考试科目：随机过程与排队论
考试形式：一页纸开卷
考试时间：2014 年秋

1. （10 分） 随机过程 $X(t) = A\cos(t), -\infty < t < +\infty$，其中 A 是随机变量，其概率分布律为

A	1	2	3
P	0.2	0.3	0.5

求：
(1) 一维分布函数 $F(\pi/4, x)$ 和 $F(\pi/3, x)$；
(2) 均值函数 $m_x(t)$，方差函数 $D_x(t)$ 以及协方差函数 $C_x(s,t)$。
注：$F(t,x) = PX(t) \le x, t \in T, x \in R = (-\infty, +\infty)$。

解：
(1) 因为

$X(\frac{\pi}{4})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$
P	0.2	0.3	0.5

A	1	2	3
P	0.2	0.3	0.5

———2 分

所以，一维概率分布函数：

$$F(\frac{\pi}{4}, x) = \begin{cases} 0, & -\infty \le x \le \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0.2, & \frac{\sqrt{2}}{2} \le x \le \sqrt{2} \\ 0.5, & \sqrt{2} \le x \le \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 1, & \frac{3\sqrt{2}}{2} \le x \le +\infty \end{cases} \quad F(\frac{\pi}{4}, x) = \begin{cases} 0, & -\infty \le x \le \frac{1}{2} \\ 0.2, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ 0.5, & 1 \le x \le \frac{3}{2} \\ 1, & \frac{3}{2} \le x \le +\infty \end{cases}$$

———2 分

(2) 均值函数
$m_x(t) = EX(t) = EA\cos t = \cos t EA = 2.3\cos t$ ———2 分
协方差函数

$$\begin{aligned} C_x(s,t) &= EX(s)X(t) - m_x(s)m_x(t) \\ &= (0.2 + 1.2 + 4.5)\cos s\cos t - 5.29\cos s\cos t \\ &= 0.61\cos s\cos t \end{aligned}$$

———2 分

方差函数
$D_x(t) = C_x(t,t) = 0.61\cos^2 t$ ———2 分

2. （10 分） 某高速公路旁有一个加油站，汽车按平均每分钟 5 辆的泊松过程通过该加油站。假设通过该加油站的汽车有 40% 的来加油站加油，求
(1) 在头 2 分钟和第 3 至 5 分钟这两个时间区间内各有 2 辆汽车通过该加油站的概率。

(2) 在头 2 分钟内，通过该加油站 5 辆汽车且仅有 1 辆汽车来加油站加油的概率。

解：

设 $N(t)$ 为 $[0,t)$ 内通过该加油站的车辆数，则 $N(t) \sim \Psi(5t)$

(1)

$$\begin{aligned} P(N(2)-N(0)=2, N(5)-N(3)=2) &= P(N(2)-N(0)=2)\cdot P(N(5)-N(3)=2) \\ &= \left(\frac{(2\times 5)^2}{2!}e^{-2\times 5}\right)^2 = \frac{10^4}{4}e^{-20} = 2500e^{-20} \end{aligned}$$

——————5 分

(2) 将通过该汽车加油站的车辆数按 $p=0.4, q=0.6$ 进行分解，设 L_t 是 $[0,t)$ 内通过该加油站并加油的车辆数，M_t 是 $[0,t)$ 内通过该加油站但不加油的数量数，N_t 是 $[0,t)$ 内通过该加油站的车辆总数。由题意，$\{N_t, t>0\}$ 是参数为 $\lambda=5$（辆/分钟）的泊松过程，因此 $\{L_t, t>0\}$ 和 $\{M_t, t>0\}$ 分别是参数为 $\lambda_1=\lambda_p=2$（辆/分钟）和 $\lambda_2=\lambda_q=3$（辆/分钟）的泊松过程。由题意知，所求即为 $P\{L_2=1, M_2=4\}$，由于 L_t 与 M_t 相互独立，故有

$$\begin{aligned} P\{L_2=1, M_2=4\} &= P\{L_2=1\}P\{M_2=4\} \\ &= e^{-2\lambda_1}\frac{(2\lambda_1)^1}{1!}e^{-2\lambda_2}\frac{(2\lambda_2)^4}{4!} \\ &= 4e^{-4}\frac{e^{-6}}{4!}6^4 = 216e^{-10} \end{aligned}$$

