

**考试科目：随机过程与排队论**

**考试形式：一页纸开卷**

**考试时间：2014 年秋**

1. (10 分) 随机过程  $X(t) = A \cos(t)$ ,  $-\infty < t < +\infty$ , 其中  $A$  是随机变量, 其概率分布律为

$A$	1	2	3
$P$	0.2	0.3	0.5

求:

(1) 一维分布函数  $F(\pi/4, x)$  和  $F(\pi/3, x)$ ;

(2) 均值函数  $m_x(t)$ , 方差函数  $D_x(t)$  以及协方差函数  $C_x(s, t)$ 。

注:  $F(t, x) = PX(t) \leq x, t \in T, x \in R = (-\infty, +\infty)$ 。

**解:**

(1) 因为

$X(\frac{\pi}{4})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$
$P$	0.2	0.3	0.5

$A$	1	2	3
$P$	0.2	0.3	0.5

2 分

所以, 一维概率分布函数:

$$F(\frac{\pi}{4}, x) = \begin{cases} 0, & -\infty \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0.2, & \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ 0.5, & \sqrt{2} \leq x \leq \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 1, & \frac{3\sqrt{2}}{2} \leq x \leq +\infty \end{cases} \quad F(\frac{\pi}{4}, x) = \begin{cases} 0, & -\infty \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0.2, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0.5, & 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ 1, & \frac{3}{2} \leq x \leq +\infty \end{cases}$$

2 分

(2) 均值函数

$$m_x(t) = EX(t) = EA \cos t = \cos t EA = 2.3 \cos t$$

2 分

协方差函数

$$\begin{aligned} C_x(s, t) &= EX(s)X(t) - m_x(s)m_x(t) \\ &= (0.2 + 1.2 + 4.5) \cos s \cos t - 5.29 \cos s \cos t \\ &= 0.61 \cos s \cos t \end{aligned}$$

2 分

方差函数

$$D_x(t) = C_x(t, t) = 0.61 \cos^2 t$$

2 分

2. (10 分) 某高速公路旁有一个加油站, 汽车按平均每分钟 5 辆的泊松过程通过该加油站。假设通过该加油站的汽车有 40% 的来加油站加油, 求

(1) 在头 2 分钟和第 3 至 5 分钟这两个时间区间内各有 2 辆汽车通过该加油站的概率。

- (2) 在头 2 分钟内, 通过该加油站 5 辆汽车且仅有 1 辆汽车来加油站加油的概率。

**解:**

设  $N(t)$  为  $[0, t)$  内通过该加油站的车辆数, 则  $N(t) \sim \Psi(5t)$

(1)

$$\begin{aligned} P(N(2) - N(0) = 2, N(5) - N(3) = 2) &= P(N(2) - N(0) = 2) \cdot P(N(5) - N(3) = 2) \\ &= \left( \frac{(2 \times 5)^2}{2!} e^{-2 \times 5} \right)^2 = \frac{10^4}{4} e^{-20} = 2500e^{-20} \end{aligned}$$

—————5 分

- (2) 将通过该汽车加油站的车辆数按  $p = 0.4, q = 0.6$  进行分解, 设  $L_t$  是  $[0, t)$  内通过该加油站并加油的车辆数,  $M_t$  是  $[0, t)$  内通过该加油站但不加油的车辆数,  $N_t$  是  $[0, t)$  内通过该加油站的车辆总数。由题意,  $\{N_t, t > 0\}$  是参数为  $\lambda = 5$  (辆/分钟) 的泊松过程, 因此  $\{L_t, t > 0\}$  和  $\{M_t, t > 0\}$  分别是参数为  $\lambda_1 = \lambda_p = 2$  (辆/分钟) 和  $\lambda_2 = \lambda_q = 3$  (辆/分钟) 的泊松过程。由题意知, 所求即为  $P\{L_2 = 1, M_2 = 4\}$ , 由于  $L_t$  与  $M_t$  相互独立, 故有

$$\begin{aligned} P\{L_2 = 1, M_2 = 4\} &= P\{L_2 = 1\}P\{M_2 = 4\} \\ &= e^{-2\lambda_1} \frac{(2\lambda_1)^1}{1!} e^{-2\lambda_2} \frac{(2\lambda_2)^4}{4!} \\ &= 4e^{-4} \frac{e^{-6}}{4!} 6^4 = 216e^{-10} \end{aligned}$$

—————5 分

3. (16 分) 设齐次马氏链  $\{X(n), n = 0, 1, 2, \dots\}$  的状态空间  $E = \{1, 2, 3\}$ , 一步状态转移矩阵

