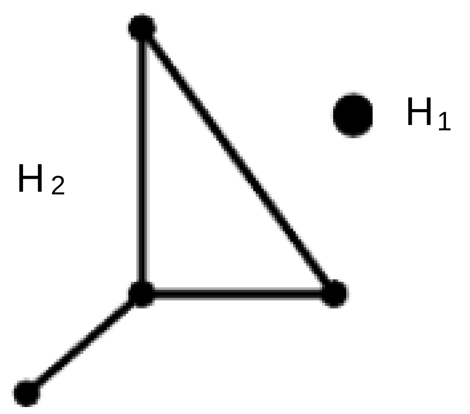
五、(10 分)　(1). 求下图 G 的 k 色多项式；　　　(2). 求出 G 的点色数 χ；

(3). 给出一种使用 χ 种颜色的着色方法。



G

解：(1)、图 G 的补图为：(2 分)



$h(H_1, x) = x$ ………………………………………………… ..1 分

对于 H_2： $r_1 = 0, r_2 = 2, r_3 = 4, r_4 = 1$，所以，其伴随多项式为：

$h(H_2, x) = 2x^2 + 4x^3 + x^4$ …………………………………… ..1 分

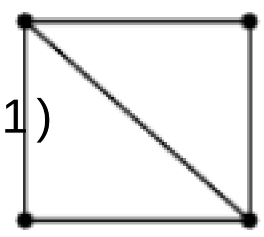
所以： $h(\bar{G}, x) = 2x^3 + 4x^4 + x^5$ ……………………………… 1 分

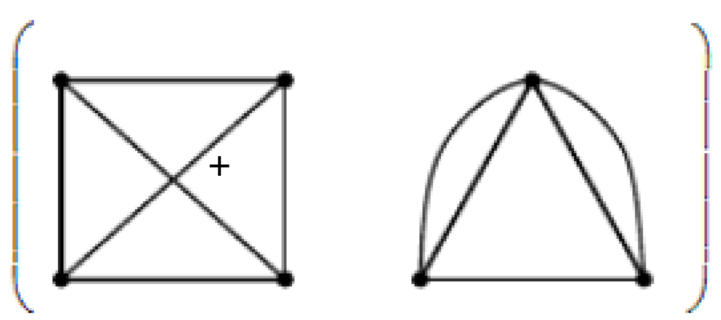
于是色多项式 $P_G(x) = 2[k]_3 + 4[k]_4 + [k]_5$

$= 2k(k-1)(k-2) + 4k(k-1)(k-2)(k-3) + k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)$

$= k(k-1)(k-2)[2+4(k-3)+(k-3)(k-4)] = k(k-1)^2(k-2)^2$

2 分

解法 2　$P_k(G) = (k-1)$ 　　2 分



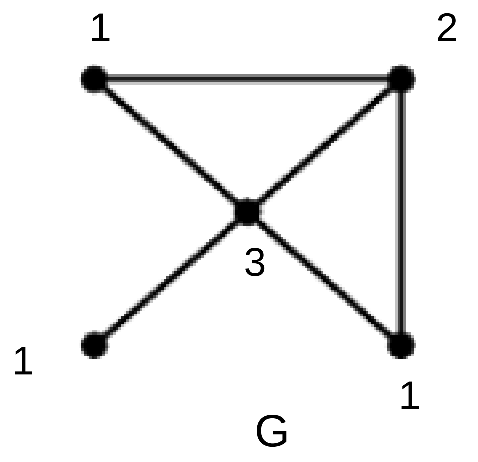
= (k-1)　　3 分

= (k-1)[k(k-1) (k-2)^2]

= k(k-1)^2 (k-2)^2　　2 分

(2)、由于 $P_1(G) = P_2(G) = 0, P_3(G) = 12$，所以，点色数 χ =3；…… ..**2** 分

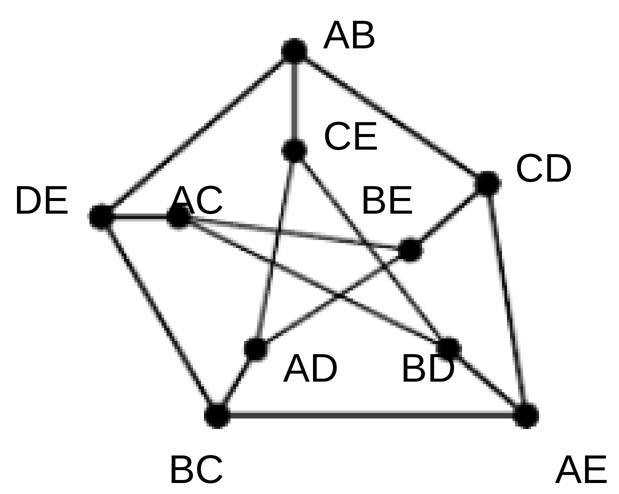
(3)、 χ 点着色：(**1** 分)