——————5 分

3. （16 分） 设齐次马氏链 $\{X(n), n=0,1,2,\dots\}$ 的状态空间 $E=\{1,2,3\}$，一步状态转移矩阵

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(1) 论其遍历性

(2) 求平稳分布

(3) 求概率

(4) 已知 $X(0)$ 的分布率如下表所示，求 $P\{X(1)=1, X(2)=2, X(3)=3\}$ 和 $X(2)$ 的分布率。

$X(0)$	1	2	3
P	0.2	0.3	0.5

解：

根据已知条件可得

$$P(2) = P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{80} & \frac{51}{80} & \frac{3}{20} \\ \frac{17}{100} & \frac{61}{100} & \frac{11}{50} \\ \frac{1}{10} & \frac{11}{20} & \frac{7}{20} \end{pmatrix}$$

(1) 因为 $P(2)$ 中所有元素均大于 0，所以该齐次马氏链是遍历的。 ————4 分

(2) 遍历的齐次马氏链一定存在极限分布，其极限分布就是平稳分布

$$\begin{cases}\prod = \prod P \\ \sum_{i=1}^{3}\pi_i = 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\pi_1 = \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{5}\pi_2 \\ \pi_2 = \frac{3}{4}\pi_1 + \frac{3}{5}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 \\ \pi_3 = \frac{1}{5}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3\end{cases} \Rightarrow \prod = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\frac{4}{25}, \frac{3}{5}, \frac{6}{25}).$$

————4 分

(3) $P\{X(4)=1|X(1)=2, X(2)=3\} = P\{X(4)=1|X(2)=3\} = p_{31}(2) = 0.1$

————4 分

(4) $X(1)$ 的分布律 $\tilde{P}_1 = \tilde{P}_0 P = \begin{pmatrix}0.2 & 0.3 & 0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.11 & 0.58 & 0.31\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
&P\{X(1)=1, X(2)=2, X(3)=3\} \\
=&P\{X(1)=1\}P\{X(2)=2|X(1)=1\}P\{X(3)=3|X(1)=1, X(2)=2\} \\
=&P\{X(1)=1\} * p_{12}(1) * p_{23}(1) \\
=&0.11 * 3/4 * 1/5 = 33/2000 = 0.0165
\end{aligned}$$

$X(2)$ 的分布率

$$\tilde{P}_2 = \tilde{P}_0 P(2) = \begin{pmatrix}0.2 & 0.3 & 0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{17}{80} & \frac{51}{80} & \frac{3}{20} \\ \frac{17}{100} & \frac{61}{100} & \frac{11}{50} \\ \frac{1}{10} & \frac{11}{20} & \frac{7}{20}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{287}{2000} & \frac{1171}{2000} & \frac{542}{2000}\end{pmatrix}$$

————4 分

4. （12 分） 设齐次马氏链 $\{X(n), n=0,1,2,\dots\}$ 的状态空间 $E=\{1,2,3,4,5,6\}$，状态转移矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

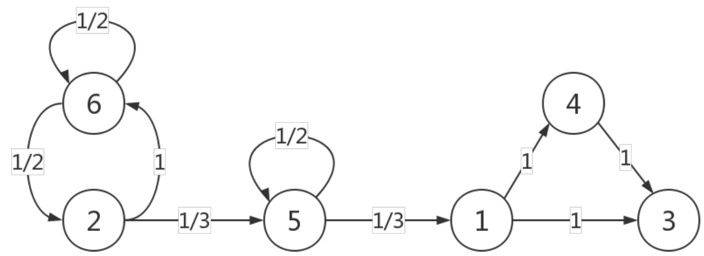
(1) 画出状态转移图；

(2) 讨论各状态性质；

(3) 分解状态空间。

解:

(1) 状态转移图:



(2) 状态性质:

$f_{11}=0, f_{11}(2)=0, f_{11}(3)=1, f_{11}(n)=0(n>3), f_{11}=1$，故状态 1 为常返状态。

而 $\mu_1=\sum^{\infty} nf_{11}(n)=3<+\infty$，所以状态 1 为正常返状态，因为 $p_{11}(3n)=1>0(n>1)$，所以状态 1 的周期是 3. 由于状态 1、3、4 互通，因此具有相同的状态性质。

$f_{55}(1)=\frac{1}{3}, f_{55}(n)=0(n>1), f_{55}=\frac{1}{3}<1$，故状态 5 为非常返状态。

$f_{66}(1)=\frac{1}{2}, f_{66}(2)=\frac{1}{2}, f_{66}(n)=0(n>2), f_{66}=1$，故状态 6 为常返状态。

而 $\mu_6=\sum_{n=1}^{\infty} nf_{66}(n)=\frac{3}{2}<+\infty$，所以状态 6 为正常返状态。因为 $p_{66}>0$，所以状态 6 是非周期的。由于状态 2、6 互通，因此具有相同的状态性质。

——————4 分

(3) 状态空间分解为 $E=N+C_1+C_2=\{5\}+\{2,6\}+\{1,3,4\}$。

——————4 分

5. （16 分） 某打字室有 2 个打字员独立打字，假定每个打字员打一份文稿的时间都服从指数分布，平均 20 分钟。又假定文稿以泊松流到达，平均每小时到达 5 份。试求系统达到平稳时

(1) 文稿积压的概率及平时积压的文稿数;

(2) 每份文稿在打字室的平均逗留时间和平均等待打字的时间;

(3) 文稿到达打字室后立即可以打字的概率;

(4) 平均忙的打字员数。

解:

由题意知，按 $M/M/c/\infty$ 系统处理，其中 $c=2$，$\lambda=5$（份/小时），$\mu=3$（份/小时），$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{5}{3}$，$\rho_c=\frac{\lambda}{c\mu}=\frac{5}{6}<1$，因此

$$p_0=[\sum^{c-1}\frac{\rho^j}{j!}+\frac{c\rho^c}{c!(c-\rho)}]^{-1}=[1+\frac{5}{3}+\frac{2\times(5/3)^2}{2\times(2-5/3)}]^{-1}=\frac{1}{11}p_c=\frac{\rho^c}{c!}p_0=\frac{(5/3)^2}{2}\times\frac{1}{11}=\frac{25}{198}.$$

(1) 文稿积压的概率 $=\sum^{\infty} p_j=\frac{\rho^c}{(1-\rho_c)\cdot c!}p_0=\frac{(5/3)^2}{(1-5/6)\cdot 2!}\times\frac{1}{11}=\frac{25}{33}\approx 0.7576$

平均积压的文稿数 $\overline{N}_q=\frac{\rho_c}{(1-\rho_c)^2}p_c=\frac{5/6}{(1-5/6)^2}\times\frac{25}{198}=\frac{25}{33}\approx 3.7879$ ——————4 分

(2) 每份文稿在打字室的平均等待打字的时间

$$\overline{W}_q = \frac{\rho_c}{\lambda(1-\rho_c)^2} \cdot p_c = \frac{5/6}{5\times(1-5/6)^2} \times \frac{25}{198} = \frac{25}{33}(\text{分钟}).$$

(3) 暂无答案。

(4) 暂无答案。

6. （10 分） 假定某电影网站有 3 台服务器，其中 2 台备用，只有一个维修工人。如果服务器正常工作时间服从指数分布，平均 2 天，而调整维修一台服务器的时间是负指数分布，平均 1 天。求网站正常运转的概率及由于停机网站无法运转的概率。