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- (1) 论其遍历性  
 (2) 求平稳分布  
 (3) 求概率  $P\{X(4) = 1 | X(1) = 2, X(2) = 3\}$ ;  
 (4) 已知  $X(0)$  的分布率如下表所示, 求  $P\{X(1) = 1, X(2) = 2, X(3) = 3\}$  和  $X(2)$  的分布律。

$X(0)$	1	2	3
$P$	0.2	0.3	0.5

**解:**

根据已知条件可得

$$P(2) = P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{80} & \frac{51}{80} & \frac{3}{20} \\ \frac{17}{100} & \frac{61}{100} & \frac{11}{50} \\ \frac{1}{10} & \frac{11}{20} & \frac{7}{20} \end{pmatrix}$$

(1) 因为  $P(2)$  中所有元素均大于 0, 所以该齐次马氏链是遍历的。—————4 分

(2) 遍历的齐次马氏链一定存在极限分布, 其极限分布就是平稳分布

$$\begin{cases} \Pi = \Pi P \\ \sum_{i=1}^3 \pi_i = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{5}\pi_2 \\ \pi_2 = \frac{3}{4}\pi_1 + \frac{3}{5}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 \\ \pi_3 = \frac{1}{5}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \Pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\frac{4}{25}, \frac{3}{5}, \frac{6}{25}).$$

—————4 分

(3)  $P\{X(4) = 1|X(1) = 2, X(2) = 3\} = P\{X(4) = 1|X(2) = 3\} = p_{31}(2) = 0.1$

—————4 分

$$(4) X(1) \text{ 的分布律 } \tilde{P}_1 = \tilde{P}_0 P = (0.2 \quad 0.3 \quad 0.5) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (0.11 \quad 0.58 \quad 0.31)$$

$$\begin{aligned} & P\{X(1) = 1, X(2) = 2, X(3) = 3\} \\ &= P\{X(1) = 1\}P\{X(2) = 2|X(1) = 1\}P\{X(3) = 3|X(1) = 1, X(2) = 2\} \\ &= P\{X(1) = 1\} * p_{12}(1) * p_{23}(1) \\ &= 0.11 * 3/4 * 1/5 = 33/2000 = 0.0165 \end{aligned}$$

$X(2)$  的分布率

$$\tilde{P}_2 = \tilde{P}_0 P(2) = (0.2 \quad 0.3 \quad 0.5) \begin{pmatrix} \frac{17}{80} & \frac{51}{80} & \frac{3}{20} \\ \frac{17}{100} & \frac{61}{100} & \frac{11}{50} \\ \frac{1}{10} & \frac{11}{20} & \frac{7}{20} \end{pmatrix} = (\frac{287}{2000} \quad \frac{1171}{2000} \quad \frac{542}{2000})$$

—————4 分

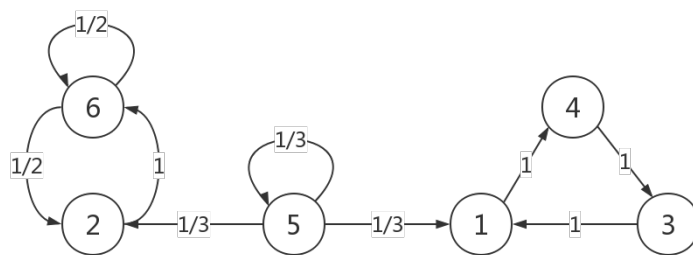
4. (12 分) 设齐次马氏链  $\{X(n), n = 0, 1, 2, \dots\}$  的状态空间  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , 状态转移矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

- (1) 画出状态转移图;
- (2) 讨论各状态性质;
- (3) 分解状态空间。

解:

(1) 状态转移图:



(2) 状态性质:

$f_{11}(1) = 0, f_{11}(2) = 0, f_{11}(3) = 1, f_{11}(n) = 0(n > 3), f_{11} = 1$ , 故状态 1 为常返状态。

而  $\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}(n) = 3 < +\infty$ , 所以状态 1 为正常返状态, 因为  $p_{11}(3n) = 1 > 0(n > 1)$ , 所以状态 1 的周期是 3。由于状态 1、3、4 互通, 因此具有相同的状态性质。

$f_{55}(1) = \frac{1}{3}, f_{55}(n) = 0(n > 1), f_{55} = \frac{1}{3} < 1$ , 故状态 5 为非常返状态。

$f_{66}(1) = \frac{1}{2}, f_{66}(2) = \frac{1}{2}, f_{66}(n) = 0(n > 2), f_{66} = 1$ , 故状态 6 为常返状态。