六、(10 分) 5 个人 A, B, C, D, E 被邀请参加桥牌比赛。桥牌比赛规则是每一场比赛由两个 2 人组进行对决。要求每个 2 人组 $\{X, Y\}$都要与其它 2 人组 $\{W, Z\}$（W,Z $\notin$ { X,Y}）进行对决。若每个人都要与其他任意一个人组成一个 2 人组，且每个组在同一天不能有多余一次的比赛，则最少安排多少天比赛（每一天可以有多场比赛）？请给出相应的一个时间安排表。 (用图论方法求解)

解：(1)、建模：5 个人能够组成 10 个 2 人组：AB, AC, AD, AE, BD, BC, BE, CD , CE, DE。

以每个 2 人组作为顶点，因要求每个 2 人组 $\{X, Y\}$都与其它 2 人组 $\{W, Z\}$ 比赛，所以，得到比赛状态图如下：



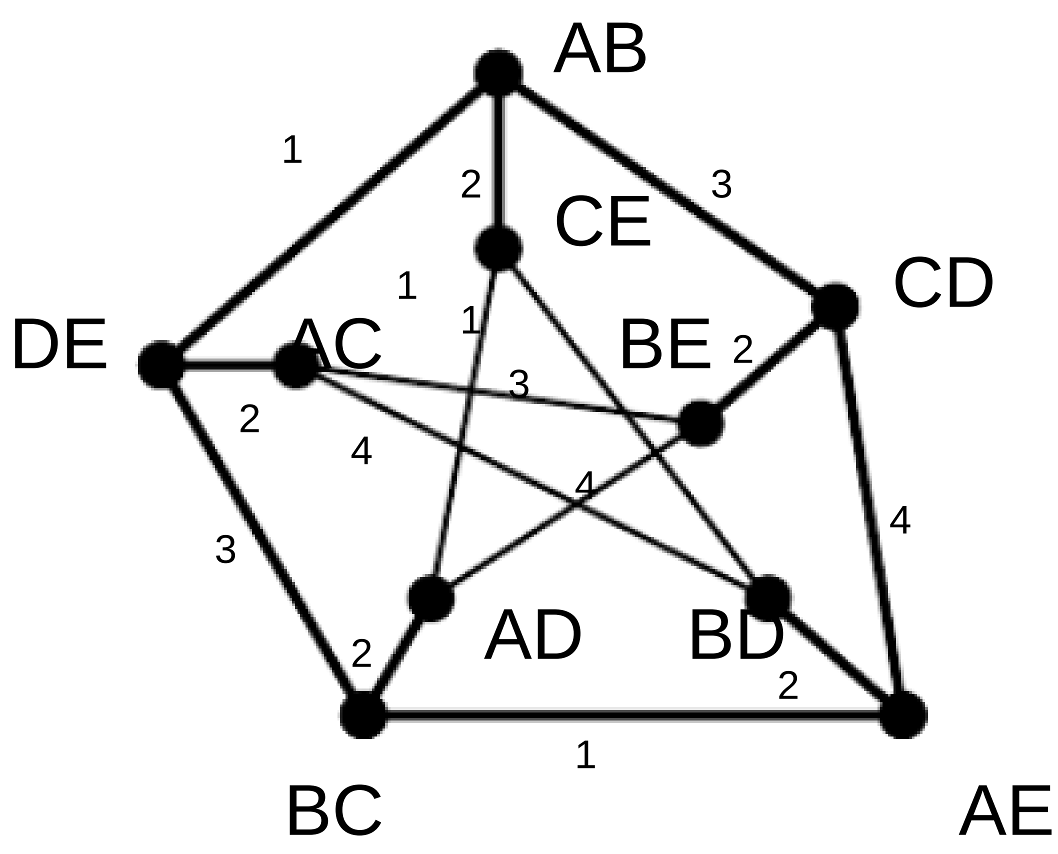
4 分

(2)、最少安排多少天比赛转化为求状态图的边色数 χ'。

因为彼得森图不可 1 因子分解，于是可推出 $\chi' \geq 4$，又可用 4 种色对其正常边着

色(见下图)，所以： $\chi' \le 4$。

所以： $\chi' = 4$。 **2** 分



(3)、安排时间表 ：

第一天： AB---DE, AE---BC, AC---BE, AD---CE;