解：

由题知，$\lambda = 1/2$（台/天），$\mu = 1$（台/天），$\rho = 1/2$，该系统按 $M/M/c/m+k/m$ 型处理，$c = 1$，$m = 1$，$k = 2$，因为 $K > c$，因此有

$$\begin{aligned} P_0 &= [\sum_{i=0}^{c-1} \frac{m^i}{i!}\rho^i + \frac{1}{c!}\sum_{i=c}^{K-1}\frac{m^i}{c^{i-c}}\rho^i + \frac{m^K\cdot m!}{c!}\sum_{i=K}^{K+m}\frac{1}{c^{i-c}(m-i+K)!}\rho^i]^{-1} \\ &= [1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3]^{-1} = \frac{8}{15}. \\ P_{m+k} &= \frac{m^K\cdot m!}{(m-(m+k)+K)!\cdot c^{m+k-c}\cdot c!}\rho^{m+k}P_0 \end{aligned}$$

——————4 分

网站由于停机无法运转的概率 $= p_3 = (\frac{1}{2})^3\frac{8}{15} = \frac{1}{15}$ ——————3 分

网站正常运转的概率 $= \sum^2 p_j = 1 - p_3 = \frac{14}{15}$ ——————3 分

7. （20 分） 某计算中心的信息交换站接受到的信息流为泊松流，每秒钟到达 15 份信息，信息从交换站输出服从指数分布，平均每秒钟 20 份，试求：若缓冲器的存储空间仅可存储 4 份信息，则平稳时的概率分布，信息损失的概率，信息交换站的平均信息数，缓冲器中的平均信息数，每份信息在交换站的平均逗留时间和平均等待时间。

解：

由题意，按 $M/M/c/K$ 排队系统处理，其中 $c = 1$，$K = 5$，$\lambda = 15$（份/秒），$\mu = 20$（份/秒），$\rho = 3/4 \neq 1$，因此

$$p_j = \frac{(1-\rho)\rho^j}{1-\rho^{k+1}}, 0 \le j \le 5$$

——————4 分

(1)

平稳时的概率分布：$p_0 = \dfrac{1024}{3367}, p_1 = \dfrac{768}{3367}, p_2 = \dfrac{576}{3367}\ p_3 = \dfrac{432}{3367}, p_4 = \dfrac{324}{3367}, p_5 = \dfrac{243}{3367}$

——————4 分

(2) 信息损失的概率 $p_5 = \frac{243}{3367}$ ——————4 分

(3) 暂无答案。

(4) 每份信息在交换站的平均等待时间

$$\overline{W}_q = \sum_{jmc}^{K-1} \frac{j-c+1}{c\mu} \cdot q_j = \sum_{jmc}^{K-1} \frac{j-c+1}{c\mu} \cdot \frac{P_i}{1-P_k}$$
$$= \frac{1}{20} \times \frac{\frac{768}{3367}}{1-\frac{243}{3367}} + \frac{2}{20} \times \frac{\frac{576}{3367}}{1-\frac{243}{3367}} + \frac{3}{20} \times \frac{\frac{432}{3367}}{1-\frac{243}{3367}} + \frac{4}{20} \times \frac{\frac{324}{3367}}{1-\frac{243}{3367}} = \frac{281}{3905}(\text{分钟}).$$

每份信息在交换站的平均逗留时间 $\overline{W} = \overline{W}_q + \frac{1}{\mu} = \frac{4467}{78100}$ ——————4 分

8. （6 分） 设有一排队系统：顾客按参数 2 的泊松流到达：顾客所需的服务时间序列独立、服从参数为 5 的 2 阶爱尔朗分布；系统中只有一个服务台，容量为无穷大；顾客到达时，若服务台空闲就立即接受服务，否则就排队等待，并按先到先服务的顺序接受服务，而且到达过程与服务过程彼此独立。试求改系统的平均队长、平均等待队长、平均等待时间、平均逗留时间。

解：

暂无答案。