而  $\mu_6 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{66}(n) = \frac{3}{2} < +\infty$ , 所以状态 6 为正常返状态。因为  $p_{66} > 0$ , 所以状态 6 是非周期的。由于状态 2、6 互通, 因此具有相同的状态性质。

—————4 分

(3) 状态空间分解为  $E = N + C_1 + C_2 = \{5\} + \{2, 6\} + \{1, 3, 4\}$ 。

—————4 分

5. (16 分) 某打字室有 2 个打字员独立打字, 假定每个打字员打一份文稿的时间都服从指数分布, 平均 20 分钟。又假定文稿以泊松流到达, 平均每小时到达 5 份。试求系统达到平稳时

- (1) 文稿积压的概率及平时积压的文稿数;
- (2) 每份文稿在打字室的平均逗留时间和平均等待打字的时间;
- (3) 文稿到达打字室后立即可以打字的概率;
- (4) 平均忙的打字员数。

**解:**

由题意知, 按  $M/M/c/\infty$  系统处理, 其中  $c = 2, \lambda = 5$  (份/小时),  $\mu = 3$  (份/小时),  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{3}$ ,  $\rho_c = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{5}{6} < 1$ , 因此

$$p_0 = \left[ \sum_{j=0}^{c-1} \frac{\rho^j}{j!} + \frac{c\rho^c}{c!(c-\rho)} \right]^{-1} = \left[ 1 + \frac{5}{3} + \frac{2 \times (5/3)^2}{2 \times (2 - 5/3)} \right]^{-1} = \frac{1}{11}$$

$$p_c = \frac{\rho^c}{c!} p_0 = \frac{(5/3)^2}{2} \times \frac{1}{11} = \frac{25}{198}.$$

(1)

$$\text{文稿积压的概率} = \sum_{j=c}^{\infty} p_j = \frac{\rho^c}{(1-\rho_c) \cdot c!} p_0 = \frac{(5/3)^2}{(1 - 5/6) \cdot 2!} \times \frac{1}{11} = \frac{25}{33} \approx 0.7576$$

$$\text{平均积压的文档数 } \bar{N}_q = \frac{\rho_c}{(1-\rho_c)^2} p_c = \frac{5/6}{(1-5/6)^2} \times \frac{25}{198} = \frac{125}{33} \approx 3.7879$$

—————4 分

(2) 每份文稿在打字室的平均等待打字的时间

$$\bar{W}_q = \frac{\rho_c}{\lambda(1-\rho_c)^2} \cdot p_c = \frac{5/6}{5 \times (1-5/6)^2} \times \frac{25}{198} = \frac{25}{33} (\text{分钟}).$$

每份文稿在打字室的平均逗留时间

$$\bar{W} = \bar{W}_q + E[X] = \frac{25}{33} + \frac{1}{3} = \frac{12}{11} (\text{分钟})$$

(3) 文稿到达打字室后立即可以打字的概率

$$p = 1 - \sum_{j=c}^{\infty} p_j = \frac{8}{33}$$

(4) 平均忙的打字员数

$$\bar{N}_c = \rho = \frac{5}{3}$$

6. (10 分) 假定某电影网站有 3 台服务器, 其中 2 台备用, 只有一个维修工人。如果服务器正常工作时服从指数分布, 平均 2 天, 而调整维修一台服务器的时间是负指数分布, 平均 1 天。求网站正常运转的概率及由于停机网站无法运转的概率。

**解:**

由题知,  $\lambda = 1/2$  (台/天),  $\mu = 1$  (台/天),  $\rho = 1/2$ , 该系统按  $M/M/c/m+k/m$  型处理,  $c = 1$ ,  $m = 1$ ,  $k = 2$ , 因为  $K > c$ , 因此有

$$\begin{aligned} P_0 &= \left[ \sum_{i=0}^{c-1} \frac{m^i}{i!} \rho^i + \frac{1}{c!} \sum_{i=c}^{K-1} \frac{m^i}{c^{i-c}} \rho^i + \frac{m^K \cdot m!}{c!} \sum_{i=K}^{K+m} \frac{1}{c^{i-c}(m-i+K)!} \rho^i \right]^{-1} \\ &= \left[ 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right]^{-1} = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

$$P_{m+k} = \frac{m^K \cdot m!}{(m - (m+k) + K)! \cdot c^{m+k-c} \cdot c!} \rho^{m+k} P_0$$

—————4 分

$$\text{网站由于停机无法运转的概率} = p_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{8}{15} = \frac{1}{15}$$