第二天： AB---CE, AC---DE, AE---BD, AD---BC, BE---CD ;

第三天： AB---CD, BC---DE, BD---CE;

第四天： AC---BD, AD---BE, AE---CD。

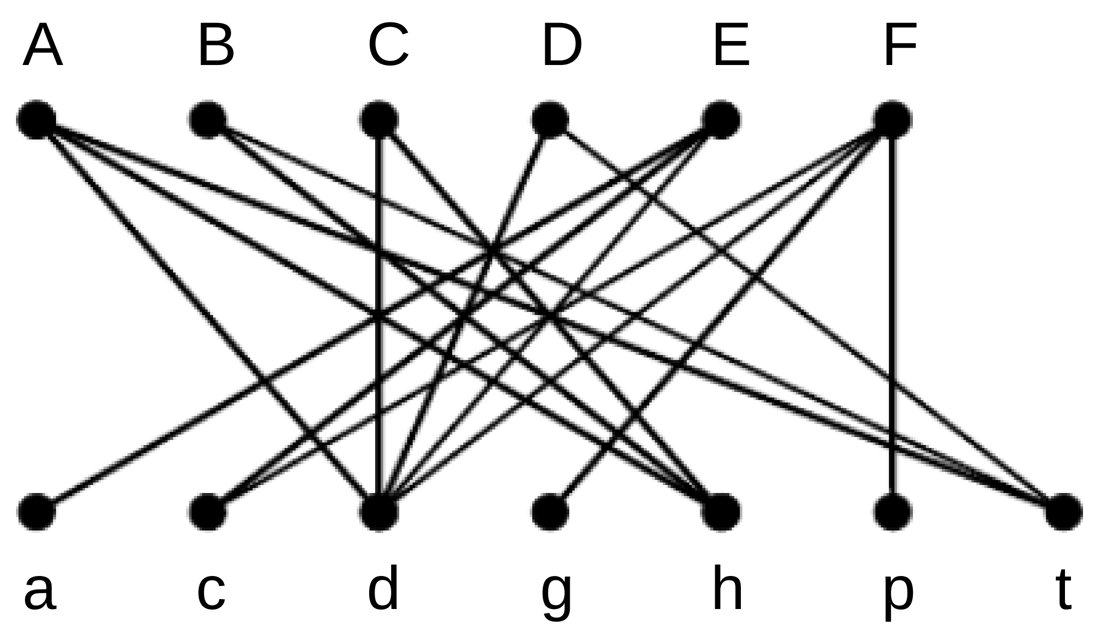
4 分

七、(10 分) 由于在考试中获得好成绩， 6 名学生 A, B, C, D, E, F 将获得下列书籍的奖励，分别是：代数学 (a)，微积分 (c)，微分方程 (d)，几何学 (g)，数学史 (h)，规划学 (p)，拓扑学 (t)。每门科目只有 1 本书，而每名学生对书的喜好是：

A：d, h, t ；B： h, t ；C：d, h ；D：d, t ；E：a, c, d ； F:：c, d, p, g 。

每名学生是否都可以得到他喜欢的书？为什么？ (用图论方法求解)

解：由题意 ,得模型图： (**4** 分)



问题转化为是否存在饱和 A,B,C,D,E,F 的匹配存在。 2 分

取顶点子集合 $S=\{A,B,C,D\}$，因 $N(S)=\{d,h,t\}$，所以 $|N(S)|<|S|$

由霍尔定理知：不存在饱和 A,B,C,D,E,F 的匹配。
故每名学生不能都得到他喜欢的书。 4 分

八、(10 分) 若 n 为偶数，且单图 G 满足：$\delta(G)\geq\frac{n}{2}+1$，求证：G 中有 3 因子。

证明：因单图 G 满足：$\delta(G)\geq\frac{n}{2}+1$，所以 G 中存在哈密尔顿圈 C_n。 **2** 分

又因 n 为偶数，所以，C_n 可分解为两个 1 因子 H_1,H_2，它们显然也是图 G 的两个 1 因子。 **3** 分

考虑 $G_1=G-H_1$，则 $\delta(G_1)\geq\frac{n}{2}$，于是，$G_1$ 中存在哈密尔顿圈 C_n'。 2 分

作 $H=H_1\cup C_n'$，则 H 为 G 的一个 3 因子。 **3** 分