—————3 分

$$\text{网站正常运转的概率} = \sum^2 p_j = 1 - p_3 = \frac{14}{15}$$

—————3 分

7. (20 分) 某计算中心的信息交换站接受到的信息流为泊松流, 每秒钟到达 15 份信息, 信息从交换站输出服从指数分布, 平均每秒钟 20 份, 试求: 若缓冲器的存储空间仅可存储 4 份信息, 则平稳时的概率分布, 信息损失的概率, 信息交换站的平均信息数, 缓冲器中的平均信息数, 每份信息在交换站的平均逗留时间和平均等待时间。

**解:**

由题意, 按  $M/M/c/K$  排队系统处理, 其中  $c = 1$ ,  $K = 5$ ,  $\lambda = 15$  (份/秒),  $\mu = 20$  (份/秒),  $\rho = 3/4 \neq 1$ , 因此

$$p_j = \frac{(1-\rho)\rho^j}{1-\rho^{K+1}}, 0 \leq j \leq 5$$

—————4 分

(1)

$$\text{平稳时的概率分布: } p_0 = \frac{1024}{3367}, p_1 = \frac{768}{3367}, p_2 = \frac{576}{3367}, p_3 = \frac{432}{3367}, p_4 = \frac{324}{3367}, p_5 = \frac{243}{3367}$$

—————4 分

(2) 信息损失的概率  $p_5 = \frac{243}{3367}$

—————4 分

(3) 缓冲器中的平均信息数

$$N_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} - \frac{(K+\rho)\rho^{K-1}}{1-\rho^{K-1}} = \frac{3613}{3367} (\text{份})$$

信息交换站的平均信息数

$$\bar{N} = \bar{N}_4 + \rho(1-p_K) = \frac{5956}{3367} (\text{份})$$

(4) 每份信息在交换站的平均等待时间

$$\begin{aligned} \bar{W}_q &= \sum_{j=mc}^{K-1} \frac{j-c+1}{c\mu} \cdot q_j = \sum_{j=mc}^{K-1} \frac{j-c+1}{c\mu} \cdot \frac{P_i}{1-P_K} \\ &= \frac{1}{20} \times \frac{\frac{768}{3367}}{1-\frac{243}{3367}} + \frac{2}{20} \times \frac{\frac{576}{3367}}{1-\frac{243}{3367}} + \frac{3}{20} \times \frac{\frac{432}{3367}}{1-\frac{243}{3367}} + \frac{4}{20} \times \frac{\frac{324}{3367}}{1-\frac{243}{3367}} = \frac{281}{3905} (\text{分钟}). \end{aligned}$$

$$\text{每份信息在交换站的平均逗留时间 } \bar{W} = \bar{W}_q + \frac{1}{\mu} = \frac{4467}{78100} \quad \text{—————4 分}$$

8. (6 分) 设有一排队系统：顾客按参数为 2 的泊松流到达；顾客所需的服务时间序列独立、服从参数为 5 的 2 阶爱尔朗分布；系统中只有一个服务台，容量为无穷大；顾客到达时，若服务台空闲就立即接受服务，否则就排队等待，并按先到先服务的顺序接受服务，而且到达过程与服务过程彼此独立。试求该系统的平均队长、平均等待队长、平均等待时间、平均逗留时间。

解：

由题意，按  $M/G/1/\infty$  系统处理，其中  $\lambda = 2$  (个/秒)，顾客所需的服务时间  $\chi$  服从参数为 5 的 2 阶爱尔朗分布，因此  $\mu = 5$  (个/秒)， $\rho = 2/5$ 。

$$E[X^2] = D[X] + E^2[X] = \frac{2}{5^2} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{6}{25}$$

$$\text{平均队长 } \bar{N} = \rho + \frac{\lambda^2 E[X^2]}{2(1-\rho)} = \frac{6}{5}$$

$$\text{平均等待队长 } \bar{N}_q = \frac{\lambda^2 E[X^2]}{2(1-\rho)} = \frac{6}{5}$$

$$\text{平均等待时间 } \bar{W}_q = \frac{\lambda E[X^2]}{2(1-\rho)} = \frac{2}{5}$$

$$\text{平均逗留时间 } \bar{W} = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda E[X^2]}{2(1-\rho)} = \frac{3}{5}$$

---

PDF 制作人：Xovee，个人网站：<https://www.xovee.cn>

审校：Morton Wang，GitHub：<https://github.com/MortonWang>

本 PDF 由一模糊的拍摄图片转制而成，如有错误，请发邮件到 [uestc-course@outlook.com](mailto:uestc-course@outlook.com)

2015 年春的试题似与本试题内容一致，故从仓库移除。

uestc-course 仓库，您可以在这里找到更多复习资源：<https://github.com/Xovee/uestc-course>

---